SÉANCE DU 26/9

4.5. Une conséquence du théorème de Peter-Weyl. — Soient G un groupe compact, e son élément neutre. Pour tout $g \neq e$, il existe $\phi \in \mathrm{C}(\mathrm{G})$ telle que $\phi(e) = 1$ et $\phi(g) = 0$. D'après le théorème de Peter-Weyl, il existe $\psi \in \mathscr{R}(\mathrm{G})$ telle que

$$\|\phi - \psi\| < \frac{1}{2}, \quad \text{d'où} \quad \psi(e) > \frac{1}{2} > \psi(g). \tag{1}$$

Comme $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ est la somme directe des $c(\pi)$, pour $\pi \in \widehat{\mathrm{G}}^f$, il existe un sous-ensemble fini $\pi_1, \ldots, \pi_n$ de $\widehat{\mathrm{G}}^f$ tel que

$$\psi \in \bigoplus_{i=1}^{n} c(\pi_i).$$

Notant ρ la représentation de G dans $\mathrm{V} := \pi_1 \oplus \cdots \oplus \pi_n$, on déduit de (1) que $\rho(g) \neq \rho(e) = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$. On a ainsi obtenu le corollaire suivant

Corollaire 4.10. — *Soit* G *un groupe compact. Pour tout* $g \in \mathrm{G}$*, il existe une représentation continue unitaire* ρ *de dimension finie, telle que* $\rho(g) \neq \mathrm{id}$.

Définition 4.11. — Soit ρ une représentation continue de G dans un espace de Banach V ; son noyau est

$$\operatorname{Ker} \rho = \{g \in \mathrm{G} \mid \rho(g) = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}\};$$

c'est un sous-groupe fermé de G. On dit que ρ est **fidèle** si $\operatorname{Ker} \rho = \{1\}$.

Remarque 4.12. — On verra plus loin qu'un groupe compact G qui est **localement euclidien**, c.-à-d., tel que e admette un voisinage ouvert homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ (pour un certain n), admet une représentation continue de dimension finie fidèle.

---
(0) version du 2/10/06

À l'opposé, on peut montrer qu'un groupe compact tel que $\mathbb{Z}_p$ n'admet aucune représentation continue de dimension finie fidèle (voir, par exemple, [**Go**], pages 4-5).

6. Sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

6.1. Algèbres de Lie. — Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit A une $\mathbb{K}$-algèbre associative, par exemple $\mathrm{A} = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $a, b \in \mathrm{A}$, on définit le commutateur :

$$[a, b] = ab - ba.$$

Évidemment, $[a, a] = 0$ et $[b, a] = -[a, b]$. De plus, pour tout $c \in \mathrm{A}$,

$$[ab, c] = abc - cab = a(bc - cb) + (ac - ca)b = a[b, c] + [a, c]b.$$

d'où

$$[[a, b], c] = a[b, c] + [a, c]b - b[a, c] - [b, c]a = -[[b, c], a] - [[c, a], b],$$

c.-à-d.,

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0. \tag{J}$$

Cette relation s'appelle la *relation de Jacobi.*

Définition 6.1. — Une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V muni d'une application $\mathbb{K}$-bilinéaire

$$[-, -] : \mathrm{V} \times \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}, \qquad (x, y) \mapsto [x, y],$$

telle que $[x, x] = 0$ (d'où $[y, x] = -[x, y]$) et vérifiant l'identité de Jacobi (J). On dit alors que $[-, -]$ est un crochet de Lie sur V.

Une *sous-algèbre de Lie* de V est un sous-espace vectoriel E qui est stable par le crochet, c.-à-d., tel que $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] \in \mathrm{E}$ pour tout $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{E}$.

Exemple 6.2. — 1) Si A est une $\mathbb{K}$-algèbre associative, alors $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \mathrm{XY} - \mathrm{YX}$ est un crochet de Lie sur A. En particulier, $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie.

2) Soit $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \{\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(\mathrm{X}) = 0\}$, le sous-espace des matrices de trace nulle. C'est une sous-algèbre de Lie. (Mais, bien sûr, ce n'est pas une sous-algèbre pour la multiplication !)

6.2. Propriétés de l'exponentielle. — Les références pour ce paragraphe sont [**Go**, § 3.1] et [**Fa**, Ch. II].

On munit $\mathbb{R}^n$ d'une des normes usuelles, par exemple la norme euclidienne, notée $\|\cdot\|$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, on note $\mathrm{B}(x_0, r)$ la boule fermée de centre x_0 et de rayon r ; lorsque $x_0 = 0$, on notera simplement $\mathrm{B}(r)$.

On munit alors $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme matricielle correspondante, c.-à-d.,

$$\|\mathrm{A}\| = \sup_{x\in \mathrm{B}(1)} \|\mathrm{A}x\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\mathrm{A}x\|}{\|x\|}.$$

Grâce à la deuxième égalité, on obtient que, pour tout $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\| \leqslant \|\mathrm{A}\|\cdot\|\mathrm{B}\|.$$

Par conséquent, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, la série

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{\mathrm{A}^k}{k!}$$

est absolument convergente ; on note $\exp(\mathrm{A})$ sa limite.

Proposition 6.3. — $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *est une application continue.*

Démonstration. — Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ et $\rho = \sup\{\|\mathrm{A}\|, \|\mathrm{B}\|\}$. Alors

$$\|\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2\| = \|\mathrm{A}^2 - \mathrm{AB} + \mathrm{AB} - \mathrm{B}^2\| \leqslant 2\rho\,\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|,$$

puis

$$\|\mathrm{A}^3 - \mathrm{B}^3\| = \|\mathrm{A}^3 - \mathrm{A}^2\mathrm{B} + \mathrm{A}^2\mathrm{B} - \mathrm{B}^3\| \leqslant (\|\mathrm{A}\|^2 + 2\rho\,\|\mathrm{B}\|)\,\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\| \leqslant 3\rho^2\,\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|.$$

On montre ainsi, par récurrence sur k, que

$$\|\mathrm{A}^k - \mathrm{B}^k\| \leqslant k\rho^{k-1}\,\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|. \tag{1}$$

Il en résulte

$$\|\exp(\mathrm{A}) - \exp(\mathrm{B})\| \leqslant \exp(\rho)\,\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|.$$

Ceci montre que exp est continue. □

Si A et B **commutent**, alors pour tout $k \geqslant 0$ on a :

$$\frac{(\mathrm{A}+\mathrm{B})^k}{k!} = \sum_{i+j=k} \frac{\mathrm{A}^i}{i!}\,\frac{\mathrm{B}^j}{j!}.$$

et donc, comme on peut intervertir les sommations, puisque les séries convergent absolument, on obtient

$$\exp(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \sum_{k\geqslant 0}\sum_{i+j=k} \frac{\mathrm{A}^i}{i!}\,\frac{\mathrm{B}^j}{j!} = \sum_{i\geqslant 0}\sum_{j\geqslant 0} \frac{\mathrm{A}^i}{i!}\,\frac{\mathrm{B}^j}{j!} = \exp(\mathrm{A})\exp(\mathrm{B}).$$

En particulier,

$$\exp(\mathrm{A})\exp(-\mathrm{A}) = \exp(0) = \mathrm{I},$$

ce qui montre que $\exp(\mathrm{A}) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\exp(\mathrm{A})^{-1} = \exp(-\mathrm{A})$. Donc :

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}, \qquad \exp(\mathrm{A})^k = \exp(k\mathrm{A}). \tag{2}$$

Notons $\mathscr{V}_0 = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \|A - I\| < 1\}$. Pour tout $A \in \mathscr{V}_0$, la série

$$\sum_{k \geqslant 0} (I - A)^k$$

converge absolument, et sa limite B vérifie $AB = I$, c.-à-d., $B = A^{-1}$. Ceci montre que $\mathscr{V}_0 \subset GL_n(\mathbb{R})$.

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$,

$$\log(1 + x) = \sum_{k \geqslant 1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

et la série de droite converge absolument. Pour tout $A \in \mathscr{V}_0$, écrivons $A = I + (A - I)$; la série

$$\log(A) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (A - I)^k$$

converge absolument, et l'on a, d'après [**Fa**, Lemme II.2.2],

$$\exp(\log(A)) = A. \tag{3}$$

De plus, si $A \in \mathscr{V}_0$, alors $\|\log(A)\| < \log 2$. Posons

$$\mathscr{U}_0 = B(\log 2) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \|X\| < \log 2\}.$$

Pour tout $X \in \mathscr{U}_0$, on a

$$\|\exp(X)\| < \exp(\log 2) = 2, \quad \text{d'où} \quad \|\exp(X) - I\| < 1,$$

c.-à-d., $\exp(X) \in \mathscr{V}_0$. Alors, à nouveau d'après [**Fa**, Lemme II.2.2], on a

$$\log(\exp(X)) = X, \qquad \forall\, X \in \mathscr{U}_0. \tag{4}$$

Théorème 6.4. — 1) *L'application* $\log : \mathscr{V}_0 \to \mathscr{U}_0$ *est continue.*

2) *Par conséquent,* exp *et* log *sont des homéomorphismes réciproques entre le voisinage ouvert* $\mathscr{U}_0$ *de* 0 *dans* $M_n(\mathbb{R})$ *et le voisinage ouvert* $\mathscr{V}_0$ *de* I *dans* $GL_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. — 1) Montrons que $\log : \mathscr{V}_0 \to \mathscr{U}_0$ est continue. Soient $g, h \in \mathscr{V}_0$; posons

$$\delta = \sup\{\|g - I\|,\ \|h - I\|\} < 1.$$

Il résulte de (1) que

$$\|\log(g) - \log(h))\| \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k} \|(g-1)^k - (h-1)^k\| \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \delta^{k-1} \|g - h\| \leqslant \frac{\|g - h\|}{1 - \delta}.$$

Ceci montre que log est uniformément continue sur la boule $B(I, \delta)$. Comme exp et log sont des bijections réciproques entre $\mathscr{U}_0$ et $\mathscr{V}_0$, et que exp est continue, le théorème en découle. $\square$

Proposition 6.5. — *Soient* $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ *et* $t \in \mathbb{R}$. *Pour* $t \to 0$, *on a*

$$(i) \qquad \exp(tX)\exp(tY) = \exp\left(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3)\right).$$

$$(ii) \qquad \exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)\exp(-tY) = \exp\left(t^2[X,Y] + O(t^3)\right).$$

Démonstration. — Posons $F(t) = \exp(tX)\exp(tY)$. Alors

$$\begin{aligned} F(t) &= \left(I + tX + \tfrac{t^2}{2}X^2 + O(t^3)\right)\left(I + tY + \tfrac{t^2}{2}Y^2 + O(t^3)\right) \\ &= I + t(X+Y) + \tfrac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) + O(t^3). \end{aligned}$$

Pour t assez petit, on a $\|F(t) - I\| < 1$ et

$$\begin{aligned} \log F(t) &= t(X+Y) + \tfrac{t^2}{2}(X^2 + 2XY + Y^2) - \tfrac{t^2}{2}(X+Y)^2 + O(t^3) \\ &= t(X+Y) + \tfrac{t^2}{2}[X,Y] + O(t^3). \end{aligned}$$

Ceci prouve (i). Posons $G(t) = F(t)F(-t)$. Alors,

$$G(t) = I - t^2(X+Y)^2 + t^2(X^2 + 2XY + Y^2) + O(t^3) = I + t^2[X,Y] + O(t^3),$$

d'où $\log G(t) = t^2[X,Y] + O(t^3)$, et (ii) en découle. □

Corollaire 6.6. — *Soient* $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ *et* $t \in \mathbb{R}$. *Pour* $k \in \mathbb{N}$, $k \to \infty$, *on a*

$$(i) \quad \left(\exp(\frac{tX}{k})\exp(\frac{tY}{k})\right)^k = \exp\left(t(X+Y) + O(\frac{1}{k})\right) \longrightarrow \exp(t(X+Y)).$$

$$\begin{aligned} (\mathrm{ii}) \quad &\left(\exp(\frac{tX}{k})\exp(\frac{tY}{k})\exp(\frac{-tX}{k})\exp(\frac{-tY}{k})\right)^{k^2} \\ &\qquad = \exp\left(t^2[X,Y] + O(\frac{1}{k})\right) \longrightarrow \exp(t^2[X,Y]). \end{aligned}$$

6.3. L'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. — Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On lui associe le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ suivant :

$$\mathfrak{g} = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tX) \in G\}.$$

Théorème 6.7. — 1) $\mathfrak{g}$ *est un sous-espace vectoriel de* $M_n(\mathbb{R})$.

2) $\mathfrak{g}$ *est une sous-algèbre de Lie de* $M_n(\mathbb{R})$. *On la notera* $\mathrm{Lie}(G)$.

Démonstration. — 1) Soient $X, Y \in \mathfrak{g}$. Il est clair que $sX \in \mathfrak{g}$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, donc il suffit de montrer que $X + Y \in \mathfrak{g}$, c.-à-d., que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \exp(t(X+Y)) \in G.$$

Fixons $t \in \mathbb{R}$ et soit $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$. Comme $X, Y \in \mathfrak{g}$, alors $\exp(tX/k)$ et $\exp(tY/k)$ appartiennent à G, et comme G est un groupe, il contient aussi le produit

$$\left(\exp(\frac{tX}{k})\exp(\frac{tY}{k})\right)^k = \exp\left(t(X+Y) + O(\frac{1}{k})\right),$$

et comme G est fermé dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ il contient aussi la limite $\exp(t(X+Y))$. Ceci prouve 1).

2) Comme G est un groupe et $\exp(-A) = \exp(A)^{-1}$, il suffit de montrer que

$$\exp(s[X,Y]) \in G \quad \text{pour tout } s \geqslant 0, \text{ disons } s = t^2.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé et $k \in \mathbb{N}$, $k \to \infty$, on a

$$\left(\exp(\frac{tX}{k})\exp(\frac{tY}{k})\exp(\frac{-tX}{k})\exp(\frac{-tY}{k})\right)^{k^2} \longrightarrow \exp(t^2[X,Y]).$$

Comme $X, Y \in \mathfrak{g}$, alors G contient le terme de gauche pour tout k, et comme G est fermé il contient aussi la limite $\exp(t^2[X,Y])$. Ceci montre que $[X,Y] \in \mathfrak{g}$. □

On a ainsi associé à tout sous-groupe fermé $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ une sous-algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(G) \subseteq M_n(\mathbb{R})$. D'après la définition, le lemme suivant est immédiat.

Lemme 6.8. — 1) *On a :* $\mathrm{Lie}\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$.

2) *Si* $H \subseteq G$*, alors* $\mathrm{Lie}(H) \subseteq \mathrm{Lie}(G)$.

Définition 6.9. — On pose $\dim G = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Lie}(G)$.

Remarque 6.10. — Soient $H \subseteq G$ des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On verra plus loin que si G est connexe et si $\mathrm{Lie}(H) = \mathrm{Lie}(G)$ (c.-à-d., si $\dim H = \dim G$), alors $H = G$.

6.4. Composante connexe d'un groupe topologique. — Commençons par des rappels sur la notion de connexité. Soit X un espace topologique.

Définition 6.11. — On dit que X est **connexe** si X est la seule partie non vide qui soit à la fois ouverte et fermée.

Lemme 6.12. — X *est connexe* ⇔ *toute fonction continue sur* X *à valeurs dans* $\{0,1\}$ *est constante.*

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

Proposition 6.13. — 1) *Soient* $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille de parties connexes de* X, *ayant en commun un point* x_0. *Alors la réunion* $\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{X}_i$ *est connexe.*

2) *Soit* C *une partie connexe de* X. *Alors son adhérence* $\overline{\mathrm{C}}$ *est connexe.*

3) *Si* X, Y *sont deux espaces connexes, l'espace produit* $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ *est connexe.*

4) *Soit* $f : \mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ *une application continue. Si* C *est une partie connexe de* X, *alors* $f(\mathrm{C})$ *est connexe.*

Démonstration. — Tout ceci découle facilement de la caractérisation donnée dans le lemme. □

***Définition 6.14* (Composantes connexes)**. — Soit $x_0 \in \mathrm{X}$. Il résulte de la proposition que la réunion de toutes les parties connexes de X contenant x_0 est une partie connexe fermée C. C'est la plus grande partie connexe de X contenant x_0 ; on l'appelle la composante connexe de x_0.

Elle est stable par toute application continue $f : \mathrm{X}\to\mathrm{X}$ telle que $f(x_0) = x_0$. En effet, $f(\mathrm{C})$ est une partie connexe contenant x_0, donc $f(\mathrm{C}) \subseteq \mathrm{C}$.

Définition 6.15. — Soit G un groupe topologique. On note G^0 la composante connexe de l'élément neutre e.

Lemme 6.16. — 1) G^0 *est toujours un sous-groupe fermé normal de* G. *De plus, il est stable par toute application continue* $f : \mathrm{G}\to\mathrm{G}$ *telle que* $f(e) = e$.

2) *Si, de plus,* e *possède un voisinage connexe, alors* G^0 *est un sous-groupe ouvert et fermé.*

Démonstration. — 1) G^0 est fermé, puisque c'est la composante connexe de e. D'après la proposition précédente, $\mathrm{G}^0\times\mathrm{G}^0$ est connexe, et son image par l'application continue $(x,y)\mapsto xy^{-1}$ est une partie connexe contenant e, donc contenue dans G^0. Ceci montre que G^0 est un sous-groupe.

De plus, G^0 est stable par toute application continue $f : \mathrm{G}\to\mathrm{G}$ telle que $f(e) = e$; en particulier par toutes les conjugaisons $x\mapsto gxg^{-1}$. Ainsi, G^0 est un sous-groupe fermé normal.

2) Supposons que e admette un voisinage connexe V. Soit $g\in\mathrm{G}^0$. Alors $\mathrm{G}^0\cup g\mathrm{V}$ est connexe, donc égal à G^0. Donc G^0 contient le voisinage $g\mathrm{V}$ de g. Ceci montre que G^0 est ouvert. □

Lemme 6.17. — *Soit* G *un groupe topologique. Tout sous-groupe ouvert* H *est aussi fermé.*

Démonstration. — G est la réunion disjointe des classes $g_i\mathrm{H}$, et chacune est ouverte. Le complémentaire de H, étant la réunion des classes $g_i\mathrm{H}$ distinctes de H, est donc ouvert. Par conséquent, H est fermé. □

On aura besoin plus loin de la proposition ci-dessous.

Proposition 6.18. — *Supposons* G *connexe et soit* V *un voisinage arbitraire de* e. *Alors le sous-groupe engendré par* V *égale* G.

Démonstration. — Soit $\mathrm{W} = \mathrm{V} \cap \mathrm{V}^{-1}$. Alors

$$\mathrm{H} = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathrm{W}^n$$

est un sous-groupe de G, et il est ouvert. En effet, pour tout $x \in \mathrm{H}$ il existe n tel que $x \in \mathrm{W}^n$ et alors $x\mathrm{W}$ est un voisinage de x contenu dans H.

Ainsi, H est un sous-groupe ouvert, donc aussi fermé. Comme G est connexe, il vient $\mathrm{H} = \mathrm{G}$. □

7. Groupes de Lie

7.1. Variétés différentiables. —

Définition 7.1. — Une **variété de classe** C^∞, de dimension n, est un espace topologique séparé X, muni d'un recouvrement ouvert $(\mathrm{U}_i)_{i \in \mathrm{I}}$, et d'homéomorphismes ϕ_i de chaque U_i sur un ouvert connexe V_i de $\mathbb{R}^n$, tels que, pour tout $i \neq j$, l'application $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ soit un difféomorphisme de classe C^∞ de l'ouvert $\phi_i(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j)$ de $\mathbb{R}^n$ sur l'ouvert $\phi_j(\mathrm{U}_j \cap \mathrm{U}_i)$ de $\mathbb{R}^n$.

On dit que les (U_i, ϕ_i) sont des cartes de définition de X. On dit alors qu'un couple (U, ψ), où U est un ouvert de X et ψ un homéomorphisme de U sur un ouvert connexe V de $\mathbb{R}^n$, est une carte de X si, pour tout $i \in \mathrm{I}$, l'application $\psi \circ \phi_i^{-1}$ est un difféomorphisme de classe C^∞ de l'ouvert $\phi_i(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U})$ de $\mathbb{R}^n$ sur l'ouvert $\psi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_i)$ de $\mathbb{R}^n$.

On définit de même la notion de variété de classe C^k, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 7.2. — Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une variété C^∞ de dimension n. En particulier, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une variété C^∞ de dimension n^2.

Exemple 7.3. — Le cercle

$$\mathrm{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

est une variété C^∞ de dimension 1. En effet, en utilisant la deuxième description, soit $\varepsilon > 0$ et soient

$$\mathrm{V}_0 = \,]-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon[\,, \qquad \mathrm{V}_1 = \,]\varepsilon, 2\pi - \varepsilon[\,.$$

L'application $f : t \mapsto e^{it}$ est un homéomorphisme du compact $\overline{\mathrm{V}_0}$ sur son image, donc induit un homéomorphisme ϕ_0 de V_0 sur son image U_0. (Ici, par rapport à la définition, on a noté ϕ_0 au lieu de ϕ_0^{-1}, ce qui est évidemment sans importance.) De même, f induit un homéomorphisme ϕ_1 de V_1 sur son image U_1. Alors, $\mathrm{U}_0 \cap \mathrm{U}_1$ a deux composantes connexes :

$$\begin{cases} \mathrm{C}^+ = \{e^{i\theta} \mid \varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon\}, \\ \mathrm{C}^- = \{e^{i\theta_0} \mid -\pi + \varepsilon < \theta_0 < -\varepsilon\} = \{e^{i\theta_1} \mid \pi + \varepsilon < \theta_1 < 2\pi - \varepsilon\}. \end{cases}$$

On a $\phi_0^{-1}(\mathrm{C}^+) = \mathrm{V}_0 \cap \mathrm{V}_1 = \phi_1^{-1}(\mathrm{C}^+)$, et

$$\phi_1^{-1} \circ \phi_0 : \mathrm{V}_0 \cap \mathrm{V}_1 \longrightarrow \mathrm{V}_0 \cap \mathrm{V}_1$$

est l'application identique. D'autre part, $\phi_0^{-1}(\mathrm{C}^-) =]-\pi+\varepsilon, -\varepsilon[$ et $\phi_1^{-1}(\mathrm{C}^-) =]\pi + \varepsilon, 2\pi - \varepsilon[$, et

$$\phi_1^{-1} \circ \phi_0 :]-\pi + \varepsilon, -\varepsilon[\longrightarrow]\pi + \varepsilon, 2\pi - \varepsilon[$$

est l'application $t \mapsto t + 2\pi$, qui est bien C^∞. Ceci montre (ouf... !) que S^1 est bien une variété C^∞ de dimension 1.

En utilisant la première description, introduisons les cartes suivantes de S^1. Considérons les demi-cercles ouverts supérieur et inférieur :

$$\mathrm{X}_1^+ = \{(x, y) \in \mathrm{S}^1 \mid y > 0\}, \qquad \mathrm{X}_1^- = \{(x, y) \in \mathrm{S}^1 \mid y < 0\}.$$

Alors la restriction à X_1^+, resp. X_1^-, de la projection $(x, y) \mapsto x$, notée p_1^+, resp. p_1^-, est un homéomorphisme de X_1^+, resp. X_1^-, sur $\mathrm{I} =]-1, 1[$, l'homéomorphisme inverse étant

$$\phi^+ : x \mapsto (x, \sqrt{1 - x^2}), \quad \text{resp.} \quad \phi^- : x \mapsto (x, -\sqrt{1 - x^2}).$$

De même, soient

$$\mathrm{X}_2^- = \{(x, y) \in \mathrm{S}^1 \mid x < 0\}, \qquad \mathrm{X}_2^+ = \{(x, y) \in \mathrm{S}^1 \mid x > 0\}$$

les demi-cercles ouverts gauche et droit. La projection sur y induit des homéomorphismes, dont les inverses sont, respectivement,

$$\psi^- : y \mapsto (-\sqrt{1 - y^2}, y), \quad \text{resp.} \quad \psi^+ : y \mapsto (\sqrt{1 - y^2}, y).$$

Posons $\mathrm{C} = \mathrm{X}_1^+ \cap \mathrm{X}_2^+ = \{(x, y) \in \mathrm{S}^1 \mid x > 0,\ y > 0\}$. Alors $p_1^+(\mathrm{C})$ et $p_2^+(\mathrm{C})$ égalent l'intervalle ouvert $\mathrm{J} =]0, 1[$, et le changement de coordonnées est :

$$p_2^+ \circ \phi^+ : \mathrm{J} \longrightarrow \mathrm{J}, \qquad x \mapsto \sqrt{1 - x^2},$$

qui est bien C^∞.

Remarque 7.4. — Ce qui précède se généralise, pour tout $n \geqslant 2$, à la sphère

$$\mathrm{S}^{n-1} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

Elle est recouverte par les $2n$ demi-sphères ouvertes X_i^+, X_i^-, et les changements de coordonnées sont C^∞.

***Définition 7.5* (Produits de variétés).** — Soient X et Y deux variétés C^∞, de dimension n et p respectivement. Alors $X \times Y$ est une variété C^∞, de dimension $n+p$.

En effet, si $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$, resp. $(V_j, \psi_j)_{j\in J}$, est un système de cartes pour X, resp. Y, alors les $U_i \times V_j$ forment un recouvrement ouvert de $X \times Y$, et chaque $\phi_i \times \psi_j$ est un homéomorphisme de $U_i \times V_j$ sur un ouvert connexe de $\mathbb{R}^{n+p}$. Enfin, les changements de cartes sont « séparément C^∞ » en les variables de X et celles de Y, et ceci entraîne qu'ils sont globalement C^∞, voir par exemple [**Ca**], première partie, I.3.7.2.

***Définition 7.6* (Applications différentiables).** — Soient X et Y deux variétés C^∞, de dimension n et p respectivement. Un morphisme de variétés $X \to Y$ est une application continue $f : X \to Y$ vérifiant la propriété suivante : soient $x \in X$, $y = f(x)$, (V, ψ) une carte au voisinage de y, et (U, ϕ) une carte au voisinage de x telle que $f(U) \subseteq V$; alors $W = \phi(U)$, resp. $W' = \psi(V)$, est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, resp. de $\mathbb{R}^p$, et l'on demande que l'application

$$f \circ \phi^{-1} : W \longrightarrow W'$$

soit C^∞. On laisse au lecteur le soin de vérifier que cette notion ne dépend pas des cartes choisies...

***Exemple 7.7*.** — $S^1 \times S^1$ est une variété de dimension 2, et les applications $S^1 \times S^1 \to S^2$ ci-dessous sont C^∞. Elles correspondent, respectivement, au « découpage » de S^2 (= la Terre) en méridiens, resp. en parallèles :

$$M((x,y),(x',y')) = (x'x, x'y, y'),$$

$$P((x,y),(x',y')) = (x'\sqrt{1-y^2}\,, y'\sqrt{1-y^2}\,, y).$$

7.2. Groupes de Lie. —

***Définition 7.8*.** — Un groupe de Lie est une variété G de classe C^∞, munie d'une structure de groupe telle que l'application

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (x,y) \mapsto xy^{-1}$$

soit C^∞.

***Exemples 7.9*.** — 1) $(\mathbb{R}^n, +)$.

2) $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}^*_+$, qui sont des ouverts de $\mathbb{R}$.

3) $GL_n(\mathbb{R})$, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^{n^2}$.

4) Le cercle S^1.

5) La sphère S^3 = groupe des quaternions de norme 1.

FIN de la séance du 26/9

Bibliographie

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.
[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.
[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.
[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.
[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.
[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).
[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.
[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974
[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.
[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.
[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.
[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.
[He] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.
[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.
[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.
[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.
[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.
[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.
[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.
[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.
[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.
[Va84] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.
[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.
[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.