PARTIE FI : $\mathbb{R}$-ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES (SUITE) SÉANCE DU 14/11

Commençons par réparer un oubli dans la section précédente.

4.4. Astuce unitaire de Weyl. — Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple. D'après le théorème 4.16, il existe une forme compacte $\mathfrak{u}_0$ de $\mathfrak{g}$ (et on verra plus bas que $\mathfrak{u}_0$ est unique à isomorphisme près).

D'après le théorème 2.23 (7 novembre), il existe un groupe de Lie compact semi-simple 1-connexe G_0 tel que $\mathrm{Lie}(G_0) = \mathfrak{u}_0$. Soit $\phi : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie V ; notons ϕ_0 sa restriction à $\mathfrak{u}_0$. Comme G_0 est 1-connexe, il existe une représentation $\rho : G_0 \to GL(V)$ telle que $d\rho = \phi$ (2.12). Alors, on sait que ρ est complètement réductible (cours d'Introduction, 19/9, Prop. 4.1). Donc

$$V = V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus V_n,$$

où chaque V_i est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel stable par $\rho(G_0)$, irréductible comme G_0-module. Chaque V_i est irréductible comme $\mathfrak{u}_0$-module, car si W_i est un sous-$\mathfrak{u}_0$-module non nul de V_i, alors W_i est stable par G_0 (1.36, 6/11), donc $W_i = V_i$.

De plus, comme V_i est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel, il est stable par $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Donc chaque V_i est un sous-$\mathfrak{g}$-module de V, irréductible puisqu'il l'est déjà comme $\mathfrak{g}_0$-module. On a donc obtenu le théorème suivant.

***Théorème 4.18* (Weyl's unitarian trick).** — *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple. Toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$ est complètement réductible.*

***Remarque 4.19*.** — On dispose aussi de preuves algébriques de ce théorème, voir [**BL1**, § 6.2] ou [**Hu**, § 6.3] pour une preuve élémentaire, ou [**Di74**, 1.6.3] et [**Va**, § 3.12-13] pour une preuve cohomologique.

(0) version du 1/12/06

5. Involutions et décompositions de Cartan

5.1. Conjugaison par rapport à une forme réelle. —

Définition 5.1. — Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie et soit $\mathfrak{g}_0$ une forme réelle de $\mathfrak{g}$ (ou, de façon équivalente, soient $\mathfrak{g}_0$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$). Alors,

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{g}_0 \bigoplus i\mathfrak{g}_0$$

et l'on définit la **conjugaison par rapport à $\mathfrak{g}_0$** par

$$\sigma(\mathrm{X} + i\mathrm{Y}) = \mathrm{X} - i\mathrm{Y}, \qquad \forall\, \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}_0.$$

Alors $\sigma^2 = \mathrm{id}$, et σ est $\mathbb{R}$-linéaire et préserve le crochet de Lie, c.-à-d., c'est un automorphisme involutif de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$. De plus, σ est $\mathbb{C}$-semi-linéaire, c.-à-d., pour tout $\mathrm{Z} \in \mathfrak{g}$, on a

$$\sigma(i\mathrm{Z}) = -i\sigma(\mathrm{Z}), \qquad \text{d'où} \quad \sigma(\lambda \mathrm{Z}) = \overline{\lambda}\mathrm{Z}, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

On résume ces propriétés en disant que σ est une **involution semi-linéaire** de $\mathfrak{g}$.

Réciproquement, soit τ une telle involution semi-linéaire de $\mathfrak{g}$, c.-à-d., un automorphisme involutif de $\mathbb{R}$-algèbre de Lie qui vérifie $\tau \circ \mathrm{J} = -\mathrm{J} \circ \tau$, où J désigne l'opérateur de multiplication par i. Notons $\mathfrak{g}^\tau$ et $\mathfrak{g}^{\tau,-}$ les invariants et anti-invariants de τ, c.-à-d., les sous-espaces propres associés à la valeur propre 1, resp. -1. Alors

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^\tau \bigoplus \mathfrak{g}^{\tau,-},$$

et comme τ est un automorphisme de $\mathbb{R}$-algèbre de Lie, on a

$$[\mathfrak{g}^\tau, \mathfrak{g}^\tau] \subseteq \mathfrak{g}^\tau, \quad [\mathfrak{g}^{\tau,-}, \mathfrak{g}^{\tau,-}] \subseteq \mathfrak{g}^\tau, \quad [\mathfrak{g}^\tau, \mathfrak{g}^{\tau,-}] \subseteq \mathfrak{g}^{\tau,-}.$$

Donc $\mathfrak{g}_0 := \mathfrak{g}^\tau$ est une sous-algèbre et $\mathfrak{g}^{\tau,-}$ est un $\mathfrak{g}_0$-module. De plus, comme $\tau i = -i\tau$, on voit facilement que la multiplication par i échange $\mathfrak{g}^\tau$ et $\mathfrak{g}^{\tau,-}$, c.-à-d., on a

$$\mathfrak{g}^{\tau,-} = i\mathfrak{g}_0 \qquad \text{d'où} \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \bigoplus i\mathfrak{g}_0.$$

Donc $\mathfrak{g}_0$ est une $\mathbb{R}$-forme de $\mathfrak{g}$ et τ est la conjugaison associée. En conclusion :

se donner une forme réelle de $\mathfrak{g}$ équivaut à
se donner une involution semi-linéaire de $\mathfrak{g}$.

Notation 5.2. — On note $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ le groupe des automorphismes ($\mathbb{C}$-linéaires) de la $\mathbb{C}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et $\mathrm{Aut}^0_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ sa composante connexe. C'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{R}})$, resp. de $\mathrm{Aut}^0_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}^{\mathbb{R}})$.

Lemme 5.3. — *Soient $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_1$ deux formes réelles de $\mathfrak{g}$, et soient τ_0, τ_1 les conjugaisons associées. Alors $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}_1$ sont isomorphes (comme $\mathbb{R}$-algèbres de*

Lie) si et seulement si τ_0 *et* τ_1 *sont conjuguées sous* $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$*, c.-à-d., s'il existe* $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ *tel que*

$$\phi \circ \tau_0 \circ \phi^{-1} = \tau_1.$$

Démonstration. — Supposons que $\psi : \mathfrak{g}_0 \to \mathfrak{g}_1$ soit un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie. Alors ψ induit un $\mathbb{C}$-isomorphisme ϕ :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus i\mathfrak{g}_0 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_1 \oplus i\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}, \qquad x_0 + iy_0 \mapsto \psi(x_0) + i\psi(y_0),$$

et l'on a $\tau_1 = \phi \circ \tau_0 \circ \phi^{-1}$. Réciproquement, si $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ vérifie cette égalité, alors ϕ induit un $\mathbb{R}$-isomorphisme de $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^{\tau_0}$ sur $\mathfrak{g}^{\tau_1} = \mathfrak{g}_1$. Le lemme est démontré. □

***Proposition 5.4* (Involutions qui commutent).** — *Soient* $\mathfrak{g}_1$ *et* $\mathfrak{g}_2$ *deux formes réelles de* $\mathfrak{g}$*, et* τ_1, τ_2 *les conjugaisons associées. On a les équivalences :*

$$\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1 \Leftrightarrow \tau_1(\mathfrak{g}_2) = \mathfrak{g}_2 \Leftrightarrow \tau_2(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_1.$$

Démonstration. — Si $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$ alors τ_1 laisse stable les espaces propres de τ_2, d'où $\tau_1(\mathfrak{g}_2) = \mathfrak{g}_2$, et de même $\tau_2(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_1$.

Réciproquement, supposons que $\tau_1(\mathfrak{g}_2) = \mathfrak{g}_2$. Comme $\tau_1\tau_2$ et $\tau_2\tau_1$ sont $\mathbb{C}$-linéaires, il suffit de vérifier qu'ils coïncident sur $\mathfrak{g}_2$, puisque $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Et comme $\mathfrak{g}_2$ est stable par τ_1, on a

$$\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_2^{\tau_1} \oplus \mathfrak{g}_2^{\tau_1,-}.$$

Sur $\mathfrak{g}_2^{\tau_1}$, on a $\tau_1\tau_2 = \mathrm{id} = \tau_2\tau_1$, et sur l'autre facteur on a

$$\tau_1\tau_2 = -\,\mathrm{id} = \tau_2\tau_1.$$

Ceci montre que τ_1 et τ_2 commutent. La proposition en découle. □

5.2. Existence d'une décomposition de Cartan. — Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{g}_0$ une $\mathbb{R}$-forme de $\mathfrak{g}$, et σ la conjugaison associée. On a vu (13/11, 4.16) que $\mathfrak{g}$ possède une forme compacte $\mathfrak{u}$. Notons τ la conjugaison associée.

***Théorème 5.5*.** — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie semi-simple,* $\mathfrak{g}_0$ *et* $\mathfrak{u}$ *deux* $\mathbb{R}$*-formes de* $\mathfrak{g}$*, avec* $\mathfrak{u}$ **compacte**. *Soient* σ *et* τ *les conjugaisons associées. Il existe* $\phi \in \mathrm{Aut}^0_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ *tel que*

$$\phi\tau\phi^{-1} \quad \text{commute à} \quad \sigma,$$

c.-à-d., tel que $\mathfrak{g}_0$ *soit stable par* $\phi\tau\phi^{-1}$*, qui est la conjugaison par rapport à la forme compacte* $\phi(\mathfrak{u})$*.*

Démonstration. — Soit K la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. On pose, pour $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{K}_\tau(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = -\mathrm{K}(\mathrm{X}, \tau(\mathrm{Y})).$$

***Lemme 5.6*.** — K_τ *est une forme hermitienne définie positive.*

Démonstration. — Il est clair que K_τ est $\mathbb{C}$-linéaire (resp. semi-linéaire) en la première (resp. deuxième) variable. Montrons qu'elle vérifie la symétrie hermitienne, c.-à-d.,

$$\forall\, \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}, \qquad \mathrm{K}_\tau(\mathrm{Y}, \mathrm{X}) = \overline{\mathrm{K}_\tau(\mathrm{X}, \mathrm{Y})}.$$

Posant $\mathrm{X} = \tau(\mathrm{Z})$ et utilisant la symétrie de K, ceci équivaut à l'égalité

$$\forall\, \mathrm{X}, \mathrm{Z} \in \mathfrak{g}, \qquad \mathrm{K}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \overline{\mathrm{K}(\tau(\mathrm{Y}), \tau(\mathrm{Z}))}.$$

Comme τ est $\mathbb{C}$-semi-linéaire, les deux termes sont des applications $\mathbb{C}$-bilinéaires, donc il suffit de vérifier l'égalité sur une base de $\mathfrak{g}$. Or, pour $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{u}$, on a $\tau(\mathrm{Y}) = \mathrm{Y}$, $\tau(\mathrm{Z}) = \mathrm{Z}$, et

$$\mathrm{K}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \mathrm{K}_{\mathfrak{u}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) \in \mathbb{R},$$

d'où l'égalité désirée. Ceci prouve que K_τ est une forme hermitienne. Pour montrer qu'elle est définie positive, il suffit de montrer que $\mathrm{K}_\tau(\mathrm{X}, \mathrm{X}) > 0$ lorsque X parcourt une base de $\mathfrak{g}$. Or, pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{u}$, on a

$$\mathrm{K}_\tau(\mathrm{X}, \mathrm{X}) = -\mathrm{K}(\mathrm{X}, \mathrm{X}) = -\mathrm{K}_{\mathfrak{u}}(\mathrm{X}, \mathrm{X}) > 0,$$

puisque $\mathrm{K}_{\mathfrak{u}}$ est définie négative (car $\mathfrak{u}$ est une forme compacte). Le lemme est démontré. □

Poursuivons la démonstration du théorème 5.5. Posons $\mathrm{N} = \sigma\tau$. Alors N est $\mathbb{C}$-linéaire et est donc un $\mathbb{C}$-automorphisme d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, donc N fixe K (7/11, Lemme 2.20). Observons que $\mathrm{N}^{-1} = \tau\sigma$. Alors, pour tout $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}$,

$$\mathrm{K}_\tau(\mathrm{NX}, \mathrm{Y}) = -\mathrm{K}(\mathrm{NX}, \tau\mathrm{Y}) = -\mathrm{K}(\mathrm{X}, \tau\sigma\tau\mathrm{Y}) = \mathrm{K}_\tau(\mathrm{X}, \mathrm{NY}).$$

Ceci montre que N est un opérateur hermitien (c.-à-d., auto-adjoint) pour le produit scalaire hermitien K_τ. Par conséquent, N est diagonalisable, à valeurs propres réelles, non nulles puisque N est inversible.

Pour toute la suite, on fixe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathfrak{g}$ dans laquelle N est diagonale, et l'on considérera des matrices relativement à cette base. Pour commencer, soit

$$\mathrm{P} = \mathrm{N}^2,$$

c'est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels > 0. On peut donc considérer leur logarithme $\mu_i = \log(\lambda_i)$ et la matrice diagonale

$$\mathrm{D} := \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose alors $\lambda_i^t = \exp(t\mu_i)$ et

$$\mathrm{P}^t = \exp(t\mathrm{D}) = \begin{pmatrix} \lambda_1^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^t \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathrm{P}^t\mathrm{N} = \mathrm{N}\mathrm{P}^t$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme N appartient à $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$, il en est de même de $\mathrm{P} = \mathrm{N}^2$. Montrons que $\mathrm{P}^t \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Écrivons $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{i,j;k}\, e_k$. Appliquant l'automorphisme P, on obtient les égalités

$$\forall\, i, j, k, \qquad (\lambda_i\lambda_j - \lambda_k)\, c_{i,j;k} = 0.$$

Donc, chaque fois que $c_{i,j;k} \neq 0$ on a $\lambda_i\lambda_j = \lambda_k$ et donc aussi

$$\lambda_i^t\lambda_j^t\, c_{i,j;k} = \lambda_k^t\, c_{i,j;k}, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

et bien sûr cette égalité est aussi vérifiée lorsque $c_{i,j;k} = 0$. Ceci montre que P^t est un automorphisme de $\mathfrak{g}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. On pose alors, pour tout t,

$$\tau_t = \mathrm{P}^t \circ \tau \circ \mathrm{P}^{-t};$$

c'est la conjugaison par rapport à la forme compacte $\mathrm{P}^t(\mathfrak{u})$. Montrons que, pour t bien choisi, τ_t commute à σ. Observons d'abord que

$$\tau\mathrm{N}\tau^{-1} = \tau\sigma = \mathrm{N}^{-1} \quad \text{d'où} \quad \tau\mathrm{P}\tau^{-1} = \mathrm{P}^{-1} \quad \text{et} \quad \tau\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\tau.$$

Par un calcul matriciel analogue au précédent (facile car P et P^t sont diagonales), on obtient que

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad \tau\mathrm{P}^t = \mathrm{P}^{-t}\tau.$$

Alors :

$$\begin{cases} \sigma\tau_t = \sigma\mathrm{P}^t\tau\mathrm{P}^{-t} = \mathrm{N}\mathrm{P}^{-2t}, \\ \tau_t\sigma = \mathrm{P}^t\tau\mathrm{P}^{-t}\sigma = \mathrm{P}^{2t}\mathrm{N}^{-1} = \mathrm{N}^{-1}\mathrm{P}^{2t}, \end{cases}$$

la dernière égalité résultant du fait que N^{-1} et P^{2t} sont diagonales, donc commutent. Donc, on voit que

$$\sigma\tau_t = \tau_t\sigma \Leftrightarrow \mathrm{N}^2 = \mathrm{P}^{4t},$$

et comme $\mathrm{N}^2 = \mathrm{P}$, cette égalité est vérifiée pour $t = 1/4$. Par conséquent, l'automorphisme $\phi = \mathrm{P}^{1/4} = \exp(\mathrm{D}/4)$ convient. Enfin, le morphisme $t \mapsto \mathrm{P}^t$ (« sous-groupe à un paramètre », cf. 6/11, 1.8) est à valeurs dans la composante connexe $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}^0(\mathfrak{g})$, donc $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}^0(\mathfrak{g})$. Le théorème est démontré. □

Définition 5.7. — Soit $\mathfrak{g}_0$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie semi-simple et soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et σ la conjugaison par rapport à $\mathfrak{g}_0$. D'après le théorème 5.5, il existe une forme réelle compacte $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$ telle que la conjugaison associée τ commute à σ, et donc laisse stable $\mathfrak{g}_0$. On a donc :

$$(*) \qquad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0^{\tau} \oplus \mathfrak{g}_0^{\tau,-} = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}) \oplus (\mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}).$$

Alors $\mathfrak{k} := \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}_0$, et $\mathfrak{p} := \mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}$ est un $\mathfrak{p}$-module, et l'on a $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}$. L'involution τ (= conjugaison par rapport à une forme compacte de $\mathfrak{g}$ qui laisse stable $\mathfrak{g}_0$), ou sa restriction $\tau|_{\mathfrak{g}_0}$ à $\mathfrak{g}_0$, s'appelle une **involution de Cartan** de $\mathfrak{g}_0$, et la décomposition associée

$$(*) \qquad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} = \mathfrak{g}_0^\tau \oplus \mathfrak{g}_0^{\tau,-}$$

s'appelle une **décomposition de Cartan** de $\mathfrak{g}_0$. On va voir dans le paragraphe suivant qu'une involution (resp. décomposition) de Cartan est unique à conjugaison près.

5.3. Conjugaison des formes compactes et décompositions de Cartan. — Soient $\mathfrak{g}_0$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, et σ la conjugaison associée.

Théorème 5.8. — 1) *Soient $\mathfrak{u}_1$ et $\mathfrak{u}_2$ deux formes réelles compactes de $\mathfrak{g}$, et τ_1, τ_2 les conjugaisons associées. Il existe un sous-groupe à un paramètre $t \mapsto \mathrm{P}^t$ de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ tel que $\phi = \mathrm{P}^{1/4}$ envoie $\mathfrak{u}_2$ sur $\mathfrak{u}_1$. Par conséquent, toutes les formes compactes de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées par $\mathrm{Aut}^0_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$.*

2) *Si τ_1 et τ_2 commutent à σ, et définissent donc des décompositions de Cartan*

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{p}_1 = \mathfrak{k}_2 \oplus \mathfrak{p}_2,$$

où $\mathfrak{k}_r = \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}_r$ et $\mathfrak{p}_r = \mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{p}_r$ pour $r = 1, 2$, alors P^t stabilise $\mathfrak{g}_0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $\phi = \mathrm{P}^{1/4}$ envoie $\mathfrak{k}_2$ sur $\mathfrak{k}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ sur $\mathfrak{p}_1$. Par conséquent, toutes les décompositions de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ sont conjuguées par $\mathrm{Aut}^0_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_0)$.

Démonstration. — 1) Appliquons le théorème 5.5 à $u = \mathfrak{u}_2$ et $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}_1$. Alors, posant

$$\mathrm{N} = \tau_1\tau_2, \qquad \mathrm{P} = \mathrm{N}^2,$$

et introduisant comme précédemment le sous-groupe à un paramètre $t \mapsto \mathrm{P}^t$, on obtient, pour $\phi = \mathrm{P}^{1/4}$, que $\phi(\mathfrak{u}_2)$ est stable par τ_1, d'où

$$\phi(\mathfrak{u}_2) = (\phi(\mathfrak{u}_2) \cap \mathfrak{u}_1) \bigoplus (\phi(\mathfrak{u}_2) \cap i\mathfrak{u}_1)\,.$$

Or, $\mathfrak{u}_2$ et $\mathfrak{u}_1$ sont des formes réelles compactes de $\mathfrak{g}$ et donc, pour $x \in \mathfrak{u}_2 \setminus \{0\}$ et $y \in \mathfrak{u}_1 \setminus \{0\}$ on a :

$$\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(iy, iy) = -\mathrm{K}_{\mathfrak{u}_1}(y, y) > 0 > \mathrm{K}_{\mathfrak{u}_2}(x, x) = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(x, x).$$

Il en résulte que $\mathfrak{u}_2 \cap i\mathfrak{u}_1 = (0)$, d'où $\phi(\mathfrak{u}_2) \subseteq \mathfrak{u}_1$. Comme ϕ est bijectif et $\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_1$ ont même dimension, on obtient

$$\phi(\mathfrak{u}_2) = \mathfrak{u}_1.$$

Ceci prouve 1).

2) Supposons de plus que τ_1 et τ_2 commutent à σ. Alors, il en est de même de $\mathrm{N} = \tau_1\tau_2$ et de $\mathrm{P} = \mathrm{N}^2$. Se plaçant dans une base où N, et donc P, est

diagonale, l'égalité $\sigma \mathrm{P} = \mathrm{P}\sigma$ entraîne, par le même calcul que dans la preuve du théorème 5.5, que

$$\sigma \mathrm{P}^t = \mathrm{P}^t \sigma, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Donc chaque P^t laisse stable les espaces propres de σ, d'où $\mathrm{P}^t(\mathfrak{g}_0) \subseteq \mathfrak{g}_0$ pour tout $t \in \mathfrak{g}_0$. Par conséquent, désignant par θ_t la restriction de P^t à $\mathfrak{g}_0$, on obtient un sous-groupe à un paramètre

$$t \mapsto \theta_t, \qquad \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Aut}^0_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_0).$$

Posons $\psi = \theta_{1/4} = \mathrm{P}^{1/4}|_{\mathfrak{g}_0}$. Comme $\mathrm{P}^{1/4}$ applique bijectivement $\mathfrak{u}_2$ sur $\mathfrak{u}_1$ et $i\mathfrak{u}_2$ sur $i\mathfrak{u}_1$ (car chaque P^t est $\mathbb{C}$-linéaire), alors ψ est un élément de $\mathrm{Aut}^0_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_0)$ qui applique bijectivement $\mathfrak{k}_2$ sur $\mathfrak{k}_1$ et $\mathfrak{p}_2$ sur $\mathfrak{p}_1$. Le théorème est démontré. $\square$

5.4. Correspondance entre formes réelles et involutions de $\mathfrak{g}$. — Soient $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple, $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan, $\mathrm{R} = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ le système de racines, Δ une base de R,

$$(h_\alpha)_{\alpha\in\Delta} \bigcup (e_\beta)_{\beta\in\mathrm{R}}$$

une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{u}_0 = \bigoplus_{\alpha\in\Delta} \mathbb{R} i h_\alpha \bigoplus \bigoplus_{\beta\in\mathrm{R}^+} (\mathbb{R}(e_\beta - e_{-\beta}) \oplus \mathbb{R} i(e_\beta + e_{-\beta}))$$

la forme compacte de $\mathfrak{g}$ construite au § 4.3, et τ_0 la conjugaison associée.

Pour éviter des confusions dans ce qui suit, précisons la terminologie utilisée.

Définition 5.9. — 1) Une **involution** de $\mathfrak{u}_0$, resp. de $\mathfrak{g}$, est un élément σ de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}_0)$, resp. $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$, tel que $\sigma^2 = \mathrm{id}$.

2) On a vu (5.1) que se donner une forme réelle $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$ équivaut à se donner une involution σ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ qui est de plus $\mathbb{C}$-semilinéaire, c.-à-d., qui anticommute à la multiplication par i.

3) Nous dirons qu'une forme réelle $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$ est **compatible à** $\mathfrak{u}_0$ si la conjugaison associée σ commute à τ_0. D'après la proposition 5.4, ceci équivaut à dire que $\mathfrak{u}_0$ (resp. $\mathfrak{g}_0$) est stable par σ (resp. par τ_0), et dans ce cas

$$\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}_0) \bigoplus (\mathfrak{g}_0 \cap i\mathfrak{u}_0)$$

est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_0$.

Observons que si $\mathfrak{g}_0$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$, alors tout $\gamma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_0)$ se prolonge de façon unique en un automorphisme $\gamma_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$; par conséquent, on a une identification naturelle :

$$\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_0) = \{g \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}) \mid g(\mathfrak{g}_0) = \mathfrak{g}_0\}.$$

Ceci vaut, en particulier, pour $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{u}_0$. Posons $\mathrm{K} = \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}_0)$ et $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$. On note : $\{\text{involutions de } \mathfrak{u}_0\}/\mathrm{K}$ l'ensemble des classes de conjugaison sous K d'involutions de $\mathfrak{u}_0$, et l'on définit de même : $\{\text{formes réelles de } \mathfrak{g}\}/\mathrm{G}$.

Théorème 5.10. — *On a des bijections*

$$\{\textit{involutions de } \mathfrak{u}_0\}/\mathrm{K} \overset{(\dagger)}{\leftrightarrow} \left\{\begin{matrix}\textit{formes réelles de } \mathfrak{g} \\ \textit{compatibles à } \mathfrak{u}_0\end{matrix}\right\}/\mathrm{K} \overset{(*)}{\leftrightarrow} \{\textit{formes réelles de } \mathfrak{g}\}/\mathrm{G}.$$

Démonstration. — D'après le théorème 5.5, toute forme réelle de $\mathfrak{g}$ est conjuguée sous $\mathrm{Aut}^0_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ à une forme réelle $\mathfrak{g}_1$ compatible à $\mathfrak{u}_0$. Soit $\mathfrak{g}_2$ une autre forme réelle compatible à $\mathfrak{u}_0$. Pour établir la bijection $(*)$, il faut voir que si $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ sont conjuguées sous $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$, alors elles le sont sous $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}_0)$.

Supposons donc qu'il existe $\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ tel que $\phi(\mathfrak{g}_1) = \mathfrak{g}_2$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_2 &= \ (\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{u}_0) \ \bigoplus \ (\mathfrak{g}_2 \cap i\mathfrak{u}_0) \\ &= \phi(\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{u}_0) \bigoplus \phi(\mathfrak{g}_1 \cap i\mathfrak{u}_0)\end{aligned}$$

sont deux décompositions de Cartan de $\mathfrak{g}_2$. Donc, d'après le théorème 5.8, il existe $\gamma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}_2)$ tel que

$$\gamma\phi(\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{u}_0) = \mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{u}_0 \qquad \text{et} \qquad \gamma\phi(\mathfrak{g}_1 \cap i\mathfrak{u}_0) = \mathfrak{g}_2 \cap i\mathfrak{u}_0.$$

Alors $\psi := \gamma_{\mathbb{C}} \circ \phi$ appartient à $\mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ et vérifie :

$$\psi(\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{u}_0) = \mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{u}_0 \qquad \text{et} \qquad \psi(i\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{u}_0) = i\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{u}_0.$$

Comme on a, pour $k = 1, 2$,

$$\mathfrak{u}_0 = (\mathfrak{u}_0 \cap \mathfrak{g}_k) \bigoplus (\mathfrak{u}_0 \cap i\mathfrak{g}_k),$$

il en résulte que $\psi(\mathfrak{u}_0) = \mathfrak{u}_0$, d'où $\psi \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}_0)$. Ceci prouve que $(*)$ est une bijection.

Définissons maintenant la correspondance $(\dagger)$. Soient $\mathfrak{g}_0$ une forme réelle de $\mathfrak{g}$ compatible à $\mathfrak{u}_0$ et σ la conjugaison associée. Alors σ laisse stable $\mathfrak{u}_0$, donc on peut lui associer sa restriction $s = \sigma|_{\mathfrak{u}_0}$. De plus, on a

$$\mathfrak{g}_0 = (\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}_0) \bigoplus i(i\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{u}_0) = \mathfrak{u}_0^s \bigoplus i\mathfrak{u}_0^{s,-}. \tag{1}$$

Réciproquement, soient s une involution de $\mathfrak{u}_0$ et

$$\mathfrak{u}_0 = \mathfrak{u}_0^s \bigoplus \mathfrak{u}_0^{s,-} \tag{2}$$

la décomposition correspondante. Alors $\mathfrak{u}_0^s$ est une sous-algèbre, $\mathfrak{u}_0^{s,-}$ un $\mathfrak{u}_0^s$-module, et l'on a $[\mathfrak{u}_0^{s,-}, \mathfrak{u}_0^{s,-}] \subseteq \mathfrak{u}_0^s$. Par conséquent

$$\mathfrak{g}_0(s) := \mathfrak{u}_0^s \bigoplus i\mathfrak{u}_0^{s,-} \tag{3}$$

est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, et c'en est une forme réelle. Notons σ la conjugaison associée ; alors $\sigma = 1$ sur $\mathfrak{g}_0(s)$ et $\sigma = -1$ sur $i\mathfrak{g}_0(s) = \mathfrak{u}_0^{s,-} \oplus i\mathfrak{u}_0^s$, donc $\sigma(\mathfrak{u}_0) = \mathfrak{u}_0$ et $\sigma|_{\mathfrak{u}_0} = s$. Ceci montre que les applications

$$\sigma \mapsto \sigma|_{\mathfrak{u}_0} \qquad \text{et} \qquad s \mapsto \mathfrak{g}_0(s)$$

sont des bijections réciproques. De plus, elles sont clairement K-équivariantes, d'où la bijection $(\dagger)$. Ceci prouve le théorème. □

D'autre part, toute involution s de $\mathfrak{u}_0$ se prolonge en une involution $s_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}$, et l'on a le théorème suivant, pour lequel on renvoie à [**Hel**, X.1.4].

Théorème 5.11. — *L'application $s \mapsto s_{\mathbb{C}}$ induit une bijection*

$$\{\textit{involutions de } \mathfrak{u}_0\}/\operatorname{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{u}_0) \leftrightarrow \{\textit{involutions de } \mathfrak{g}\}/\operatorname{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}).$$

Ces deux théorèmes ramènent la classification des formes réelles de $\mathfrak{g}$ à la question, purement algébrique, de la classification des classes de conjugaison d'involutions dans $\operatorname{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$. Cette classification est faite dans [**Hel**, § X.5], voir aussi [**Ka**, Chap. 8]. On va donner sans démonstrations, dans le paragraphe 5.6 plus bas, la classification des $\mathbb{R}$-algèbres de Lie simples $\mathfrak{g}_0$ de « type classique ».

5.5. $\mathbb{R}$-algèbres de Lie absolument simples. — Commençons par le lemme suivant.

Lemme 5.12. — *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple. Alors $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie simple.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{h}$ un idéal non nul de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$. D'après le corollaire 3.10 (séance 13/11), on sait déjà que $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ est semi-simple et l'idéal $\mathfrak{h}$ est somme directe de $\mathbb{R}$-algèbre de Lie simples. On a donc

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h} = [\mathfrak{h},\mathfrak{h}], \qquad \text{d'où} \quad \mathfrak{h} = [\mathfrak{g},\mathfrak{h}].$$

Donc, tout $\mathrm{H} \in \mathfrak{h}$ s'écrit $\mathrm{H} = \sum_{k=1}^{n} [\mathrm{X}_k, \mathrm{Y}_k]$, avec $\mathrm{X}_k \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{Y}_k \in \mathfrak{h}$. Alors

$$i\mathrm{H} = \sum_{k=1}^{n} [i\mathrm{X}_k, \mathrm{Y}_k] \in [\mathfrak{g},\mathfrak{h}] = \mathfrak{h}.$$

Ceci montre que $\mathfrak{h}$ est stable par multiplication par i donc est un $\mathbb{C}$-idéal de $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{g}$ est simple, il vient $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. Ceci prouve que $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ est simple. □

Donc, parmi les $\mathbb{R}$-algèbres de Lie simples, on trouve les $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, pour $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple. Celles-ci sont caractérisées par les résultats suivants.

Lemme 5.13. — *Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple. Alors $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$, donc n'est pas simple. De plus, $\mathfrak{g}$ est uniquement déterminée par $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$.*

Démonstration. — On a vu que $\mathfrak{g}$ admet au moins une forme réelle $\mathfrak{g}_0$, par exemple la forme déployée 4.8 (ou la forme compacte 4.16). Donc $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Comme $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, on obtient que

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \cong \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}.$$

Ceci prouve la première assertion. La deuxième découle de l'unicité des composantes simples d'une algèbre de Lie semi-simple (3.4). □

Définition 5.14. — Soit $\mathfrak{g}_0$ une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie simple. On dit que $\mathfrak{g}_0$ est **absolument simple** si $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie **simple**.

On vient de voir que si $\mathfrak{g}$ est une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple, alors $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie simple mais **pas** absolument simple. Ceci caractérise les $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, d'après la proposition qui suit.

Lemme 5.15. — *Soient* V_0 *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel,* $\mathrm{V} = \mathrm{V}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ *et* τ *la conjugaison par rapport à* V_0*. Soient* W *un sous-*$\mathbb{C}$*-espace vectoriel et* $\mathrm{W}_0 = \mathrm{W} \cap \mathrm{V}_0$*. Alors :*

$$\tau(\mathrm{W}) = \mathrm{W} \Leftrightarrow \mathrm{W} = \mathrm{W}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Démonstration. — L'implication $\Leftarrow$ est claire. D'autre part, l'application composée

$$\mathrm{W}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathrm{W} \hookrightarrow \mathrm{V} = \mathrm{V}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

est injective, donc il en est de même de f. Montrons que f est surjective si $\tau(\mathrm{W}) = \mathrm{W}$. Soit $x \in \mathrm{W}$. Comme W est τ-stable, alors

$$\mathrm{Re}(x) := \frac{x + \tau(x)}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(x) := i\frac{\tau(x) - x}{2} \quad \text{appartiennent à W,}$$

et sont fixés par τ, donc appartiennent à W_0, et l'on a

$$x = \mathrm{Re}(x) + i\,\mathrm{Im}(x) \in \mathrm{W}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Ceci montre que f est surjective. Le lemme est démontré. □

Proposition 5.16. — *Soit* $\mathfrak{g}_0$ *une* $\mathbb{R}$*-algèbre de Lie simple telle que* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ *ne soit pas simple. Alors*

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{s},$$

où $\mathfrak{s}$ *est une* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie simple uniquement déterminée, et* $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{s}^{\mathbb{R}}$*.*

Démonstration. — Notons τ la conjugaison de $\mathfrak{g}$ définie par $\mathfrak{g}_0$. On sait déjà que $\mathfrak{g}$ est semi-simple (corollaire 3.10). Soit $\mathfrak{s}$ un idéal simple (non-abélien !) de $\mathfrak{g}$. Alors $\tau(\mathfrak{s})$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, donc

$$\mathfrak{s} \cap \tau(\mathfrak{s}) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{s} + \tau(\mathfrak{s}).$$

sont des idéaux de $\mathfrak{g}$ qui sont τ-stables, donc d'après le lemme 5.15 on a :

$$\mathfrak{s} \cap \tau(\mathfrak{s}) = \mathfrak{a}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \qquad \mathfrak{s} + \tau(\mathfrak{s}) = \mathfrak{b}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C},$$

où $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0$ sont des idéaux de de $\mathfrak{g}_0$, nuls ou égaux à $\mathfrak{g}_0$ puisque $\mathfrak{g}_0$ est simple. Comme $\mathfrak{s} \neq 0$, on a $\mathfrak{b}_0 \neq 0$, d'où

$$\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{g}_0 \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{s} + \tau(\mathfrak{s}) = \mathfrak{g}.$$

D'autre part, on ne peut avoir $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{g}_0$, car sinon on aurait

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \subseteq \mathfrak{s}, \qquad \text{d'où} \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{s},$$

contredisant la non-simplicité de $\mathfrak{g}$. Donc $\mathfrak{a}_0 = 0 = \mathfrak{s} \cap \tau(\mathfrak{s})$ et l'on a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \tau(\mathfrak{s}).$$

Comme τ est un automorphisme de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, il induit un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres de Lie

$$\mathfrak{s}^{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \tau(\mathfrak{s}^{\mathbb{R}}) = \tau(\mathfrak{s})^{\mathbb{R}}$$

et donc on obtient des isomorphismes :

$$\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{g}^{\mathbb{R}} \cong \mathfrak{s}^{\mathbb{R}} \oplus \mathfrak{s}^{\mathbb{R}}.$$

Par unicité des composantes simples de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ (3.4), on en déduit que $\mathfrak{g}_0 \cong \mathfrak{s}^{\mathbb{R}}$, et finalement $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{s}$ d'après le lemme 5.13. La proposition est démontrée. $\square$

En conclusion, on a obtenu le théorème suivant.

Théorème 5.17 **(L'alternative « complexe/absolument simple »)**
Soit $\mathfrak{g}_0$ *une* $\mathbb{R}$*-algèbre de Lie simple. Alors, de deux choses l'une :*

1) **ou bien** $\mathfrak{g}_0$ *est* complexe*, c.-à-d.,* $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ *pour une* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie simple, unique à isomorphisme près ;*

2) **ou bien** $\mathfrak{g}_0$ *est absolument simple, et donc* $\mathfrak{g}_0$ *est une forme réelle de la* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie simple* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$*.*

5.6. Aperçu de la classification. — Pour terminer, donnons un aperçu de la classification des $\mathbb{R}$-algèbres de Lie absolument simples classiques. Les références pour ce paragraphe sont [**Ti**, § IV.6.3], [**Hel**, § X.2] et [**Kna**, § I.8 & § I.17].

Soit $\mathbb{H}$ le corps (non-commutatif) des quaternions, il admet comme $\mathbb{R}$-base $(1, i, j, k)$, avec la table de multiplication suivante : $i^2 = -1 = j^2 = k^2$, et

$$ij = k = -ji, \qquad jk = i = -kj, \qquad ki = j = -ik.$$

Le *centre* de $\mathbb{H}$ est $\mathbb{R}$. Pour tout $x = a + ib + jc + kd$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on pose

$$\overline{x} = a - ib - jc - jd.$$

Alors, $\tau : x \mapsto \overline{x}$ est une **anti-involution** de $\mathbb{H}$, c.-à-d., $\tau^2 = \mathrm{id}$ et

$$\forall\, x, y \in \mathbb{H}, \qquad \overline{xy} = \overline{y}\,\overline{x}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{H}$, on pose

$$\mathrm{Re}(x) = \frac{x + \overline{x}}{2} \qquad \mathrm{Pu}(x) = \frac{x - \overline{x}}{2},$$

et l'on dit que x est un quaternion **pur** si $x = \mathrm{Pu}(x)$.

Pour tout $n \geqslant 1$, on considère $\mathbb{H}^n$ comme un $\mathbb{H}$-espace vectoriel **à droite**, ceci afin de pouvoir écrire les endomorphismes à gauche. C.-à-d., notant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique, tout élément de $\mathbb{H}^n$ s'écrit de façon unique

$$x = \sum_{\ell=1}^{n} e_\ell \, x_\ell, \qquad \text{avec} \quad x_\ell \in \mathbb{H}.$$

Alors, $\mathrm{End}(\mathbb{H}^n)$ s'identifie à $\mathrm{M}_n(\mathbb{H})$, c.-à-d., un endomorphisme u est représenté par la matrice $(\alpha_{r,s})_{r,s=1}^n$, où

$$u(e_s) = \sum_{r=1}^{n} e_r \, \alpha_{r,s},$$

et l'on a

$$u(x) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Le centre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{H})$ est $\mathbb{R}\mathrm{I}_n$, où I_n désigne la matrice identité. Ceci conduit à poser

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{H}) = \{\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{H}) \mid \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(\mathrm{M}) = 0\};$$

on a $\mathrm{M}_n(\mathbb{H}) = \mathbb{R}\mathrm{I}_n \bigoplus \mathfrak{sl}_n(\mathbb{H})$.

Pour toute anti-involution σ de $\mathbb{H}$, on a une notion de forme hermitienne ou anti-hermitienne sur $\mathbb{H}^n$ relativement à σ : c'est une application biadditive

$$\phi : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \longrightarrow \mathbb{H},$$

qui vérifie $\phi(xt, yt') = \sigma(t)\phi(x,y)t'$, pour $x, y \in \mathbb{H}^n$ et $t, t' \in \mathbb{H}$, ainsi que l'une des propriétés de symétrie suivantes :

$$\phi(y,x) = \begin{cases} \sigma(\phi(x,y)) & \text{cas hermitien ;} \\ -\sigma(\phi(x,y)) & \text{cas anti-hermitien .} \end{cases}$$

On associe à ϕ sa matrice

$$\mathrm{J}(\phi) = \begin{pmatrix} \phi(e_1,e_1) & \cdots & \phi(e_1,e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(e_n,e_1) & \cdots & \phi(e_n,e_n) \end{pmatrix};$$

alors, si $x, y \in \mathbb{H}^n$ sont représentés, comme d'habitude, par des vecteurs colonnes X, Y, on a (où M^t désigne la transposée de M) :

$$\phi(x,y) = \sigma(\mathrm{X})^t \, \mathrm{J}(\phi) \, \mathrm{Y} = \sum_{r,s=1}^{n} \sigma(x_r) \, \phi(e_r, e_s) \, y_s.$$

La condition que ϕ soit hermitienne, resp. anti-hermitienne, équivaut à

$$\sigma(\mathrm{J})^t = \mathrm{J}, \qquad \text{resp.} \qquad \sigma(\mathrm{J})^t = -\mathrm{J}.$$

À σ et ϕ, on associe le groupe

$$\mathrm{U}_\sigma(\phi) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H}^n) \mid \sigma(\mathrm{A})^t\,\mathrm{J}\,\mathrm{A} = \mathrm{J}\}$$

et l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{su}_\sigma(\phi) = \{\mathrm{M} \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{H}) \mid \sigma(\mathrm{M})^t\,\mathrm{J} + \mathrm{J}\,\mathrm{M} = 0\}.$$

(En fait, notant $\mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) = \mathrm{Aut}(\mathbb{H}^n)$, on a une identification

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{A} & -\overline{\mathrm{B}} \\ \mathrm{B} & \overline{\mathrm{A}} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}) \right\},$$

et l'on note $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H}) := \mathrm{GL}_n(\mathbb{H}) \cap \mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{C})$. C'est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{4n}(\mathbb{R})$, et son algèbre de Lie est $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{H})$. Les sous-groupes $\mathrm{U}_\sigma(\phi)$ sont automatiquement contenus dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{H})$ et donc leur algèbre de Lie dans $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{H})$, ce qui explique la notation $\mathfrak{su}_\sigma(\phi)$.)

Il y a une notion de « similitude » entre formes hermitiennes ou anti-hermitiennes ; en particulier des formes similaires donnent des groupes et algèbres de Lie isomorphes. D'après [**Ti**, IV.6.3], les matrices suivantes forment un système complet de représentants des classes de similitudes de formes hermitiennes ou anti-hermitiennes, relativement à l'anti-involution $t \mapsto \bar{t}$ de $\mathbb{H}$:

$$\mathrm{F}_r = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-r} & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_r \end{pmatrix}, \ (r \geqslant 0,\ 2r \leqslant n) \qquad \mathrm{F}_\alpha = i\,\mathrm{I}_n$$

On obtient ainsi, d'une part, les groupes $\mathrm{U}(n, r, \mathbb{H})$ et algèbres de Lie

$$\mathfrak{su}(n, r, \mathbb{H}), \quad r \geqslant 0,\ 2r \leqslant n,$$

qui sont des formes réelles de la $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple de type C_n, notée $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ dans le cours d'Introduction. La forme compacte est $\mathfrak{su}(n, 0, \mathbb{H})$, notée $\mathfrak{su}(n, \mathbb{H})$.

D'autre part, pour $n \geqslant 3$, on obtient le groupe $\mathrm{U}_\alpha(n, \mathbb{H})$ dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}_\alpha(n, \mathbb{H})$ est une forme réelle de la $\mathbb{C}$-algèbre de Lie simple de type D_n, notée $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbb{C})$.

À ces groupes et algèbres de Lie construits à l'aide des quaternions, il convient d'ajouter les groupes et algèbres de Lie « plus classiques » $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SU}(p, q)$, $\mathrm{SO}(p, q)$ et $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$. En résumé, on obtient la table suivante, dans laquelle on a indiqué les noms qu'on trouve dans Tits [**Ti**] d'une part, ou dans Helgason [**Hel**] ou Knapp [**Kna**], d'autre part (ces noms diffèrent pour les groupes liés aux quaternions, et aussi pour l'indice n ou $2n$ du groupe symplectique).

Pour chaque type, on indique la forme déployée, la forme compacte, les autres formes (notation de Tits ou de Helgason-Knapp), et des groupes de Lie associés. Pour les séries SO, on s'autorise à répéter la forme déployée parmi la liste des autres cas.

type	déployée	compacte	autres	
A_{n-1}	$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$	$\mathfrak{su}(n)$	$\mathfrak{su}(p,q)$, $\mathfrak{sl}(n/2,\mathbb{H})$ (n pair)	
A_{n-1}	$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	$\mathrm{SU}(n)$	$\mathrm{SU}(p,q)$ $\mathrm{SL}(n/2,\mathbb{H})$ (n pair)	
B_n	$\mathfrak{so}(n+1,n)$	$\mathfrak{so}(2n+1)$	$\mathfrak{so}(p,q)$ ($p+q=2n+1$)	
B_n	$\mathrm{SO}(n+1,n)$	$\mathrm{SO}(2n+1)$	$\mathrm{SO}(p,q)$ ($p+q=2n+1$)	
C_n	$\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{R})$	$\mathfrak{su}(n,\mathbb{H})$	$\mathfrak{su}(n,r,\mathbb{H})$	(T)
C_n	$\mathrm{SP}_{2n}(\mathbb{R})$	$\mathrm{SU}(n,\mathbb{H})$	$\mathrm{SU}(n,r,\mathbb{H})$	(T)
C_n	$\mathfrak{sp}_n(\mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(n)$	$\mathfrak{sp}(p,q)$	(H-K)
C_n	$\mathrm{SP}_n(\mathbb{R})$	$\mathrm{SP}(n)$	$\mathrm{SP}(p,q)$	(H-K)
D_n	$\mathfrak{so}(n,n)$	$\mathfrak{so}(2n)$	$\mathfrak{so}(p,q)$, $\mathfrak{su}_\alpha(n,\mathbb{H})$	(T)
D_n	$\mathrm{SO}(n,n)$	$\mathrm{SO}(2n)$	$\mathrm{SO}(p,q)$, $\mathrm{U}_\alpha(n,\mathbb{H})$	(T)
D_n	$\mathfrak{so}(n,n)$	$\mathfrak{so}(2n)$	$\mathfrak{so}(p,q)$, $\mathfrak{so}^*(2n)$	(H-K)
D_n	$\mathrm{SO}(n,n)$	$\mathrm{SO}(2n)$	$\mathrm{SO}(p,q)$, $\mathrm{SO}^*(2n)$	(H-K)

TABLE DES MATIÈRES

Séance du 18/9 1
1. Groupes topologiques 1
2. Interlude sur les représentations de groupes finis 3
3. Mesure de Haar sur un groupe compact 5
   3.1. Représentations régulières gauche et droite 5
   3.2. Intégration invariante 6
   3.3. Théorème du point fixe de Kakutani 6

Séance du 19/9 9
3. Mesure de Haar sur un groupe compact (suite) 9
   3.4. Mesures de Radon 11
   3.5. Mesure de Haar sur un groupe compact 12
4. Représentations unitaires et théorème de Peter-Weyl 16
   4.1. Représentations continues 16
   4.2. Représentations unitaires 17
   4.3. Opérateurs compacts 18
   4.4. Opérateurs à noyaux 19

Séance du 25/9 21
5. L'algèbre des « fonctions représentatives » 21
   5.1. Coefficients matriciels 21
   5.2. Fonctions représentatives 23
   5.3. Cas des groupes compacts 24
   5.4. Schur, Burnside et produits tensoriels 25
   5.5. Résultats sur les modules semi-simples 26
   5.6. Appendice : preuve du théorème de Burnside 28
4. Théorème de Peter-Weyl (suite) 29
   4.4. Opérateurs à noyaux 29

Séance du 26/9 35
4.5. Une conséquence du théorème de Peter-Weyl 35
6. Sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 36
6.1. Algèbres de Lie 36
6.2. Propriétés de l'exponentielle 36
6.3. L'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 39
6.4. Composante connexe d'un groupe topologique 40
7. Groupes de Lie 42
7.1. Variétés différentiables 42

Séance du 2 octobre 45
7. Groupes de Lie (suite) 45
7.1. Variétés différentiables (suite) 45
7.2. « Rappels » de calcul différentiel 47
7.3. Espace tangent en un point à une sous-variété de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ 50
7.4. Sous-variétés définies par des équations de rang constant 52

Séance du 3 octobre 55
7. Groupes de Lie (suite) 55
7.5. Dérivations et champs de vecteurs 55
7.6. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie 63
7.7. Retour aux sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 65
7.8. Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie 69
7.9. Représentations 73

Partie II : Algèbres de Lie
Séances du 9 et 10 octobre 75
1. Algèbres de Lie : définitions et premières propriétés 75
1.1. Algèbres de Lie, idéaux, modules 75
1.2. Algèbres de Lie résolubles ou nilpotentes 80
1.3. Formes invariantes et forme de Killing 82
1.4. Théorème d'Engel et applications 85
2. Théorème de Lie et critère de Cartan 87
2.1. Théorème de Lie et conséquences 87
2.2. Poids des algèbres de Lie nilpotentes 90
2.3. Sous-algèbres de Cartan 93
2.4. Critère de Cartan 97

Partie II : Algèbres de Lie
Séances du 16 et 17 octobre 99
3. Racines d'une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple 99
3.1. Racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ 99
3.2. Algèbre enveloppante d'une k-algèbre de Lie 102

3.3. Représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ... 104
3.4. Retour à la preuve du théorème d'intégralité ... 105
3.5. Passage à un $\mathbb{R}$-espace euclidien ... 106
3.6. Le système de racines $\mathrm{R} \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ ... 107

Partie II : Algèbres de Lie
Séances du 17 et 23 octobre ... 109
3. Racines d'une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple (suite) ... 109
3.7. Le cas de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ... 109
4. Systèmes de racines ... 109
4.1. Définitions ... 109
4.2. Systèmes de racines de rang 2 ... 110
4.3. Bases d'un système de racines ... 113
4.4. Matrices de Cartan, graphes de Coxeter, diagrammes de Dynkin 115
5. Classification des graphes admissibles ... 116
5.1. Premières réductions ... 116
5.2. Fin de la classification des graphes admissibles ... 118
5.3. Classification des diagrammes de Dynkin connexes ... 121
6. Groupe de Weyl et classification des systèmes de racines ... 122

Partie II : Algèbres de Lie
Séance du 24 octobre ... 125
6. Groupe de Weyl et classification des systèmes de racines (suite) ... 125
6.1. Groupe de Weyl et conjugaison des bases ... 125
6.2. Isomorphismes de systèmes de racines ... 128
6.3. Fin de la classification des systèmes de racines ... 128
7. Classification des $\mathbb{C}$-algèbres de Lie semi-simples ... 129
7.1. Le système de racines de $\mathfrak{g}$ ... 129
7.2. Théorème d'existence et d'unicité ... 130
7.3. Type $\mathrm{A}_{n-1} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ ... 131
7.4. Types B et D : groupes orthogonaux ... 132
7.5. Type C : groupes symplectiques ... 135

Partie FI : Groupes et algèbres de Lie
Séance du 6 novembre ... 1
1. Exponentielle et action adjointe ... 1
1.0. Un « rappel » sur espaces tangents et différentielles ... 1
1.1. Champs de vecteurs et flots ... 2
1.2. Exponentielle d'un groupe de Lie ... 4
1.3. Calcul différentiel sur G ... 8
1.4. G-variétés et représentations d'isotropie ... 9
1.5. Action adjointe ... 10
1.6. Le yoga des -zateurs ... 12

Partie FI : Groupes et algèbres de Lie
Séance du 7 novembre 17
2. Algèbres de Lie semi-simples compactes 17
2.1. G- et $\mathfrak{g}$-modules 17
2.2. Automorphismes et dérivations 18
2.3. $\mathbb{R}$-algèbres de Lie semi-simples 19
2.4. Revêtements universels 20
2.5. Groupes de Lie semi-simples 1-connexes 21
2.6. Groupes et algèbres de Lie semi-simples compacts 22

Partie FI :
$\mathbb{R}$-algèbres de Lie semi-simples
séance du 13/11 27
3. Extension et restriction des scalaires 27
3.1. Extension des scalaires 27
3.2. Restriction des scalaires 28
4. Formes réelles déployées ou bien compactes 31
4.1. Bases de Chevalley 31
4.2. Formes déployées 34
4.3. Formes compactes 36

Partie FI :
$\mathbb{R}$-algèbres de Lie semi-simples
(suite)séance du 14/11 39
4.4. Astuce unitaire de Weyl 39
5. Involutions et décompositions de Cartan 40
5.1. Conjugaison par rapport à une forme réelle 40
5.2. Existence d'une décomposition de Cartan 41
5.3. Conjugaison des formes compactes et décompositions de Cartan 44
5.4. Correspondance entre formes réelles et involutions de $\mathfrak{g}$ 45
5.5. $\mathbb{R}$-algèbres de Lie absolument simples 47
5.6. Aperçu de la classification 49
Bibliographie v

Bibliographie

[Abe] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge Univ. Press, 1977.

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.

[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[Bo] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Springer Verlag, 1991.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BL7-8] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 7-8, 1975.

[BI7-8] N. Bourbaki, Intégration, Chap. 7-8, 1963.

[BrM] J. Briançon, Ph. Maisonobe, Éléments d'algèbre commutative, niveau M1, Ellipses, 2004.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.

[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.

[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[GH] M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.

[Hel] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press 1978, ninth printing Amer. Math. Soc. 2001.

[Her] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.

[Ho81] G. P. Hochschild, Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, Springer-Verlag, 1981.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Hu2] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, 1975, corrected 2nd printing 1981.
[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.
[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.
[Kna] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser, 1996, 2nd edition, 2002.
[Ku] E. Kunz, Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkhäuser, 1985.
[Laf74] J.-P. Lafon, Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative, Hermann, 1974.
[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.
[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.
[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.
[Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.
[Ma1] H. Matsumura, Commutative algebra (2nd edition), The Benjamin/Cummings publishing company, 1980.
[Ma2] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 1986, paperback edition with corrections, 1989.
[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.
[Pe] D. Perrin, Géométrie algébrique - Une introduction, Inter Éditions/-CNRS Éditions, 1995.
[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.
[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.
[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.
[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.
[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.
[Se68] J.-P. Serre, Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés, Publ. Math. I.H.E.S. 34 (1968), 37-52. Reproduit dans : J.-P. Serre, Oeuvres, vol. II, pp.512-527, Springer-Verlag, 1986.
[Sw] M. E. Sweedler, Hopf Algebras, Benjamin, 1969.
[Sp] T. A. Springer, Linear algebraic groups, Birkäuser, 1981, 2nd edition 1998.
[Ti] J. Tits, Liesche Gruppen und Algebren, Springer-Verlag, 1983.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.