SÉANCE DU 3 OCTOBRE

7. Groupes de Lie (suite)

7.5. Dérivations et champs de vecteurs. — Soit X une variété C^∞, soit $p \in X$ et soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue dans un voisinage de p. D'après la définition 7.6 (séance du 2 octobre), f est une application de classe C^∞ au voisinage de p si pour une (et donc, pour toute) carte (U, ϕ) au voisinage de p, la fonction $f \circ \phi^{-1}$ est une fonction C^∞ des « coordonnées locales »

$$(x_1, \ldots, x_n).$$

C.-à-d., pour tout $p' \in U$ on écrit $\phi(p') = (x_1, \ldots, x_n)$, on demande alors que la fonction

$$f(x_1, \ldots, x_n)$$

(un abus d'écriture pour désigner $f(p') = (f \circ \phi^{-1})(x_1, \ldots, x_n))$, soit une fonction C^∞ des x_i. Ceci ne dépend pas de la carte choisie, puisque les changements de cartes sont C^∞.

***Définition 7.40* (Germes de fonctions).** — On considère les couples (V, f), où V est un voisinage ouvert de p et $f : V \to \mathbb{R}$ une application C^∞. On dit que deux couples (V, f) et (V', g) sont équivalents si f et g coïncident sur un voisinage W de p contenu dans $V \cap V'$.

Une classe d'équivalence est appelé un **germe de fonction** C^∞ en p. On pense à un germe comme à une fonction C^∞ f définie sur un voisinage « non spécifié » de p. Les germes s'ajoutent et se multiplient commes les fonctions usuelles : si $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont deux germes, et si (V, f) et (V', g) en sont des représentants, alors $f + g$ et fg sont définies et C^∞ sur $W = V \cap V'$, et ceci définit les germes $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ et $\mathbf{fg}$. On vérifie facilement que cela ne dépend pas des

(0) version du 5/11/06

représentants choisis. On obtient donc ainsi une $\mathbb{R}$-algèbre notée

$$\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p.$$

De plus, pour tout voisinage V de p, on a

$$\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p = \mathscr{C}^\infty(\mathrm{V})_p$$

car tout germe en p peut être représenté par un couple (W, f) avec $\mathrm{W} \subseteq \mathrm{V}$. En particulier, prenant (V, ϕ) une carte au voisinage de p et notant U l'ouvert $\phi(\mathrm{V}) \subseteq \mathbb{R}^n$, on obtient

$$\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p = \mathscr{C}^\infty(\mathrm{V})_p \cong \mathscr{C}^\infty(\mathrm{U})_0 = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)_0.$$

Ceci permet de ramener toutes les questions portant sur $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p$ au cas où $\mathrm{X} = \mathbb{R}^n$ (et $p = 0$).

Définition 7.41. — On note $\mathfrak{m}_p$ l'idéal de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p$ formé des germes de fonctions nulles en p. C'est un idéal **maximal**, puisque c'est le noyau du morphisme d'évaluation en p :

$$\varepsilon_p : \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f \mapsto f(p),$$

de sorte que $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p/\mathfrak{m}_p \cong \mathbb{R}$.

***Définition 7.42* (Dérivations ponctuelles)**. — On appelle dérivation ponctuelle en p une application $\mathbb{R}$-linéaire $\mathrm{D} : \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p \to \mathbb{R}$ telle que

$$\mathrm{D}(fg) = f(p)\mathrm{D}(g) + g(p)\mathrm{D}(f), \qquad \forall\, f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p.$$

Un tel D s'annule sur l'idéal $\mathfrak{m}_p^2$ et aussi sur (le germe de) la fonction constante 1, puisque l'égalité

$$\mathrm{D}(1) = \mathrm{D}(1 \cdot 1) = 1 \cdot \mathrm{D}(1) + 1 \cdot \mathrm{D}(1) \quad \text{entraîne} \quad \mathrm{D}(1) = 0.$$

Réciproquement, soit $\eta \in (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$. Alors η s'identifie à une forme linéaire sur $\mathfrak{m}_p$, nulle sur $\mathfrak{m}_p^2$, et comme

$$\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p = \mathbb{R}1 \bigoplus \mathfrak{m}_p,$$

η se prolonge en une forme linéaire sur $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p$, encore notée η, telle que $\eta(1) = 1$. Alors, η est une dérivation ponctuelle. En effet, pour f, g arbitraires, on a

$$fg - f(p)g - g(p)f = (f - f(p)) \cdot (g - g(p)) - f(p)g(p)1\,;$$

par hypothèse, η s'annule sur le membre de droite, d'où $\eta(fg) = f(p)\eta(g) + g(p)\eta(f)$. On obtient donc un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

$$\mathrm{Dér}_p(\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p, \mathbb{R}) \cong (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*$$

où l'on a noté $\mathrm{Dér}_p(\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p, \mathbb{R})$ l'espace des dérivations ponctuelles en p.

***Définition 7.43* (Espaces tangents et différentielles).** — 1) L'espace tangent à X en p est défini par :

$$\mathrm{T}_p\mathrm{X} = \mathrm{Dér}_p(\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p, \mathbb{R}) \cong (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^*.$$

2) Soit $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de variétés. Sa différentielle en p est l'application linéaire

$$d_p\phi : \mathrm{T}_p\mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{T}_{\phi(p)}(\mathrm{Y}), \qquad \mathrm{D} \mapsto \mathrm{D} \circ {}^t\phi,$$

où ${}^t\phi$ désigne la transposée de ϕ, c.-à-d., pour tout $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{Y})_{\phi(p)}$,

$${}^t\phi(g) := g \circ \phi \ \text{ appartient à } \ \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p,$$

et l'on pose

$$(d_p\phi(\mathrm{D}))(g) = \mathrm{D}(g \circ \phi). \tag{$*$}$$

Alors $d_p\phi(\mathrm{D})$ est bien une dérivation ponctuelle de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{Y})_{\phi(p)}$.

***Proposition 7.44* (Différentielle d'une composée).** — $d_p\,\mathrm{id}_\mathrm{X} = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_p\mathrm{X}}$ *et, si* $\psi : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ *est un second morphisme de variétés, alors*

$$d_p(\psi \circ \phi) = d_{\phi(p)}\psi \circ d_p\phi.$$

Démonstration. — Ceci résulte de la définition. □

La définition précédente a l'avantage d'être intrinsèque, c.-à-d., elle ne fait pas intervenir de cartes de X. De plus, il résulte de la proposition que la définition est invariante par difféomorphisme local, c.-à-d., si ϕ est un difféomorphisme d'un voisinage ouvert V de p sur un voisinage ouvert W de $\phi(p)$, alors $d_p\phi$ induit un isomorphisme

$$\mathrm{T}_p\mathrm{X} = \mathrm{T}_p\mathrm{U} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\phi(p)}\mathrm{W} = \mathrm{T}_p\mathrm{Y}.$$

Pour retomber sur nos pieds, il faut vérifier que lorsque $\mathrm{X} = \mathbb{R}^n$, on retrouve la définition antérieure de l'espace tangent. Ceci résulte du lemme et de la proposition qui suivent.

***Lemme 7.45*.** — *Soient* U *une boule ouverte centrée en* 0 *dans* $\mathbb{R}^n$ *et* f *une fonction* C^∞ *sur* U. *Pour tout* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{U}$, *on a*

$$f(x) - f(0) = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,dt, \tag{$\star$}$$

et chaque fonction $g_i(x) = \int_0^1 (\partial f/\partial x_i)(tx)\,dt$ *est* C^∞. *Par conséquent, l'idéal de* $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{U})$ *des fonctions nulles en* 0 *est engendré par les fonctions coordonnées* $x_1, \ldots, x_n$.

Démonstration. — Fixons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et posons $\mathrm{F}(t) = f(tx)$ pour $t \in \mathrm{I}$, où I est un intervalle ouvert contenant $[0,1]$. Alors F est C^∞ et

$$f(x) - f(0) = \mathrm{F}(1) - \mathrm{F}(0) = \int_0^1 \mathrm{F}'(t)\,dt.$$

De plus, F est la composée de f et de l'application linéaire $u : t \mapsto tx$. Donc, pour tout $t \in \mathrm{I}$, $\mathrm{F}'(t)$ égale

$$(d_t\mathrm{F})(1) = (d_{tx} f \circ u)(1) = (d_{tx} f)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx).$$

La formule $(\star)$ en résulte. De plus, par dérivation sous le signe $\int$, chaque g_i est une fonction C^∞ de x. Donc, le terme de droite appartient à l'idéal de $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{U})$ engendré par les fonctions coordonnées $x_1, \dots, x_n$, et si $f(0) = 0$ alors f appartient à cet idéal. Le lemme est démontré. □

Pour tout $i = 1, \dots, n$, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ est une *dérivation* de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, c.-à-d., vérifie

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(fg) = g\,\frac{\partial f}{\partial x_i} + f\,\frac{\partial g}{\partial x_i}, \qquad \forall\, f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

De plus, pour tout $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$, le germe en q (et donc *a fortiori* la valeur en q) de $\partial f/\partial x_i$ ne dépend que du germe de f en q. Donc, $\partial/\partial x_i$ induit un élément

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q \in \mathrm{Dér}_q(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)_q, \mathbb{R}), \qquad \mathbf{f} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(q),$$

où f est un représentant arbitraire du germe $\mathbf{f}$.

Soit $\mathfrak{m}_q$ l'idéal de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)_q$ formé des germes de fonctions nulles en q. Chaque fonction coordonnée $x_i - q_i$ appartient à $\mathfrak{m}_q$ et on note $\overline{x_i - q_i}$ son image dans $\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2$.

Proposition 7.46. — 1) $(\overline{x_1 - q_1}, \dots, \overline{x_n - q_n})$ *est une base de* $\mathfrak{m}_q/\mathfrak{m}_q^2$, *et la base duale de* $\mathrm{Dér}_q(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)_q, \mathbb{R})$ *est*

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_q, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_q\right).$$

2) *L'espace tangent* $\mathrm{T}_q\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ *s'identifie à* $\mathrm{Dér}_q(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)_q, \mathbb{R})$ *: tout vecteur* $v = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$ *correspond à la dérivation ponctuelle*

$$\mathrm{D}_v : \mathbf{f} \mapsto (d_q f)(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(q) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q (\mathbf{f}),$$

où f *est un représentant arbitraire du germe* $\mathbf{f}$*.*

Démonstration. — Par translation, on se ramène à $q = 0$. D'après le lemme 7.45, $x_1, \dots, x_n$ engendrent $\mathfrak{m}_0$, et donc leurs images $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$ engendrent $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$. Elles sont linéairement indépendantes puisque

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 (\overline{x_j}) = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}(0) = \delta_{ij}.$$

L'assertion 1) en résulte, et l'assertion 2) aussi. □

Revenons à une variété C^∞ arbitraire X. Soit $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$ l'algèbre des fonctions C^∞ sur X.

***Définition 7.47* (Dérivations de $\mathscr{C}^\infty$(X)).** — Une **dérivation** de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire $\mathrm{D} : \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$ telle que

$$\mathrm{D}(fg) = \mathrm{D}(f)g + f\mathrm{D}(g), \qquad \forall\, f, g \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X}).$$

On note $\mathrm{Dér}(\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X}))$ l'espace des dérivations de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$.

Définition 7.48. — 1) Pour tout $p \in \mathrm{X}$, on note

$$\varepsilon_p : \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \mathbf{f} \mapsto \mathbf{f}(p)$$

l'application d'évaluation en p (d'un germe en p) et l'on désigne par ε_p' la restriction de ε_p à $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$.

2) Pour $\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}(\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X}))$, on note D_p la composée $\varepsilon_p' \circ \mathrm{D}$, c.-à-d.,

$$\forall\, f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X}), \qquad \mathrm{D}_p(f) := \mathrm{D}(f)(p).$$

***Théorème 7.49* (Localité des dérivations)**. — *Soit* $\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}(\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X}))$.

1) *Pour tout* $p \in \mathrm{X}$, D_p *se prolonge en une dérivation ponctuelle*

$$\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p \longrightarrow \mathbb{R}$$

2) *Soit* $p_0 \in \mathrm{X}$. *Il existe un système de coordonnées locales* $(x_1, \dots, x_n)$ *sur un voisinage ouvert* V *de* p_0 *tel que, pour tout* $p \in \mathrm{V}$, *on ait*

$$\mathrm{D}_p = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p,$$

où chaque a_i *est une fonction* C^∞ *sur* V.

Démonstration. — Montrons d'abord que, pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$, le germe en p de $\mathrm{D}(f)$ ne dépend que de celui de f. Par linéarité, il suffit de montrer que si $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$ est nulle sur un voisinage V de p, alors il en est de même de $\mathrm{D}(f)$.

Il existe une fonction $h \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$ nulle hors de V et valant 1 sur un petit voisinage W de p contenu dans V, cf. [**Laf**, Chap. III.A]. Alors on a

$$f = f(1 - h),$$

car $f = 0$ dans V et $(1 - h) = 1$ hors de V. Donc

$$\mathrm{D}(f) = \mathrm{D}(f)(1-h) + f\mathrm{D}(1-h)$$

est nulle sur W, ce qui prouve notre première assertion.

Soit maintenant $\mathbf{f}$ un germe en p de fonction C^∞, représenté par un couple (U, f). Soit V un voisinage de p tel que $\overline{\mathrm{V}} \subseteq \mathrm{U}$ et soit h une fonction C^∞ nulle hors de V et valant 1 dans un petit voisinage de p. Alors la fonction fh est C^∞ sur X et l'on peut poser

$$\mathrm{D}_p(\mathbf{f}) := \mathrm{D}_p(fh).$$

D'après ce qui précède, ceci ne dépend pas du choix de h. Ceci prouve 1).

Montrons 2). Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées locales sur un voisinage ouvert U de p_0. Alors, d'après la proposition 7.46, pour tout $p \in \mathrm{U}$ les $(\partial/\partial x_i)_p$ forment une base de $\mathrm{Dér}_p(\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})_p, \mathbb{R})$, et on peut donc écrire

$$\mathrm{D}_p = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p,$$

avec des coefficients $a_i(p) \in \mathbb{R}$ uniquement déterminés. D'après ce qui précède, il existe une fonction $\widetilde{x_i} \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$ qui coïncide avec x_i sur un voisinage V de p_0 contenu dans U. Alors on a, pour tout $p \in \mathrm{V}$,

$$a_i(p) = \mathrm{D}_p(x_i) = \mathrm{D}_p(\widetilde{x_i}) = \mathrm{D}(\widetilde{x_i})(p),$$

ce qui montre que a_i coïncide sur V avec la fonction $\mathrm{D}(\widetilde{x_i}) \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$. La proposition est démontrée. □

Définition 7.50 **(Champs de vecteurs)**. — Un champ de vecteurs C^∞ v sur X est la donnée, pour tout $p \in \mathrm{X}$, d'un élément de $\mathrm{T}_p\mathrm{X}$ noté v_p ou $v(p)$, de telle sorte que : pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$, l'application

$$\mathrm{D}_v(f) : p \mapsto d_p f(v_p) \quad \text{soit } \mathrm{C}^\infty.$$

Dans ce cas, l'application $f \mapsto \mathrm{D}_v(f)$ est une **dérivation** de $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$, puisque pour tout p on a

$$d_p(fg) = f(p) d_v g + g(p) d_v f.$$

Proposition 7.51. — *Réciproquement, soit* D *une dérivation de* $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$. *Alors*

$$v : p \mapsto v(p) = \mathrm{D}_p$$

est un champ de vecteurs C^∞. *Donc : « une dérivation de* $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$ *est la même chose qu'un champ de vecteurs* C^∞ *sur* X *».*

Démonstration. — Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$ et soit $p_0 \in \mathrm{X}$ arbitraire. D'après la proposition précédente, il existe un système de coordonnées locales sur un voisinage V de p_0 tel que, pour tout $p \in \mathrm{V}$, on ait

$$v(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p,$$

où les a_i sont des fonctions C^∞ sur V. Alors, pour $p \in \mathrm{V}$, on a

$$d_p f(v_p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

et ceci est une fonction C^∞ de p. Ceci montre que $\mathrm{D}_v(f)$ est une fonction C^∞, et donc $p \mapsto v(p) = \mathrm{D}_p$ est un champ de vecteurs C^∞. □

Changeons maintenant de notations : dans la suite, nous désignerons par M, M' des variétés C^∞ et par X, Y (resp. X', Y') des champs de vecteurs C^∞ sur M (resp. M$'$).

***Définition 7.52* (Dérivations d'une algèbre).** — Soit A un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, muni d'un produit $\mathbb{R}$-bilinéaire

$$\mathrm{A} \times \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}, \qquad (a, b) \mapsto ab.$$

(On ne suppose pas le produit commutatif, ni associatif.) Une **$\mathbb{R}$-dérivation de** A est un $\mathbb{R}$-endomorphisme D de A qui vérifie :

$$\forall\, a, b \in \mathrm{A}, \qquad \mathrm{D}(ab) = a\mathrm{D}(b) + \mathrm{D}(a)b.$$

On note Dér(A) l'ensemble des $\mathbb{R}$-dérivations de A ; c'est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A})$.

***Lemme 7.53*.** — *Soient* D, D' *des dérivations de* A. *Alors* $\mathrm{DD}' - \mathrm{D}'\mathrm{D}$ *est une dérivation de* A. *Par conséquent,* Dér(A) *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A})$ (cf. 6.2, séance du 26/9).

Démonstration. — On calcule :

$$\mathrm{DD}'(ab) = \mathrm{D}(\mathrm{D}'(a)b + a\mathrm{D}'(b)) = \mathrm{DD}'(a)b + \mathrm{D}'(a)\mathrm{D}(b) + \mathrm{D}(a)\mathrm{D}'(b) + a\mathrm{DD}'(b).$$

Les deux termes du milieu étant symétriques en D et D$'$, on obtient que

$$(\mathrm{DD}' - \mathrm{D}'\mathrm{D})(ab) = (\mathrm{DD}' - \mathrm{D}'\mathrm{D})(a)b + a(\mathrm{DD}' - \mathrm{D}'\mathrm{D})(b).$$

Ceci montre que $\mathrm{DD}' - \mathrm{D}'\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}(\mathrm{A})$, d'où le lemme. □

***Définition et proposition 7.54* (Crochet de deux champs de vecteurs)**

Soit M *une variété* C^∞ *et* X, Y *deux champs de vecteurs* C^∞*, considérés comme des dérivations de* $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{M})$. *Alors,*

$$[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] := \mathrm{X} \circ \mathrm{Y} - \mathrm{Y} \circ \mathrm{X}$$

est une dérivation, donc un champ de vecteurs, appelé le crochet de Lie des champs de vecteurs X *et* Y*.*

Démonstration. — Ceci résulte du lemme précédent, appliqué à $\mathrm{A} = \mathscr{C}^\infty(\mathrm{X})$. □

Notation 7.55. — Soit X un champ de vecteurs sur M. Pour tout $m \in \mathrm{M}$, on a le vecteur tangent $\mathrm{X}_m = \mathrm{X}(m)$, et pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{M})$, on note

$$\mathrm{X}_m \cdot f = \mathrm{X}_m(f) = \mathrm{X}(f)(m).$$

Par conséquent, si Y est un second champ de vecteurs sur M, on a

$$\begin{aligned}[\mathrm{X},\mathrm{Y}]_m \cdot f = [\mathrm{X},\mathrm{Y}](f)(m) = \mathrm{X}(\mathrm{Y}(f))(m) - \mathrm{Y}(\mathrm{X}(f))(m)\\ = \mathrm{X}_m(\mathrm{Y}(f)) - \mathrm{Y}_m(\mathrm{X}(f)).\end{aligned}$$

Terminons ce paragraphe avec la définition et proposition suivantes, qui seront utiles plus loin.

***Définition 7.56* (Champs de vecteurs ϕ-liés)**. — Soit $\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ un morphisme de variétés C^∞. On dit que des champs de vecteurs X sur M et X′ sur M′ sont **ϕ-liés** si, pour tout $m \in \mathrm{M}$, l'on a :

$$\mathrm{X}'(\phi(m)) = d_m\phi(\mathrm{X}(m)). \tag{†}$$

Ceci entraîne que, pour tout $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{M}')$, on a l'égalité de fonctions sur M suivante :

$$\mathrm{X}'(f) \circ \phi = \mathrm{X}(f \circ \phi). \tag{‡}$$

En effet, pour tout $m \in \mathrm{M}$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{X}'(f)(\phi(m)) &= \langle d_{\phi(m)}f, \mathrm{X}'(\phi(m))\rangle\\ &= \langle d_{\phi(m)}f, d_m\phi\mathrm{X}(m)\rangle\\ &= \langle d_m(f\circ\phi), \mathrm{X}(m)\rangle = \mathrm{X}(f\circ\phi)(m).\end{aligned}$$

Proposition 7.57. — *Soit* $\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ *un morphisme de variétés* C^∞ *et soient* X,Y (*resp.* X',Y') *des champs de vecteurs sur* M (*resp* M′)*. On suppose que* X *et* X′ (*resp.* Y *et* Y′) *sont ϕ-liés. Alors :*

$$[\mathrm{X},\mathrm{Y}] \quad \textit{est } \phi\textit{-lié à} \quad [\mathrm{X}',\mathrm{Y}'].$$

Démonstration. — Soit $m \in \mathrm{M}$. Il faut montrer l'égalité

$$d_m\phi([\mathrm{X},\mathrm{Y}]_m) = [\mathrm{X}',\mathrm{Y}']_{\phi(m)}.$$

Pour cela, il suffit de montrer que ces deux éléments de $\mathrm{T}_{\phi(m)}\mathrm{M}'$ prennent la même valeur sur tout $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{M}')$. Or, en utilisant la définition de $d_m\phi$ (7.43

$(*)$), la définition du crochet, l'hypothèse (†) que X, X' et Y, Y' sont ϕ-liés, et sa conséquence (‡), on obtient :

$$\begin{aligned} d_m\phi([X,Y]_m)(f) &\overset{(*)}{=} [X,Y]_m \cdot (f \circ \phi) \\ &\overset{\text{déf.}}{=} X_m(Y(f\circ\phi)) - Y_m(X(f\circ\phi)) \\ &\overset{(\ddagger)}{=} X_m(Y'(f)\circ\phi) - Y_m(X'(f)\circ\phi) \\ &\overset{(*)}{=} d_m\phi(X_m)\cdot Y'(f) - d_m\phi(Y_m)\cdot X'(f) \\ &\overset{(\dagger)}{=} X'_{\phi(m)}(Y'(f)) - Y'_{\phi(m)}(X'(f)) \\ &\overset{\text{déf.}}{=} [X',Y']_{\phi(m)}(f). \end{aligned}$$

Ceci prouve la proposition. □

7.6. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie. — Soit G un groupe de Lie. Pour tout $g \in G$, on note ℓ_g la translation à gauche $h \mapsto gh$; c'est un difféomorphisme de G. On note λ_g l'action correspondante sur $\mathscr{C}^\infty(G)$, définie par

$$\lambda_g(\phi) = \phi \circ \ell_{g^{-1}}, \qquad \text{c.-à-d.,} \quad \lambda_g(\phi)(h) = \phi(g^{-1}h), \quad \forall\, h \in G.$$

(On met g^{-1} pour avoir $\lambda_g \circ \lambda_{g'} = \lambda_{gg'}$.) Alors, pour $\phi \in \mathscr{C}^\infty(G)$ et $g, h \in G$, on a :

$$(1) \qquad d_h(\lambda_{g^{-1}}(\phi)) = d_h(\phi \circ \ell_g) = d_{gh}\phi \circ d_h\ell_g.$$

Pour alléger l'écriture, on notera Dér(G) au lieu de Dér($\mathscr{C}^\infty(G)$).

Définition 7.58 **(Champs de vecteurs et dérivations invariants par λ_G)**
Un champ de vecteurs X sur G est dit **invariant à gauche** si l'on a :

$$(2) \qquad \forall\, g \in G, \qquad X_g = d_1\ell_g(X_1).$$

Ceci équivaut à :

$$(2') \qquad \forall\, g, h \in G, \qquad X_{gh} = d_h\ell_g(X_h)$$

puisque $d_1\ell_{gh} = d_1(\ell_g \circ \ell_h) = d_h\ell_g \circ d_1\ell_h$. D'autre part, une dérivation D de $\mathscr{C}^\infty(G)$ est dite **invariante à gauche** si :

$$(3) \qquad \forall\, g \in G, \qquad \lambda_g \circ D = D \circ \lambda_g.$$

Bien sûr, ces deux notions correspondent, c.-à-d., un champ de vecteurs X est invariant à gauche si et seulement si la dérivation correspondante D_X l'est. Ceci résulte du calcul suivant, où l'égalité $(*)$ équivaut à (3), tandis que l'égalité des deux extrêmes équivaut à (1′) :

$$\begin{aligned} \mathrm{D_X}(\phi)(gh) &= (\lambda_{g^{-1}} \circ \mathrm{D_X})(\phi)(h) \\ &\overset{(*)}{=} (\mathrm{D_X} \circ \lambda_{g^{-1}})(\phi)(h) \\ &= d_h(\lambda_{g^{-1}}(\phi))(\mathrm{X}_h) \\ &= \langle d_{gh}\phi,\, d_h\ell_g(\mathrm{X}_h)\rangle \end{aligned}$$

Notons $\mathscr{V}(\mathrm{G})^{\lambda(\mathrm{G})}$, resp. $\mathrm{Dér}(\mathrm{G})^{\lambda(\mathrm{G})}$, l'espace vectoriel des champs de vecteurs invariants à gauche (resp. dérivations invariantes à gauche).

Évidemment, l'application qui à un vecteur tangent à l'origine X_1 associe le champ de vecteurs invariant X défini par $\mathrm{X}_g = d_1\ell_g(\mathrm{X}_1)$ induit des isomorphismes d'espaces vectoriels

$$\mathrm{T_1G} \xrightarrow{\sim} \mathscr{V}(\mathrm{G})^{\lambda(\mathrm{G})} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dér}(\mathrm{G})^{\lambda(\mathrm{G})};$$

la dérivation $\mathrm{D_X}$ correspondante est définie par :

$$\mathrm{D_X}(\phi)(g) = d_g\phi(\mathrm{X}_g) = (d_g\phi \circ d_1\ell_g)(\mathrm{X}_1) = d_1(\phi \circ \ell_g)(\mathrm{X}_1).$$

L'isomorphisme réciproque $\mathrm{Dér}(\mathrm{G})^{\lambda(\mathrm{G})} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T_1G}$ est donné par $\mathrm{D} \mapsto \mathrm{D}_1$, où $\mathrm{D}_1(\phi) = \mathrm{D}(\phi)(1)$, et l'on retrouve D à partir de D_1 par la formule :

$$\mathrm{D}(\phi)(g) = \mathrm{D}_1(\lambda_{g^{-1}}\phi) = \mathrm{D}_1(\phi \circ \ell_g). \tag{3′}$$

Proposition 7.59. — $\mathrm{Dér}(\mathrm{G})^{\lambda(\mathrm{G})}$ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathrm{Dér}(\mathrm{G})$*, de dimension* $\dim \mathrm{T_1G} = \dim \mathrm{G}$.

Démonstration. — Si D, D' sont invariantes, alors pour tout g l'on a

$$\lambda_g \circ \mathrm{D} \circ \mathrm{D}' = \mathrm{D} \circ \lambda_g \circ \mathrm{D}' = \mathrm{D} \circ \mathrm{D}' \circ \lambda_g,$$

et de même pour $\mathrm{D}' \circ \mathrm{D}$, donc $[\mathrm{D}, \mathrm{D}'] = \mathrm{DD}' - \mathrm{D}'\mathrm{D}$ est invariante. □

Définition 7.60. — Via l'isomorphisme $\mathrm{T_1G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dér}(\mathrm{G})^{\lambda(\mathrm{G})}$, $\mathrm{T_1G}$ est muni d'une struture d'algèbre de Lie, notée Lie(G).

***Théorème 7.61* (Fonctorialité)**. — *Soit* $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un morphisme de groupes de Lie. Alors, sa différentielle en* 1*, notée* $d_1\phi$ *ou simplement* $d\phi$*, est un morphisme d'algèbres de Lie de* $\mathrm{T_1G} = \mathrm{Lie(G)}$ *vers* $\mathrm{T_1G}' = \mathrm{Lie(G')}$.

Démonstration. — Comme ϕ est un morphisme de groupes, alors

$$\forall\, g \in \mathrm{G}, \qquad \phi \circ \ell_g = \ell_{\phi(g)} \circ \phi. \tag{1}$$

Soient X, X' deux champs de vecteurs invariants à gauche sur G et soit Y, resp. Y', l'unique champ de vecteurs invariant à gauche sur G' tel que

$$\mathrm{Y}_1 = d_1\phi(\mathrm{X}_1), \qquad \text{resp.} \quad \mathrm{Y}'_1 = d_1\phi(\mathrm{X}'_1).$$

Alors X et Y, resp. X′ et Y′, sont ϕ-liés. En effet, pour tout $g \in \mathrm{G}$ on a, en utilisant (1),

$$\mathrm{Y}_{\phi(g)} = d_1\ell_{\phi(g)}(\mathrm{Y}_1) = (d_1\ell_{\phi(g)} \circ d_1\phi)(\mathrm{X}_1) \overset{(1)}{=} d_1(\phi \circ \ell_g)(\mathrm{X}_1) = d_g\phi(\mathrm{X}_g),$$

et de même pour Y′ et X′. Donc, d'après la proposition 7.57, $[\mathrm{X}, \mathrm{X}']$ et $[\mathrm{Y}, \mathrm{Y}']$ sont ϕ-liés. Le théorème en découle. □

Avant d'énoncer un corollaire au théorème, signalons le résultat ci-dessous, implicitement contenu dans le lemme 6.16 (séance du 26/9).

Lemme 7.62. — *Soient* G *un groupe de Lie et* G^0 *sa composante connexe. Alors* G^0 *est un sous-groupe ouvert et fermé.*

Démonstration. — Comme G est une variété C^∞, disons de dimension n, tout point possède un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, donc connexe. Donc G^0 est ouvert, d'après le lemme 6.16. Et tout sous-groupe ouvert est aussi fermé (lemme 6.17). □

Corollaire 7.63. — *Soient* G *un groupe de Lie,* G^0 *sa composante connexe. Alors* $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}^0) = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$.

Démonstration. — Comme G^0 est un voisinage ouvert de 1, on a $\mathrm{T}_1\mathrm{G}^0 = \mathrm{T}_1\mathrm{G}$ comme espaces vectoriels, et aussi comme algèbres de Lie, d'après le théorème précédent. □

7.7. Retour aux sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. — Revenons sur les résultats de la Section 6 (séance du 26/9). Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On lui a associé, en utilisant les propriétés de l'exponentielle, la sous-algèbre de Lie de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$\mathfrak{g} = \{\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \exp(t\mathrm{X}) \in \mathrm{G}\}.$$

On va montrer que G est un groupe de Lie et que son algèbre de Lie est $\mathfrak{g}$. On note $\mathrm{I} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ la matrice identité.

Soit $(g_k)_{k\geqslant 1}$ une suite d'éléments $\neq \mathrm{I}$ de G qui converge vers I. Quitte à remplacer g_k par g_{k_0+k}, pour k_0 assez grand, on peut supposer que :

$$\forall\, k \geqslant 1, \qquad \|g_k - \mathrm{I}\| < 1.$$

Alors, d'après le théorème 6.4, $\mathrm{Y}_k := \log(g_k - \mathrm{I})$ est un élément non nul de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, vérifiant

$$\|\mathrm{Y}_k\| < \log(2) \qquad \text{et} \qquad \exp(\mathrm{Y}_k) = g_k.$$

Posons $\mathrm{X}_k = \frac{\mathrm{Y}_k}{\|\mathrm{Y}_k\|}$; c'est un élément de la sphère unité $\mathbf{S}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, qui est compacte. Donc la suite $(\mathrm{X}_k)_{k\geqslant 1}$ possède au moins une valeur d'adhérence $\mathrm{X} \in \mathbf{S}$.

Lemme 7.64. — *Soit* $X \in \mathbf{S}$ *une valeur d'adhérence de la suite* $(X_k)_{k\geqslant 1}$. *Alors* $X \in \mathbf{S} \cap \mathfrak{g}$.

Démonstration. — Remplaçant $(X_k)_{k\geqslant 1}$ par une sous-suite, on peut supposer que

$$\lim_{k\to\infty} X_k = X.$$

Fixons $t \in \mathbb{R}$ et posons $t_k = t/\|Y_k\|$. Alors $tX_k = t_k Y_k$ et l'on a

$$\exp(tX) = \lim_{k\to\infty} \exp(tX_k) = \lim_{k\to\infty} \exp(t_k Y_k).$$

Notons n_k la partie entière de t_k et $t'_k = t_k - n_k$. Pour tout k, on a

$$\exp(t_k Y_k) = \exp(Y_k)^{n_k} \cdot \exp(t'_k Y_k) = g_k^{n_k} \cdot \exp(t'_k Y_k).$$

Comme $|t'_k| < 1$ et $Y_k \to 0$, alors $\exp(t'_k Y_k)$ converge vers I, et donc $\exp(tX)$ est la limite de la suite $(g_k^{n_k})$. Comme G est un sous-groupe fermé, cette limite appartient à G, c.-à-d., on a

$$\exp(tX) \in G, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Ceci montre que $X \in \mathfrak{g}$. Le lemme est démontré. □

Soit $\mathfrak{m}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathfrak{g}$ dans $M_n(\mathbb{R})$, c.-à-d.,

$$(*) \qquad M_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{g} \bigoplus \mathfrak{m}.$$

Lemme 7.65. — *Il existe un voisinage ouvert* V *de* 0 *dans* $\mathfrak{m}$ *tel que* $\exp(V) \cap G = \{1\}$.

Démonstration. — En effet, il existerait sinon une suite d'éléments non nuls $Y_k \in \mathfrak{m}$, convergeant vers 0, et telle que $g_k = \exp(Y_k)$ soit un élément de G, distinct de I (cf. 6.4), pour tout k. Alors chaque

$$X_k = \frac{Y_k}{\|Y_k\|}$$

appartient à la sphère unité $\mathbf{S}_{\mathfrak{m}}$ de $\mathfrak{m}$, donc la suite X_k possède une valeur d'adhérence $X \in \mathbf{S}_{\mathfrak{m}}$. Mais d'après le lemme précédent, $X \in \mathfrak{g}$, d'où une contradiction avec l'hypothèse $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{g} = \{0\}$. Ceci prouve le lemme. □

Théorème 7.66. — *Il existe un voisinage ouvert* Ω *de* 0 *dans* $M_n(\mathbb{R})$, *resp.* W *de* I *dans* $GL_n(\mathbb{R})$, *et un difféomorphisme* C^∞

$$\psi : W \xrightarrow{\sim} \Omega \qquad \textit{tel que} \qquad W \cap G = \psi(\Omega \cap \mathfrak{g}).$$

Par conséquent, G *est un groupe de Lie, de dimension* $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$, *et son algèbre de Lie est* $\mathfrak{g}$.

Démonstration. — L'application ϕ ci-dessous est C^∞,

$$\phi : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \qquad (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto \exp(\mathrm{X})\exp(\mathrm{Y}),$$

et sa différentielle en $(0,0)$ est $\mathrm{id}_\mathfrak{g} \oplus \mathrm{id}_\mathfrak{m}$, qui est un isomorphisme. Donc d'après le théorème d'inversion locale (7.22), il existe des voisinages ouverts U, V, resp. W, de 0 dans $\mathfrak{g}, \mathfrak{m}$, resp. de I dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, tels que ϕ induise un difféomorphisme

$$\psi : \mathrm{U} \times \mathrm{V} \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}.$$

De plus, d'après le lemme précédent on peut supposer, quitte à rétrécir V, que l'on a $\exp(\mathrm{V}) \cap \mathrm{G} = \{1\}$. Il est clair que

$$\exp(\mathrm{U}) = \psi(\mathrm{U} \times \{0\}) \subseteq \mathrm{W} \cap \mathrm{G}.$$

Réciproquement, soit $g \in \mathrm{G} \cap \mathrm{W}$. Alors, il existe $\mathrm{X} \in \mathrm{U}$ et $\mathrm{Y} \in \mathrm{V}$ tels que $g = \exp(\mathrm{X})\exp(\mathrm{Y})$, mais alors

$$\exp(\mathrm{Y}) = \exp(-\mathrm{X})g \quad \text{appartient à} \quad \exp(\mathrm{V}) \cap \mathrm{G} = \{1\},$$

d'où $\mathrm{Y} = 0$. Posant $\Omega = \mathrm{U} \times \mathrm{V}$, ceci montre que

$$\mathrm{W} \cap \mathrm{G} = \psi(\Omega \cap \mathfrak{g}),$$

ce qui est la première assertion du théorème. Par conséquent, G est, au voisinage de I, une sous-variété C^∞ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, de dimension $d = \dim \mathfrak{g}$.

Il en est de même en tout point $g \in \mathrm{G}$, puisque la translation $\ell_g : \mathrm{A} \mapsto g\mathrm{A}$ est un difféomorphisme C^∞ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Ceci montre que G est un groupe de Lie, de dimension d.

Enfin, pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$, la courbe $f(t) = \exp(t\mathrm{X})$ est C^∞, à valeurs dans G, et vérifie $f(0) = \mathrm{I}$ et

$$f'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\exp(t\mathrm{X}) - \mathrm{I}}{t} = \mathrm{X}.$$

Donc $\mathrm{X} \in \mathrm{T_I G} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, et ceci montre que $\mathfrak{g} \subseteq \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. Comme

$$\dim \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{G}) = \dim \mathfrak{g},$$

on a l'égalité $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. Le théorème est démontré. □

Pour résumer, on peut reformuler le théorème sous la forme suivante.

Corollaire 7.67. — *Tout sous-groupe fermé* G *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *est un groupe de Lie, et l'on a*

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{G}) = \{\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \mid \exp(t\mathrm{X}) \in \mathrm{G}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 7.68. — Soit $\mathrm{V} = \mathbb{R}^n$ et soient G un sous-groupe fermé de GL(V) et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. On suppose G connexe.

1) Montrer que G est engendré par $\exp(\mathfrak{g})$.

2) On note V^G, resp. $V^{\mathfrak{g}}$, l'ensemble des $v \in V$ tels que $gv = v$, resp. $Xv = 0$, pour tout $g \in G$, resp. $X \in \mathfrak{g}$. Montrer que $V^{\mathfrak{g}} = V^G$.

3) Soit W un sous-espace de V. Montrer que W est stable par $\mathfrak{g} \Leftrightarrow$ W est stable par G.

Le théorème 7.66, dû à J. von Neumann, établit que tout sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété fermée et donc un groupe de Lie. Ceci a été généralisé par É. Cartan au cas où $GL_n(\mathbb{R})$ est remplacé par un groupe de Lie G quelconque, c.-à-d., on a le théorème ci-dessous. Pour la démonstration, voir [**BtD**, Ch. I, 3.11] ou [**Go**, § 6.12] (ou aussi [**DK**, 1.10.7] ou [**Va**, Th. 2.12.6]).

Théorème 7.69. — *Soit* G *un groupe de Lie et soit* H *un sous-groupe fermé de* G*. Alors* H *est une sous-variété fermée de* G *et donc un groupe de Lie.*

Remarque 7.70. — **Attention !** Dans le théorème 7.69, on a précisé que H est *une sous-variété fermée de* G *et donc* un groupe de Lie.

La notion de *sous-groupe de Lie* est assez délicate, car en général un sous-groupe de Lie n'est pas une sous-variété ! Voici deux exemples.

Exemples 7.71. — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Q}$. Alors :

1) Le sous-groupe H de S^1 engendré par $\exp(i\alpha)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, mais c'est un sous-groupe dense de S^1, donc ce n'est pas une sous-variété, et de plus la topologie induite par celle de S^1 n'est pas la topologie discrète de $\mathbb{Z}$. En d'autres termes, le morphisme

$$\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow S^1, \qquad n \mapsto \exp(ni\alpha)$$

est C^∞ (trivialement) et bijectif, donc fait de $\mathbb{Z}$ un *sous-groupe de Lie* de S^1, mais ϕ n'est pas un homéomorphisme de $\mathbb{Z}$ sur son image.

2) De même, le morphisme de groupes

$$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \times S^1, \qquad t \mapsto (\exp(it), \exp(it\alpha))$$

est C^∞ et bijectif, donc fait de $\mathbb{R}$ un *sous-groupe de Lie* de $S^1 \times S^1$. Mais $\psi(\mathbb{R})$ est dense dans $S^1 \times S^1$, donc n'en est pas une sous-variété, et ψ n'est pas un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur son image.

Une conséquence du théorème 7.69 est la suivante.

Théorème 7.72. — *Soient* H, H' *deux groupes de Lie et* $f : H \to H'$ *un morphisme de groupes* **continu***. Alors* f *est une application* C^∞*.*

Démonstration. — Comme f est un morphisme continu, son graphe

$$\Gamma_f = \{(h, f(h)) \mid h \in H\}$$

est un sous-groupe fermé du groupe de Lie $G = H \times H'$. Donc, d'après le théorème 7.69, Γ_f est un sous-groupe de Lie fermé de G.

Notons ϕ la restriction à Γ_f de la projection $\mathrm{pr}_1 : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$. Alors ϕ est C^∞, bijective, et sa différentielle en tout point est bijective. Donc ϕ est un difféomorphisme local, et puisqu'il est bijectif c'est donc un difféomorphisme. Alors f égale $\mathrm{pr}_2 \circ \phi^{-1}$ donc est C^∞. □

Remarque 7.73. — Pour une autre démonstration du théorème 7.72, basée sur les propriétés de l'exponentielle, voir [**Go**, § 6.10] ou [**Wa**, Th. 3.38] ou [**Va**, § 2.11].

7.8. Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie. — Commençons par le théorème suivant.

Théorème 7.74. — *Soit* $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un morphisme de groupes de Lie. Alors* $\mathrm{Ker}\,\phi$ *est un sous-groupe de Lie fermé de* G *et l'on a*

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Ker}\,\phi) = \mathrm{Ker}\,d\phi.$$

Démonstration. — Pour tout $g \in \mathrm{G}$, on a $\phi \circ \ell_g = \ell_{\phi(g)} \circ \phi$ et donc

$$d_g\phi \circ d_1\ell_g = d_1\ell_{\phi(g)} \circ d_1\phi.$$

Par conséquent, ϕ est de rang constant $r = \mathrm{rang}(d_1\phi)$. Donc, d'après le théorème du rang constant 7.35, le sous-groupe $\mathrm{Ker}\,\phi = \phi^{-1}(1)$ est une sous-variété fermée de dimension

$$d = \dim \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) - r = \dim \mathrm{Ker}\,d\phi.$$

C'est donc un sous-groupe de Lie fermé de G. De plus, ϕ étant identiquement égale à 1 sur $\mathrm{Ker}\,\phi$, on a

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Ker}\,\phi) \subseteq \mathrm{Ker}\,d\phi,$$

d'où l'égalité puisque ces deux espaces ont même dimension. Le théorème est démontré. □

***Définition 7.75* (Immersions, etc.)**. — Soit $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ une application C^∞ entre deux variétés C^∞. On dit que f est une **immersion** (resp. submersion, resp. application étale) si, pour tout $m \in \mathrm{M}$, $d_m f$ est injective (resp. surjective, resp. bijective).

Ainsi, « *application étale* » est synonyme de *difféomorphisme local.*

Remarque 7.76. — Attention, une immersion n'est pas nécessairement injective ! Par exemple, $\phi : \mathrm{S}^1 \to \mathrm{S}^1$, $z \mapsto z^2$ et $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ sont des immersions non injectives.

***Lemme 7.77* (Immersions, etc. de groupes de Lie)**. — *Soit* $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un morphisme de groupes de Lie. Alors* ϕ *est une immersion* (*resp. submersion, resp. application étale*) *si et seulement si* $d_1\phi$ *est injective* (*resp. surjective, resp. bijective*).

Démonstration. — Notons ℓ_g, resp. ℓ_h, la translation à gauche par un élément $g \in \mathrm{G}$, resp. $h \in \mathrm{G}'$. Pour tout $g \in \mathrm{G}$, on a $\phi \circ \ell_g = \ell_{\phi(g)} \circ \phi$ et donc :

$$d_g\phi \circ d_1\ell_g = d_1\ell_{\phi(g)} \circ d_1\phi.$$

Comme $d_1\ell_g$ et $d_1\ell_{\phi(g)}$ sont inversibles, ceci montre que $d_g\phi$ est injective (resp. surjective, resp. bijective) si et seulement si $d_1\phi$ l'est. □

***Définition 7.78* (Sous-groupes de Lie).** — Soit G un groupe de Lie. Un sous-groupe de Lie de G est un sous-groupe H, muni d'une structure de groupe de Lie telle que l'inclusion $\mathrm{H} \hookrightarrow \mathrm{G}$ soit une application C^∞ (et donc un morphisme de groupes de Lie).

De façon plus formelle mais équivalente, un sous-groupe de Lie est une classe d'équivalence de couples (H, τ), où H est un groupe de Lie et τ une immersion injective ; deux tels couples (H, τ) et (H', τ') étant équivalents s'il existe un isomorphisme $\phi : \mathrm{H} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}'$ tel que $\tau' \circ \phi = \tau$.

Le théorème suivant est important. Pour une démonstration reposant sur la théorie des équations différentielles (plus précisément, le théorème d'intégrabilité de Frobenius), on renvoie à [**Va**, § 2.5] ou [**Wa**, 3.19]. (Pour d'autres démonstrations, voir [**Go**, § 6.13] ou [**DK**, 1.10.3].)

***Théorème 7.79* (Sous-groupes de Lie).** — *Soient* G *un groupe de Lie,* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ *et* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$*. Il existe un* **unique** *sous-groupe de Lie* **connexe** H *tel que* $\mathrm{Lie}(\mathrm{H}) = \mathfrak{h}$*, c.-à-d., il existe un groupe de Lie connexe* H *et une immersion injective*

$$\tau : \mathrm{H} \hookrightarrow \mathrm{G} \qquad \textit{telle que} \quad d\tau = \sigma,$$

où σ *désigne l'inclusion* $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$*. De plus, le couple* (H, τ) *est unique à isomorphisme unique près. On dit que* H *est le sous-groupe* **associé à** $\mathfrak{h}$*.*

Par un argument de graphe, le théorème ci-dessus se généralise au cas d'un morphisme d'algèbres de Lie $\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$. Avant d'énoncer cette généralisation, commençons par quelques définitions.

Soient X, Y deux espace topologiques et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application continue. Rappelons que f est un *homéomorphisme local* si tout $x \in \mathrm{X}$ possède un voisinage ouvert U tel que f induise un homémorphisme de U sur $f(\mathrm{U})$. On s'intéresse à la condition plus forte suivante.

***Définition 7.80* (Revêtements).** — On dit que $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un **revêtement** si tout $y \in \mathrm{Y}$ possède un voisinage ouvert V tel que $f^{-1}(\mathrm{V})$ soit une réunion disjointe d'ouverts de X, chacun homéomorphe à V par f.

Exemples 7.81. — Les applications $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, $z \mapsto z^n$ et $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ sont des revêtements.

Remarque 7.82. — Tout revêtement est un homéomorphisme local, mais la réciproque est fausse. Par exemple, la restriction à $\mathrm{X} = \mathbb{C}^* \setminus \{-1\}$ de $z \mapsto z^2$ est un difféomorphisme local $f : \mathrm{X} \to \mathbb{C}^*$ mais n'est pas un revêtement. En effet, pour tout disque V centré en 1 et de rayon $\varepsilon < 1$, $f^{-1}(\mathrm{V})$ est réunion disjointe d'un voisinage de 1 homéomorphe à V et d'un voisinage épointé de -1, qui n'est pas contractile donc pas homéomorphe à V.

***Définition 7.83* (Espaces simplement connexes)**. — Soit Y une variété C^∞ non vide connexe. On dit que Y est **simplement connexe** (ou, pour abréger, **1-connexe**) si tout revêtement connexe $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est trivial, c.-à-d., si tout revêtement $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ avec X connexe, est un homéorphisme.

Remarque 7.84. — Cette définition de « *simplement connexe* » est équivalente à la définition en termes de lacets, c.-à-d., ayant fixé arbitrairement un point-base $y_0 \in \mathrm{Y}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Y} \text{ est simplement connexe } &\Leftrightarrow \text{tout lacet dans Y est homotope à zéro} \\ &\Leftrightarrow \pi_1(\mathrm{Y}) = \{0\}, \end{aligned}$$

où $\pi_1(\mathrm{Y}) = \pi_1(\mathrm{Y}, y_0)$ désigne le groupe fondamental de Y. Pour cela, voir [**Go**, § 2] ou [**GH**, Part I].

Remarque 7.85. — Soit G un groupe de Lie connexe. On peut montrer que $\pi_1(\mathrm{G})$ est commutatif ([**Go**, § 2.6] ou [**Laf**, Prop. IV.43] ou [**GH**, § 6.11]), donc coïncide avec le groupe d'homologie

$$\mathrm{H}_1(\mathrm{G}, \mathbb{Z})$$

(théorème de Hurewicz, voir [**GH**, § 12]). En particulier, comme $\mathrm{H}_i(\mathrm{S}^3, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i \neq 0, 3$, ceci montre que le groupe de Lie $\mathrm{SU}(2) \cong \mathrm{S}^3$ est simplement connexe (ce qu'on peut aussi voir directement).

Plus généralement, on peut montrer que, pour $n \geqslant 2$, $\mathrm{SU}(n)$ est simplement connexe, tandis que, pour $n \geqslant 3$, $\mathrm{SO}(n)$ est connexe mais son groupe fondamental est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Voir, par exemple, [**MT**], théorèmes 4.7.11 et 5.2.1.

On peut maintenant énoncer et démontrer le théorème suivant.

***Théorème 7.86* (Morphismes d'un groupe de Lie 1-connexe)**

Soient $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ *deux groupes de Lie connexes,* $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ *leurs algèbres de Lie, et* $\phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ *un morphisme d'algèbres de Lie.*

1) *Il existe* **au plus un** *morphisme de groupes de Lie* $\sigma : \mathrm{G}_1 \to \mathrm{G}_2$ *tel que* $d\sigma = \phi$. *Dans ce cas, on a* $\mathrm{Lie}(\mathrm{Ker}\,\sigma) = \mathrm{Ker}\,\phi$.

2) *Si* G_1 *est simplement connexe, il* **existe** *un unique morphisme de groupes de Lie* $\sigma : \mathrm{G}_1 \to \mathrm{G}_2$ *tel que* $d\sigma = \phi$.

Démonstration. — Posons $G = G_1 \times G_2$; son algèbre de Lie est $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$. Notons $\mathfrak{h}$ le graphe de ϕ, c.-à-d.,

$$\mathfrak{h} = \{(x, \phi(x)) \mid x \in \mathfrak{g}_1\}.$$

C'est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 = \mathrm{Lie}(G)$, isomorphe à $\mathfrak{g}_1$ par la première projection pr_1. .

D'après le théorème 7.79, il existe un unique sous-groupe de Lie connexe (H, τ) de G tel que $\mathrm{Lie}(H) = \mathfrak{h}$, c.-à-d., τ est une immersion injective et $d\tau = (\mathrm{id}_{\mathfrak{g}_1}, \phi)$.

1) Soit $\sigma : G_1 \to G_2$ un morphisme tel que $d\sigma = \phi$. Alors le morphisme graphe

$$\widetilde{\sigma} : G_1 \longrightarrow G_1 \times G_2, \qquad x \mapsto (x, \sigma(x))$$

est une immersion injective, et l'on a

$$d\widetilde{\sigma} = (\mathrm{id}_{\mathfrak{g}_1}, d\sigma) = (\mathrm{id}_{\mathfrak{g}_1}, \phi).$$

Donc, d'après le résultat d'unicité dans le théorème 7.79, il existe un (unique) isomorphisme

$$\psi : G_1 \xrightarrow{\sim} H \qquad \text{tel que} \quad \tau \circ \psi = \widetilde{\sigma}.$$

Le graphe de σ, égal à $\widetilde{\sigma}(G_1)$, est donc égal à $\tau(H)$, donc uniquement déterminé par $\mathfrak{h}$, c.-à-d., par ϕ. Ceci montre que σ, s'il existe, est unique. De plus, s'il existe, on a

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Ker}\,\sigma) = \mathrm{Ker}\, d\sigma = \mathrm{Ker}\, d\phi,$$

d'après le théorème 7.74. Ceci prouve 1).

Montrons 2). Soit $\pi = \mathrm{pr}_1 \circ \tau$, c'est un morphisme de groupes de Lie de H vers G_1, et

$$(*) \qquad d\pi = \mathrm{pr}_1 \circ (\mathrm{id}_{\mathfrak{g}_1}, \phi) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}_1}$$

est un isomorphisme. Donc, d'après le théorème d'inversion locale 7.22, il existe des voisinages ouverts U, resp. V, de l'identité dans H, resp. G_1, tels que π induise un difféomorphisme de U sur V.

Alors, $\pi(H)$ est un sous-groupe de G_1 contenant un voisinage de l'identité. Comme G_1 est connexe, ceci entraîne que $\pi(H) = G_1$, d'après le lemme 6.18 (séance du 26/9).

De plus, $\mathrm{Ker}\,\pi \cap U = \{1\}$ et donc $K := \mathrm{Ker}\,\pi$ est un sous-groupe discret de H, et $\pi : H \to G_1$ est un *revêtement.* En effet, soit $g \in G_1$ et $h \in \pi^{-1}(g)$ arbitraire. Alors $\pi^{-1}(gV) = hUK$ et, comme $K \cap U = \{1\}$, alors $\pi^{-1}(gV)$ est la réunion disjointe :

$$\bigsqcup_{k \in K} hUk,$$

et chaque hUk est difféomorphe par π à $g\pi(U) = gV$. Ceci montre que π est un revêtement, connexe puisque H est connexe.

Donc, sous l'hypothèse que G_1 est simplement connexe, π est un homéomorphisme. Comme c'est un difféomorphisme local, d'après le lemme 7.77, c'est donc un difféomorphisme. On peut donc poser :

$$\sigma = \mathrm{pr}_2 \circ \tau \circ \pi^{-1}.$$

C'est un morphisme de groupes de Lie $G_1 \to G_2$ et, via l'identification $(*)$ de $\mathfrak{h}$ à $\mathfrak{g}_1$ via $d\pi$, on obtient que $d\sigma = \phi$. Ceci montre l'existence, lorsque G_1 est supposé simplement connexe. Le théorème est démontré. $\square$

7.9. Représentations. — Commençons par le lemme suivant. Soit $n \geqslant 1$. Écrivons $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$, c.-à-d., si $(e_1, \dots, e_n)$ est la base standard de $\mathbb{C}^n$, on prend comme $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}^n$ la base :

$$(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n).$$

Alors, la multiplication par i est donnée par la matrice

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemme 7.87. — $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *est un sous-groupe fermé de* $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$*, de dimension* $2n^2$*, et son algèbre de Lie est* $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$*, considérée comme* $\mathbb{R}$*-algèbre de Lie de dimension* $2n^2$*.*

Démonstration. — $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est le sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ formé des matrices

$$g = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$$

telles que $g\mathrm{J} = \mathrm{J}g$, c.-à-d., $\mathrm{A} = \mathrm{D}$ et $\mathrm{B} = -\mathrm{C}$. Son algèbre de Lie est

$$\{\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{XJ} = \mathrm{JX}\} = \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),$$

qui est de dimension $2n^2$ sur $\mathbb{R}$. $\square$

***Définition 7.88* (Représentations complexes de** G**)**. — Soient G un groupe de Lie, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, et V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Une représentation de G dans V est un morphisme continu de groupes de Lie $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

D'après le théorème 7.72, un tel morphisme est nécessairement un morphisme de groupes de Lie. On peut considérer sa différentielle

$$d\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

D'après le théorème 7.61, c'est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie. Par extension des scalaires, en posant $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ on obtient donc un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de Lie

$$(d\rho)_{\mathbb{C}} : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),$$

qu'on notera encore $d\rho$ si cela ne crée pas d'ambiguité.

On déduit alors des théorèmes 7.72 et 7.86 le résultat suivant.

Théorème 7.89. — *Soient* G *un groupe de Lie connexe et simplement connexe,* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ *et* V *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie. Alors, se donner une représentation continue* $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V})$ « est la même chose » *que se donner un morphisme de* $\mathbb{C}$*-algèbres de Lie* $\phi : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V})$.

Démonstration. — Soient $\rho, \rho' : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V})$ deux morphismes de groupes de Lie tels que

$$(d\rho)_{\mathbb{C}} = (d\rho')_{\mathbb{C}}.$$

Alors, a fortiori, $d\rho = d\rho'$ et donc $\rho = \rho'$ d'après le point 1) du théorème 7.86.

Réciproquement, soit $\phi : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V})$ un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres de Lie. Par restriction, ϕ induit un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie

$$\phi_{\mathbb{R}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V}))$$

et comme G est 1-connexe, il existe un unique morphisme de groupes de Lie $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(\mathrm{V})$ tel que $d\rho = \phi_{\mathbb{R}}$, d'où $(d\rho)_{\mathbb{C}} = \phi$. Ceci prouve le théorème. $\square$

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.
[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.
[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.
[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.
[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap.1, 1971.
[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.
[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.
[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).
[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.
[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974
[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.
[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.
[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.
[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.
[GH] M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.
[He] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.
[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.
[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.
[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.
[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.
[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.
[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.
[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.
[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.
[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.