SÉANCE DU 2 OCTOBRE

7. Groupes de Lie (suite)

7.1. Variétés différentiables (suite). — Pour la commodité du lecteur, reprenons les définitions 7.1, 7.5, 7.6 et 7.8 introduites à la fin du polycopié de la séance du 26/9. (On renvoie à ce polycopié pour les exemples et remarque 7.2–7.4, 7.7 et 7.9).

En fait, par rapport à la définition du 26/9, il est plus commode de ne **pas** imposer dans la définition ci-dessous que les ouverts U_i soient connexes.

Définition 7.1. — Une **variété de classe** C^∞, de dimension n, est un espace topologique séparé X, muni d'un recouvrement ouvert $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathrm{I}}$, et d'homéomorphismes ϕ_i de chaque U_i sur un ouvert V_i de $\mathbb{R}^n$, tels que, pour tout $i \neq j$, l'application $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ soit un difféomorphisme de classe C^∞ de l'ouvert $\phi_i(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j)$ de $\mathbb{R}^n$ sur l'ouvert $\phi_j(\mathrm{U}_j \cap \mathrm{U}_i)$ de $\mathbb{R}^n$.

On dit que les (U_i, ϕ_i) sont des cartes de définition de X. On dit alors qu'un couple (U, ψ), où U est un ouvert de X et ψ un homéomorphisme de U sur un ouvert V de $\mathbb{R}^n$, est une carte de X si, pour tout $i \in \mathrm{I}$, l'application $\psi \circ \phi_i^{-1}$ est un difféomorphisme de classe C^∞ de l'ouvert $\phi_i(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U})$ de $\mathbb{R}^n$ sur l'ouvert $\psi(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_i)$ de $\mathbb{R}^n$.

On définit de même la notion de variété de classe C^k, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

***Définition 7.5* (Produits de variétés)**. — Soient X et Y deux variétés C^∞, de dimension n et p respectivement. Alors $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$ est une variété C^∞, de dimension $n+p$.

En effet, si $(\mathrm{U}_i, \phi_i)_{i\in\mathrm{I}}$, resp. $(\mathrm{V}_j, \psi_j)_{j\in\mathrm{J}}$ est un système de cartes pour X, resp. Y, alors les $\mathrm{U}_i \times \mathrm{V}_j$ forment un recouvrement ouvert de $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$, et chaque $\phi_i \times \psi_j$ est un homémomorphisme de $\mathrm{U}_i \times \mathrm{V}_j$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^{n+p}$. Enfin,

[0] version du 23/10/06

les changements de cartes sont « séparément C^∞ » en les variables de X et celles de Y, et ceci entraîne qu'ils sont globalement C^∞, voir par exemple [**Ca**], première partie, I.3.7.2.

***Définition 7.6* (Applications différentiables).** — Soient X et Y deux variétés C^∞, de dimension n et p respectivement. Un morphisme de variétés $X \to Y$ est une application continue $f : X \to Y$ vérifiant la propriété suivante : soient $x \in X$, $y = f(x)$, (V, ψ) une carte au voisinage de y, et (U, ϕ) une carte au voisinage de x telle que $f(U) \subseteq V$; alors $W = \phi(U)$, resp. $W' = \psi(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, resp. de $\mathbb{R}^p$, et l'on demande que l'application

$$f \circ \phi^{-1} : W \longrightarrow W'$$

soit C^∞. On laisse au lecteur le soin de vérifier que cette notion ne dépend pas du choix des cartes choisies...

***Définition 7.8*.** — Un **groupe de Lie** est une variété G de classe C^∞, munie d'une structure de groupe telle que l'application

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (x, y) \mapsto xy^{-1}$$

soit C^∞.

Un cas particulier important de variétés est le suivant.

***Définition 7.10* (Sous-variétés de $\mathbb{R}^N$).** — Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$. On dit que X est une « sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^N$ » de dimension n, si, pour tout $x \in X$, il existe des ouverts U et V de $\mathbb{R}^N$, avec $x \in U$ et $0 \in V$, et un difféomorphisme C^∞

$$\phi : U \xrightarrow{\sim} V \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \phi(x) = 0, \\ U \cap X = \phi^{-1}\left(V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})\right). \end{cases}$$

***Proposition 7.11*.** — *Soit* X *une « sous-variété* C^∞ *de* $\mathbb{R}^N$ *» de dimension* n. *Alors* X *est une variété* C^∞ *au sens de la définition* 7.1, *et l'inclusion* $X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ *est un morphisme de variétés. Par conséquent, on peut écrire que* X *est une sous-variété* C^∞ *de* $\mathbb{R}^N$ (sans guillemets !).

Démonstration. — Pour tout $x \in X$, il existe des ouverts U_x et V_x de $\mathbb{R}^N$, avec $x \in U$ et $0 \in V$, et un difféomorphisme C^∞ $\phi : U_x \xrightarrow{\sim} V_x$ tel que $\phi_x(x) = 0$ et

$$U_x \cap X = \phi_x^{-1}\left(V_x \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})\right).$$

Ces ouverts $U_x \cap X$ forment un recouvrement de X, et il faut voir que, pour $x \neq y$, les « changements de cartes » sont C^∞. Posons

$$\Omega_x = \phi_x(U_x \cap U_y) \quad \text{et} \quad \Omega_y = \phi_y(U_y \cap U_x);$$

ce sont des ouverts de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ et par hypothèse on a un difféomorphisme C^∞

$$\phi_y \circ \phi_x^{-1} : \Omega_x \xrightarrow{\sim} \Omega_y.$$

De plus, l'inclusion $\tau : \Omega_x \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \hookrightarrow \Omega_x$ et la projection $\pi : \Omega_y \to \mathbb{R}^n \times \{0\}$ sont C^∞, et donc l'homéomorphisme

$$\Omega_x \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\}) \xrightarrow{\sim} \Omega_y \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$$

induit par $\phi_y \circ \phi_x^{-1}$ est C^∞, ainsi que son inverse (qui est induit par $\phi_x \circ \phi_y^{-1}$). Ceci prouve que X est une variété, et aussi que l'inclusion $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ est un morphisme de variétés. □

7.2. « Rappels » de calcul différentiel. — Si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un morphisme de variétés, pour définir la différentielle de f en un point x de X, il faut avoir au préalable défini l'espace tangent $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$. Et pour définir l'espace tangent $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$, on a besoin de disposer de la notion de différentielle d'une application C^∞ entre deux ouverts $\mathbb{R}^n$. Heureusement, il n'y a pas de cercle vicieux, car l'espace tangent en un point d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est $\mathbb{R}^n$.

On va donc commencer par rappeler les notions d'application différentiable, de dérivées partielles, d'applications de classe C^∞, etc. Pour les résultats donnés sans démonstration, on renvoie à [**Ca**] ou [**Laf**].

Définition 7.12. — Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $x_0 \in \mathrm{U}$. Une application $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$ est **différentiable en** x_0 s'il existe une application linéaire $\mathrm{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ telle que

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \mathrm{L}(h) + o(h).$$

(Ceci implique, en particulier, que f est continue en x_0.) Dans ce cas, L est unique, on l'appelle la **différentielle** (ou *application linéaire tangente*) de f en x_0, et on la note $d_{x_0}f$ ou $(df)_{x_0}$.

On dit que f est **différentiable** (sous-entendu : sur U) si elle est différentiable en tout point de U.

Remarque 7.13. — Si $n = 1$, on voit que f est différentiable en x_0 si et seulement si la limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

existe ; c'est alors un élément v_0 de $\mathbb{R}^p$. Dans ce cas, f est dérivable en x_0, sa dérivée $f'(x_0)$ est le vecteur v_0, et sa différentielle en x_0 est l'application linéaire

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p, \qquad t \mapsto tv_0.$$

Par conséquent, $f'(x_0) = d_{x_0}f(1)$.

Si f est une application différentiable d'un intervalle ouvert $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$, on dit que f est une **courbe** différentiable, et pour tout $t \in \mathrm{I}$, le vecteur $f'(t) \in \mathbb{R}^p$ est parfois appelé le *vecteur vitesse* en t (ou « à l'instant t »).

Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 7.14. — *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable. Alors, pour tout* $x \in \mathrm{U}$ *et* $i = 1, \ldots, n$, *la dérivée partielle*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t}$$

existe : c'est $d_x f(e_i)$.

Remarque 7.15. — Il est bien connu que la réciproque est fausse ; par exemple l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

admet des dérivées partielles en tout point, mais n'est pas continue, donc a fortiori pas différentiable, en $(0,0)$.

Cependant, on a le résultat suivant.

Théorème 7.16. — *Soient* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$. *Si* f *possède des dérivées partielles sur* U *et si elles sont* **continues** *en* $x_0 \in \mathrm{U}$, *alors* f *est différentiable en* x_0.

Définition 7.17. — On dit que $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ est **de classe** C^1 si elle possède des dérivées partielles continues sur U. Ceci entraîne que f est différentiable sur U, et que l'application

$$\mathrm{U} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \qquad x \mapsto d_x f$$

est continue. On peut alors définir, par récurrence sur k, la notion suivante. Une application $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ est **de classe** C^k si elle possède sur U des dérivées partielles qui sont de classe C^{k-1}. Enfin, on dit que f est (de classe) C^∞ si elle est de classe C^k pour tout $k \geqslant 1$. Ceci équivaut à dire que les dérivées partielles de tout ordre :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}$$

existent et sont continues.

Revenant au cas d'une application $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^p$, tout ce qui précède s'étend comme suit. Notons $f_1, \ldots, f_p$ les composantes de f. Alors, on a le résultat et la définition qui suivent.

Théorème 7.18. — *f est différentiable, resp. de classe C^1, sur U si et seulement si chaque f_i l'est.*

On dit que f est de classe C^∞ si chaque f_i l'est.

***Théorème 7.19* (Différentielle d'une composée)**. — *Soient $\mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{V} \subseteq \mathbb{R}^p$ des ouverts et soient $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ et $g : \mathrm{V} \to \mathbb{R}^q$ des applications C^∞. Alors $g \circ f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^q$ est C^∞ et l'on a*

$$d_x(g \circ f) = d_{f(x)}g \circ d_x f, \qquad \forall\, x \in \mathrm{U}.$$

D'autre part, la différentielle de id_{U} est, en tout point, l'application identique de $\mathbb{R}^n$.

Définition 7.20. — Soient $\mathrm{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{V} \subseteq \mathbb{R}^p$ des ouverts et soit $f : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ une application C^∞. On dit que f est un **difféomorphisme** (de classe C^∞) si f est bijectif et si l'application réciproque $f^{-1} : \mathrm{V} \to \mathrm{U}$ est de classe C^∞.

Dans ce cas, le théorème précédent nous dit que les applications linéaires

$$d_x f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \quad \text{et} \quad d_{f(x)}f^{-1} : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

sont inverses l'une de l'autre. Ceci implique, en particulier, que $n = p$.

Remarque 7.21. — Une bijection C^∞ n'est pas nécessairement un difféomorphisme, par exemple, l'application $x \mapsto x^3$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est C^∞ et bijective, mais son inverse $y \mapsto \sqrt[3]{y}$ n'est pas dérivable en 0.

***Théorème 7.22* (Théorème d'inversion locale)**. — *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^n$ une application C^∞, et soit $x_0 \in \mathrm{U}$ tel que $d_{x_0}f$ soit* **inversible**. *Alors il existe un voisinage ouvert V de x_0 dans U tel que $f(\mathrm{V})$ soit ouvert et f induise un difféomorphisme de V sur $f(\mathrm{V})$.*

Démonstration. — Voir [**Ca**, 1ère partie, Chap. I, sec. 4], ou [**Le**, Chap. I, § 4.A]. □

Définition 7.23. — Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}^n$ une application C^∞. On dit que f est un **difféomorphisme local** si $d_x f$ est inversible, pour tout $x \in \mathrm{U}$.

Dans ce cas, tout $x \in \mathrm{U}$ possède un voisinage ouvert assez petit V tel que $f(\mathrm{V})$ soit ouvert et f induise un difféomorphisme de V sur $f(\mathrm{V})$.

Exemples 7.24. — 1) L'application exponentielle $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est un difféomorphisme local. (Et, évidemment, $\exp$ est un difféomorphisme $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}_+^*$.)

2) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'application $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^k$ est un difféomorphisme local.

Remarque 7.25. — Les deux exemples précédents sont reliés, en ce sens que l'on a le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{x \mapsto kx} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle \exp}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp} \\ \mathbb{C}^* & \xrightarrow{z \mapsto z^k} & \mathbb{C}^*. \end{array}$$

Remarque 7.26. — Généralisant l'exemple 1) précédent, on verra plus loin que, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \geqslant 1$ l'application exponentielle $\exp : \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un difféomorphisme local.

7.3. Espace tangent en un point à une sous-variété de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. — Soient X une sous-variété de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, de dimension n, et $x_0 \in \mathrm{X}$. Il y a plusieurs manières de définir l'espace tangent à X en x_0. La plus intuitive est peut-être de dire que c'est l'ensemble des vecteurs vitesse en x_0 des courbes passant par x_0.

Définition 7.27. — On note $\mathrm{T}_{x_0}\mathrm{X}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ formé des vecteurs

$$f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - x_0}{t},$$

où f une application $\mathrm{C}^\infty :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathrm{X}$ telle que $f(0) = x_0$.

Remarque 7.28. — Si $n = \mathrm{N}$ et si $\mathrm{X} = \mathrm{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, la définition précédente donne bien, pour tout $x_0 \in \mathrm{U}$,

$$\mathrm{T}_{x_0}\mathrm{U} = \mathbb{R}^n.$$

En effet, soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base standard de $\mathbb{R}^n$. Comme U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x_0 + te_i \in \mathrm{U}$ pour $|t| < \varepsilon$, et alors $f(t) = x_0 + te_i$ est une application $\mathrm{C}^\infty :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathrm{X}$ telle que $f(0) = x_0$ et $f'(0) = e_i$.

Il n'est pas immédiatement évident, d'après la définition 7.27, que $\mathrm{T}_{x_0}\mathrm{X}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Ceci résulte de la proposition suivante.

Proposition 7.29. — *Soient* X *une sous-variété de* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ *de dimension* n*, et* $x \in \mathrm{X}$. *Alors* $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$ *est un sous-espace vectoriel de dimension* n *de* $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$

Démonstration. — Par hypothèse, il existe des ouverts U_x et V_x de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, avec $x \in \mathrm{U}$ et $0 \in \mathrm{V}$, et un difféomorphisme C^∞

$$(*) \qquad \phi : \mathrm{U} \xrightarrow{\sim} \mathrm{V} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \phi(x) = 0, \\ \mathrm{U} \cap \mathrm{X} = \phi^{-1}\left(\mathrm{V} \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})\right). \end{cases}$$

Soit $v \in \mathbb{R}^n$, et soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$|t| < \varepsilon \Rightarrow tv \in \mathrm{V}_x \bigcap (\mathbb{R}^n \times \{0\}).$$

Alors la courbe $f :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathrm{X}$, $t \mapsto \phi^{-1}(tv)$ est C^∞ et l'on a :

$$f(0) = x \qquad \text{et} \qquad f'(0) = d_x\phi^{-1}(v).$$

Ceci montre que $d_x\phi^{-1}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathrm{T}_x\mathrm{X}$.

Réciproquement, si $v \in \mathrm{T}_x\mathrm{X}$, il existe un intervalle $\mathrm{I} =]-\varepsilon, \varepsilon[$ et une courbe C^∞ $f : \mathrm{I} \to \mathrm{X}$ telle que $f(0) = x$ et $v = f'(0)$; alors $\phi \circ f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ est une courbe C^∞ telle que

$$(\phi \circ f)(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad d_x\phi(v) = d_x(\phi \circ f)(0) \in \mathbb{R}^n.$$

Ceci montre que $d_x\phi(\mathrm{T}_x\mathrm{X}) \subseteq \mathbb{R}^n$. Il en résulte qu'on a l'égalité

$$\mathrm{T}_x\mathrm{X} = d_x\phi^{-1}(\mathbb{R}^n \times \{0\}),$$

ce qui montre que $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$, de dimension n. De plus, l'égalité ci-dessus a lieu pour tout ϕ vérifiant $(*)$. □

La définition précédente n'est en général pas pratique pour calculer $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$. Mais on a la seconde approche suivante.

Soit X une sous-variété de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ de dimension n, soit $x \in \mathrm{X}$, et soit $\phi : \mathrm{U} \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}$ vérifiant la condition $(*)$ précédente. Soient $\phi_1, \dots, \phi_\mathrm{N}$ les composantes de ϕ. Alors, $\phi_{n+1}, \dots, \phi_\mathrm{N}$ sont identiquement nulles sur le voisinage $\mathrm{X} \cap \mathrm{U}$ de x dans X, tandis que $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ induit un difféomorphisme de $\mathrm{X} \cap \mathrm{U}$ sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$. On dit que $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ forme un **système de coordonnées locales sur** X au voisinage de x.

Proposition 7.30. — $\mathrm{T}_x\mathrm{X} = \bigcap_{i=n+1}^{\mathrm{N}} \operatorname{Ker} d_x\phi_i$.

Démonstration. — Par hypothèse, ϕ est un difféomorphisme entre des ouverts U, V de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$, tels que $x \in \mathrm{U}$ et $\phi(x) = 0 \in \mathrm{V}$. Alors, la différentielle $d_x\phi$ est inversible ; c'est l'application linéaire

$$\mathbb{R}^\mathrm{N} \longrightarrow \mathbb{R}^\mathrm{N}$$

dont les composantes sont les formes linéaires $d_x\phi_i$, pour $i = 1, \dots, \mathrm{N}$. C.-à-d., si on écrit la matrice de $d_x\phi$ dans la base standard de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$, alors la i-ème ligne de la matrice correspond à la forme linéaire $d_x\phi_i$. Comme la matrice est inversible, les formes linéaires $d_x\phi_1, \dots, d_x\phi_\mathrm{N}$ sont linéairement indépendantes, et il en résulte que

$$\dim_\mathbb{R} \bigcap_{i=n+1}^{\mathrm{N}} \operatorname{Ker} d_x\phi_i = \mathrm{N} - (\mathrm{N} - n) = n.$$

D'autre part, soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{X}$ une courbe C^∞ telle que $f(0) = x$. Pour $|t|$ assez petit, on a $f(t) \in \mathrm{X} \cap \mathrm{U}$ d'où, pour $i = n+1, \dots, \mathrm{N}$, $\phi_i(f(t)) = 0$, et donc

$$0 = (\phi_i \circ f)'(0) = d_x\phi_i(f'(0)).$$

Ceci montre que $\mathrm{T}_x\mathrm{X} = \bigcap_{i=n+1}^{\mathrm{N}} \operatorname{Ker} d_x\phi_i$, et comme ils sont tous deux de dimension n, on a l'égalité. La proposition est démontrée. $\square$

Exemple 7.31. — Soit $\mathrm{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ et soit p_0 le point $(0,0,1)$. Alors, au voisinage de p_0 l'application

$$\phi : (x,y,z) \mapsto (x,y,x^2+y^2+z^2-1)$$

est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert U de p_0 dans $\mathbb{R}^3$ (explicitement, le demi-espace $z > 0$) sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^3$; le difféomorphisme inverse étant

$$\psi : (x,y,z') \mapsto (x,y,\sqrt{z'+1-x^2-y^2}).$$

Alors $\phi_3 = x^2+y^2+z^2-1$, d'où $d_{p_0}\phi_3 = 2dz$. On retrouve ainsi que l'espace tangent à S^2 en p_0 égale $\operatorname{Ker} dz =$ le plan horizontal passant par p_0.

Dans l'exemple ci-dessus, on a montré explicitement que l'équation de la sphère $\mathrm{F} = x^2+y^2+z^2-1$ faisait partie d'un système de coordonnées locales au voisinage de p_0, afin de pouvoir appliquer la proposition précédente. Il ne serait pas commode de faire de même dans le cas général d'une sous-variété X de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ définie par des équations $f_1,\dots,f_p$, par exemple pour montrer que le groupe orthogonal

$$\mathrm{O}(n) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \mathrm{I}_n\}$$

est une sous-variété et déterminer son espace tangent en l'identité. Heureusement, on dispose des résultats généraux suivants.

7.4. Sous-variétés définies par des équations de rang constant. — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soient $f_1,\dots,f_p$ des applications $\Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. On va montrer que, sous certaines hypothèses, l'ensemble

$$\mathrm{X} = \{x \in \Omega \mid f_i(x) = 0, \quad \forall\, i = 1,\dots,p\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Introduisons l'application C^∞

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p, \qquad x \mapsto (f_1(x),\dots,f_p(x)).$$

Alors, $\mathrm{X} = \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}$.

Remarque 7.32. — Il est parfois plus commode de travailler avec l'application $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ qu'avec ses composantes $(f_1,\dots,f_p)$. Par exemple, prenant l'ouvert $\mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ de $\mathrm{M}_k(\mathbb{R})$ et l'application C^∞

$$f : \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_k(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{A} \mapsto {}^t\mathrm{A}\mathrm{A} - \mathrm{I}_k$$

on obtiendra plus bas que le groupe orthogonal $\mathrm{O}(k)$ est un sous-groupe de Lie fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, de dimension $k(k-1)/2$.

Revenons au cas général. La différentielle df a pour composantes $df_1, \dots, df_p$ et, dans les bases standard de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$, chaque $d_x f$ est représenté par la matrice

$$d_x f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x).$$

Définition 7.33. — Le rang $r(x)$ de cette matrice est le rang de $d_x f$; on l'appelle aussi le **rang de** $(df_1, \dots, df_p)$ **en** x. C'est la dimension du sous-espace de $(\mathbb{R}^n)^*$ engendré par les formes linéaires $d_x f_1, \dots, d_x f_p$. Par conséquent, on a

$$\dim_{\mathbb{R}} \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} d_x f_i = n - r(x).$$

Définition 7.34. — On dit que f est de **rang constant** sur Ω si $r(x)$ est constant sur Ω.

Pour tout $y \in f(\Omega)$, on pose $\mathrm{X}_y = f^{-1}(y)$.

***Théorème 7.35* (Théorème du rang constant)**. — *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *une application* C^∞ *de rang constant* r. *Alors,* X_y *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^n$ *de dimension* $n - r$*, pour tout* $y \in f(\Omega)$. *De plus, pour tout* $x \in \mathrm{X}_y$*, on a*

$$\mathrm{T}_x \mathrm{X}_y = \operatorname{Ker} d_x f = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} d_x f_i.$$

Démonstration. — Voir [**Le**, Chap. I, § 4.A] ou [**Laf**, Chap. I, Ex. 10]. □

Exemple 7.36. — La sphère S^2 est définie par l'équation

$$0 = f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Alors $df = 2(xdx+ydy+zdz)$ est de rang maximum 1 en tout point de $\mathbb{R}^3$ autre que $(0, 0, 0)$ et le théorème permet de retrouver que S^2 est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ et que son espace tangent en tout point p est $\operatorname{Ker} d_p f$.

Remarque 7.37. — Un cas particulier du théorème du rang constant (qui est parfois appelé « théorème de la subimmersion », cf. [**Le**]), est le « théorème de l'immersion », voir [**Laf**, I.21] ou [**Le**, Chap. I, 4.A.I]. Une conséquence du théorème de l'immersion dont nous aurons besoin est la suivante (voir [**Laf**, I.22] ou [**Le**, p. 76, Prop. 4]).

Proposition 7.38. — *Soient* X *et* Y *des sous-variétés de* $\mathbb{R}^m$ *et* $\mathbb{R}^n$ *et soit* f : $\mathrm{X} \to \mathbb{R}^n$ *une application* C^∞ *telle que* $f(\mathrm{X}) \subseteq \mathrm{Y}$. *Alors* f *est une application* C^∞ *de* X *vers* Y.

Théorème 7.39 **(Groupe orthogonal** $\mathrm{O}(n)$**).** — *Le groupe orthogonal*

$$\mathrm{O}(n) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t\mathrm{A}\mathrm{A} = \mathrm{I}_n\}$$

est une sous-variété de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*, et donc un groupe de Lie. Sa dimension est* $n(n-1)/2$ *; plus précisément, pour tout* $g \in \mathrm{O}(n)$*, on a*

$$\mathrm{T}_g\mathrm{O}(n) = \{g\mathrm{X} \mid \mathrm{X} \in \mathrm{AS}_n(\mathbb{R})\},$$

où $\mathrm{AS}_n(\mathbb{R})$ *désigne le sous-espace des matrices antisymétriques.*

Démonstration. — Comme l'application

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto {}^t\mathrm{A}\mathrm{B}$$

est bilinéaire, sa différentielle en tout point (A, B) est l'application linéaire

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \qquad (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto {}^t\mathrm{X}\mathrm{B} + \mathrm{A}\mathrm{Y}.$$

On en déduit que l'application $f : \mathrm{A} \mapsto {}^t\mathrm{A}\mathrm{A} - \mathrm{I}_n$ a pour différentielle, en tout point $\mathrm{A}_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, l'application linéaire

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \mathrm{X} \mapsto {}^t\mathrm{X}\mathrm{A}_0 + {}^t\mathrm{A}_0\mathrm{X},$$

d'où

$$\mathrm{Ker}\, d_{\mathrm{A}_0} f = \{{}^t\mathrm{A}_0^{-1}\,\mathrm{X} \mid \mathrm{X} \in \mathrm{AS}_n(\mathbb{R})\}.$$

Donc, f est de rang constant sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et, bien sûr, $f(\mathrm{I}_n) = 0$. Alors, il résulte du théorème du rang constant que $\mathrm{O}(n) = f^{-1}(0)$ est une sous-variété fermée de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, de dimension $n(n-1)/2$ et que, pour tout $g \in \mathrm{O}(n)$, on a

$$\mathrm{T}_g\mathrm{O}(n) = \mathrm{Ker}\, d_g f = g\,\mathrm{AS}_n(\mathbb{R}).$$

Enfin, posant $\mathrm{G} = \mathrm{O}(n)$, l'application

$$\mathrm{G} \times \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \mathrm{A}\mathrm{B}^{-1}$$

est C^∞ et applique $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ dans G. Donc, d'après la proposition 7.38, $\mathrm{G} = \mathrm{O}(n)$ est un groupe de Lie. $\square$

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.

[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap.1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.

[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[He] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Va84] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.