PARTIE FI : GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE SÉANCE DU 7 NOVEMBRE

2. Algèbres de Lie semi-simples compactes

2.1. G- et $\mathfrak{g}$-modules. — Soient G un groupe de Lie et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. Commençons par rappeler les définitions et résultats suivants (cf. 1.15–1.19, séances des 9-10 octobre).

Soient V et W des G-modules de dimension finie. Alors

$$\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}, \qquad \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{V}, \mathrm{W}), \qquad \mathrm{V}^*,$$

sont des G-modules, pour les actions définies par

$$g(v \otimes w) = gv \otimes gw, \qquad (g\theta)(v) = g\theta(g^{-1}v), \qquad (g\phi)(v) = \phi(g^{-1}v).$$

Bien sûr, le module dual V^* est un cas particulier de module d'homomorphismes, puisque

$$\mathrm{V}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{V}, \mathbb{R}),$$

où $\mathbb{R}$ est considéré comme G-module trivial, et l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\mathrm{V}^* \otimes \mathrm{W} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$$

est un isomorphisme de G-modules. De plus, on a l'égalité

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{V}, \mathrm{W})^{\mathrm{G}} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}, \mathrm{W}),$$

c.-à-d., une application $\mathbb{R}$-linéaire G-invariante (pour la structure de G-module sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$) n'est autre qu'un G-morphisme $\mathrm{V} \to \mathrm{W}$.

D'autre part, l'action dérivée de $\mathfrak{g}$ sur

$$\mathrm{V} \otimes \mathrm{W}, \qquad \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{V}, \mathrm{W}), \qquad \mathrm{V}^*,$$

[(0)] version du 14/11/06

est donnée par
$$\begin{cases} \mathrm{X}(v\otimes w) = \mathrm{X}v\otimes w + v\otimes \mathrm{X}w, \\ (\mathrm{X}\theta)(v) = \mathrm{X}\theta(v) - \theta(\mathrm{X}v), \\ (\mathrm{X}\phi)(v) = -\phi(\mathrm{X}v), \end{cases}$$
et l'on a
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{V},\mathrm{W})^{\mathfrak{g}} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{V},\mathrm{W}),$$
c.-à-d., une application $\mathbb{R}$-linéaire $\mathfrak{g}$-invariante (pour la structure de $\mathfrak{g}$-module sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{V},\mathrm{W})$) n'est autre qu'un $\mathfrak{g}$-morphisme $\mathrm{V}\to\mathrm{W}$.

2.2. Automorphismes et dérivations. — Soit L une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie.

Définition 2.1. — On dit qu'un $\mathbb{R}$-endomorphisme $\mathrm{D}:\mathrm{L}\to\mathrm{L}$ est une **dérivation** de L s'il vérifie :

$$(*)\qquad \forall\,\mathrm{X},\mathrm{Y}\in\mathrm{L},\qquad \mathrm{D}([\mathrm{X},\mathrm{Y}]) = [\mathrm{D}(\mathrm{X}),\mathrm{Y}] + [\mathrm{X},\mathrm{D}(\mathrm{Y})].$$

On note Dér(L) l'ensemble des dérivations de L ; on vérifie sans peine que c'est une sous-algèbre de Lie de End(L).

Définition 2.2. — Soit Aut(L) le groupe des automorphismes de L, c.-à-d.,
$$\mathrm{Aut}(\mathrm{L}) = \{g\in\mathrm{GL}(\mathrm{L}) \mid \forall\,\mathrm{X},\mathrm{Y}\in\mathrm{L},\quad [g(\mathrm{X}),g(\mathrm{Y})] = g([\mathrm{X},\mathrm{Y}])\}.$$
C'est un sous-groupe fermé de GL(L), donc un sous-groupe de Lie fermé de GL(L). On note $\mathrm{Aut}^0(\mathrm{L})$ sa composante connexe.

Afin de déterminer l'algèbre de Lie de Aut(L), notons θ le crochet de Lie de L, considéré comme application linéaire $\mathrm{L}\otimes\mathrm{L}\to\mathrm{L}$. Alors, on obtient que Aut(L) est le groupe d'isotropie de θ dans GL(L), c.-à-d.,
$$\mathrm{Aut}(\mathrm{L}) = \mathrm{G}_\theta,\qquad \text{où }\ \mathrm{G}=\mathrm{GL}(\mathrm{L}).$$
L'action dérivée de $\mathfrak{g}=\mathrm{End}(\mathrm{L})$ sur $\mathrm{E}:=\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{L}\otimes\mathrm{L},\mathrm{L})$ est donnée, d'après le paragraphe 2.1, par
$$u\cdot\theta = u\circ\theta - \theta\circ u,\qquad \forall\,u\in\mathfrak{g},\ \theta\in\mathrm{E},$$
c.-à-d.,
$$\begin{aligned}(u\cdot\theta)(\mathrm{X}\otimes\mathrm{Y}) &= u([\mathrm{X},\mathrm{Y}]) - \theta(u(\mathrm{X})\otimes\mathrm{Y} + \mathrm{X}\otimes u(\mathrm{Y})) \\ &= u([\mathrm{X},\mathrm{Y}]) - [u(\mathrm{X}),\mathrm{Y}] - [\mathrm{X},u(\mathrm{Y})].\end{aligned}$$
Donc, le stabilisateur de θ dans $\mathfrak{g}$ est :
$$\mathfrak{g}_\theta = \mathrm{Dér}(\mathrm{L}).$$
Par conséquent, d'après le théorème 1.33 (séance du 6/11), on obtient le théorème suivant (dans lequel L est notée $\mathfrak{g}$).

Théorème 2.3. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{R}$*-algèbre de Lie de dimension finie. Alors* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *est un sous-groupe fermé* (*non nécessairement connexe*) *de* $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, *et l'on a*

$$\mathrm{Lie}\,\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Dér}(\mathfrak{g}).$$

2.3. $\mathbb{R}$-algèbres de Lie semi-simples. — On rappelle qu'une algèbre de Lie est dite **simple** si elle est $\neq 0$, *non abélienne* et ne possède pas d'idéaux propres non nuls.

Définition 2.4. — Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie. Nous dirons que $\mathfrak{g}$ est **semi-simple** si sa forme de Killing $\mathrm{K} = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ est non dégénérée. D'après le théorème 1.39 (séance des 9-10 octobre) ceci entraîne :

(i) $\mathfrak{g}$ est somme directe d'algèbres de Lie simples :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathfrak{g}_n,$$

chaque $\mathfrak{g}_i$ étant alors un idéal simple non abélien de $\mathfrak{g}$;

(ii) $\mathfrak{g}$ ne contient pas d'idéal résoluble $\neq 0$.

Remarque 2.5. — On peut montrer que la condition (ii) entraîne que $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ est non dégénérée ; voir [**Jac**, § III.4] ou [**BL1**, § 6, Th. 1]. (On l'a montré pour les $\mathbb{C}$-algèbres de Lie : théorème 2.30 des 9-10 octobre).

Proposition 2.6. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{R}$*-algèbre de Lie semi-simple. Alors*

$$\mathfrak{g} \cong \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) = \mathrm{Dér}(\mathfrak{g}).$$

Démonstration. — Comme $\mathfrak{g}$ ne contient pas d'idéal abélien $\neq 0$, alors $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ et donc

$$\mathfrak{g} \cong \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Dér}(\mathfrak{g});$$

l'inclusion résultant du fait que, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}(x)$ est une dérivation de $\mathfrak{g}$, d'après l'identité de Jacobi. Il s'agit donc de montrer l'inclusion réciproque.

Soit $\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}(\mathfrak{g})$. Considérons la forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ donnée par

$$\mathrm{Y} \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y})).$$

Comme $\mathrm{K} = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ est non dégénérée, il existe un unique $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$ tel que

$$\mathrm{K}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y})), \qquad \forall\, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}.$$

Montrons que $\mathrm{D} = \mathrm{ad}(\mathrm{X})$. Pour tout $\mathrm{Z} \in \mathfrak{g}$, on a

$$\mathrm{D}([\mathrm{Y}, \mathrm{Z}]) = [\mathrm{D}(\mathrm{Y}), \mathrm{Z}] + [\mathrm{Y}, \mathrm{D}(\mathrm{Z})],$$

d'où $\mathrm{ad}\,\mathrm{D}(\mathrm{Y}) = \mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y}) - \mathrm{ad}(\mathrm{Y}) \circ \mathrm{D}$. Donc, $\mathrm{K}(\mathrm{D}(\mathrm{Y}), \mathrm{Z})$ égale :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,\mathrm{D}(\mathrm{Y})\,\mathrm{ad}(\mathrm{Z})) &= \mathrm{Tr}(\mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y}) \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Z})) - \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(\mathrm{Y}) \circ \mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Z})) \\
&= \mathrm{Tr}(\mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y}) \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Z})) - \mathrm{Tr}(\mathrm{D} \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Z}) \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y})) \\
&= \mathrm{Tr}(\mathrm{D} \circ \mathrm{ad}([\mathrm{Y}, \mathrm{Z}])) = \mathrm{K}(\mathrm{X}, [\mathrm{Y}, \mathrm{Z}]) = \mathrm{K}([\mathrm{X}, \mathrm{Y}], \mathrm{Z}).
\end{aligned}$$

Comme K est non dégénérée, ceci entraîne $\mathrm{D}(\mathrm{Y}) = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$, pour tout Y, d'où $\mathrm{D} = \mathrm{ad}(\mathrm{X})$. La proposition est démontrée. □

Corollaire 2.7. — *Soit* $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g})$. *C'est un sous-groupe de Lie fermé connexe de* $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ *et l'on a* $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}) \cong \mathfrak{g}$.

Démonstration. — Ceci découle du théorème 2.3 et de la proposition précédente. □

Définition 2.8. — Pour $\mathfrak{g}$ semi-simple, on dira que $\mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g})$ est le groupe de Lie *adjoint* de $\mathfrak{g}$; on le notera $\mathrm{Ad}(\mathfrak{g})$.

Remarque 2.9. — Pour $\mathfrak{g}$ arbitraire, il résulte du théorème 7.79 (séance du 3/10) qu'il existe un unique sous-groupe de Lie connexe H de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ (non nécessairement fermé), tel que $\mathrm{Lie}(\mathrm{H}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g})$. L'avantage de la proposition 2.6 et de son corollaire 2.7 est qu'ils montrent directement, pour $\mathfrak{g}$ semi-simple, que $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, où G est le sous-groupe fermé $\mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g})$ de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, sans faire appel au théorème 7.79 (que nous n'avons pas démontré).

Lemme 2.10. — *Soient* G *un groupe topologique* **connexe** *et* D *un sous-groupe discret normal. Alors* D *est central.*

Démonstration. — Soit $d \in \mathrm{D}$. Il existe un voisinage ouvert V de d dans G tel que $\mathrm{V} \cap \mathrm{D} = \{d\}$. L'application $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $g \mapsto gdg^{-1}$ est continue, à valeurs dans D (car D est normal), et vérifie $\phi(e) = d$. Donc, il existe un voisinage ouvert U de e dans G tel que

$$\forall\, g \in \mathrm{U}, \qquad gdg^{-1} \in \mathrm{V} \cap \mathrm{D} = \{d\}.$$

Donc d commute à U, qui engendre G puisque G est connexe. Donc d est central. Le lemme est démontré. □

Définition 2.11. — Soit G un groupe de Lie connexe. On dit que G est

1) **semi-simple** si Lie(G) est semi-simple ;
2) **quasi-simple** si Lie(G) est simple.

2.4. Revêtements universels. — Dans la suite, on écrira parfois « 1-connexe » pour dire : « connexe et simplement connexe ».

***Théorème 2.12* (Existence d'un revêtement universel)**. — *Soit* G *un groupe de Lie connexe. Il existe un groupe de Lie connexe et simpelment connexe* $\widetilde{\mathrm{G}}$ *et un morphisme de groupes de Lie*

$$\pi : \widetilde{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathrm{G}$$

qui est un revêtement ; alors $d\pi$ *est un isomorphisme*

$$\mathrm{Lie}(\widetilde{\mathrm{G}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$$

et $\operatorname{Ker}\pi$ *est un sous-groupe normal discret, donc central. De plus,* $\widetilde{\mathrm{G}}$ *est unique à isomorphisme unique près ; on l'appelle le revêtement universel de* G.

Démonstration. — Pour la démonstration, on renvoie à [**Go**, § 2] ou [**Wa**, 3.22–26]. □

D'autre part, rappelons le théorème suivant (7.86, séance du 3/10).

Théorème 2.13. — *Soient* $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ *deux groupes de Lie* **connexes**, $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ *leurs algèbres de Lie, et* $\phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ *un morphisme d'algèbres de Lie.*

1) *Il existe au plus un morphisme de groupes de Lie* $\sigma : \mathrm{G}_1 \to \mathrm{G}_2$ *tel que* $d\sigma = \phi$. *Dans ce cas,* $\operatorname{Lie}(\operatorname{Ker}\sigma) = \operatorname{Ker}\phi$.

2) *Si* G_1 *est* **1-connexe**, *un tel morphisme* σ *existe.*

Corollaire 2.14. — *Soient* G, G' *deux groupes de Lie* 1*-connexes. Si* $\operatorname{Lie}(\mathrm{G}) \cong \operatorname{Lie}(\mathrm{G}')$, *alors* $\mathrm{G} \cong \mathrm{G}'$.

Démonstration. — Soit ϕ un isomorphisme $\operatorname{Lie}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Lie}(\mathrm{G}')$. D'après le théorème, il existe un (unique) morphisme de groupes de Lie

$$\sigma : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}', \qquad \text{resp.} \qquad \tau : \mathrm{G}' \longrightarrow \mathrm{G}$$

tel que $d\sigma = \phi$, resp. $d\tau = \phi^{-1}$. Alors $\tau\sigma$ est un morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{G}$ tel que

$$d(\tau\sigma) = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} = d(\mathrm{id}_{\mathrm{G}}).$$

Donc, d'après l'assertion d'unicité dans le théorème précédent, on a $\tau\sigma = \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$, et de même $\sigma\tau = \mathrm{id}_{\mathrm{G}'}$. Ceci montre que $\mathrm{G} \cong \mathrm{G}'$. □

2.5. Groupes de Lie semi-simples 1-connexes. — Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie semi-simple. Alors (cf. 9-10 octobre, 1.37-38), $\mathfrak{g}$ est somme directe d'idéaux simples non abéliens

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathfrak{g}_n,$$

et tout idéal de $\mathfrak{g}$ est la somme des $\mathfrak{g}_i$ qu'il contient. En particulier, les $\mathfrak{g}_i$ sont uniquement déterminés.

Notons G le revêtement universel de $\operatorname{Aut}^0(\mathfrak{g})$; alors on a

$$\operatorname{Lie}(\mathrm{G}) = \operatorname{Lie}\operatorname{Aut}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g},$$

la seconde égalité résultant du corollaire 2.7 plus haut. De plus, d'après le corollaire 2.14, G est l'unique groupe de Lie 1-connexe (à isomorphisme près) tel que $\operatorname{Lie}(\mathrm{G}) = \mathfrak{g}$.

On obtient de même, pour chaque $\mathfrak{g}_i$, un unique groupe de Lie quasi-simple 1-connexe G_i tel que $\operatorname{Lie}(\mathrm{G}_i) = \mathfrak{g}_i$. Alors,

$$\mathrm{G}_1 \times \cdots \times \mathrm{G}_n$$

est un groupe de Lie 1-connexe dont l'algèbre de Lie est

$$\mathfrak{g}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g},$$

d'où, par unicité, $\mathrm{G}_1 \times \cdots \times \mathrm{G}_n \cong \mathrm{G}$. On a donc obtenu le théorème suivant.

Théorème 2.15. — *L'application* $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ *établit une bijection :*

$$\left\{\begin{matrix}\textit{groupes de Lie semi-simples } 1\textit{-connexes,}\\ \textit{à isomorphisme près}\end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\mathbb{R}\textit{-algèbres de Lie semi-simples,}\\ \textit{à isomorphisme près}\end{matrix}\right\},$$

dont la bijection réciproque associe à $\mathfrak{g}$ *le revêtement universel de* $\mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g})$. *De plus, cette bijection induit une bijection entre groupes quasi-simples et algèbres de Lie simples, et préserve les produits.*

2.6. Groupes et algèbres de Lie semi-simples compacts. — Soit maintenant G un groupe de Lie compact connexe et soit $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. Comme G-module, $\mathfrak{g}$ est complètement réductible (Prop. 4.1, séance 19/9), donc

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \bigoplus \mathfrak{g}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathfrak{g}_n,$$

où chaque $\mathfrak{g}_i$ est une algèbre de Lie simple. Posons

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathfrak{g}_n,$$

alors $\mathfrak{g}' = \mathscr{D}(\mathfrak{g}') = \mathscr{D}(\mathfrak{g})$, où $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$ désigne l'algèbre de Lie dérivée (séances 9-10 octobre, 1.4).

Pour tout $g \in \mathrm{G}$, notons $\mathrm{Ad}'(g)$ la restriction à $\mathfrak{g}'$ de $\mathrm{Ad}(g)$. Alors, relativement à la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}'$, la matrice de $\mathrm{Ad}(g)$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{Ad}'(g) \end{pmatrix}.$$

Donc la projection sur le bloc inférieur droit induit un isomorphisme

$$\mathrm{Ad}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ad}'(\mathrm{G}),$$

et $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad}' = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad} = \mathrm{Z}(\mathrm{G})$, et $\mathrm{Lie}(\mathrm{Ker}\,\mathrm{Ad}') = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

D'autre part, comme G est compact connexe, son image $\mathrm{Ad}'(\mathrm{G})$ est un sous-groupe fermé connexe de $\mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g}')$ et donc Ad' et sa différentielle ad' se factorisent comme suit :

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{G} \to & \mathrm{Ad}'(\mathrm{G}) & \hookrightarrow \mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g}') \\ \mathfrak{g} \to & \mathrm{Lie}(\mathrm{Ad}'(\mathrm{G})) & \hookrightarrow \mathrm{Dér}(\mathfrak{g}') \cong \mathfrak{g}'. \end{array}$$

Comme $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}') = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, il en résulte, pour une raison de dimension, que

$$\mathrm{ad}'(\mathfrak{g}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{Ad}'(\mathrm{G})) = \mathrm{Dér}(\mathfrak{g}') \cong \mathfrak{g}'.$$

Donc $\mathrm{Ad}(\mathrm{G}) \cong \mathrm{Ad}'(\mathrm{G})$ est un groupe de Lie compact connexe semi-simple (i.e. , son algèbre de Lie $\mathfrak{g}'$ est semi-simple).

Notons, de plus, que $\mathrm{Ad}'(\mathrm{G}) = \mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g}')$, d'après le corollaire 1.18 (séance 6/11).

Théorème 2.16. — *Soit* G *un groupe de Lie compact connexe semi-simple. Alors son revêtement universel* $\widetilde{\mathrm{G}}$ *est compact* (*et semi-simple, puisque* $\mathrm{Lie}(\widetilde{\mathrm{G}}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$).

La démonstration utilise les deux lemmes suivants, pour lesquels on renvoie à [**BI7-8**, § VII.3, Prop. 4 & Lemme 3].

Lemme 2.17. — *Soient* G *un groupe de Lie connexe,* D *un sous-groupe fermé central tel que* G/D *soit compact. Alors tout morphisme de groupes de Lie* $\phi : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ *s'étend en un morphisme de groupes de Lie* $\widetilde{\phi} : \mathrm{G} \to \mathbb{R}$.

Lemme 2.18. — *Soient* G *un groupe de Lie connexe et* D *un sous-groupe discret central tel que* G/D *soit compact. Alors* D *est un groupe abélien de type fini.*

Démonstration du théorème. — Soit $\mathrm{D} = \mathrm{Ker}(\widetilde{\mathrm{G}} \to \mathrm{G})$. C'est un sous-groupe discret normal, donc central. Par hypothèse, $\widetilde{\mathrm{G}}/\mathrm{D} \cong \mathrm{G}$ est compact. Donc, d'après le lemme 2.18, D est un groupe abélien de type fini, donc de la forme

$$\mathrm{D} = \mathbb{Z}^r \bigoplus \mathrm{D}_1, \qquad \text{où } \mathrm{D}_1 \text{ est un groupe fini.}$$

Montrons que $r = 0$. Supposons $r \geqslant 1$. Alors, on a un morphisme de groupes (de Lie)

$$\phi : \mathrm{D} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$$

tel que $\phi(\mathrm{D}) = \mathbb{Z}$. D'après le lemme 2.17, ϕ s'étend en un morphisme de groupes de Lie

$$\widetilde{\phi} : \widetilde{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Alors $d\widetilde{\phi} : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ est nulle car $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Comme

$$\forall\, g \in \widetilde{\mathrm{G}}, \qquad d_g\widetilde{\phi} \circ d_1\ell_g = d_1\ell_{\widetilde{\phi}(g)} \circ d_1\widetilde{\phi},$$

alors $d_g\widetilde{\phi} = 0$ pour tout $g \in \widetilde{\mathrm{G}}$. Donc $\widetilde{\phi}$ est le morphisme constant $\widetilde{\mathrm{G}} \to \{0\}$, d'après la proposition plus bas. Mais ceci est une contradiction, puisque $\widetilde{\phi}(\mathrm{G})$ contient $\phi(\mathrm{D}) = \mathbb{Z}$. Cette contradiction montre que $r = 0$, et donc $\mathrm{D} = \mathrm{D}_1$ est un groupe (abélien) fini. Il en résulte que $\widetilde{\mathrm{G}}$ est compact. Ceci prouve le théorème, modulo la proposition ci-dessous. □

Proposition 2.19. — *Soit* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *un morphisme de variétés* C^∞*, avec* M *connexe. On suppose que* $d_m f = 0$*, pour tout* $m \in \mathrm{M}$*. Alors* f *est constante.*

Démonstration. — Comme M est supposée connexe, il suffit de montrer que f est localement constante. En prenant des cartes locales, on se ramène ainsi à montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $d_x f = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, est constante. Ceci ne présente pas de difficulté, voir par exemple [**Wa**, 1.24]. □

Lemme 2.20. — *Soit* L *une algèbre de Lie de dimension finie. Sa forme de Killing* K *est invariante par tout automorphisme de* L.

Démonstration. — Soit ϕ un automorphisme de L. Alors, pour tout $\mathrm{X}, \mathrm{Z} \in \mathrm{L}$ on a $[\phi(\mathrm{X}), \phi(\mathrm{Z})] = \phi([\mathrm{X}, \mathrm{Z}])$, d'où

$$\mathrm{ad}\, \phi(\mathrm{X}) \circ \phi = \phi \circ \mathrm{ad}(\mathrm{X}), \qquad \forall\, \mathrm{X} \in \mathrm{L}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{K}(\phi(\mathrm{X}), \phi(\mathrm{Y})) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{L}}(\mathrm{ad}\, \phi(\mathrm{X})\ \mathrm{ad}\, \phi(\mathrm{Y})) &= \mathrm{Tr}_{\mathrm{L}}(\phi \circ \mathrm{ad}(\mathrm{X}) \circ \mathrm{ad}(\mathrm{Y}) \circ \phi^{-1}) \\ &= \mathrm{Tr}_{\mathrm{L}}(\mathrm{ad}(\mathrm{X})\, \mathrm{ad}(\mathrm{Y})) = \mathrm{K}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}). \end{aligned}$$

Ceci prouve le lemme. □

Proposition 2.21. — *Soit* G *un groupe de Lie semi-simple compact et soit* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. *Alors, la forme de Killing* $\mathrm{K} = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ *est définie négative.*

Démonstration. — Comme G est compact, il existe sur $\mathfrak{g}$ un produit scalaire défini positif G-invariant $(-,-)$. Alors, pour tout $x, y, z \in \mathfrak{g}$, on a

$$(\mathrm{ad}(x)(y), z) = -(y, \mathrm{ad}(x)(z)).$$

Munissons $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ du produit scalaire hermitien ϕ prolongeant $(-,-)$. Alors, pour tout $x, y, z \in \mathfrak{g}$ on a :

$$\phi(i\, \mathrm{ad}(x)(y), z) = i(\mathrm{ad}(x)(y), z) = -i(y, \mathrm{ad}(x)(z)) = \phi(y, i\, \mathrm{ad}(x)(z)).$$

Par conséquent, chaque $i\, \mathrm{ad}(x)$ est un endomorphisme auto-adjoint de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ (relativement à ϕ), donc est diagonalisable, avec des valeurs propres réelles. Donc, $\mathrm{ad}(x)^2$ est diagonalisable dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, avec des valeurs propres réelles $\leqslant 0$. Il en résulte que

$$\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(x, x) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}(x)^2) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}(\mathrm{ad}(x)^2)$$

est $\leqslant 0$. Comme $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ est non-dégénérée, puisque $\mathfrak{g}$ est semi-simple, on obtient donc que $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ est définie négative. □

Définition 2.22. — Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie semi-simple. On dit que $\mathfrak{g}$ est **compacte** si $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ est définie négative.

Théorème 2.23. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{R}$*-algèbre de Lie semi-simple compacte. Écrivons*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathfrak{g}_n,$$

où chaque $\mathfrak{g}_i$ *est simple. Alors, il existe un unique groupe de Lie compact semi-simple* 1*-connexe* G (*resp.* G_i) *tel que* $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}) = \mathfrak{g}$ (*resp.* $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_i) = \mathfrak{g}_i$), *et l'on a*

$$\mathrm{G} \cong \mathrm{G}_1 \times \cdots \times \mathrm{G}_n.$$

Démonstration. — Chaque $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}_i}$ est la restriction à $\mathfrak{g}_i$ de $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ donc est définie négative. Donc chaque $\mathfrak{g}_i$ est simple compacte.

Comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple, $\mathrm{G}_0 = \mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g})$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, tel que $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_0) = \mathfrak{g}$. De plus, G_0 préserve la forme de Killing $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$, qui est définie négative, donc G_0 est un sous-groupe fermé du groupe orthogonal $\mathrm{O}(\mathfrak{g})$, qui est compact. Donc G_0 est compact et semi-simple. D'après le théorème 2.16, son revêtement universel G est encore compact semi-simple, et vérifie $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}) = \mathfrak{g}$. Il est unique pour cette propriété, d'après le corollaire 2.14.

De même, pour $k = 1, \dots, n$, il existe un unique groupe de Lie semi-simple compact 1-connexe G_k tel que $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_k) = \mathfrak{g}_k$. Alors, le groupe de Lie

$$\mathrm{G}_1 \times \cdots \times \mathrm{G}_k$$

est semi-simple compact et 1-connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, donc il est isomorphe, par unicité, à G. Le théorème est démontré. □

On a donc obtenu le théorème suivant.

Théorème 2.24. — *L'application* $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ *établit une bijection :*

$$\left\{\begin{matrix}\textit{groupes de Lie } 1\textit{-connexes}\\ \textit{semi-simples compacts,}\\ \textit{à isomorphisme près}\end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\mathbb{R}\textit{-algèbres de Lie}\\ \textit{semi-simples compactes,}\\ \textit{à isomorphisme près}\end{matrix}\right\},$$

dont la bijection réciproque associe à $\mathfrak{g}$ *le revêtement universel de* $\mathrm{Aut}^0(\mathfrak{g})$. *De plus, cette bijection induit une bijection entre groupes quasi-simples et algèbres de Lie simples, et préserve les produits.*

Remarque 2.25. — On verra dans la séance suivante qu'il y a aussi une bijection :

$$\left\{\begin{matrix}\mathbb{R}\text{-algèbres de Lie semi-simples}\\ \text{compactes, à isomorphisme près}\end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\mathbb{C}\text{-algèbres de Lie semi-simples}\\ \text{complexes, à isomorphisme près}\end{matrix}\right\}.$$

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.
[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.
[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.
[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.
[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.
[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.
[BI7-8] N. Bourbaki, Intégration, Chap. 7-8, 1963.
[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.
[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).
[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.
[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974
[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.
[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.
[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.
[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.
[GH] M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.
[He] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.
[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.
[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.
[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.
[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.
[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.
[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.
[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.
[Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.
[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.