# PARTIE FI : $\mathbb{R}$-ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES SÉANCE DU 13/11

## 3. Extension et restriction des scalaires

**3.1. Extension des scalaires.** — Soient $k$ un corps de caractéristique 0 et $k'/k$ une extension de $k$ (c.-à-d., $k'$ est un corps contenant $k$). Soit $\mathfrak{g}$ une $k$-algèbre de Lie de dimension finie $n$. Rappelons (cf. § 1.3, séances 9-10 octobre) que sa forme de Killing $\mathrm{K} = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ est définie par

$$\mathrm{K}(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)), \qquad \forall\, x, y \in \mathfrak{g}.$$

On pose $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_k k'$ ; c'est une $k'$-algèbre de Lie de dimension $n$. On note $\mathrm{K}'$ sa forme de Killing.

***Lemme 3.1.*** — $\mathrm{K}$ *est la restriction à* $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ *de* $\mathrm{K}'$*, c.-à-d.,*

$$(*) \qquad \forall\, x, y \in \mathfrak{g}, \qquad \mathrm{K}(x, y) = \mathrm{K}'(x, y),$$

*et l'on a :* $\mathrm{K}$ *est non dégénérée* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{K}'$ *est non dégénérée.*

*Démonstration.* — Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ sur $k$ ; c'est aussi une base de $\mathfrak{g}'$ sur $k'$. La matrice de $\mathrm{K}$ dans $\mathscr{B}$ est la matrice :

$$\mathrm{A} := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{K}) = (\mathrm{K}(e_i, e_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\,;$$

c'est aussi la matrice de $\mathrm{K}'$ dans $\mathscr{B}$. L'égalité $(*)$ en découle. De plus, on sait que $\mathrm{K}$ (resp. $\mathrm{K}'$) est non dégénérée si et seulement si $\mathrm{A}$ est inversible. Le lemme en résulte. $\square$

***Remarque 3.2.*** — Plus généralement, soit $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{h}'$) le noyau de $\mathrm{K}$ (resp. $\mathrm{K}'$) ; ils sont tous deux de dimension $\dim \mathrm{Ker}(\mathrm{A})$. Comme $\mathfrak{h} \otimes_k k' \subseteq \mathfrak{h}'$, on a donc l'égalité $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \otimes_k k'$.

***Remarque 3.3.*** — Dans le lemme précédent, on n'a pas utilisé l'hypothèse $\mathrm{car}(k) = 0$. Elle intervient dans le théorème suivant.

---

(0) version du 24/11/06

***Théorème 3.4***. — *Soit $k$ un corps* **de caractéristique** $0$*, par exemple* $k = \mathbb{R}$*, soit* $\mathfrak{g}$ *une $k$-algèbre de Lie de dimension finie et soit* $\mathrm{K} = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ *sa forme de Killing. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathrm{K}$ *est non dégénérée.*

b) $\mathfrak{g}$ *est somme directe d'algèbres de Lie simples :* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$.

c) $\mathfrak{g}$ *ne contient pas d'idéal résoluble non nul.*

*On dit que* $\mathfrak{g}$ *est* **semi-simple** *si ces conditions sont vérifiées ; dans ce cas,* $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_r$ *sont* **uniquement déterminés**, *on les appelle les* **composantes simples** *ou* **idéaux minimaux** *de* $\mathfrak{g}$.

*Démonstration.* — On a déjà vu que a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c), et que sous l'hypothèse b) les $\mathfrak{g}_i$ sont uniquement déterminés, cf. cours d'Introduction, séance 9-10 octobre, 1.38 et 1.39.

Supposons c) vérifié et notons $\mathfrak{h}$ le noyau de $\mathrm{K}$ ; c'est un idéal de $\mathfrak{g}$. Soit $k'$ une clôture algébrique de $k$ (en particulier, $k' = \mathbb{C}$ si $k = \mathbb{R}$) et soient

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_k k', \qquad \mathfrak{h}' = \mathfrak{h} \otimes_k k',$$

et $\mathrm{K}'$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}'$. On a $\mathfrak{h}' = \operatorname{Ker} \mathrm{K}'$, d'après la remarque 3.2. De plus, d'après le critère de Cartan (séance 9-10 octobre, 2.28), $\mathfrak{h}' = \operatorname{Ker} \mathrm{K}'$ est résoluble.

Par conséquent, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \cap \mathfrak{g}$ est un idéal résoluble de $\mathfrak{g}$, donc $\mathfrak{h} = 0$ d'après l'hypothèse c). Ceci montre que c) $\Rightarrow$ a) et achève la preuve du théorème. $\square$

**3.2. Restriction des scalaires.** — Désormais, on prend $k = \mathbb{R}$, c.-à-d., on va s'intéresser aux $\mathbb{R}$-algèbres de Lie semi-simples.

***Définition 3.5* (Restriction des scalaires)**. — Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie de dimension $n$ sur $\mathbb{C}$. Alors, considérée comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, c'est une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie de dimension $2n$. On la note $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ et on dit qu'elle est obtenue à partir de $\mathfrak{g}$ par **restriction des scalaires** (de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$). Si on note $\mathrm{K}$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, on notera $\mathrm{K}^{\mathbb{R}}$ celle de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$.

***Notation 3.6***. — On note $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ la partie réelle (resp. imaginaire) d'un nombre complexe $z$, c.-à-d., on écrit

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z).$$

On désigne par $\overline{z}$ le conjugué de $z$, c.-à-d., $\overline{z} = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)$.

***Proposition 3.7***. — *On a* $\mathrm{K}^{\mathbb{R}} = 2 \operatorname{Re} \mathrm{K}$*, c.-à-d.,*

$$\forall\, x, y \in \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\mathbb{R}}, \qquad \mathrm{K}^{\mathbb{R}}(x, y) = 2 \operatorname{Re}(\mathrm{K}(x, y)).$$

*Donc,* $\operatorname{Ker} \mathrm{K} = \operatorname{Ker} \mathrm{K}^{\mathbb{R}}$*. En particulier :* $\mathrm{K}$ *est non dégénérée* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{K}^{\mathbb{R}}$ *est non dégénérée.*

*Démonstration.* — Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{C}$. Alors

$$\mathscr{B}_0 = (e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$$

est une $\mathbb{R}$-base de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$. Soient $x, y \in \mathfrak{g}$ et soit A la matrice dans $\mathscr{B}$ du $\mathbb{C}$-endomorphisme $\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)$. Posons

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} + i\mathrm{C}, \qquad \text{avec} \quad \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

Alors $\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)$, considéré comme $\mathbb{R}$-endomorphisme de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, a dans la base $\mathscr{B}_0$ la matrice suivante :

$$\mathrm{A}_0 = \begin{pmatrix} \mathrm{B} & -\mathrm{C} \\ \mathrm{C} & \mathrm{B} \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que

$$\mathrm{K}^{\mathbb{R}}(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A}_0) = 2\,\mathrm{Tr}(\mathrm{B}) = 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{Tr}(\mathrm{A})) = 2\,\mathrm{Re}(\mathrm{K}(x, y)).$$

Ceci prouve la première assertion.

Ceci entraîne immédiatement que $\mathrm{Ker}\,\mathrm{K} \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathrm{K}^{\mathbb{R}}$. Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{K}^{\mathbb{R}}$. Alors, pour tout $y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, on a

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{K}(x, y) = \mathrm{K}^{\mathbb{R}}(x, y)/2 = 0$$

et
$$\mathrm{Im}\,\mathrm{K}(x, y) = -\,\mathrm{Re}\,\mathrm{K}(x, iy) = -\mathrm{K}^{\mathbb{R}}(x, iy)/2 = 0,$$

d'où $\mathrm{K}(x, y) = 0$, et donc $x \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{K}$. Ceci prouve la seconde assertion. La proposition est démontrée. □

***Définition 3.8* (Formes réelles)**. — Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie de dimension finie. Une **forme réelle** de $\mathfrak{g}$ est une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ telle que l'application naturelle

$$\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

soit **bijective**, ce qui équivaut à dire que $\mathfrak{g}_0$ est engendrée comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel par une $\mathbb{C}$-base de $\mathfrak{g}$.

***Exemple 3.9***. — Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, avec la base standard

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $[\mathrm{E}, \mathrm{F}] = \mathrm{H}$ et $[\mathrm{H}, \mathrm{E}] = 2\mathrm{E}$, $[\mathrm{H}, \mathrm{F}] = -2\mathrm{F}$. Alors $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, dont $(\mathrm{E}, \mathrm{H}, \mathrm{F})$ est une $\mathbb{R}$-base, est une forme réelle de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Dans la base $(\mathrm{E}, \mathrm{H}, \mathrm{F})$ on a :

$$\mathrm{ad}(\mathrm{E})\,\mathrm{ad}(\mathrm{F}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{ad}(\mathrm{H})^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Donc la forme de Killing de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ a pour matrice dans la base $(\mathrm{E}, \mathrm{H}, \mathrm{F})$ la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

elle est de signature $(2, 1)$, sa matrice dans la base $(\mathrm{E}+\mathrm{F})/2$, $\mathrm{H}/2$, $(\mathrm{E}-\mathrm{F})/2$ est

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

D'autre part, posons $\mathrm{X} = \mathrm{E} - \mathrm{F}$, $\mathrm{H}' = i\mathrm{H}$, $\mathrm{Y} = i(\mathrm{E}+\mathrm{F})$. Alors $(\mathrm{X}, \mathrm{H}', \mathrm{Y})$ est une $\mathbb{C}$-base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, et l'on a :

$$[\mathrm{H}', \mathrm{X}] = 2\mathrm{Y}, \qquad [\mathrm{H}', \mathrm{Y}] = -2\mathrm{X}, \quad [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = 2\mathrm{H}'.$$

Donc $\mathbb{R}\mathrm{X} \oplus \mathbb{R}\mathrm{H}' \oplus \mathbb{R}\mathrm{Y}$ est une forme réelle de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, notée $\mathfrak{su}_2$.

Alors, $\mathrm{ad}(\mathrm{X})\,\mathrm{ad}(\mathrm{H}')$, $\mathrm{ad}(\mathrm{Y})\,\mathrm{ad}(\mathrm{H}')$ et $\mathrm{ad}(\mathrm{Y})\,\mathrm{ad}(\mathrm{X})$ sont de trace nulle, et le tableau ci-dessous décrit $\mathrm{ad}(\mathrm{X})^2$, etc.

| | $\mathrm{X}$ | $\mathrm{H}'$ | $\mathrm{Y}$ |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{ad}(\mathrm{X})^2$ | $0$ | $-4\mathrm{H}'$ | $-4\mathrm{Y}$ |
| $\mathrm{ad}(\mathrm{Y})^2$ | $-4\mathrm{X}$ | $-4\mathrm{H}'$ | $0$ |
| $\mathrm{ad}(\mathrm{H}')^2$ | $-4\mathrm{X}$ | $0$ | $-4\mathrm{Y}$ |

Par conséquent, la forme de Killing de $\mathfrak{su}_2$ a pour matrice dans la base $(\mathrm{X}, \mathrm{H}', \mathrm{Y})$ :

$$\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} ;$$

elle est définie négative. En particulier, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{su}_2$ ne sont pas isomorphes (puisque leur formes de Killing ont des signatures différentes).

On convient que, dans la suite, « algèbre de Lie » signifie « algèbre de Lie de dimension finie ».

***Corollaire 3.10***. — *Soit $\mathfrak{g}_0$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ (resp. soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie et $\mathfrak{g}_0$ une forme réelle de $\mathfrak{g}$. On a les équivalences :*

$$\mathfrak{g}_0 \text{ est semi-simple} \Leftrightarrow \mathfrak{g} \text{ est semi-simple} \Leftrightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{R}} \text{ est semi-simple.}$$

*Démonstration.* — Ceci résulte du lemme 3.1 et de la proposition 3.7. □

## 4. Formes réelles déployées ou bien compactes

**4.1. Bases de Chevalley.** — Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple, $\mathrm{K} = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ sa forme de Killing, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, $\mathrm{R} = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ le système de racines, $\Delta$ une base de R et $\mathrm{R}^+$ les racines positives correspondantes.

On va montrer d'abord qu'il existe une base de $\mathfrak{g}$ dans laquelle toutes les constantes de structure sont des entiers. On en déduira ensuite une forme réelle compacte $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$.

Pour tout $\beta \in \mathrm{R}$, soit $\widetilde{h}_\beta$ l'unique élément de $\mathfrak{h}$ tel que

$$\mathrm{K}(\widetilde{h}_\beta, h') = \beta(h'), \qquad \forall\, h' \in \mathfrak{h}, \tag{1}$$

et soit

$$h_\beta = \frac{2\widetilde{h}_\beta}{\mathrm{K}(\widetilde{h}_\beta, \widetilde{h}_\beta)}; \tag{2}$$

alors $h_\beta$ est l'unique élément de $\mathfrak{h}$ tel que :

$$h_\beta \in [\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_{-\beta}] \qquad \text{et} \qquad \beta(h_\beta) = 2. \tag{3}$$

Notons $\nu : \mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^*$ l'isomorphisme induit par K (en particulier, $\widetilde{h}_\beta = \nu^{-1}(\beta)$). On transporte K à $\mathfrak{h}^*$ via $\nu$, c.-à-d., on pose

$$(\lambda, \mu) = \mathrm{K}(\nu^{-1}(\lambda), \nu^{-1}(\mu)), \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*. \tag{3}$$

En particulier, $(\beta, \beta) = \mathrm{K}(\widetilde{h}_\beta, \widetilde{h}_\beta)$. Posons

$$\beta^\vee = \frac{2\beta}{(\beta, \beta)},$$

alors, pour $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, on a

$$\alpha(\widetilde{h}_\beta) = \mathrm{K}(\widetilde{h}_\alpha, \widetilde{h}_\beta) = (\alpha, \beta)$$

et donc

$$\alpha(h_\beta) = (\alpha, \beta^\vee) \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Tout $\beta \in \mathrm{R}^+$ s'écrit de façon unique

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} n_{\beta,\alpha}\, \alpha, \qquad \text{avec} \quad n_{\beta,\alpha} \in \mathbb{N},$$

et donc

$$\beta^\vee = \sum_{\alpha \in \Delta} n_{\beta,\alpha} \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)}\, \alpha^\vee. \tag{$5^\vee$}$$

On peut montrer que $\mathrm{R}^\vee := \{\beta^\vee \mid \beta \in \mathrm{R}\}$ est un système de racines (appelé le système de racines **dual**), et que $\Delta^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta\}$ en est une base ; voir [**Hu**, Ex. 9.2 & 10.1] ou [**Se**, V, Prop. 2 & 7]. Par conséquent, les coefficients

$$m_{\alpha,\beta} := n_{\beta,\alpha} \frac{(\alpha,\alpha)}{(\beta,\beta)}$$

appartiennent à $\mathbb{N}$. Transportant alors l'égalité ($5^\vee$) par l'isomorphisme linéaire $\nu^{-1} : \mathfrak{h}^* \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}$, on obtient, pour tout $\beta \in \mathrm{R}^+$ :

$$h_\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} m_{\beta,\alpha}\, h_\alpha, \qquad \text{avec} \quad m_{\beta,\alpha} \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

***Remarque 4.1***. — Comme $h_\beta = 2\widetilde{h}_\beta/(\beta,\beta)$, on a

$$\mathrm{K}(h_\beta, h_\beta) = \frac{4}{(\beta,\beta)}.$$

On reviendra sur cette quantité dans la remarque 4.17 plus bas.

***Définition 4.2***. — Soit $k$ un corps de caractéristique 0 (par exemple, $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit V un $k$-espace vectoriel de dimension finie. Un **réseau** de V est un sous-$\mathbb{Z}$-module L engendré par une base de V ; ceci équivaut à dire que le morphisme $\mathrm{L} \otimes_{\mathbb{Z}} k \to \mathrm{V}$ est bijectif.

On va maintenant construire un réseau $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ de $\mathfrak{g}$ stable par le crochet de Lie, c.-à-d., une **$\mathbb{Z}$-forme** de $\mathfrak{g}$.

D'abord, $(h_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ est une base de $\mathfrak{h}$. Considérons le réseau

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathbb{Z} h_\alpha; \tag{6}$$

il contient $h_\beta$ pour tout $\beta \in \mathrm{R}$, d'après (5).

Pour tout $\beta \in \mathrm{R}^+$, soit $\mathrm{X}_\beta$ un élément non nul de $\mathfrak{g}_\beta$ et soit $\mathrm{X}_{-\beta}$ l'unique élément de $\mathfrak{g}_{-\beta}$ tel que

$$[\mathrm{X}_\beta, \mathrm{X}_{-\beta}] = h_\beta. \tag{7}$$

Remarquons que si $(e_\beta, e_{-\beta}) \in \mathfrak{g}_\beta \times \mathfrak{g}_{-\beta}$ est un autre couple tel que $[e_\beta, e_{-\beta}] = h_\beta$, alors

$$e_\beta = t_\beta \mathrm{X}_\beta \quad \text{et} \quad e_{-\beta} = t_\beta^{-1}\mathrm{X}_{-\beta}, \quad \text{pour un unique } t_\beta \in \mathbb{C}^*.$$

***Définition 4.3***. — Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, non proportionnelles. L'ensemble des racines de la forme $\beta + k\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$, s'appelle la **$\alpha$-chaîne de** $\beta$ (en anglais : "$\alpha$-string through $\beta$").

***Notation 4.4***. — Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, on pose

$$\mathfrak{sl}_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathbb{C} h_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

C'est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$.

***Lemme 4.5***. — *Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, non proportionnelles. Alors*

$$\{k \in \mathbb{Z} \mid \beta + k\alpha \in \mathrm{R}\} \quad \textit{est un intervalle } [-r, q], \textit{ avec } r, q \in \mathbb{N},$$

*c.-à-d., la $\alpha$-chaîne de $\beta$ est* « sans trous » *. De plus, on a $\beta(h_\alpha) = r - q$. Plus précisément, le sous-espace*

$$\bigoplus_{k=-r}^{q} \mathfrak{g}_{\beta+k\alpha}$$

*est un $\mathfrak{sl}_\alpha$-module simple.*

*Démonstration.* — Voir [**Se**, VI.2.12] ou [**Hu**, 25.1]. □

Pour $\alpha \neq \beta$ dans R, posons $\mathrm{N}_{\alpha,\beta} = 0$ si $\alpha + \beta \notin \mathrm{R}$ et

$$[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta] = \mathrm{N}_{\alpha,\beta}\, \mathrm{X}_{\alpha+\beta} \qquad \text{si} \quad \alpha + \beta \in \mathrm{R}. \tag{8}$$

***Lemme 4.6***. — *Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, non proportionnelles et telles que $\alpha + \beta \in \mathrm{R}$. Soit $\beta - r\alpha, \dots, \beta + q\alpha$ la $\alpha$-chaîne de $\beta$. Alors :*

a) $(r+1)\,(\beta, \beta) = q\,(\alpha + \beta, \alpha + \beta)$ *;*

b) $\mathrm{N}_{\alpha,\beta}\,\mathrm{N}_{-\alpha,-\beta} = -(r+1)^2$.

*Démonstration.* — Pour a) voir [**Hu**, 25.1], et pour b) [**BL4-6**, § VIII.2, Lemme 4], en tenant compte du changement de signe induit par la convention (bizarre) $[\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha}] = -h_\alpha$ adoptée par Bourbaki dans le Lemme 2, qui entraîne un changement de signe dans le Lemme 3 et les égalités (4) et (5) du Lemme 4 . □

***Théorème 4.7* (Automorphisme de Chevalley)**. — *Il existe un unique automorphisme involutif $\tau$ de $\mathfrak{g}$ tel que*

$$\begin{cases} \tau(h) = -h, & \forall\, h \in \mathfrak{h}, \\ \tau(\mathrm{X}_\alpha) = -\mathrm{X}_{-\alpha}, & \forall\, \alpha \in \Delta, \end{cases}$$

*et l'on a $\tau(\mathfrak{g}_\beta) = \mathfrak{g}_{-\beta}$ pour tout $\beta \in \mathrm{R}$.*

*Démonstration.* — D'après le cours d'Introduction, séance du 24/10, Th. 7.2, $\mathfrak{g}$ est engendrée par les $3n$ éléments

$$(\mathrm{X}_\alpha, h_\alpha, \mathrm{X}_{-\alpha})_{\alpha \in \Delta},$$

soumis aux relations (1–3) décrites en 7.2. Les éléments

$$(-\mathrm{X}_{-\alpha}, -h_\alpha, -\mathrm{X}_\alpha)_{\alpha \in \Delta},$$

satisfont aux mêmes relations, donc il existe un unique automorphisme $\tau$ de $\mathfrak{g}$ vérifiant les conditions du théorème, et $\tau^2$ laisse fixe le système de générateurs donc est l'identité. Enfin, pour tout $x \in \mathfrak{g}_\beta$ et $h \in \mathfrak{h}$, on a

$$[h, \tau(x)] = -[\tau(h), \tau(x)] = -\tau([h, x]) = -\beta(h)\tau(x),$$

et donc $\tau(x) \in \mathfrak{g}_{-\beta}$. Ceci prouve le théorème. Pour plus de détails, voir [**Se**, VI, § § 4-5]. □

***Théorème 4.8* (Constantes de structure).** — *Pour tout $\alpha \in \Delta$, fixons $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tels que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = h_\alpha$. Alors, il existe des éléments $e_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$, pour tout $\beta \in R$, uniques au signe près, tels que $[e_\beta, e_{-\beta}] = h_\beta$, $e_\alpha = X_\alpha$ pour $\alpha \in \Delta$, et, chaque fois que $\beta, \gamma, \beta+\gamma \in R$ :*

$$[e_\beta, e_\gamma] = N_{\beta,\gamma}\, e_{\beta+\gamma}, \qquad N_{-\beta,-\gamma} = -N_{\beta,\gamma}, \qquad N_{\beta,\gamma} = \pm(r+1),$$

*où $r$ est le plus grand entier $\geqslant 0$ tel que $\beta - r\gamma \in R$. Par conséquent,*

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} := \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} \bigoplus \bigoplus_{\beta \in R} \mathbb{Z} e_\beta$$

*est une $\mathbb{Z}$-forme de $\mathfrak{g}$, c.-à-d., un réseau qui est stable par le crochet de Lie.*

*Démonstration.* — Prenons $e_{\pm\alpha} = X_{\pm\alpha}$ pour $\alpha \in \Delta$ et soit $\tau$ l'automorphisme de Chevalley tel que $\tau|_{\mathfrak{h}} = -\operatorname{id}_{\mathfrak{h}}$ et $\tau(X_\alpha) = -X_{-\alpha}$ pour $\alpha \in \Delta$.

Pour tout $\beta \in R^+$, on a $\tau(X_\beta) = c_\beta X_{-\beta}$, pour un unique $c_\beta \in \mathbb{C}^*$, et $c_\alpha = 1$ pour $\alpha \in \Delta$. Posons

$$e_\beta = t_\beta X_\beta \qquad \text{et} \qquad e_{-\beta} = t_\beta^{-1} X_{-\beta}.$$

Alors

$$\tau(e_\beta) = t_\beta\, \tau(X_\beta) = t_\beta c_\beta\, X_{-\beta} = t_\beta^2 c_\beta\, e_{-\beta}.$$

Par conséquent, $\tau(e_\beta) = -e_{-\beta}$ équivaut à $t_\beta^2 = -c_\beta^{-1}$, ce qui détermine uniquement $t_\beta$ au signe près. (Pour $\alpha \in \Delta$, on prend $t_\alpha = 1$).

Pour tout $\beta, \gamma \in R$ tels que $\beta + \gamma \in R$, posons alors

$$[e_\beta, e_\gamma] = N_{\beta,\gamma}\, e_{\beta+\gamma}.$$

Appliquant $\tau$, on obtient $N_{-\beta,-\gamma} = -N_{\beta,\gamma}$. D'après le point b) du lemme 4.6 on obtient alors que

$$N_{\alpha,\beta} = \pm(r+1).$$

Ceci prouve le théorème. □

***Définition 4.9***. — La base construite dans le théorème précédent est appelée une **base de Chevalley** de $\mathfrak{g}$.

**4.2. Formes déployées.** — On rappelle la définition ci-dessous, introduite au § 2.3 du polycopié 9-10 octobre dans le cas où $k = \mathbb{C}$, mais valable sur un corps arbitraire, en particulier pour $k = \mathbb{R}$.

***Définition 4.10* (Sous-algèbres de Cartan).** — Soit $\mathfrak{g}_0$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie semi-simple. Une **sous-algèbre de Cartan** est une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}_0$ qui est nilpotente et égale à son normalisateur.

***Lemme 4.11***. — *Soit* $\mathfrak{h}_0$ *une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}_0$. *Alors*

1) $\mathfrak{h} := \mathfrak{h}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ *est une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

2) *Par conséquent,* $\mathfrak{h}_0$ *est abélienne, et toutes les sous-algèbres de Cartan de* $\mathfrak{g}_0$ *sont de même dimension* (*mais pas nécessairement conjuguées par un automorphisme de* $\mathfrak{g}_0$).

*Démonstration*. — On voit facilement que $\mathfrak{h}$ est nilpotente. Pour l'égalité

$$\mathrm{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathrm{N}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h}_0) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{h},$$

on renvoie à [**BL1**, § 3, no.8]. Donc, $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple (3.1), $\mathfrak{h}$ est abélienne (16-17 octobre, Cor. 3.3), donc $\mathfrak{h}_0$ l'est aussi. Enfin, d'après (9-10 octobre, 2.26), toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées, donc ont la même dimension sur $\mathbb{C}$. Comme

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h}_0 = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h},$$

il s'ensuit que toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ sont de même dimension. □

***Définition 4.12*** **(Sous-algèbres de Cartan déployantes)**. — Soient $\mathfrak{g}_0$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie semi-simple et $\mathfrak{h}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$. On dit que $\mathfrak{h}_0$ est **déployante** si, pour tout $h \in \mathfrak{h}_0$, $\mathrm{ad}(h)$ est diagonalisable (et donc à valeurs propres réelles).

***Exemple 4.13***. — Soit $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{su}_2$, cf. 3.9 plus haut. Alors $\mathbb{R}\mathrm{H}'$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$, car $\mathbb{C}\mathrm{H}' = \mathbb{C}\mathrm{H}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Mais, comme $[\mathrm{H}', \mathrm{X}] = 2\mathrm{Y}$ et $[\mathrm{H}', \mathrm{Y}] = -2\mathrm{X}$, les valeurs propres de $\mathrm{ad}(\mathrm{H}')$ sont $0$ et $\pm 2i$, donc $\mathbb{R}\mathrm{H}'$ n'est pas déployante. En fait, on peut montrer que $\mathfrak{su}_2$ n'a pas de sous-algèbre de Cartan déployante.

***Définition 4.14*** **(Formes déployées)**. — Soit $\mathfrak{g}_0$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie semi-simple et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. On dit que $\mathfrak{g}_0$ est **déployée**, ou une **forme déployée de** $\mathfrak{g}$, si $\mathfrak{g}_0$ possède une sous-algèbre de Cartan déployante.

***Théorème 4.15*** **(Existence et unicité d'une forme déployée)**

*Soit* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie semi-simple. Alors* $\mathfrak{g}$ *possède une* $\mathbb{R}$*-forme déployée, unique à isomorphisme près.*

*Démonstration*. — Soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ la $\mathbb{Z}$-forme construite dans le théorème 4.8. Alors

$$\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathbb{R} h_\alpha \bigoplus \bigoplus_{\beta \in \mathrm{R}} \mathbb{R} e_\beta$$

est une $\mathbb{R}$-forme déployée de $\mathfrak{g}$. (Et en fait, $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ est une « $\mathbb{Z}$-forme déployée » ). Ceci prouve l'existence.

L'unicité à isomorphisme près résulte du théorème 7.2 du 24 octobre, ou de sa variante pour les formes déployées. Pour cela, on renvoie à [**BL4-6**, § VI.4]. □

**4.3. Formes compactes.** — On va maintenant construire une forme réelle compacte de $\mathfrak{g}$. Pour $\beta \in \mathrm{R}^+$, posons

$$h'_\beta = ih_\beta, \qquad x_\beta = e_\beta - e_{-\beta}, \qquad y_\beta = i(e_\beta + e_{-\beta}).$$

Alors $(h'_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \cup (x_\beta, y_\beta)_{\beta\in\mathrm{R}^+}$ est une $\mathbb{C}$-base de $\mathfrak{g}$. Notons $\mathfrak{u}$ le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré. On a

$$\begin{aligned}
[x_\beta, y_\beta] &= 2h'_\beta\\
[h_\beta, x_\gamma] &= \gamma(h_\beta)\, y_\gamma\\
-[h_\beta, y_\gamma] &= \gamma(h_\beta)\, x_\gamma
\end{aligned}$$

et, pour $\beta \neq \pm\gamma$,

$$\begin{aligned}
[x_\beta, x_\gamma] &= \mathrm{N}_{\beta,\gamma}\, x_{\beta+\gamma} - \mathrm{N}_{\beta,-\gamma}\, x_{\beta-\gamma}\\
-[y_\beta, y_\gamma] &= \mathrm{N}_{\beta,\gamma}\, x_{\beta+\gamma} + \mathrm{N}_{\beta,-\gamma}\, x_{\beta-\gamma}\\
[x_\beta, y_\gamma] &= \mathrm{N}_{\beta,\gamma}\, y_{\beta+\gamma} + \mathrm{N}_{\beta,-\gamma}\, y_{\beta-\gamma}.
\end{aligned}$$

Donc $\mathfrak{u}$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathrm{K}_\mathfrak{u}$ sa forme de Killing. D'après le lemme 3.1, $\mathrm{K}_\mathfrak{u}$ est non dégénérée et est la restriction à $\mathfrak{u}\times\mathfrak{u}$ de $\mathrm{K} = \mathrm{K}_\mathfrak{g}$. Or

$$\mathrm{K}(h'_\alpha, h'_\alpha) = -\mathrm{K}(h_\alpha, h_\alpha) \in -\mathbb{Q}_+^*$$

$$\mathrm{K}(x_\beta, x_\beta) = \mathrm{K}(y_\beta, y_\beta) = -2\mathrm{K}(e_\beta, e_{-\beta}) = \frac{-4}{(\beta,\beta)} \in -\mathbb{Q}_+^*.$$

Il en résulte que $\mathrm{K}_\mathfrak{u}$ est définie négative. Donc $\mathfrak{u}$ est une forme réelle compacte de $\mathfrak{g}$. On a donc obtenu le théorème d'existence ci-dessous. On verra plus loin que toutes les formes compactes de $\mathfrak{g}$ sont isomorphes.

***Théorème 4.16* (Existence d'une forme compacte).** — *Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, $\mathrm{R} = \mathrm{R}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ le système de racines, $\Delta$ une base de $\mathrm{R}$, et soit*

$$(h_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \bigcup (e_\beta)_{\beta\in\mathrm{R}}$$

*une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$. Alors*

$$\mathfrak{u}_0 = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R}ih_\alpha \bigoplus \bigoplus_{\beta\in\mathrm{R}^+} (\mathbb{R}(e_\beta - e_{-\beta}) \oplus \mathbb{R}i(e_\beta + e_{-\beta}))$$

*est une forme compacte de $\mathfrak{g}$.*

***Remarque 4.17.*** — Dans la discussion précédant le théorème, on a vu apparaître la quantité

$$2\mathrm{K}(e_\beta, e_\beta) = \frac{4}{(\beta,\beta)} = \mathrm{K}(h_\beta, h_\beta),$$

cf. la remarque 4.1 plus haut. Comme $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ est une $\mathbb{Z}$-forme, cette quantité doit être un entier $> 0$. En fait, on peut voir que $\mathrm{K}(h_\beta, h_\beta)$ est un entier divisible par 4, et donc $1/(\beta,\beta) \in \mathbb{N}^*$ pour tout $\beta \in \mathrm{R}$.

Pour chaque système de racines irréductible (c.-à-d., dont le diagramme de Dynkin est connexe), il y a au plus deux longeurs de racines ; lorsque c'est le cas, on parle de racines longues ou courtes. Lorsque toutes les racines ont la même longueur (c.-à-d., en type A-D-E), on convient que toutes les racines sont longues. Alors, on a le tableau suivant, où $\alpha_c$ désigne une racine courte.

| | $1/(\beta_\ell,\beta_\ell)$ | $1/(\alpha_c,\alpha_c)$ |
|---|---|---|
| $\mathrm{A}_{n-1}$ | $n$ | $-$ |
| $\mathrm{B}_n$ | $2n-1$ | $4n-2$ |
| $\mathrm{C}_n$ | $n+1$ | $2(n+1)$ |
| $\mathrm{D}_n$ | $2n-2$ | $-$ |
| $\mathrm{E}_6$ | 12 | $-$ |
| $\mathrm{E}_7$ | 18 | $-$ |
| $\mathrm{E}_8$ | 30 | $-$ |
| $\mathrm{F}_4$ | 9 | 18 |
| $\mathrm{G}_2$ | 4 | 12 |

# TABLE DES MATIÈRES

**Bibliographie**


[Abe] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge Univ. Press, 1977.

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.

[Am] Y. Amice, Les nombres $p$-adiques, P.U.F., 1975.

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[Bo] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Springer Verlag, 1991.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 7-8, 1975.

[BI7-8] N. Bourbaki, Intégration, Chap. 7-8, 1963.

[BrM] J. Briançon, Ph. Maisonobe, Éléments d'algèbre commutative, niveau M1, Ellipses, 2004.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.

[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.

[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[GH] M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.

[He] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.

[Ho81] G. P. Hochschild, Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, Springer-Verlag, 1981.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Hu2] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, 1975, corrected 2nd printing 1981.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Ku] E. Kunz, Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkhäuser, 1985.

[Laf74] J.-P. Lafon, Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative, Hermann, 1974.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.

[Ma1] H. Matsumura, Commutative algebra (2nd edition), The Benjamin/Cummings publishing company, 1980.

[Ma2] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 1986, paperback edition with corrections, 1989.

[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Pe] D. Perrin, Géométrie algébrique - Une introduction, Inter Éditions/-CNRS Éditions, 1995.

[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Se68] J.-P. Serre, Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés, Publ. Math. I.H.E.S. 34 (1968), 37-52. Reproduit dans : J.-P. Serre, Oeuvres, vol. II, pp.512-527, Springer-Verlag, 1986.

[Sw] M. E. Sweedler, Hopf Algebras, Benjamin, 1969.

[Sp] T. A. Springer, Linear algebraic groups, Birkäuser, 1981, 2nd edition 1998.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.