PARTIE FI : GROUPES ALGÉBRIQUES AFFINES SÉANCES 20-21 NOVEMBRE

6. Variétés algébriques affines (rappels)

Dans cette section, le corps de base k est **algébriquement clos**, de caractéristique arbitraire. Dans la suite, on prendra $k = \mathbb{C}$ afin de faire le lien avec les groupes de Lie.

En géométrie différentielle, on construit les variétés différentielles par recollement d'ouverts isomorphes à $\mathbb{R}^n$. En géométrie algébrique, le point de départ est plus compliqué, car les pièces élémentaires sont les sous-variétés de k^n définies par des équations polynômiales. Il faut d'abord définir ces constituants élémentaires, et les rendre propres à être recollés. Ceci se fait par les 3 étapes suivantes,

$$\{\text{sous-variétés algébriques de } k^n\} \to \{k\text{-algèbres réduites}\} \to \{\text{espaces annelés } (\mathrm{X}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}})\}$$

qu'on va décrire ci-dessous.

6.1. Sous-variétés algébriques de k^n et topologie de Zariski. —

Définition 6.1 **(Racine d'un idéal et anneaux réduits)**. — 1) Soient A un anneau commutatif et I un idéal de A. On pose

$$\sqrt{\mathrm{I}} := \{a \in \mathrm{A} \mid \exists\, n \geqslant 1 \text{ tel que } a^n \in \mathrm{I}\}.$$

On voit facilement que I est un idéal de A ; on l'appelle la **racine** (ou le radical) de I. Alors, $\sqrt{\mathrm{I}}/\mathrm{I}$ est l'ensemble des éléments nilpotents de l'anneau quotient A/I. En particulier, l'ensemble des éléments nilpotents de A est l'idéal $\sqrt{0}$.

2) On dit que A est un anneau **réduit** s'il n'a pas d'élément nilpotent non nul, c.-à-d., si $\sqrt{0} = (0)$. Pour cette raison, nous dirons que l'idéal I est **réduit** si $\mathrm{I} = \sqrt{\mathrm{I}}$.

---
(0) version du 3/12/06

Remarque 6.2. — a) Si $\mathrm{I} = \sqrt{\mathrm{I}}$, certains auteurs disent que I est un idéal *radiciel* ([**Die**, p.14]) ou *radical* ([**Pe**, I.4.5]).

b) On peut montrer que $\sqrt{\mathrm{I}}$ est l'intersection des idéaux premiers de A contenant I. Pour cette raison, si $\mathrm{I} = \sqrt{\mathrm{I}}$, on dit aussi que I est un idéal *semi-premier.*

c) Si, de plus, A est un anneau noethérien, tout idéal semi-premier est une intersection finie d'idéaux premiers (voir plus loin).

Définition 6.3. — Une **sous-variété algébrique** de k^n est un sous-ensemble de k^n défini par une collection arbitraire d'équations polynômiales, c.-à-d., un sous-ensemble de la forme :

$$\mathscr{V}(\mathrm{S}) = \{x \in k^n \mid \mathrm{P}(x) = 0, \forall\, \mathrm{P} \in \mathrm{S}\},$$

où S est une partie arbitraire de $k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]$. Si on note I l'idéal engendré par S, on voit facilement que

$$\mathscr{V}(\mathrm{S}) = \mathscr{V}(\mathrm{I}) = \mathscr{V}(\sqrt{\mathrm{I}}\,).$$

En particulier, comme tout idéal de $k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]$ est engendré par un nombre fini d'éléments, on voit que toute $\mathscr{V}(\mathrm{S})$ peut être définie par un nombre fini d'équations polynômiales.

Réciproquement, à tout sous-ensemble $\mathrm{V} \subseteq k^n$ on associe l'idéal

$$\mathscr{I}(\mathrm{V}) = \{\varphi \in k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n] \mid \varphi(\mathrm{V}) = 0\}.$$

On voit facilement que $\mathscr{I}(\mathrm{V})$ est un idéal **réduit**, et que $\mathrm{V} \subseteq \mathscr{V}(\mathscr{I}(\mathrm{V}))$.

Il est clair que les applications $\mathrm{I} \mapsto \mathscr{V}(\mathrm{I})$ et $\mathrm{V} \mapsto \mathscr{I}(\mathrm{V})$ sont décroissantes, c.-à-d., vérifient :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{I} \subseteq \mathrm{J} \;\Rightarrow\; \mathscr{V}(\mathrm{I}) \supseteq \mathscr{V}(\mathrm{J}); \\ \mathrm{V} \subseteq \mathrm{W} \Rightarrow \mathscr{I}(\mathrm{V}) \supseteq \mathscr{I}(\mathrm{W}). \end{array}\right. \tag{1}$$

De ceci, on déduit le lemme suivant.

Lemme 6.4. — *$\mathscr{V}(\mathscr{I}(\mathrm{V}))$ est la plus petite sous-variété algébrique de k^n contenant V. En particulier, V est une sous-variété algébrique de k^n ssi $\mathrm{V} = \mathscr{V}(\mathscr{I}(\mathrm{V}))$.*

Démonstration. — En effet, si $\mathrm{V} \subseteq \mathscr{V}(\mathrm{J})$ alors J est contenu dans $\mathscr{I}(\mathrm{V})$, d'où

$$\mathrm{V} \subseteq \mathscr{V}(\mathscr{I}(\mathrm{V})) \subseteq \mathscr{V}(\mathrm{J}).$$

Ceci prouve le lemme. □

On a ainsi obtenu une caractérisation des sous-variétés algébriques de k^n. On a de plus la proposition suivante.

***Proposition 6.5* (Topologie de Zariski).** — a) *$k^n = \mathscr{V}(\{0\})$ et $\varnothing = \mathscr{V}(\{1\}) = \mathscr{V}(k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n])$.*

b) *Soit $(\mathrm{I}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille quelconque d'idéaux de A, alors*

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{V}(\mathrm{I}_\lambda) = \mathscr{V}(\sum_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{I}_\lambda).$$

c) *Soient I, J deux idéaux de A. On a $\mathscr{V}(\mathrm{I}) \cup \mathscr{V}(\mathrm{J}) = \mathscr{V}(\mathrm{I} \cap \mathrm{J}) = \mathscr{V}(\mathrm{IJ})$.*

Par conséquent, les sous-variétés algébriques de k^n sont les fermés d'une topologie sur k^n, appelée la **topologie de Zariski**.

Démonstration. — Le point a) est clair. Posons $\Sigma = \sum_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{I}_\lambda$. D'après 1), $\mathscr{V}(\Sigma)$ est contenu dans chaque $\mathscr{V}(\mathrm{I}_\lambda)$ et donc dans leur intersection. Réciproquement, soit $x \in \bigcap_\lambda \mathscr{V}(\mathrm{I}_\lambda)$. Alors Σ s'annule sur x, d'où $x \in \mathscr{V}(\Sigma)$. Ceci prouve b).

Enfin, comme $\mathrm{IJ} \subseteq \mathrm{I} \cap \mathrm{J} \subseteq \mathrm{I}, \mathrm{J}$, il résulte de 1) que

$$\mathscr{V}(\mathrm{IJ}) \supseteq \mathscr{V}(\mathrm{I} \cap \mathrm{J}) \supseteq \mathscr{V}(\mathrm{I}) \cup \mathscr{V}(\mathrm{J}).$$

Soit $x \in \mathscr{V}(\mathrm{IJ})$ et supposons $x \notin \mathscr{V}(\mathrm{I})$. Il existe donc $\mathrm{P} \in \mathrm{I}$ tel que $\mathrm{P}(x) \neq 0$. Alors, pour tout $\mathrm{Q} \in \mathrm{J}$, l'on a $0 = (\mathrm{PQ})(x) = \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)$ et donc $\mathrm{Q}(x) = 0$. Ceci montre que $x \in \mathrm{V}(\mathrm{J})$ et le point c) en découle. La proposition est démontrée. □

Corollaire 6.6. — *Tout sous-ensemble fini $\mathrm{S} \subset k^n$ est une sous-variété algébrique de k^n.*

Démonstration. — Tout point x est fermé, car égal à $\mathscr{V}(\mathfrak{m}_x)$, où $\mathfrak{m}_x$ désigne l'idéal maximal de $k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]$ engendré par $\mathrm{X}_1 - x_1, \dots, \mathrm{X}_n - x_n$. Par conséquent, tout sous-ensemble fini de k^n est fermé. □

On peut donc caractériser les $\mathscr{V}(\mathrm{I})$ comme les fermés de k^n pour la topologie de Zariski ; on les appellera **sous-variétés fermées**. De plus, on munit chaque sous-variété $\mathscr{V}(\mathrm{I}) \subseteq k^n$ de la topologie induite ; alors les fermés de $\mathscr{V}(\mathrm{I})$ sont exactement les sous-variétés $\mathscr{V}(\mathrm{J})$, pour $\mathrm{J} \supseteq \mathrm{I}$. Enfin, si $\mathrm{V} \subseteq k^n$, on note $\overline{\mathrm{V}}$ son adhérence (c.-à-d., le plus petit fermé contenant V) pour la topologie de Zariski. D'après le lemme 6.4, l'on a :

$$\overline{\mathrm{V}} = \mathscr{V}\mathscr{I}(\mathrm{V}). \qquad (*)$$

***Définition 6.7* (L'algèbre k[V]).** — À chaque sous-variété fermée $\mathrm{V} \subseteq k^n$, on associe la k-algèbre réduite

$$k[\mathrm{V}] = k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]/\mathscr{I}(\mathrm{V}).$$

On l'appelle l'algèbre des fonctions régulières (ou polynômiales) sur V.

6.2. Applications polynômiales V $\to$ W. — Soit V, resp. W une sous-variété fermée de k^n, resp. k^r.

***Définition 6.8* (Morphismes)**. — 1) Un *morphisme de sous-variétés* V $\to$ W est un r-uplet $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)$ d'éléments de $k[\mathrm{V}]$, tel que

$$\phi(x) := (\phi_1(x), \dots, \phi_r(x)) \in \mathrm{W}, \qquad \forall\, x \in \mathrm{V}. \tag{1}$$

On notera $\mathrm{Hom}_{\text{ss-var}}(\mathrm{V}, \mathrm{W})$ l'ensemble de ces morphismes.

2) Un morphisme $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ est un isomorphisme s'il existe un morphisme $\tau : \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ tel que $\tau \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$ et $\phi \circ \tau = \mathrm{id}_{\mathrm{W}}$.

Remarque 6.9. — Il est clair que id_{V} est un morphisme, et que la composée de deux morphismes est un morphisme. On obtient donc ainsi une catégorie, qu'on appellera la catégorie des **ensembles algébriques affines** (cf. [**Pe**, I.6.2]).

Soit $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)$ comme ci-dessus. Notons

$$\phi^* : k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_r] \longrightarrow k[\mathrm{V}]$$

le morphisme de k-algèbres défini par $\phi^*(\mathrm{X}_i) = \phi_i$, pour $i = 1, \dots, r$, c.-à-d.,

$$\phi^*(\mathrm{Q}) = \mathrm{Q}(\phi_1, \dots, \phi_r) = \mathrm{Q} \circ \phi, \qquad \forall\, \mathrm{Q} \in k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_r]. \tag{2}$$

On observe alors que la condition (1) de la définition s'écrit :

$$\phi^*(\mathrm{Q})(x) = 0, \qquad \forall\, x \in \mathrm{V}, \forall\, \mathrm{Q} \in \mathscr{I}(\mathrm{W}),$$

et ceci équivaut à $\phi^*(\mathscr{I}(\mathrm{W})) = 0$. Par conséquent, ϕ^* se factorise en un morphisme de k-algèbres $k[\mathrm{W}] \to k[\mathrm{V}]$, qu'on notera encore ϕ^*. On l'appelle le **comorphisme** de ϕ.

La proposition suivante sera très utile plus loin.

Proposition 6.10. — *Soit $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ une application ensembliste quelconque. Alors ϕ est un morphisme ssi la propriété suivante est vérifiée : $(*)$ pour tout $f \in k[\mathrm{W}]$, $\phi \circ f$ appartient à $k[\mathrm{V}]$.*

Démonstration. — On vient de voir que si ϕ est un morphisme, alors $\phi^* : f \mapsto \phi \circ f$ est un morphisme d'algèbres de $k[\mathrm{W}]$ vers $k[\mathrm{V}]$. Réciproquement, supposons $(*)$ vérifiée. Notons π la projection $k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_r] \to k[\mathrm{W}]$. Appliquant $(*)$ à chaque $\pi(\mathrm{X}_i)$, on obtient que les composantes $\phi_1, \dots, \phi_r$ sont des éléments de $k[\mathrm{V}]$. Ceci montre que ϕ est un morphisme. La proposition est démontrée. □

Lemme 6.11. — *On a $\mathrm{id}_{\mathrm{V}}^* = \mathrm{id}_{k[\mathrm{V}]}$ et, si ψ est un morphisme de W vers une troisième sous-variété $\mathrm{U} \subseteq k^p$, l'on a*

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*.$$

Démonstration. — D'après (2), on a $\mathrm{id}_{\mathrm{V}}^* = \mathrm{id}_{k[\mathrm{V}]}$ et, pour tout $f \in k[\mathrm{U}]$,

$$(\psi \circ \phi)^*(f) = f \circ \psi \circ \phi = \phi^*(f \circ \psi) = (\phi^*(\psi^*(f)).$$

Le lemme en découle. □

Remarque 6.12. — Il résulte du lemme précédent que la correspondance $\mathrm{V} \mapsto k[\mathrm{V}]$ définit un foncteur **contravariant** de la catégorie des ensembles algébriques affines vers celle des k-algèbres de type fini réduites (dont les morphismes sont les morphismes de k-algèbres). Suivant [**Pe**], nous noterons Γ ce foncteur.

Proposition 6.13. — 1) *L'application $\phi \mapsto \phi^*$ est une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\textit{ss-var}}(\mathrm{V}, \mathrm{W}) \cong \mathrm{Hom}_{\textit{k-alg}}(k[\mathrm{W}], k[\mathrm{V}]).$$

2) *En particulier, un morphisme $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ est un isomorphisme ssi son comorphisme $\phi^* : k[\mathrm{W}] \to k[\mathrm{V}]$ est un isomorphisme de k-algèbres.*

Démonstration. — 1) L'application $\phi \mapsto \phi^*$ est injective, puisque $\phi_i = \phi^*(\mathrm{X}_i)$ pour $i = 1, \ldots, r$.

Réciproquement, soit $\psi : k[\mathrm{W}] \to k[\mathrm{V}]$ un morphisme de k-algèbres. Notons π la projection $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r] \to k[\mathrm{W}]$ et, pour $i = 1, \ldots, r$, posons $\phi_i = (\psi \circ \pi)(\mathrm{X}_i)$. Alors, le morphisme de k-algèbres $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r] \to k[\mathrm{W}]$ défini par le r-uplet $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_r)$ n'est autre que $\psi \circ \pi$, qui se factorise en $\psi : k[\mathrm{W}] \to k[\mathrm{V}]$. Ceci montre que ϕ est un morphisme de V vers W et que son comorphisme est ψ. Ceci prouve le point 1).

2) Le lemme 6.11 entraîne facilement que si ϕ est un isomorphisme, il en est de même de ϕ^*. Réciproquement, supposons que ϕ^* soit un isomorphisme, d'inverse ψ. D'après le point 1), il existe un (unique) morphisme $\tau : \mathrm{W} \to \mathrm{V}$ tel que $\psi = \tau^*$, et l'égalité

$$(\tau \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi = \mathrm{id}_{k[\mathrm{V}]} = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}^*$$

entraîne, d'après 1) à nouveau, que $\tau \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$. On obtient de même que $\phi \circ \tau = \mathrm{id}_{\mathrm{W}}$. Ceci prouve que τ est l'inverse de ϕ. La proposition est démontrée. □

Remarque 6.14. — a) Le point 1) signifie que le foncteur Γ est **pleinement fidèle** (on renvoie à [**Laf74**, § I.1] pour une agréable introduction au langage des foncteurs).

b) On observera que, jusqu'à présent, on n'a pas utilisé l'hypothèse que k soit algébriquement clos. Dans le paragraphe qui suit, on va voir que, sous cette hypothèse, Γ est une équivalence de catégories.

Remarque 6.15. — **Z Z** Soit $\mathrm{V} = \mathscr{V}(x^3 - y^2) \subset k^2$. Le morphisme $\phi : k \to \mathrm{X}, t \mapsto (t^2, t^3)$ est bijectif, mais n'est pas un isomorphisme puisque son comorphisme est l'inclusion $k[\mathrm{T}^2, \mathrm{T}^3] \subset k[\mathrm{T}]$ qui n'est pas surjective. On peut montrer, de plus, que V n'est pas isomorphe à k, cf. [**Pe**, I.6.9].

6.3. Le théorème des zéros de Hilbert et une équivalence de catégories. — Le célèbre théorème des zéros de Hilbert peut être énoncé (et démontré) de plusieurs manières. Voir, par exemple, [**BrM**, Thm. VI.2.19], [**Die**, (A,37)], [**Pe**, § I.4] (pour des références en français), ou [**Ku**, § I.3], [**Ma1**, (14.L)], [**Ma2**, Chap. 2, § 5] (en anglais). Nous l'énoncerons sous la forme ci-dessous. Observons d'abord que tout $x \in k^n$ définit un morphisme de k-algèbres, l'évaluation en x,

$$\varepsilon_x : k[\mathrm{X}_1 \dots, \mathrm{X}_n] \longrightarrow k, \quad f \mapsto f(x).$$

On note $\mathfrak{m}_x$ son noyau ; c'est l'idéal maximal engendré par $\mathrm{X}_1 - x_1, \cdots, \mathrm{X}_n - x_n$. Les $\mathfrak{m}_x$ sont deux à deux distincts puisque, par exemple, $\mathscr{V}(\mathfrak{m}_x) = \{x\}$. Si I est un idéal de $k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]$, on observe que $\mathrm{I} \subseteq \mathfrak{m}_x \Leftrightarrow x \in \mathscr{V}(\mathrm{I})$.

Pour toute k-algèbre A, on notera Max(A) l'ensemble de ses idéaux maximaux.

Théorème 6.16 **(Théorème des zéros de Hilbert)**. — *On suppose k algébriquement clos.*

1) *Soit* I *un idéal quelconque de* $k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]$ *et soit* $\mathrm{V} = \mathscr{V}(\mathrm{I})$. *L'application*

$$\mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{Max}(k[\mathrm{V}]), \quad x \mapsto \frac{\mathfrak{m}_x}{\mathscr{I}(\mathrm{V})}$$

est une bijection, et l'on a $\mathscr{I}(\mathrm{V}) = \sqrt{\mathrm{I}}$.

2) *Par conséquent, on a des bijections réciproques*

$$\{\text{Idéaux réduits de } k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]\} \underset{\mathscr{I}}{\overset{\mathscr{V}}{\rightleftarrows}} \{\text{Sous-variétés algébriques de } k^n\}.$$

3) *Le foncteur* Γ *est essentiellement surjectif, donc induit une équivalence de catégories contravariante :*

$$\{\textit{ensembles algébriques affines}\} \xrightarrow{\sim} \{k\textit{-algèbres de type fini réduites}\}.$$

Démonstration. — Pour le point 1), on renvoie aux références citées avant le théorème. Démontrons le point 2). Si V est une sous-variété algébrique de k^n, on a déjà vu que $\mathscr{I}(\mathrm{V})$ est réduit et que $\mathrm{V} = \mathscr{V}(\mathscr{I}(\mathrm{V}))$. Réciproquement, si I est un idéal réduit, 1) entraîne que $\mathrm{I} = \sqrt{\mathrm{I}} = \mathscr{I}(\mathscr{V}(\mathrm{I}))$. Le point 2) en découle.

Soit A une k-algèbre de type fini réduite et soit $x_1, \dots, x_n$ un système de générateurs de A. Alors $\mathrm{A} \cong k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]/\mathrm{I}$, où I est le noyau du morphisme $\phi : k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n] \to \mathrm{A}$ défini par $\phi(\mathrm{X}_i) = x_i$, pour $i = 1, \dots, n$. L'idéal I est réduit puisque, par hypothèse, A est réduite. Posons $\mathrm{V} = \mathscr{V}(\mathrm{I})$. D'après 2), on a $\mathrm{I} = \mathscr{I}(\mathrm{V})$ et donc $\mathrm{A} \cong k[\mathrm{V}] = \Gamma(\mathrm{V})$. Ceci montre que toute k-algèbre de type fini réduite est isomorphe à une algèbre $\Gamma(\mathrm{V})$; ceci est la définition de **essentiellement surjectif**.

Enfin, un foncteur est une équivalence de catégories ssi il est pleinement fidèle et essentiellement surjectif ; on renvoie pour cela à [**Laf74**, § I.1] (on peut aussi prendre ceci comme définition d'une équivalence de catégories). Comme on avait déjà vu que Γ est pleinement fidèle (Prop. 6.13), le théorème en découle. □

6.4. k-algèbres réduites et variété algébriques affines abstraites. — Le théorème des zéros de Hilbert a la conséquence suivante. Soit A une k-algèbre de type fini réduite. Pour tout système de générateurs $x_1, \dots, x_r$ de A, on obtient un isomorphisme

$$(*) \qquad k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_r]/\mathrm{I} \cong \mathrm{A},$$

et l'ensemble Max(A) des idéaux maximaux de A s'identifie aux points de l'ensemble algébrique $\mathrm{V}(\mathrm{I}) \subseteq k^r$.

On voudrait pouvoir définir “la variété algébrique affine” associée à A de façon intrinsèque, c.-à-d., sans avoir à choisir un système de générateurs de A ni un plongement de la variété dans un k^r.

Bien sûr, comme ensemble, cette variété doit être Max(A). On le munit d'une topologie, la topologie de Zariski, de la façon suivante. Choisissons, pour un instant, un isomorphisme $(*)$, et posons $\mathrm{V} = \mathrm{V}(\mathrm{I}) \subseteq k^r$. On a alors un isomorphisme $\mathrm{A} \cong k[\mathrm{V}]$ et une bijection $\mathrm{V} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Max}(\mathrm{A})$, $x \mapsto \mathfrak{m}_x$. Observons que, pour tout $f \in \mathrm{A}$ et $x \in \mathrm{V}$, l'image de f dans $\mathrm{A}/\mathfrak{m}_x \cong k$ n'est autre que $f(x)$. Par conséquent, pour tout idéal J de A, l'on a :

$$x \in \mathrm{V}(\mathrm{J}) \Leftrightarrow \mathrm{J} \subseteq \mathfrak{m}_x.$$

Ceci conduit à définir, abstraitement, les fermés de Max(A) de la façon suivante : ce sont les ensembles

$$\mathrm{V}(\mathrm{J}) = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(\mathrm{A}) \mid \mathfrak{m} \supseteq \mathrm{J}\}.$$

D'après ce qui précède, ceci correspond, via la bijection $\mathrm{Max}(\mathrm{A}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}$, aux fermés algébriques de V. En particulier, ceci définit bien une topologie sur Max(A), ce qu'on peut aussi voir directement, exactement comme dans la preuve de la proposition 6.5. On l'appelle la topologie de Zariski sur Max(A). De plus, si l'on identifie V(J) au sous-ensemble correspondant de k^r, on a $k[\mathrm{V}(\mathrm{J})] = \mathrm{A}/\sqrt{\mathrm{J}}$, d'après le théorème des zéros de Hilbert. On prend ceci comme définition de l'algèbre des fonctions régulières sur l'ensemble abstrait $\mathrm{V}(\mathrm{J}) \subseteq \mathrm{Max}(\mathrm{A})$. On obtient ainsi la

Définition et proposition 6.17 **(La variété** Max(A)**).** — *Soit* A *une k-algèbre de type fini réduite.*

1) *La variété algébrique affine associée est* $\mathrm{Max}(\mathrm{A})$*, munie de la topologie de Zariski.*

2) *Les sous-variétés fermées sont les* $\mathrm{V}(\mathrm{J})$*, pour* J *idéal de* A*, et la* k*-algèbre associée à* $\mathrm{V}(\mathrm{J})$ *est* $\mathrm{A}/\sqrt{\mathrm{J}}$*. Par conséquent, l'on a une bijection entre sous-variétés fermées de* $\mathrm{Max}(\mathrm{A})$ *et idéaux réduits de* A*.*

Notation 6.18. — On note $\chi(\mathrm{A})$ l'ensemble des morphismes de k-algèbres $\mathrm{A} \to k$.

Lemme 6.19. — *L'application* $\chi(\mathrm{A}) \to \mathrm{Max}(\mathrm{A})$*,* $\chi \mapsto \mathrm{Ker}\,\chi$ *est une* **bijection***, dont la bijection réciproque est l'application qui à* $\mathfrak{m}$ *associe le morphisme* $\mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathfrak{m} = k$ *; si* $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$*, ce morphisme n'est autre que* $\varepsilon_x : f \mapsto f(x)$*.*

Démonstration. — D'après le théorème des zéros de Hilbert, $\mathrm{A}/\mathfrak{m} \cong k$ et donc il n'y a qu'un seul morphisme de k-algèbres $\mathrm{A}/\mathfrak{m} \to k$. □

***Définition 6.20* (Le couplage $\chi(\mathrm{A}) \times \mathrm{A} \to k$).** — Pour $\chi \in \chi(\mathrm{A})$ et $f \in \mathrm{A}$, on pose

$$\langle \chi, f \rangle := \chi(f) \in k.$$

On peut voir ceci comme la valeur de la fonction f sur le point χ de $\chi(\mathrm{A}) \cong \mathrm{Max}(\mathrm{A})$.

6.5. Morphismes : la bijection $\phi \mapsto \phi^\sharp$. — Soient A, B deux k-algèbres de type fini réduites et $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ un morphisme de k-algèbres. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de B. Puisque ϕ induit un isomorphisme de k-algèbres $\mathrm{A}/\phi^{-1}(\mathfrak{m}) \cong \mathrm{B}/\mathfrak{m} \cong k$, alors $\phi^{-1}(\mathfrak{m})$ est un idéal maximal de A ; on le notera $\phi^\sharp(\mathfrak{m})$. Ainsi, ϕ induit une application $\phi^\sharp : \mathrm{Max}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Max}(\mathrm{A})$. Une autre façon de voir cette application est la suivante : pour tout $\chi \in \chi(\mathrm{B})$, $\phi^\sharp(\chi)$ est le morphisme de k-algèbres $\chi \circ \phi : \mathrm{A} \to k$.

Par définition, on dira qu'une application $\theta : \mathrm{Max}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Max}(\mathrm{A})$ est un morphisme s'il existe un morphisme de k-algèbres $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ tel que $\phi^\sharp = \theta$, et l'on notera $\mathrm{Hom}_{\mathrm{var}}(\mathrm{Max}(\mathrm{B}), \mathrm{Max}(\mathrm{A}))$ l'ensemble de ces morphismes. Ceci est compatible avec la définition donnée pour les sous-ensembles algébriques de k^n.

D'autre part, notons $k^{\chi(\mathrm{B})}$ l'ensemble de **toutes** les applications de $\chi(\mathrm{B})$ vers k. Il résulte du théorème des zéros de Hilbert que l'application $\mathrm{ev}_{\mathrm{B}} : \mathrm{B} \to k^{\chi(\mathrm{B})}$ qui à tout $b \in \mathrm{B}$ associe l'application

$$\mathrm{ev}_{\mathrm{B}}(b) : \chi \mapsto \langle \chi, b \rangle := \chi(b)$$

est **injective**. Par conséquent, B s'identifie à une certaine sous-algèbre de $k^{\chi(\mathrm{B})}$.

Au lieu de $k^{\chi(\mathrm{B})}$, on peut aussi considérer $k^{\mathrm{Max}(\mathrm{B})}$. Dans ce cas, l'application $\mathrm{ev}_{\mathrm{B}} : \mathrm{B} \to k^{\mathrm{Max}(\mathrm{B})}$ se décrit comme suit. Pour tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(\mathrm{B})$, on a $\mathrm{B}/\mathfrak{m} \cong k$

et, pour tout $b \in \mathrm{B}$, l'application $\mathrm{ev_B}(b)$ n'est autre que l'application qui à tout $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max(B)}$ associe l'image de b dans $\mathrm{B}/\mathfrak{m}$. Si l'on choisit un plongement de $\mathrm{Max(B)}$ dans k^n et si $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$, alors $\mathrm{ev_B}(b)(\mathfrak{m}_x)$ n'est autre que $b(x)$!

Ceci étant dit, à toute application $\eta : \chi(\mathrm{B}) \to \chi(\mathrm{A})$, on associe son comorphisme $\eta^* : \mathrm{A} \to k^{\chi(\mathrm{B})}$, défini de la façon suivante. Définissons d'abord la tranposée

$$\eta^t : k^{\chi(\mathrm{A})} \longrightarrow k^{\chi(\mathrm{B})}, \qquad f \mapsto f \circ \eta.$$

C'est un morphisme de k-algèbres. On pose alors $\eta^* = \eta^t \circ \mathrm{ev_A}$. C.-à-d., pour tout $a \in \mathrm{A}$, on a

$$\eta^*(a) = \eta^t(\mathrm{ev_A}(a)) = \mathrm{ev_A}(a) \circ \eta,$$

et donc, pour tout $\chi \in \chi(\mathrm{B})$, l'on a

$$\eta^*(a)(\chi) = \mathrm{ev_A}(a)(\eta(\chi)) = \langle \eta(\chi), a \rangle = \eta(\chi)(a).$$

***Proposition 6.21* (Morphismes).** — *On a une identification :*

$$\mathrm{Hom_{var}}(\mathrm{Max(B)}, \mathrm{Max(A)}) = \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(\mathrm{A}, \mathrm{B});$$

plus précisément, on a les deux assertions suivantes.

1) *Soit* $\phi \in \mathrm{Hom}_{k\text{-}alg}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, *soit* $\phi^\sharp : \chi(\mathrm{B}) \to \chi(\mathrm{A})$ *le morphisme associé. Alors* $\phi^{\sharp *} = \phi$.

2) *Réciproquement, soit* $\eta : \chi(\mathrm{B}) \to \chi(\mathrm{A})$ *une application quelconque. Alors* η *est un morphisme ssi* η^* *envoie* A *dans la sous-algèbre* $\mathrm{B} \subseteq k^{\chi(\mathrm{B})}$, *et dans ce cas l'on a* $\eta = \eta^{*\sharp}$.

Démonstration. — Il s'agit essentiellement d'une reformulation abstraite de la proposition 6.13. Toutefois, il est utile de disposer du résultat sous la forme ci-dessus, qui décrit la bijection de façon intrinsèque, c.-à-d., sans faire appel à des plongements $\mathrm{Max(B)} \subseteq k^n$ et $\mathrm{Max(A)} \subseteq k^r$.

1) Montrons que $\phi^{\sharp *}(a) = \phi(a)$, pour tout $a \in \mathrm{A}$. Comme on a vu que l'application $\mathrm{ev_B} : \mathrm{B} \to k^{\chi(\mathrm{B})}$ est injective, il suffit de vérifier que, pour tout $\chi \in \chi(\mathrm{B})$, l'on a

$$\phi^{\sharp *}(a)(\chi) = \langle \chi, \phi(a) \rangle.$$

Mais, par définition,

$$\phi^{\sharp *}(a)(\chi) = \langle \phi^\sharp(\chi), a \rangle = \langle \chi \circ \phi, a \rangle = \langle \chi, \phi(a) \rangle.$$

Ceci prouve le point 1). Par conséquent, si $\eta = \phi^\sharp$ est un morphisme, alors $\eta^* = \phi^{\sharp *} = \phi$ applique A dans B.

2) Réciproquement, soit $\eta : \chi(\mathrm{B}) \to \chi(\mathrm{A})$ tel que $\eta^*(\mathrm{A}) \subseteq \mathrm{B}$. Dans ce cas, pour tout $a \in \mathrm{A}$, on a $\eta^*(a) \in \mathrm{B}$ et, pour tout $\chi \in \chi(\mathrm{B})$,

$$\langle \eta(\chi), a \rangle = \eta^*(a)(\chi) = \langle \chi, \eta(a) \rangle = \langle \chi \circ \eta^*, a \rangle.$$

Ceci montre que $\eta(\chi) = \chi \circ \eta^*$ pour tout χ, et donc $\eta = \eta^{*\sharp}$ est le morphisme associé à η^*. Ceci prouve la proposition. □

Remarque 6.22. — La définition 6.17 ci-dessus reste quelque peu formelle, en particulier parce qu'on s'est contenté de définir de façon formelle les sous-variétés fermés et algèbres associées. On verra plus loin que ce processus d'abstraction prendra toute sa force lorsqu'on définira l'espace topologique annelé associé à A, qui permettra de faire des choses localement, c.-à-d., sur des ouverts, et de recoller des variétés algébriques affines pour en faire des variétés plus générales.

6.6. Variétés finies. — Toutefois, le procédé d'abstraction du paragraphe précédent est déjà utile dans le cas particulier suivant, celui des variétés finies.

Soit E un ensemble fini à $n+1$ éléments. Pour fixer les idées, et éviter des indices, disons que $\mathrm{E} = \{0, 1, \dots, n\}$. On peut voir X comme un sous-ensemble algébrique de k. En effet, comme k est algébriquement clos, il est infini, donc on peut choisir des éléments distincts $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ de k et alors E s'identifie à l'ensemble $\{\lambda_0, \dots, \lambda_n\}$, défini par le polynôme

$$(\mathrm{T} - \lambda_0) \cdots (\mathrm{T} - \lambda_n).$$

(De plus, si k est de caractéristique zéro, c.-à-d., contient $\mathbb{Q}$, on peut prendre $\lambda_i = i$.)

Mais on peut aussi réaliser, par exemple, E comme les sommets d'un simplexe dans k^n : soit $x_0 = (0, \dots, 0)$ et pour $i = 1, \dots, n$, soit x_i le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème qui vaut 1. Soient $\mathfrak{m}_0, \dots, \mathfrak{m}_n$ les idéaux maximaux correspondants. Alors E s'identifie au sous-ensemble $\{x_0, \dots, x_n\}$ de k^n, défini par l'idéal

$$\mathfrak{m}_0 \cdots \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_0 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_n.$$

(Exercice : pourquoi a-t-on l'égalité ci-dessus ?)

On aimerait voir E comme une variété algébrique, indépendamment du plongement choisi. On voit que, pour chacun des plongements ci-dessus, l'algèbre $k[\mathrm{E}]$ s'identifie à $k \times \cdots \times k$ ($n+1$ facteurs) ; ceci résulte du théorème des restes chinois.

Lemme 6.23. — *Soit* A *une k-algèbre de type fini, et* $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$ *des idéaux maximaux deux à deux distincts. Alors* $\dim_k \mathrm{A}/(\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r) = r$.

Démonstration. — Pour $r = 1$, ceci résulte du théorème des zéros de Hilbert. Supposons $r \geqslant 2$ et le résultat établi pour $r-1$. On a $\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{r-1} \not\subseteq \mathfrak{m}_r$

car sinon $\mathfrak{m}_r$, étant premier, contiendrait l'un des $\mathfrak{m}_i$, avec $i < r$, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent, le morphisme de k-espaces vectoriels

$$\frac{\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{r-1}}{\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r} \longrightarrow \frac{\mathrm{A}}{\mathfrak{m}_r} \cong k$$

est non nul, donc bijectif. On en déduit que

$$\dim_k \frac{\mathrm{A}}{\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_r} = 1 + \dim_k \frac{\mathrm{A}}{\mathfrak{m}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{m}_{r-1}} = r.$$

Ceci prouve le lemme. □

Proposition 6.24. — 1) *Soit* A *une k-algèbre réduite. Alors* Max(A) *est de cardinal $n < \infty$ ssi* $\mathrm{A} \cong k \times \cdots \times k$ *(n copies).*

2) *Soient* E, F *deux ensembles finis. Toute application $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est un morphisme de variétés algébriques.*

Démonstration. — 1) Supposons $\mathrm{A} \cong k \times \cdots \times k$ (n copies). D'après le lemme, A a au plus n idéaux maximaux. D'autre part, notons π_i la projection sur la i-ème copie ; son noyau $\mathfrak{m}_i$ est le produit des autres copies de k. Les $\mathfrak{m}_i$ sont deux à deux distincts, donc Max(A) a exactement n éléments.

Réciproquement, supposons que Max(A) ait n éléments $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$. Leur intersection est formée des « fonctions » $f \in \mathrm{A}$ qui sont nulles en tout point de Max(A), donc cette intersection est réduite à (0). Alors, par le théorème des restes chinois,

$$\mathrm{A} \cong \prod_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{A}}{\mathfrak{m}_i} \cong k \times \cdots \times k \ (n \text{ facteurs}).$$

Ceci prouve le point 1).

2) On a $k[\mathrm{F}] = \bigoplus_{y \in \mathrm{F}} k\delta_y$, où δ_y est l'application $\mathrm{F} \to k$ telle que $\delta_y(y') = 1$ si $y' = y$ et $= 0$ sinon. Pour tout $y \in \mathrm{F}$, $\delta_y \circ f$ est l'application $\mathrm{E} \to k$ telle que

$$\forall\, x \in \mathrm{E}, \qquad (\delta_y \circ f)(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } f(x) = y; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

C.-à-d., $\delta_y \circ f$ est l'élément $\sum_{\substack{x \in \mathrm{E} \\ f(x)=y}} \delta_x$ de $k[\mathrm{E}]$. D'après la proposition 6.21, ceci montre que $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est un morphisme de variétés algébriques. □

6.7. Factorisation d'un morphisme et immersions fermées. — Soit V une sous-variété algébrique de k^n et W une sous-variété fermée de V. Il est clair que l'inclusion $\tau : \mathrm{W} \subset \mathrm{V}$ est un morphisme ; son comorphisme est la projection

$$\tau^* : \frac{k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]}{\mathscr{I}(\mathrm{V})} = k[\mathrm{V}] \longrightarrow k[\mathrm{W}] = \frac{k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]}{\mathscr{I}(\mathrm{W})}.$$

Le noyau de τ^* est l'idéal $\mathscr{I}(\mathrm{W})/\mathscr{I}(\mathrm{V})$ de $k[\mathrm{V}]$; on l'appelle l'idéal de W dans $k[\mathrm{V}]$. Réciproquement, si I est un idéal de $k[\mathrm{V}]$, on notera $\mathscr{V}_{\mathrm{V}}(\mathrm{I})$, ou simplement $\mathscr{V}(\mathrm{I})$ si aucune confusion n'est à craindre, la sous-variété

$$\mathscr{V}_{\mathrm{V}}(\mathrm{I}) = \{x \in \mathrm{V} \mid f(x) = 0, \quad \forall\, f \in \mathrm{I}\}.$$

C'est la sous-variété algébrique de k^n définie par l'image inverse de I dans $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$.

Le lemme suivant est immédiat et aussi très utile.

Lemme 6.25. — *Soient* $\mathrm{X} \subseteq k^n$ *et* $\mathrm{Y} \subseteq k^r$ *des ensembles algébriques affines et* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme.*

1) *Si* J *est un idéal de* $k[\mathrm{Y}]$ *tel que* $\mathscr{V}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{J})$ *contienne* $\phi(\mathrm{X})$*, alors* $\phi : \mathrm{X} \to \mathscr{V}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{J})$ *est un morphisme.*

2) *En particulier, soit* I *l'idéal dans* $k[\mathrm{Y}]$ *de* $\phi(\mathrm{X})$*. Alors*

$$\mathscr{V}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{I}) = \overline{\phi(\mathrm{X})} \quad \textit{et} \quad \phi : \mathrm{X} \longrightarrow \overline{\phi(\mathrm{X})}$$

est un morphisme.

3) *De plus,* $\mathrm{I} = \operatorname{Ker} \phi^*$ *et la factorisation* $\mathrm{X} \xrightarrow{\phi} \overline{\phi(\mathrm{X})} \subseteq \mathrm{Y}$ *correspond à la factorisation*

$$k[\mathrm{Y}] \longrightarrow \frac{k[\mathrm{Y}]}{\mathrm{I}} \longrightarrow k[\mathrm{X}].$$

Démonstration. — Les points 1) et 2) sont immédiats. On notera que $\phi(\mathrm{X})$ n'est pas nécessairement une sous-variété fermée de Y. Démontrons le point 3). D'abord, I est l'ensemble des $f \in k[\mathrm{Y}]$ telles que $f(\phi(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{X}$, c.-à-d., telles que $0 = f \circ \phi = \phi^*(f)$. Ceci montre que $\mathrm{I} = \operatorname{Ker} \phi^*$. La dernière assertion est alors claire. □

***Définition 6.26* (Immersions fermées)**. — Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de variétés algébriques affines. On dit que f est une **immersion fermée** si $f(\mathrm{X})$ est un fermé de Y et si f induit un isomorphisme de X sur $f(\mathrm{X})$.

Proposition 6.27. — f *est une immersion fermée ssi son comorphisme* $\varphi : k[\mathrm{Y}] \to k[\mathrm{X}]$ *est surjectif.*

Démonstration. — Posons $f' : \mathrm{X} \to \mathrm{X}' = \overline{f(\mathrm{X})}$ et $i : \mathrm{X}' \hookrightarrow \mathrm{Y}$, et soient $\tau : k[\mathrm{X}'] \to k[\mathrm{X}]$ et $\pi : k[\mathrm{Y}] \to k[\mathrm{X}']$ leurs comorphismes. Alors τ est injectif (car $f(\mathrm{X})$ est dense dans X') et π surjectif, et l'on a $\varphi = \tau \circ \pi$. Si f' est un isomorphisme, il en est de même de τ et donc φ est surjectif.

Réciproquement, si φ est surjectif alors τ l'est aussi et est donc un isomorphisme, de même que f'. □

6.8. Produits. — Si $X \subseteq k^n$ et $Y \subseteq k^p$ sont des sous-variétés algébriques, alors $X \times Y$ est une sous-variété de k^{n+p}. Plus précisément, on a la proposition suivante. On pose $A = k[X]$ et $B = k[Y]$.

Proposition 6.28. — a) $X \times Y$ *est une sous-variété de* k^{n+p} *et*

$$k[X \times Y] \cong k[X] \otimes_k k[Y].$$

b) *Si* V*, resp.* W*, est une sous-variété fermée de* X*, resp. de* Y*, alors* $V \times W$ *est une sous-variété fermée de* $X \times Y$.

c) $A \otimes_k B$ *est réduite, et les applications*

$$\begin{array}{lclcl} \mathrm{Max}(A) \times \mathrm{Max}(B) & \to & \mathrm{Max}(A \otimes B), & (\mathfrak{m}, \mathfrak{n}) \mapsto & \mathfrak{m} \otimes B + A \otimes \mathfrak{n}, \\ \chi(A) \times \chi(B) & \to & \chi(A \otimes B), & (\chi, \chi') \mapsto & \chi \otimes \chi', \end{array}$$

sont des bijections.

Démonstration. — Posons $R = k[X_1, \ldots, X_n]$, $S = k[X_1, \ldots, X_p]$, et $J = R \otimes \mathscr{I}(Y) + \mathscr{I}(X) \otimes S$. D'une part, l'on a $A \otimes_k B \cong (R \otimes S)/J$. D'autre part, on voit facilement que $\mathscr{V}(J) = X \times Y$. Montrons que $J = \mathscr{I}(X \times Y)$. L'inclusion $\subseteq$ est claire.

Soit F, resp. G, un supplémentaire de $\mathscr{I}(X)$ dans R, resp. de $\mathscr{I}(Y)$ dans S. Alors $R \otimes S = J \oplus F \otimes G$. Supposons l'inclusion $J \subseteq \mathscr{I}(X \times Y)$ stricte ; alors $\mathscr{I}(X \times Y)$ contient un élément non nul $\phi \in F \otimes G$. On peut écrire ϕ comme une somme finie $\sum_i f_i \otimes g_i$, où les $g_i \in G$ sont linéairement indépendants, et où chaque $f_i \in F$ est non nulle. Pour tout $x \in X$, la fonction

$$y \mapsto \phi(x, y) = \sum_i f_i(x) g_i(y)$$

est identiquement nulle sur Y. L'hypothèse sur les g_i entraîne donc que chaque f_i est nulle sur X, donc nulle puisque $F \cap \mathscr{I}(X) = (0)$. Ceci contredit l'hypothèse $\phi \neq 0$, et cette contradiction montre que $J = \mathscr{I}(X \times Y)$. Ceci prouve a). Le point b) en découle, en utilisant le lemme 6.25. Enfin, c) résulte de a) et du théorème des zéros de Hilbert 6.16. □

Remarque 6.29. — Par une démonstration légèrement différente, mais similaire, on peut montrer directement que $A \otimes_k B$ est réduite : voir [**Sp**, Lemma 1.5.2].

Remarque 6.30. — **Z Z** Attention, la topologie de Zariski sur $X \times Y$ n'est pas le produit des topologies sur X et Y ! Pour s'en convaincre, méditer l'exemple le plus trivial $X = Y = k$.

7. Groupes algébriques affines et algèbres de Hopf

7.1. Groupes algébriques affines. —

Définition 7.1. — 1) Un **groupe algébrique affine** sur k est une variété algébrique affine G sur k, munie d'une structure de groupe telle que les applications $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $(x, y) \mapsto xy$, et $\kappa : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $x \mapsto x^{-1}$ soient des morphismes de variétés.

2) Un **morphisme de groupes algébriques** $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ est un morphisme d'ensembles algébriques affines qui est aussi un morphisme de groupe. C'est un isomorphisme s'il existe un morphisme $\psi : \mathrm{G}' \to \mathrm{G}$ tel que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathrm{G}}$ et $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathrm{G}'}$.

Remarque 7.2. — On introduira plus loin les variétés algébriques sur k arbitraires, c.-à-d., non nécessairement affines. On peut donc, de même, introduire la notion de groupe algébrique sur k, non nécessairement affine. Dans ce cours, on se limitera exclusivement aux groupes algébriques affines.

Lemme 7.3. — *Soit* G *un groupe algébrique affine et* H *une sous-variété fermée de* G *qui est un sous-groupe. Alors* H *est un groupe algébrique affine. On dira simplement que* H *est un sous-groupe fermé de* G.

Démonstration. — Par hypothèse, H est une sous-variété fermée de G et, d'après le lemme 6.25, la restriction μ_{H} de μ_{G} à H est un morphisme de $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$ dans H. De même, le passage à l'inverse κ_{H} est un morphisme $\mathrm{H} \to \mathrm{H}$. Ceci montre que H est un groupe algébrique, et l'inclusion $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$ est un morphisme de groupes algébriques. □

7.2. Exemples de groupes algébriques affines. — 1) Le groupe additif $\mathbb{G}_a = (k, +)$. Il est clair que $\mu : (x, y) \mapsto x + y$ et $\kappa : x \mapsto -x$ sont des morphismes.

2) Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m = (k^*, \times)$. D'abord, la première projection $k^2 \to k$ induit un isomorphisme $k^* \cong \{(x, y) \in k^2 \mid xy = 1\}$, donc k^* s'identifie à une sous-variété fermée de k^2, et

$$k[\mathbb{G}_m] = k[\mathrm{X}, \mathrm{T}]/(\mathrm{XT} - 1) = k[\mathrm{X}, \mathrm{X}^{-1}].$$

Les applications $\mu : (x, y) \mapsto xy$ et $\kappa : x \mapsto x^{-1}$ sont des morphismes (car $x \mapsto x^{-1}$ est une fonction régulière sur k^*).

3) Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(k)$ s'identifie à :

$$\{(\mathrm{A}, t) \in \mathrm{M}_n(k) \times k \mid (\mathrm{d\acute{e}t}\,\mathrm{A})t = 1\},$$

qui est une sous-variété fermée de k^{n^2+1}, et l'on a

$$k[\mathrm{GL}_n] = k[\mathrm{X}_{1,1}, \ldots, \mathrm{X}_{n,n}, \mathrm{d\acute{e}t}^{-1}].$$

La multiplication est un morphisme, car $(\mathrm{AB})_{i,j} = \sum_{m=1}^{n} \mathrm{A}_{i,m}\mathrm{B}_{m,j}$; le passage à l'inverse aussi, car $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{dét}(\mathrm{A})^{-1}\mathrm{C}(\mathrm{A})^{t}$, où $\mathrm{C}(\mathrm{A})^{t}$ désigne la transposée de la matrice des cofacteurs de A.

4) Le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}_n(k) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(k) \mid \mathrm{dét}\,\mathrm{A} = 1\}$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(k)$.

5) Le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures : $\mathrm{B}_n(k) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(k) \mid \mathrm{A}_{i,j} = 0,\ \text{pour } i > j\}$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(k)$.

6) Le sous-groupe des matrices triangulaires unipotentes : $\mathrm{U}_n(k) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{B}_n(k) \mid \mathrm{A}_{i,i} = 1,\ \text{pour } i = 1, \ldots, n\}$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{B}_n(k)$.

7) Le sous-groupe $\mathrm{D}_n(k)$ des matrices diagonales est un sous-groupe fermé de $\mathrm{B}_n(k)$.

8) Tout groupe fini G est, de façon unique, un groupe algébrique. L'algèbre $k[\mathrm{G}]$ est $\bigoplus_{g\in\mathrm{G}} k\delta_g$ et $k[\mathrm{G}\times\mathrm{G}]$ s'identifie à $k[\mathrm{G}]\otimes k[\mathrm{G}]$. Le comorphisme de la multiplication $\mu : \mathrm{G}\times\mathrm{G} \to \mathrm{G}$ est

$$\mu^* : k[\mathrm{G}] \longrightarrow k[\mathrm{G}]\otimes k[\mathrm{G}], \quad \delta_g \mapsto \sum_{h\in\mathrm{G}} \delta_{gh^{-1}} \otimes \delta_h.$$

Le comorphisme de $\kappa : g \mapsto g^{-1}$ est $\kappa^* : k[\mathrm{G}] \to k[\mathrm{G}]$, $\delta_g \mapsto \delta_{g^{-1}}$.

9) Plus compliqué et plus intéressant est le cas de PGL_n. On peut définir PGL_n comme le sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathrm{M}_n(k))$ formé des automorphismes d'algèbres. On sait, d'après le théorème de Skolem-Noether, que tout automorphisme de $\mathrm{M}_n(k)$ est intérieur, et est donc de déterminant 1. Par conséquent, PGL_n est un sous-groupe de $\mathrm{SL}(\mathrm{M}_n(k))$. Si $g = (g_{pq}^{ij})_{1\leqslant i,j,p,q\leqslant n}$ est un élément de $\mathrm{SL}(\mathrm{M}_n(k))$, on vérifie que g est un automorphisme d'algèbres si et seulement si

$$g(\mathrm{id}) = \mathrm{id} \quad \text{et} \quad g(\mathrm{E}_{ij})g(\mathrm{E}_{r\ell}) = \delta_{jr}q(\mathrm{E}_{i\ell}),$$

et ceci équivaut aux équations suivantes :

$$(\dagger) \qquad \sum_{s=1}^{n} g_{pq}^{ss} = \delta_{pq}, \qquad \sum_{s=1}^{n} g_{ps}^{ij}g_{sq}^{r\ell} = \delta_{jr}g_{pq}^{i\ell},$$

pour tout p, q, i, j, r, ℓ. On peut montrer que l'idéal engendré par ces éléments est réduit, et contient l'élément $\mathrm{dét} - 1$, où dét est le déterminant $\mathrm{GL}(\mathrm{M}_n(k)) \to k^*$. (En effet, on vérifie (cf. $(*)$ que l'espace tangent en $\mathrm{id}_{\mathrm{M}_n(k)}$ à la variété définie par $(\dagger)$ est de dimension $n^2 - 1$, et ceci entraîne l'assertion précédente). Par conséquent, PGL_n a pour algèbre de fonctions régulières :

$$k[\mathrm{PGL}_n] = k[\mathrm{X}_{pq}^{ij} \mid 1 \leqslant i, j, p, q \leqslant n]/\text{relations } (\dagger).$$

D'autre part, l'application $\mathrm{Ad} : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{PGL}_n$, $g \mapsto \mathrm{Int}(g)$ (où $\mathrm{Int}(g)$ est l'automorphisme intérieur $\mathrm{X} \mapsto g\mathrm{X}g^{-1}$) est un morphisme de groupes algébriques.

En effet, on vérifie que

$$\mathrm{X}_{pq}^{ij}(\mathrm{Int}(g)) = \mathrm{dét}(g)^{-1} a_{pi}(g)\mathrm{C}_{qj}(g),$$

où $a_{rs}(g)$, resp. $\mathrm{C}_{rs}(g)$, désigne le coefficient d'indice (r, s) de g, resp. de sa matrice des cofacteurs.

De plus, la restriction de Ad à SL_n est surjective, et donc $k[\mathrm{PGL}_n]$ s'identife à la sous-algèbre de $k[\mathrm{SL}_n]$ engendrée par les éléments

$$(\ddagger) \qquad a_{pi}\mathrm{C}_{qj}, \quad \text{pour } i, j, p, q = 1, \ldots, n.$$

Ceci montre déjà que plusieurs points de vues sont nécessaires : on préfère considérer $\mathrm{PGL}_n(k)$ comme le quotient $\mathrm{GL}_n(k)/k^*$, plutôt que de considérer l'une des algèbres ci-dessus.

$(*)$ *Indications concernant l'espace tangent.* L'espace tangent précité est l'ensemble des matrices $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_{pq}^{ij}) \in \mathrm{M}_n(k)$ telles que la matrice $\mathrm{id} + \varepsilon\mathrm{X} \in \mathrm{M}_n(k[\varepsilon])$ vérifie les équations (†). On trouve que $\mathrm{X}_{pq}^{ij} = 0$ si $i \neq p$ et $j \neq q$; si $i = p$ et $j \neq q$ (resp., si $i \neq p$ et $j = q$) alors

$$\mathrm{E}_{q,j} := \mathrm{X}_{iq}^{ij}, \qquad \text{resp. } \mathrm{E}'_{p,i} := \mathrm{X}_{pj}^{ij}$$

est indépendant de i (resp. de j), et $\mathrm{E}_{q,p} + \mathrm{E}'_{p,q} = 0$. Enfin, pour $i = p$ et $j = q$, posant $\mathrm{H}_{i,j} = \mathrm{X}_{ij}^{ij}$, on a les relations :

$$\mathrm{H}_{i,j} + \mathrm{H}_{j,\ell} = \mathrm{H}_{i,\ell},$$

d'où l'on tire : $\mathrm{H}_{i,i} = 0$, puis $\mathrm{H}_{j,i} = -\mathrm{H}_{i,j}$, et enfin, pour tout $i < j$:

$$\mathrm{H}_{i,j} = \mathrm{H}_i + \cdots + \mathrm{H}_{j-1},$$

où l'on a posé $\mathrm{H}_i := \mathrm{H}_{i,i+1}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$. Ceci montre que l'espace tangent considéré est engendré par les $n(n-1)$ éléments $\mathrm{E}_{i,j}$, pour $i \neq j$, et les $n-1$ éléments H_i, pour $i = 1, \ldots, n-1$, donc est de dimension $\leqslant n^2 - 1$.

7.3. Algèbres de Hopf. — Soient G un groupe algébrique affine et $k[\mathrm{G}]$ son algèbre des fonctions régulières. D'après la proposition 6.28, $k[\mathrm{G}] \otimes k[\mathrm{G}]$ s'identifie à $k[\mathrm{G} \times \mathrm{G}]$ par le morphisme qui à tout $\phi \otimes \psi$ associe l'application $(g, g') \mapsto \phi(g)\psi(g')$. Donc, le comorphisme de la multiplication $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ est un morphisme d'algèbres

$$\Delta = \mu^* : k[\mathrm{G}] \longrightarrow k[\mathrm{G}] \otimes k[\mathrm{G}].$$

Pour tout $\phi \in k[\mathrm{G}]$, $\Delta(\phi)$ est une somme finie $\sum_i \phi_i \otimes \psi_i$ et, pour tout $g, g' \in \mathrm{G}$, l'on a

$$\phi(gg') = (\phi \circ \mu)(g, g') = \Delta(\phi)(g, g') = \sum_i \phi_i(g)\psi(g').$$

De même, le comorphisme de $\kappa : g \mapsto g^{-1}$ est le morphisme d'algèbres $\tau = \kappa^* : k[\mathrm{G}] \to k[\mathrm{G}]$ tel que $\tau(\phi)(g) = \phi(g^{-1})$ pour tout $g \in \mathrm{G}$.

L'associativité de μ se traduit par $\mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_{\mathrm{G}}) = \mu \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times \mu)$ (égalité de morphismes $\mathrm{G} \times \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$) ; ceci implique l'égalité

$$(\mathrm{Ass}) \qquad (\Delta \otimes \mathrm{id}_{k[\mathrm{G}]}) \circ \Delta = (\mathrm{id}_{k[\mathrm{G}]} \otimes \Delta) \circ \Delta,$$

qui exprime la **coassociativité** de Δ.

Notons $\varepsilon = \varepsilon_e$, où e est l'élément neutre de G et désignons par u l'inclusion de k dans $k[\mathrm{G}]$ et par $m : k[\mathrm{G}] \otimes k[\mathrm{G}] \to k[\mathrm{G}]$ la multiplication dans $k[\mathrm{G}]$. La propriété $eg = g = ge$ pour tout g se traduit par

$$(\mathrm{Neutre}) \qquad (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{k[\mathrm{G}]}) \circ \Delta = \mathrm{id}_{k[\mathrm{G}]} = (\mathrm{id}_{k[\mathrm{G}]} \otimes \varepsilon)\Delta.$$

(On fait les identifications $k \otimes k[\mathrm{G}] = k[\mathrm{G}] = k[\mathrm{G}] \otimes k$.) Enfin, la propriété $gg^{-1} = e = g^{-1}g$ se traduit par

$$(\mathrm{Inv}) \qquad m \circ (\tau \otimes \mathrm{id}_{k[\mathrm{G}]}) \circ \Delta = u \circ \varepsilon = m \circ (\mathrm{id}_{k[\mathrm{G}]} \otimes \tau) \circ \Delta.$$

Ces propriétés constituent les axiomes définissant la notion **d'algèbre de Hopf** (commutative).

Définition 7.4. — 1) Soit A une k-algèbre commutative. On dit que A est une **algèbre de Hopf** si l'on s'est donné trois morphismes d'algèbres

$$\Delta : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A} \otimes \mathrm{A}, \quad \varepsilon : \mathrm{A} \longrightarrow k, \quad \tau : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}$$

vérifiant les axiomes ci-dessus. Dans ce cas, Δ s'appelle la comultiplication, ε l'augmentation (ou co-unité), et τ l'antipode.

2) Un **morphisme** d'algèbres de Hopf $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un morphisme d'algèbres qui respecte la comultiplication, l'augmentation et l'antipode, c.-à-d., qui vérifie :

$$\begin{cases} \Delta_{\mathrm{B}} \circ \phi = (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathrm{A}}; \\ \varepsilon_{\mathrm{B}} \circ \phi = \varepsilon_{\mathrm{A}}; \\ \tau_{\mathrm{B}} \circ \phi = \phi \circ \tau_{\mathrm{A}}. \end{cases}$$

Remarque 7.5. — On renvoie à [**Abe**, Chap.2] ou [**Ho81**, Chap.I] pour la définition d'une k-algèbre de Hopf arbitraire H, c.-à-d., non nécessairement commutative. On prendra garde que dans ce cas l'antipode n'est pas un morphisme d'algèbres, mais un anti-homomorphisme, c.-à-d., on a $\tau(ab) = \tau(b)\tau(a)$ pour tout $a, b \in \mathrm{H}$.

Si G est un groupe algébrique affine, on a vu plus haut que son algèbre de fonctions $k[\mathrm{G}]$ est une algèbre de Hopf commutative. Réciproquement, on a la proposition suivante. On note $m_k : k \otimes k \to k$ la multiplication ; c'est un isomorphisme de k-algèbres. Plus généralement, pour toute k-algèbre B on notera $m_{\mathrm{B}} : \mathrm{B} \otimes \mathrm{B} \to \mathrm{B}$ la multiplication, et u_{B} l'inclusion $k \to \mathrm{B}$.

***Proposition 7.6* (Le foncteur associé)**. — *Soit* A *une k-algèbre de Hopf commutative.*

1) $\chi(\mathrm{A}) := \mathrm{Hom}_{k\text{-}alg}(\mathrm{A}, k)$ *est un groupe, pour la loi*

$$\chi \cdot \chi' = m_k \circ (\chi \otimes \chi') \circ \Delta.$$

L'élément neutre est l'augmentation ε, et pour tout $\chi \in \chi(\mathrm{A})$ son inverse est $\chi^{-1} = \chi \circ \tau$.

2) *Plus généralement, pour toute k-algèbre commutative* B*, l'ensemble* $\mathrm{G(B)} := \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ *est un groupe, pour la loi*

$$\phi \cdot \psi = m_{\mathrm{B}} \circ (\phi \otimes \psi) \circ \Delta.$$

L'élément neutre est $u_{\mathrm{B}} \circ \varepsilon$, et pour tout $\phi \in \mathrm{G(B)}$, son inverse est $\phi^{-1} = \phi \circ \tau$.

3) *De plus, si $\theta : \mathrm{B} \to \mathrm{B}'$ est un morphisme de k-algèbres, son comorphisme*

$$\theta^\sharp : \mathrm{G(B)} \longrightarrow \mathrm{G(B')}, \qquad \phi \mapsto \theta \circ \phi,$$

est un morphisme de groupes. Par conséquent, $\mathrm{S} \mapsto \mathrm{G(S)}$ *est un foncteur de la catégorie des k-algèbres commutatives vers la catégorie de groupes, et* $\chi(\mathrm{A}) = \mathrm{G}(k)$ *est le* « groupe des k-points » *de* G.

Démonstration. — Démontrons 2), dont 1) est un cas particulier. On observe d'abord que la commutativité de S assure que $\phi \cdot \psi$ est un morphisme de k-algèbres de A vers S. Ce point est laissé au lecteur.

Montrons l'associativité. Soient $\phi, \psi, \eta \in \mathrm{G(S)}$. On vérifie que $(\phi\psi)\eta$ est le morphisme

$$m_{\mathrm{S}} \circ (m_{\mathrm{S}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{S}}) \circ (\phi \otimes \psi \otimes \eta) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}}) \circ \Delta,$$

de A dans S, tandis que $\phi(\psi\eta)$ égale

$$m_{\mathrm{S}} \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{S}} \otimes m_{\mathrm{S}}) \circ (\phi \otimes \psi \otimes \eta) \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{A}} \otimes \Delta) \circ \Delta.$$

Or $m_{\mathrm{S}}(\mathrm{id}_{\mathrm{S}} \otimes m_{\mathrm{S}}) = m_{\mathrm{S}}(m_{\mathrm{S}} \otimes m_{\mathrm{S}})$, par associativité de m_{S}, et $(\mathrm{id}_{\mathrm{A}} \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}})\Delta$ par coassociativité de Δ. Ceci prouve que $(\phi\psi)\eta = \phi(\psi\eta)$.

Soit $\phi \in \mathrm{G(S)}$. On a

$$(u_{\mathrm{S}} \circ \varepsilon) \cdot \phi = m_{\mathrm{S}} \circ (u_{\mathrm{S}} \otimes \phi) \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}}) \circ \Delta,$$

et comme $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}})\Delta : \mathrm{A} \to k \otimes \mathrm{A} = \mathrm{A}$ est l'identité, on en déduit que $(u_{\mathrm{S}} \circ \varepsilon) \cdot \phi = \phi$. On montre de même que $\phi \cdot (u_{\mathrm{S}} \circ \varepsilon) = \phi$.

De plus, comme $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{S}$ est un morphisme d'algèbres, on a $m_{\mathrm{S}} \circ (\phi \otimes \phi) = \phi \circ m_{\mathrm{A}}$, et $\phi \circ u \circ \varepsilon = u_{\mathrm{S}} \circ \varepsilon$. Par conséquent, $(\phi\tau) \cdot \phi$ égale

$$m_{\mathrm{S}}(\phi \otimes \phi)(\tau \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}})\Delta = \phi m_{\mathrm{A}}(\tau \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{A}})\Delta = \phi u \varepsilon = u_{\mathrm{S}}\varepsilon.$$

On montre de même que $\phi \cdot (\phi\tau) = u_{\mathrm{S}}\varepsilon$. Ceci prouve le point 2), et le point 3) est laissé au lecteur intéressé. □

Remarque 7.7. — 1) Notons volte l'endomorphisme k-linéaire de $\mathrm{A}\otimes\mathrm{A}$ défini par $\mathrm{volte}(a_1\otimes a_2)=a_2\otimes a_1$, pour tout $a_1,a_2\in\mathrm{A}$, et notons $\Delta'=\mathrm{volte}\circ\Delta$. On déduit de la proposition précédente l'égalité suivante :

$$(\dagger)\qquad \Delta\tau=(\tau\otimes\tau)\Delta'.$$

En effet, $\Delta\tau$ est l'inverse de Δ dans le groupe $\mathrm{G}(\mathrm{A}\otimes\mathrm{A})$. Donc, pour montrer $(\dagger)$, il suffit de montrer que $\Phi:=(\tau\otimes\tau)\Delta'$ est aussi un inverse, disons à gauche, de Δ dans ce groupe. C.-à-d., il suffit de montrer que

$$\Phi\cdot\Delta=((\tau\otimes\tau)\Delta'\otimes\Delta)\Delta$$

égale l'unité $u\varepsilon$. On laisse ceci comme exercice pour le lecteur.

2) On peut montrer, par un argument similaire, que $(\dagger)$ est valable pour tout algèbre de Hopf H, commutative ou non ; voir [**Ho81**], Notes du Chap.I, ou [**Sw**, Chap. IV, Prop.4.0.1].

Corollaire 7.8. — *Si* A *est une k-algèbre de Hopf commutative de type fini réduite, alors* $\mathrm{Max}(\mathrm{A})=\chi(\mathrm{A})$ *est un groupe algébrique affine.*

Démonstration. — On a déjà vu l'égalité $\mathrm{Max}(\mathrm{A})=\chi(\mathrm{A})$, qui résulte du théorème des zéros de Hilbert. Posons $\mathrm{G}=\chi(\mathrm{A})$ et soient $\mu=\Delta^\sharp:\mathrm{G}\times\mathrm{G}\to\mathrm{G}$ et $\kappa=\tau^\sharp:\mathrm{G}\to\mathrm{G}$. Alors, μ et κ sont des morphismes de variétés algébriques affines, et donc G est un groupe algébrique affine. De plus, d'après la proposition 6.21, les comorphismes de μ et κ sont Δ et τ, respectivement. $\square$

Théorème 7.9. — *Se donner un morphisme de groupes algébriques affines* $\mathrm{G}\to\mathrm{G}'$ *équivaut à se donner un morphisme d'algèbres de Hopf* $k[\mathrm{G}']\to k[\mathrm{G}]$.

Démonstration. — D'après la proposition 6.21, se donner un morphisme de variétés $\phi:\mathrm{G}\to\mathrm{G}'$ équivaut à se donner le morphisme de k-algèbres $\phi^*:k[\mathrm{G}']\to k[\mathrm{G}]$. De plus, ϕ est un morphisme de groupes ssi il vérifie

$$\phi\circ\mu_{\mathrm{G}}=\mu_{\mathrm{G}'}\circ(\phi\times\phi),\quad \phi(1_{\mathrm{G}})=1_{\mathrm{G}'},\quad \phi\circ\kappa_{\mathrm{G}}=\kappa_{\mathrm{G}'}\circ\phi,$$

où κ désigne le passage à l'inverse. (En fait, la 1ère condition implique les deux autres). D'après le lemme 6.11, ceci équivaut à ce que ϕ^* vérifie

$$\Delta_{\mathrm{G}}\circ\phi^*=(\phi^*\otimes\phi^*)\circ\Delta_{\mathrm{G}'},\quad \varepsilon_{\mathrm{G}}\circ\phi^*=\varepsilon_{\mathrm{G}'},\quad \tau_{\mathrm{G}}\circ\phi^*=\phi^*\circ\tau_{\mathrm{G}'},$$

c.-à-d., soit un morphisme d'algèbres de Hopf. $\square$

7.4. Exemples du point de vue Hopf. — 1) Le groupe additif $\mathbb{G}_a$. On a $k[\mathbb{G}_a]=k[x]$, $\Delta(x)=x\otimes1+1\otimes x$, $\tau(x)=-x$, $\varepsilon(x)=0$.

2) Le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$. On a $k[\mathbb{G}_m]=k[x,x^{-1}]$, $\Delta(x)=x\otimes x$, $\tau(x)=x^{-1}$, $\varepsilon(x)=1$.

3) Le groupe linéaire GL_n. On a

$$k[\mathrm{GL}_n]=k[t,x_{1,1},\dots,x_{n,n}]/(t\,\mathrm{dét}(x_{i,j})-1).$$

La comultiplication correspond à la règle qui exprime le produit de deux matrices, c.-à-d.,

$$\forall\, i,j, \qquad \Delta(x_{i,j}) = \sum_{r=1}^{n} x_{i,r}\, x_{r,j},$$

et, comme $\mathrm{dét(AB)} = \mathrm{dét(A)}\,\mathrm{dét(B)}$, l'on a $\Delta(t) = t \otimes t$. L'augmentation ε est le morphisme “évaluation sur la matrice identité”, d'où $\varepsilon(x_{i,j}) = \delta_{i,j}$ pour tout i,j, et $\varepsilon(t) = 1$. Enfin, l'antipode τ se déduit de la règle qui exprime l'inverse de A comme $1/\,\mathrm{dét(A)}$ fois la transposée de la matrice des cofacteurs, c.-à-d., on a

$$\forall\, i,j, \qquad \tau(x_{i,j}) = t(-1)^{i+j}\mathrm{dét}(x_{r,s})_{r\neq j,\, s\neq i}.$$

Enfin, comme $t(\mathrm{A}) = \mathrm{dét(A)}^{-1}$, on a $\tau(t)(\mathrm{A}) = \mathrm{dét(A)}$ pour tout A, d'où $\tau(t) = \mathrm{dét}(x_{i,j})$.

7.5. Cogèbres et comodules. —

Définition 7.10. — Une k-**cogèbre** est un k-espace vectoriel C muni de deux applications k-linéaires $\Delta : \mathrm{C} \to \mathrm{C}\otimes\mathrm{C}$ et $\varepsilon : \mathrm{C} \to k$, vérifiant les deux axiomes suivants :
(1) $(\mathrm{id_C} \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id_C})\Delta$,
(2) $(\varepsilon \otimes \mathrm{id_C})\Delta = \mathrm{id_C} = (\mathrm{id_C} \otimes \varepsilon)\Delta$.

Δ, resp. ε s'appelle la comultiplication, resp. l'augmentation. L'axiome (1) exprime la coassociativité de la comultiplication, et on peut appeler (2) l'axiome de co-unité.

Un **morphisme** de k-cogèbres $\phi : \mathrm{C} \to \mathrm{C}'$ est une application k-linéaire vérifiant $\Delta_{\mathrm{C}'} \circ \phi = (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_{\mathrm{C}}$ et $\varepsilon_{\mathrm{C}'} \circ \phi = \varepsilon_{\mathrm{C}}$.

Définition 7.11. — Un C-**comodule** (à droite) est un k-espace vectoriel V, muni d'une **coaction** $\Delta_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \to \mathrm{V} \otimes \mathrm{C}$, c.-à-d., une application k-linéaire vérifiant les axiomes suivants :
(1) $(\mathrm{id_V} \otimes \varepsilon)\Delta_{\mathrm{V}} = \mathrm{id_V}$,
(2) $(\mathrm{id_V} \otimes \Delta)\Delta_{\mathrm{V}} = (\Delta_{\mathrm{V}} \otimes \mathrm{id_C})\Delta_{\mathrm{V}}$.

Un **morphisme** de C-comodules $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ est une application k-linéaire qui vérifie $\Delta_{\mathrm{W}} \circ f = (f \otimes \mathrm{id_C}) \circ \Delta_{\mathrm{V}}$.

Remarque 7.12. — Il est clair que $\mathrm{id_V}$ est un morphisme, de même que la composée de deux morphismes. On obtient donc une catégorie, la catégorie des C-comodules (à droite).

Définition 7.13. — Soient V un C-comodule et W un sous-espace de V. On dit que W est un **sous-C-comodule** de V si l'on a $\Delta_{\mathrm{V}}(\mathrm{W}) \subseteq \mathrm{W} \otimes \mathrm{C}$.

Dans ce cas, on vérifie facilement que V/W est un C-comodule, et que la projection $\mathrm{V} \to \mathrm{W}$ est un morphisme de C-comodules.

Proposition 7.14. — *Soit* $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ *un morphisme de* C*-comodules. Alors* $\mathrm{Ker}(f)$*, resp.* $\mathrm{Im}(f)$*, est un sous-comodule de* V*, resp. de* W*, et l'on a un isomorphisme de comodules* $\mathrm{V}/\mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f)$*.*

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

Incluons ici le lemme suivant, analogue de la restriction des scalaires pour les modules, c.-à-d., du fait que si $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un morphisme de k-algèbres et M un B-module, alors M est aussi un A-module.

***Lemme 7.15* (Corestriction des scalaires)**. — *Soit* $\phi : \mathrm{C} \to \mathrm{C}'$ *un morphisme de* k*-cogèbres. Si* V *est un* C*-comodule, pour la coaction* $\Delta_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \to \mathrm{V} \otimes \mathrm{C}$*, alors c'est un* C'*-comodule, pour la coaction* $\Delta'_{\mathrm{V}} = (\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \otimes \phi)\Delta_{\mathrm{V}}$*.*

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

***Théorème 7.16* (Propriété de finitude des comodules)**. — *Soit* C *une* k*-cogèbre et soit* V *un* C*-comodule arbitraire, c.-à-d., pas nécessairement de dimension finie.*

1) *Tout sous-espace vectoriel* E *de dimension finie est contenu dans un sous-comodule de dimension finie. Par conséquent,* V *est réunion de ses sous-comodules de dimension finie.*

2) *Toute intersection de sous-comodules est un sous-comodule. En particulier, pour tout sous-espace* E *de* V *il existe un plus petit sous-comodule* E' *de* V *contenant* E*.*

Démonstration. — Soit $(c_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une base de C. Alors, tout élément de $\mathrm{V} \otimes \mathrm{C}$ s'écrit de façon unique $\sum_\lambda v_\lambda \otimes c_\lambda$, pour des $v_\lambda \in \mathrm{V}$ uniquement déterminés et nuls sauf pour un nombre fini de λ.

1) Soit E un sous-espace de V de dimension finie et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour chaque $i = 1, \dots, n$, écrivons

$$\Delta_{\mathrm{V}}(e_i) = \sum_\lambda v_{i\lambda} \otimes c_\lambda.$$

Soit F le sous-espace de V engendré par les $v_{i\lambda}$, il est de dimension finie. De plus, F contient E puisque pour tout i on a $e_i = (\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \otimes \varepsilon)\Delta_{\mathrm{V}}(e_i) = \sum_\lambda v_{i\lambda}\varepsilon(c_\lambda)$. Montrons que $\Delta_{\mathrm{V}}(\mathrm{F}) \subseteq \mathrm{F} \otimes \mathrm{C}$.

Pour tout i et tout λ, écrivons

$$\Delta_{\mathrm{V}}(v_{i\lambda}) = \sum_\mu v_{i\lambda\mu} \otimes c_\mu. \tag{1}$$

Alors on a, d'une part,

$$(\Delta_{\mathrm{V}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{C}}) \circ \Delta_{\mathrm{V}}(e_i) = \sum_{\lambda,\mu} v_{i\lambda\mu} \otimes c_\mu \otimes c_\lambda. \tag{2}$$

D'autre part, pour tout $\nu \in \Lambda$, écrivons $\Delta(c_\nu) = \sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\nu\lambda\mu}(\nu)\, c_\mu \otimes c_\lambda$, où les $\alpha_{\lambda\mu}(\nu) \in k$ sont nuls sauf pour un nombre fini d'indices. Alors, on a, pour tout $i = 1, \ldots, n$,

$$(\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \otimes \Delta) \circ \Delta_{\mathrm{V}}(e_i) = \sum_{\lambda,\mu} \left(\sum_\nu \alpha_{\lambda\mu}(\nu) v_{i\nu} \right) \otimes c_\mu \otimes c_\lambda. \tag{3}$$

Comme $(\Delta_{\mathrm{V}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{C}}) \circ \Delta_{\mathrm{V}} = (\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \otimes \Delta) \circ \Delta_{\mathrm{V}}$, on en déduit, pour tout λ, μ, que $v_{i\lambda\mu}$ égale $\sum_\nu \alpha_{\lambda\mu}(\nu) v_{i\nu}$ donc appartient à F. D'après (1), ceci montre que $\Delta_{\mathrm{V}}(\mathrm{F}) \subseteq \mathrm{F} \otimes \mathrm{C}$, ce qui prouve le point 1).

2) Soit $(\mathrm{W}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une famille arbitraire de sous-comodules et soit $x \in \mathrm{W} := \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{W}_i$. Écrivons

$$\Delta_{\mathrm{V}}(x) = \sum_\lambda v_\lambda \otimes c_\lambda.$$

Fixons un indice λ. Comme $\Delta_{\mathrm{V}}(x) \in \mathrm{W}_i \otimes \mathrm{C}$, on a $v_\lambda \in \mathrm{W}_i$ pour tout i, d'où $v_\lambda \in \mathrm{W}$. Ceci montre que W est un sous-comodule de V. La dernière assertion en résulte, en prenant E′ égal à l'intersection de tous les sous-comodules contenant E. Le théorème est démontré. □

7.6. Représentations rationnelles des groupes algébriques affines. —

Définition 7.17. — Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie. Une **représentation rationnelle** de G dans V est la donnée d'un morphisme de groupes algébriques $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$.

Ceci équivaut à se donner un morphisme de variétés $\mathrm{G} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, $(g, v) \mapsto gv$ qui est une action linéaire, c.-à-d., qui est linéaire en V et vérifie $g(hv) = (gh)v$ et $ev = v$, où e est l'élément neutre de G. (On laisse au lecteur le soin de vérifier l'équivalence de ces deux définitions).

Lemme 7.18. — *Soient $n \geqslant 1$ et $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}_n(k)$ un morphisme de groupes. On note $\mathrm{C}_{ij} \in k[\mathrm{GL}_n(k)]$ les coefficients matriciels. Alors ϕ est un morphisme de variétés si et seulement si $\mathrm{C}_{ij} \circ \phi \in k[\mathrm{G}]$, pour $i, j = 1, \ldots, n$.*

Démonstration. — La nécessité est claire. Réciproquement, si la condition est satisfaite alors on obtient un morphisme d'algèbres $\varphi : k[\mathrm{M}_n(k)] \to k[\mathrm{G}]$. Désignons par D l'élément $\mathrm{dét}(\mathrm{C}_{i,j})$ de $k[\mathrm{M}_n(k)]$, et observons que $\varphi(\mathrm{D})$ est un élément inversible de $k[\mathrm{G}]$, car $\varphi(\mathrm{D})(g) = \mathrm{dét}(\phi(g))$, d'où $\varphi(\mathrm{D})^{-1}(g) = \mathrm{dét}(\phi(g^{-1}))$. D'après la propriété universelle de la localisation, φ s'étend en un morphisme d'algèbres de $k[\mathrm{M}_n(k)][\mathrm{D}^{-1}] = k[\mathrm{GL}_n(k)]$ vers $k[\mathrm{G}]$. Ceci prouve le lemme. □

Proposition 7.19. — *Soit* V *un* $k[\mathrm{G}]$*-comodule arbitraire.*

a) V *est muni de l'action linéaire de* G *définie par* $gv = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon_g)\Delta_{\mathrm{V}}(v)$.

b) *Un sous-espace vectoriel* W *de* V *est* G*-stable ssi* $\Delta_{\mathrm{V}}(\mathrm{W}) \subseteq \mathrm{W} \otimes k[\mathrm{G}]$, *c.-à-d., ssi* W *est un sous-comodule.*

c) *Si* $\dim \mathrm{V} < \infty$*, alors* V *est un* G*-module rationnel.*

Démonstration. — a) Il faut vérifier que $ev = v$ et $g(hv) = (gh)v$, pour tout $g, h \in \mathrm{G}$, $v \in \mathrm{V}$. Ceci résulte des axiomes de coaction (cf. 7.11) et est laissé au lecteur.

Prouvons b). Il est clair que si $\Delta_{\mathrm{V}}(\mathrm{W}) \subseteq \mathrm{W} \otimes k[\mathrm{G}]$ alors W est G-stable. Pour voir la réciproque, soit E un supplémentaire de W dans V. Soit $v \in \mathrm{W}$ arbitraire. Écrivons

$$\Delta_{\mathrm{V}}(v) = \sum_i w_i \otimes \phi_i + \sum_j e_j \otimes \psi_j,$$

avec $w_i \in \mathrm{W}$, $\phi_i, \psi_j \in k[\mathrm{G}]$, et les e_j linéairement indépendants dans E. Pour tout $g \in \mathrm{G}$, l'hypothèse $gv \in \mathrm{W}$ implique $0 = \sum_j \psi_j(g)e_j$ et ceci entraîne que $\psi_j = 0$, pour tout j. On a donc $\Delta_{\mathrm{V}}(v) \in \mathrm{W} \otimes k[\mathrm{G}]$. Ceci prouve b).

c) Supposons maintenant que $\dim \mathrm{V} = n$ et montrons que l'application abstraite $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ obtenue plus haut est un morphisme. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale. D'après le lemme 7.18, il suffit de voir que les fonctions $\mathrm{C}_{ij} \circ \rho : \mathrm{G} \to k$ appartiennent à $k[\mathrm{G}]$, pour tout i, j. Mais ceci est clair, car pour tout j l'on a

$$\Delta_{\mathrm{V}}(e_j) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes c_{ij},$$

pour certains $c_{ij} \in k[\mathrm{G}]$. Alors, $c_{ij}(g) = \mathrm{C}_{ij}(\rho(g))$ pour tout $g \in \mathrm{G}$, et donc $c_{ij} = \mathrm{C}_{ij} \circ \rho$. La proposition est démontrée. □

Lemme 7.20. — 1) *Soit* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *une base de* $\mathrm{V} \cong k^n$*. L'application*

$$\Delta_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V} \otimes k[\mathrm{GL}_n(k)], \qquad v_j \mapsto \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes \mathrm{C}_{ij}$$

munit V *d'une structure de* $k[\mathrm{GL}(\mathrm{V})]$*-comodule.*

2) *De plus, cette application est* canonique *: elle ne dépend pas de la base de* V *choisie. La structure de* GL(V)*-module rationnel sur* V *correspondante est l'action naturelle* $\mathrm{GL}(\mathrm{V}) \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}$*, qui correspond au morphisme identité* $\mathrm{GL}(\mathrm{V}) \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$.

Démonstration. — 1) Pour $j = 1, \dots, n$, on a $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta_{\mathrm{V}}(v_j) = \sum_i v_i \delta_{i,j} = v_j$ et
$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta_{\mathrm{V}}(v_j) = \sum_{i,\ell} v_i \otimes \mathrm{C}_{i\ell} \otimes \mathrm{C}_{\ell j} = (\Delta_{\mathrm{V}} \otimes \mathrm{id})\Delta_{\mathrm{V}}(v_j).$$
Ceci montre que Δ_{V} est une coaction. On voit facilement que la structure de GL(V)-module rationnel sur V qui résulte du point a), correspond à l'action naturelle $\mathrm{GL(V)} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, et donc au morphisme identité $\mathrm{GL(V)} \to \mathrm{GL(V)}$.

2) Voyons l'indépendance vis-à-vis de la base. Considérons l'application naturelle
$$\gamma : \mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End(V)}^* \subset k[\mathrm{End(V)}].$$
Alors $\mathrm{C}_{ij} = \gamma(v_i^* \otimes v_j)$. On en déduit que, pour tout v, on a $\Delta_{\mathrm{V}}(v) = (\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \otimes \gamma)(\sum_{i=1}^n v_i \otimes v_i^* \otimes v)$. L'indépendance cherchée en découle, soit par un calcul direct, soit en observant que via l'isomorphisme
$$\theta : \mathrm{End(V)} \otimes \mathrm{V} \xrightarrow{\cong} \mathrm{V} \otimes \mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V},$$
on a $\Delta_{\mathrm{V}}(v) = (\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \otimes \gamma)(\mathrm{I}_{\mathrm{V}} \otimes v)$, où I_{V} désigne l'élément unité de End(V). Le lemme est démontré. □

Corollaire 7.21. — *Soit* V *de dimension finie. Il est équivalent de se donner sur* V *une structure de* k[G]*-comodule ou de* G*-module rationnel.*

Démonstration. — Si V est un k[G]-comodule, on obtient une structure de G-module rationnel sur V, d'après la proposition précédente.

Réciproquement, d'après le lemme précédent, on a une structure de comodule $\Delta_{\mathrm{V}} : \mathrm{V} \to \mathrm{V} \otimes k[\mathrm{GL(V)}]$. Par conséquent, si ρ est un morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{GL(V)}$, son comorphisme $\rho^* : k[\mathrm{GL(V)}] \to k[\mathrm{G}]$ est un morphisme d'algèbres de Hopf et donc, d'après le lemme 7.15, $(\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \otimes \rho^*)\Delta_{\mathrm{V}}$ fait de V un k[G]-comodule.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que la composée de ces deux opérations redonne sur V la structure initiale de k[G]-comodule, resp. de G-module rationnel. Ceci démontre le corollaire. □

Proposition 7.22. — *Soit* V *un* k*-espace vectoriel arbitraire, c.-à-d., pas nécessairement de dimension finie. Il est équivalent de se donner :*

i) une structure de k[G]*-comodule sur* V*, ou :*

ii) une action linéaire **localement finie** *de* G *sur* V *telle que, pour tout sous-espace* G*-stable* W *de dimension finie, l'application induite* $\mathrm{G} \to \mathrm{GL(W)}$ *soit un morphisme de groupes algébriques.*

On dit que V *est un* G*-module* **rationnel** *s'il est muni de l'une de ces données. Dans ce cas, pour tout sous-espace* W*, on a :*

W *est un sous-*G*-module* $\Leftrightarrow$ W *est un sous-comodule.*

Démonstration. — Supposons que V soit un k[G]-comodule et soit W un sous-espace G-stable de dimension finie. L'application induite $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL(W)}$ est évidemment un morphisme de groupes. D'après la proposition 7.19, W est un sous-comodule et ρ est un morphisme de groupes algébriques.

De plus, d'après le résultat de finitude (Proposition 7.16), tout sous-espace E de dimension finie est contenu dans un sous-comodule (de façon équivalente, un G-module) de dimension finie. Ceci est la définition d'une action localement finie. Ceci montre que la condition ii) est vérifiée.

Réciproquement, supposons ii) vérifié. Si W est un sous-espace G-stable de dimension finie, on a un morphisme d'algèbres de Hopf $\pi_{\mathrm{W}} : k[\mathrm{GL(W)}] \to k[\mathrm{G}]$, et on en déduit que $(\mathrm{id} \otimes \pi_{\mathrm{W}}) \circ \Delta_{\mathrm{W}} : \mathrm{W} \to \mathrm{W} \otimes k[\mathrm{G}]$ est une coaction, notée θ_{W}. De plus, si $\mathrm{W}_1 \subseteq \mathrm{W}_2$, on vérifie facilement que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{W}_1 & \xrightarrow{\theta_{\mathrm{W}_1}} & \mathrm{W}_1 \otimes k[\mathrm{G}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{W}_2 & \xrightarrow{\theta_{\mathrm{W}_2}} & \mathrm{W}_2 \otimes k[\mathrm{G}] \end{array}$$

est commutatif. On en déduit, puisque $\otimes$ commute à la limite inductive, que ceci munit V d'une coaction θ_{V}, qui prolonge les θ_{W}. □

***Proposition 7.23* (Construction de modules).** — *Soit* V *un* G*-module rationnel de dimension finie d. Alors, les espaces suivants sont, de façon naturelle, des* G*-modules rationnels :*

1) *Le dual* V^**, pour l'action définie par :*

$$(g \cdot \phi)(v) = \phi(g^{-1}v), \qquad \forall\, g \in \mathrm{G},\ \phi \in \mathrm{V}^*,\ v \in \mathrm{V}.$$

2) *Les puissances tensorielles, symétriques, ou extérieures :* $\mathrm{V}^{\otimes n}$, $\mathrm{S}^n(\mathrm{V})$, $\bigwedge^n(\mathrm{V})$.

Démonstration. — Il suffit de le montrer pour $\mathrm{GL(V)} = \mathrm{GL}_d$, le cas général s'obtiendra en composant la représentation $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL(V)}$ avec la représentation de GL(V) dans $\mathrm{GL}(\mathrm{V}^*)$, $\mathrm{GL}(\mathrm{V}^{\otimes n})$, etc.

Pour $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_d$, le point 1) est clair, car le morphisme

$$\mathrm{GL}_d = \mathrm{GL(V)} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{V}^*) = \mathrm{GL}_d$$

est donné par $\mathrm{A} \mapsto {}^t\mathrm{A}^{-1}$. Pour le point 2), $\mathrm{G} = \mathrm{GL(V)}$ agit par automorphismes d'algèbre sur les algèbres tensorielle, symétrique et extérieure de V :

$$\mathrm{T(V)}, \qquad \mathrm{S(V)} = \mathrm{T(V)/I}, \qquad \bigwedge(\mathrm{V}) = \mathrm{T(V)/J},$$

où I (resp. J) est l'idéal homogène engendré par les éléments, de degré 2, $v \otimes w - w \otimes v$ (resp. $v \otimes v$), pour $v, w \in \mathrm{V}$.

Soient $(e_1, \ldots, e_d)$ une base de V. Alors les

$$\begin{array}{lll} & e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}, & \text{avec} \quad 1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant d \quad ; \\ \text{resp.} & e_{i_1} \cdots e_{i_n}, & \text{avec} \quad 1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_n \leqslant d \ ; \\ \text{resp.} & e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}, & \text{avec} \quad 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant d \quad (\text{et } n \leqslant d); \end{array}$$

forment une base de $\mathrm{V}^{\otimes n}$, resp. $\mathrm{S}^n(\mathrm{V})$, resp. $\bigwedge^n(\mathrm{V})$. Pour tout $g \in \mathrm{GL}_d$,

$$g(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}) = g(e_{i_1}) \otimes \cdots \otimes g(e_{i_n})$$

s'exprime, par n-linéarité du produit, comme une combinaison linéaire des vecteurs de base, avec pour coefficients des polynômes homogènes de degré n en les coefficients $g_{i,j}$ de g, et il en est de même dans le cas de l'algèbre symétrique ou extérieure. Ceci démontre la proposition. □

7.7. Linéarité des groupes algébriques affines. — On dit qu'un groupe algébrique G est **linéaire** s'il est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un groupe GL(V). Dans ce cas, G est évidemment un groupe algébrique affine. La réciproque est vraie :

Théorème 7.24. — *Tout groupe algébrique affine est linéaire.*

Démonstration. — Soit G un groupe algébrique affine. Alors la comultiplication $\Delta : k[\mathrm{G}] \to k[\mathrm{G}] \otimes k[\mathrm{G}]$ fait de $k[\mathrm{G}]$ un $k[\mathrm{G}]$-comodule à droite et donc un G-module rationnel pour l'action :

$$(g\phi)(h) = \phi(hg), \qquad \forall\, \phi \in k[\mathrm{G}],\ g, h \in \mathrm{G}.$$

Soient $x_1, \ldots, x_s$ des générateurs de $k[\mathrm{G}]$ comme algèbre, et soit V le sous-G-module (de dimension finie !) qu'ils engendrent. D'après la proposition 7.19, l'on a $\Delta(\mathrm{V}) \subseteq \mathrm{V} \otimes k[\mathrm{G}]$ et l'on obtient un morphisme de groupes algébriques $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathrm{V})$. Soit $\{f_1, \ldots, f_n\}$ une base de V ; il existe des $c_{ij} \in k[\mathrm{G}]$ tels que, pour tout $j = 1, \ldots, n$,

$$(*) \qquad \rho(g) f_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}(g) f_i, \quad \forall\, g \in \mathrm{G}.$$

Pour montrer que ρ est une immersion fermée, il reste à voir que le comorphisme $\rho^* : k[\mathrm{GL}(\mathrm{V})] \to k[\mathrm{G}]$ est surjectif. Mais ceci résulte de $(*)$. En effet, $c_{ij} = \mathrm{C}_{ij} \circ \rho = \rho^*(\mathrm{C}_{ij})$, et pour $j = 1, \ldots, n$, on a

$$\forall\, g \in \mathrm{G}, \qquad f_j(g) = (\rho(g) f_j)(e) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}(g) f_i(e),$$

d'où $f_j = \rho^*(\sum_{i=1}^{n} f_i(e) \mathrm{C}_{ij})$. Comme les f_j engendrent $k[\mathrm{G}]$, ceci prouve que ρ^* est surjective. □

Prenant $k = \mathbb{C}$, on déduit du théorème précédent, combiné au théorème de von Neumann (cours d'Introduction, 3/10, Th. 7.66), le corollaire suivant.

Corollaire 7.25. — *Soit* G *un* $\mathbb{C}$*-groupe algébrique affine. Alors* G *est un groupe de Lie.*

7.8. G-variété affines. — Soit G un groupe algébrique affine.

Définition 7.26. — Soit A une k-algèbre. On dit que G **agit** rationnellemnent **par automorphismes** sur A si l'on s'est donné une structure de G-module rationnel sur A telle que, pour tout $g \in \mathrm{G}$, l'application $a \mapsto ga$ soit un automorphisme d'algèbre.

Ceci équivaut à dire que la coaction correspondante $\Delta_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to \mathrm{A} \otimes k[\mathrm{G}]$ est **multiplicative**, c.-à-d., est un morphisme de k-algèbres.

***Définition 7.27* (Action sur une variété affine)**. — Soit X une variété algébrique affine. Une **action** de G sur X est un morphisme de variétés $\mu_{\mathrm{X}} : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ vérifiant les axiomes d'une action, c.-à-d.,
(1) $\mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_{\mathrm{X}}) = \mu_{\mathrm{X}} \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times \mu_{\mathrm{X}})$,
(2) $\mu_{\mathrm{X}} \circ (e \times \mathrm{id}_{\mathrm{X}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{X}}$,
où μ, resp. e, désigne la multiplication, resp. l'élément neutre, de G.

Notant $\Delta_{\mathrm{X}} : k[\mathrm{X}] \to k[\mathrm{X}] \otimes k[\mathrm{G}]$ le comorphisme de μ_{X} (qui est un morphisme de k-algèbres), ceci équivaut à dire que Δ_{X} est, de plus, une coaction.

Réciproquement, toute coaction $\Delta_{\mathrm{X}} : k[\mathrm{X}] \to k[\mathrm{X}] \otimes k[\mathrm{G}]$ qui est **multiplicative**, c.-à-d., un morphisme de k-algèbres, induit un morphisme $\mu_{\mathrm{X}} : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ qui vérifie (1) et (2). Par conséquent, se donner une action de G sur X équivaut à se donner une coaction multiplicative $\Delta_{\mathrm{X}} : k[\mathrm{X}] \to k[\mathrm{X}] \otimes k[\mathrm{G}]$. Dans ce cas, on dira que X est une **G-variété**.

***Définition 7.28* (Morphismes de G-variétés)**. — Soient X, Y deux G-variétés algébriques affines. Un **G-morphisme** $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un morphisme de variétés qui commute à l'action de G, c.-à-d., tel que :

$$\phi(gx) = g\phi(x), \qquad \forall\, g \in \mathrm{G},\ x \in \mathrm{X}.$$

Ceci signifie que $\phi \circ \mu_{\mathrm{X}} = \mu_{\mathrm{Y}} \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times \phi)$, et ceci équivaut à dire que $\phi^* : k[\mathrm{X}] \to k[\mathrm{Y}]$ est un morphisme (d'algèbres et) de comodules.

***Théorème 7.29* (Linéarisation des actions affines)**. — *Soit* X *une* G*-variété affine. Alors il existe une immersion fermée* G*-équivariante de* X *dans un* G*-module rationnel de dimension finie.*

Démonstration. — La preuve est similaire à celle de la linéarité de G. Soit $x_1, \ldots, x_s$ des générateurs de $k[\mathrm{X}]$ comme algèbre, et soit V le sous-G-module de dimension finie de $k[\mathrm{X}]$ qu'ils engendrent.

D'après la propriété universelle de l'algèbre symétrique S(V), on obtient, d'une part, que G agit rationnellement, par automorphismes d'algèbre sur S(V). D'autre part, on obtient un morphisme d'algèbres G-équivariant ϕ : S(V) $\to$ k[X]. Ce morphisme est surjectif, puisque V engendre k[X]. Par conséquent, le morphisme associé $\phi^\sharp$: X $\to$ V* est une immersion fermée G-équivariante. □

8. Variétés algébriques, dimension, fibres

Bien que l'on ne s'intéresse, dans ce cours, qu'aux groupes algébriques affines, le cadre des variétés algébriques affines n'est pas assez large, car il est souvent intéressant, et parfois nécessaire, de faire agir un groupe algébrique affine sur une variété algébrique X qui n'est pas affine. De plus, si H est un sous-groupe fermé de G, on montrera que G/H est muni d'une unique structure de G-variété algébrique, et G/H n'est pas une variété affine en général. Il nous faut donc définir, brièvement, la notion de variété algébrique en général.

Pour les notions et résultats de géométrie algébrique (resp. d'algèbre commutative) qui sont mentionnés sans démonstration, les références sont les livres [**Die**], [**Pe**] ou [**Ku**] (resp. [**AM**] ou [**Ma1**]).

8.1. Espaces noethériens et composantes irréductibles. — Soit X un espace topologique non vide. On rappelle que X est **connexe** s'il n'est pas réunion **disjointe** de deux fermés propres (c.-à-d., distincts de X). Ceci équivaut à dire que toute partie ouverte et fermée non vide est égale à X.

Définition 8.1. — On dit que X est **irréductible** s'il n'est pas réunion de deux fermés propres de X. Ceci équivaut à dire que l'intersection de deux ouverts non vides est non vide, ou encore, que tout ouvert non vide est dense.

Ceci implique que tout ouvert non vide de X est également irréductible.

Remarque 8.2. — Il résulte de la définition que tout espace irréductible est connexe. La réciproque est fausse en général.

Lemme 8.3. — 1) *L'image par une application continue d'un espace irréductible* (*resp. connexe*) *est irréductible* (*resp. connexe*).

2) *Soient* Y *un sous-espace de* X *et* $\overline{\mathrm{Y}}$ *son adhérence. Si* Y *est irréductible* (*resp. connexe*), *alors* $\overline{\mathrm{Y}}$ *l'est aussi. De plus, si* $\overline{\mathrm{Y}}$ *est irréductible,* Y *l'est aussi.*

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

Définition 8.4. — On dit qu'un espace topologique X est **quasi-compact** si de tout recouvrement ouvert $\mathrm{X} = \bigcup_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{U}_i$ on peut extraire un sous-recouvrement fini $\bigcup_{i\in \mathrm{J}} \mathrm{U}_i$, où J $\subset$ I est une partie finie.

Ceci équivaut à dire que si une intersection de fermés $\bigcap_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{Z}_i$ est vide, alors déjà une intersection finie $\bigcap_{i\in \mathrm{J}} \mathrm{Z}_i$ est vide.

Proposition 8.5. — *Soit* X *un espace topologique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Toute suite décroissante de fermés, resp. toute suite croissante d'ouverts, est stationnaire.*

2) *Toute famille non vide de fermés, resp. d'ouverts, possède un élément minimal, resp. maximal.*

3) *Tout ouvert de* X *est quasi-compact.*

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

Définition 8.6. — X est dit **noethérien** s'il vérifie les conditions précédentes. Dans ce cas, tout sous-espace de X est aussi noethérien.

Proposition 8.7. — *Soient* A *une k-algèbre de type fini réduite et* $\mathrm{X} = \mathrm{Max}(\mathrm{A})$ *la variété algébrique affine associée, munie de la topologie de Zariski.*

1) X *est un espace topologique noethérien* voir 8.23 plus loin).

2) X *est connexe ssi* A *ne contient pas d'idempotent autre que* 0 *et* 1.

3) X *est irréductible ssi* A *est intègre.*

Définition 8.8. — Un sous-espace de X qui est irréductible (resp. connexe) et maximal pour cette propriété s'appelle une **composante irréductible** (resp. **connexe**) de X.

D'après 8.3, point 2), une telle composante est une partie **fermée** de X.

Remarque 8.9. — 1) Si Y, Z sont deux parties connexes de X ayant un point en commun, $\mathrm{Y} \cup \mathrm{Z}$ est connexe. On en déduit que la relation $x \sim x'$ s'il existe une partie connexe contenant x et x' est une relation d'équivalence sur X, et les composantes connexes sont les classes d'équivalence.

2) Pour un espace topologique arbitraire, l'existence de parties irréductibles maximales résulte du lemme de Zorn, voir [**Die**, (T, 6)]. Toutefois, pour un espace noethérien, on a la proposition suivante.

Proposition 8.10. — *Soit* X *un espace topologique noethérien. Alors les composantes irréductibles de* X *sont en nombre fini et recouvrent* X.

Démonstration. — Considérons l'ensemble $\mathscr{Y}$ des fermés de X qui ne sont pas réunion finie de fermés irréductibles. Si $\mathscr{Y}$ était non vide, alors d'après la propriété de noethérianité il contiendrait un élément minimal Z, nécessairement non-irréductible. Donc Z est réunion de deux fermés propres Z_1 et Z_2. Mais d'après la minimalité de Z, Z_1 et Z_2 sont réunions finies de fermés irréductibles, et donc aussi Z. Contradiction ! Donc $\mathscr{Y} = \varnothing$ et X est réunion finie de fermés irréductibles.

Considérons alors une décomposition $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$, avec n minimal. Si Y est un sous-espace irréductible de X, l'égalité $Y = \cup_{i=1}^n (Y \cap X_i)$ entraîne que $Y \subseteq X_i$ pour un certain i. Par conséquent, tout sous-espace irréductible maximal de X est égal à l'un des X_i. Comme de plus $X_i \not\subseteq X_j$ pour $j \neq i$, puisqu'on a choisi n minimal, on obtient que les X_i sont exactement les composantes irréductibles de X. □

8.2. Dimension. —

Définition 8.11 **(Dimension d'un espace topologique noethérien)**

Soient X un espace topologique noethérien, et $x \in X$.

a) On note $\dim_x X$ le supremum des longueurs des suites strictement décroissantes de fermés irréductibles de X contenant x (la longueur d'une suite $X = F_0 \supset F_1 \supset \cdots \supset F_n$ étant n). C'est un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

b) On pose $\dim X = \sup_{x \in X} \dim_x X$; c'est encore un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Lemme 8.12. — *Soit* X *un espace topologique noethérien.*

1) *Pour tout sous-espace* $Y \subseteq X$*, on a* $\dim Y \leqslant X$.

2) *Soient* $X_1, \ldots, X_n$ *les composantes irréductibles de* X*. Alors* $\dim X = \operatorname{Max}_i \dim X_i$.

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

Définition 8.13 **(Dimension d'un anneau noethérien)**. — Soient A un anneau noethérien et $\mathfrak{p}$ un idéal premier.

a) On note $\operatorname{ht}(\mathfrak{p})$ le supremum des longueurs des suites strictement croissantes d'idéaux premiers contenus dans $\mathfrak{p}$, où, comme précédemment, la longueur d'une suite $P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n$ est n, c.à.d. le nombre de signes d'inclusion. On peut montrer que $\operatorname{ht}(\mathfrak{p}) < +\infty$, voir [**AM**, Chap. 11].

b) On note $\dim A$ le supremum des $\operatorname{ht}(\mathfrak{m})$, pour $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max}(A)$, c'est un élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Pour tout idéal I, on a $\dim(A/I) \leqslant \dim A$.

Lemme 8.14. — *Soient* A *un anneau noethérien,* $X = \operatorname{Spec}(A)$ *et* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A)$. *Alors* $\dim_{\mathfrak{p}} X = \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$.

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

Remarque 8.15. — 1) Nagata a construit un exemple d'anneau noethérien A tel que $\dim A = +\infty$, voir [**AM**], Exercice 11.4.

2) Évidemment, la dimension est une notion plus intéressante lorsqu'elle est finie. À cet égard, on la proposition suivante.

Proposition 8.16. — *Soient k un corps et* $X_1, \ldots, X_n$ *des indéterminées. On a* $\dim k[X_1, \ldots, X_n] = n$, *et* $\dim k[X_1, \ldots, X_n]/I < n$ *pour tout idéal non nul* I.

Démonstration. — Voir, par exemple, [**Ma1**], § (14.A), Thm. 22. □

Corollaire 8.17. — *Soit k algébriquement clos. Toute variété algébrique affine* $X \subseteq k^n$ *est de dimension* $\leqslant n$, *avec égalité ssi* $X = k^n$.

8.3. Espaces annelés. —

Notation 8.18. — Soit V un ensemble arbitraire. On note k^V la k-algèbre de **toutes** les fonctions $V \to k$.

Définition 8.19. — Soit X un espace topologique. Un **faisceau de fonctions** $\mathscr{O}$ sur X (à valeurs dans k) est la donnée, pour tout ouvert U de X, d'une sous-algèbre $\mathscr{O}(U)$ de k^U, satisfaisant aux conditions suivantes :

1) si $V \subseteq U$ et $f \in \mathscr{O}(U)$, alors $f|_U \in \mathscr{O}(V)$;

2) étant donné un recouvrement ouvert $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ et des $f_\alpha \in \mathscr{O}(U_\alpha)$ telles que f_α et f_β coïncident sur $U_\alpha \cap U_\beta$, l'élément $f \in k^U$ défini par la condition $f_{|U_\alpha} = f_\alpha$ appartient à $\mathscr{O}(U)$.

On dit alors que $(X, \mathscr{O})$ est un **espace annelé**. La notion de **morphisme** d'espaces annelés est évidente : un morphisme $(X, \mathscr{O}_X) \to (Y, \mathscr{O}_Y)$ est une application continue $f : X \to Y$ telle que, pour tout ouvert V de Y, le morphisme de k-algèbres $k^V \to k^{f^{-1}(V)}$, $\phi \mapsto \phi \circ f$ applique $\mathscr{O}_Y(V)$ dans $\mathscr{O}_X(f^{-1}(V))$.

***Définition 8.20* (Faisceau induit sur un sous-espace)**. — Si Z est un sous-espace de X, on définit $\mathscr{O}|_Z$ de la façon suivante. Si V est un ouvert de Z, on note $\mathscr{O}|_Z(V)$ l'ensemble des fonctions $\psi : V \to k$ telles que, pour tout $x \in V$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X et $\phi \in \mathscr{O}(U)$ tels que $\phi|_{U \cap Z} = \psi$.

On vérifie que ceci définit un faisceau de fonctions sur Z, appelé le faisceau induit par $\mathscr{O}$. On appelle $(Z, \mathscr{O}|_Z)$ l'espace annelé induit.

8.4. Variétés affines commes espaces annelés. — Soit A une k-algèbre réduite et $X = \mathrm{Max}(A)$, muni de la topologie de Zariski. On peut voir A comme une algèbre de fonctions sur X. En effet, si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal, on note $f(\mathfrak{m})$ l'image de f dans $A/\mathfrak{m} \cong k$. De façon équivalente, si on note ε le morphisme d'algèbres $A \to A/\mathfrak{m} = k$, alors $f(\mathfrak{m}) = \varepsilon(f)$.

Lemme 8.21. — *Le morphisme d'algèbres* $A \to k^X$ *est injectif.*

Démonstration. — Soit f dans le noyau de ce morphisme. Comme f s'annule sur $X = V(0)$ alors, d'après le théorème des zéros de Hilbert, $f \in \sqrt{0}$, d'où $f = 0$ puisque A est réduite. □

***Définition 8.22* (Ouverts affines principaux).** — Pour tout $f \in A$, on note $D(f)$ l'ouvert complémentaire du fermé $\mathscr{V}(f)$, c.-à-d.,

$$D(f) = \{\mathfrak{m} \in X \mid f \notin \mathfrak{m}\} = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\},$$

muni de la topologie induite. On a $D(f^n) = D(f)$, pour tout n.

Le morphisme d'algèbres $\phi : A \to A_f$ induit une application continue

$$\phi^\sharp : \mathrm{Max}(A_f) \longrightarrow \mathrm{Max}(A), \qquad \mathfrak{m} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{m}),$$

et c'est un exercice d'algèbre commutative de vérifier que $\phi^\sharp$ est un **homéomorphisme** de $\mathrm{Max}(A_f)$ sur $D(f)$. On dit que $D(f)$ est un **ouvert affine principal**

Proposition 8.23. — 1) *Tout ouvert de* $X = \mathrm{Max}(A)$ *est réunion finie d'ouverts affines principaux* $D(f)$.

2) X *est quasi-compact, ainsi que chaque* $D(f)$.

3) *Par conséquent,* X *est noethérien.*

Démonstration. — Soient U un ouvert, F le fermé complémentaire, et I l'idéal de F. Par définition,

$$F = \mathscr{V}(I) = \{x \in X \mid \forall\, f \in I, \quad f(x) = 0\}$$

donc son complémentaire est

$$U = \{x \in X \mid \exists\, f \in I, \quad f(x) \neq 0\} = \bigcup_{f \in I} D(f).$$

Comme, de plus, A est noethérienne, I est engendré par un nombre fini d'éléments $f_1, \dots, f_n$, d'où $\mathscr{V}(I) = \mathscr{V}(f_1) \cap \cdots \cap \mathscr{V}(f_n)$ et donc

$$U = D(f_1) \bigcup \cdots \bigcup D(f_n).$$

Ceci prouve 1).

Soit $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ un recouvrement ouvert arbitraire et, pour chaque α, soit I_α l'idéal du fermé $F_\alpha := X \setminus U_\alpha$. Posons $J = \sum_\alpha I_\alpha$. Alors

$$\mathscr{V}(J) = \bigcap_\alpha F_\alpha = \varnothing.$$

Donc, d'après le théorème des zéros de Hilbert, $\sqrt{J} = A$ et donc $1 \in J$. Donc il existe des indices $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que

$$1 = g_1 + \cdots + g_r, \qquad \text{avec} \quad g_i \in I_{\alpha_i}.$$

Alors $X = \bigcup_{i=1}^r D(g_i)$, et c'est un sous-recouvrement du recouvrement initial, puisque $D(g_i) \subseteq U_{\alpha_i}$ pour tout $i = 1, \dots, r$. Ceci montre que $X = \mathrm{Max}(A)$ est quasi-compact, et il en est de même de tout $D(f)$, puisque $D(f) = \mathrm{Max}(A_f)$. Ceci prouve 2).

Enfin, 3) résulte facilement de 1) et 2). La proposition est démontrée. $\square$

Théorème 8.24 **(Le faisceau structural $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$).** — (a) *On définit un faisceau* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ *sur* X *en posant, pour tout ouvert* U,

$$\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U}) = \{\phi \in k^{\mathrm{U}} \mid \forall x \in \mathrm{U},\ \exists f \in \mathrm{A} \text{ tel que } x \in \mathrm{D}(f) \subseteq \mathrm{U} \text{ et } \phi_{|\mathrm{D}(f)} \in \mathrm{A}_f\}.$$

(b) *Pour tout* $f \in \mathrm{A}$*,* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}|_{\mathrm{D}(f)}$ *est le faisceau structural de* $\mathrm{Max}(\mathrm{A}_f)$*, et l'on a* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D}(f)) = \mathrm{A}_f$ *; en particulier* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}) = \mathrm{A}$.

Démonstration. — Soit $f \in \mathrm{A}$. D'après le lemme 8.21 appliqué à A_f et $\mathrm{D}(f) = \mathrm{Max}(\mathrm{A}_f)$, le morphisme $\mathrm{A}_f \to k^{\mathrm{D}(f)}$ est injectif. Par abus de notation, on identifiera un élément de A_f avec son image. Montrons que $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ vérifie les conditions 1) et 2) de 8.3.

Soient $\mathrm{U} = \bigcup_\alpha \mathrm{U}_\alpha$, les ϕ_α et ϕ comme en 2) de 8.3. Soient $x \in \mathrm{U}$ et α tel que $x \in \mathrm{U}_\alpha$. Soit f tel que $x \in \mathrm{D}(f) \subseteq \mathrm{U}_\alpha$. Alors $\phi|_{\mathrm{D}(f)} = \phi_\alpha|_{\mathrm{D}(f)}$ appartient à A_f. Donc $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ vérifie la condition 2).

Soient $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{U}$, $\phi \in \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})$, et $x \in \mathrm{V}$. Par hypothèse, il existe $f, a \in \mathrm{A}$ tels que $x \in \mathrm{D}(f) \subseteq \mathrm{U}$ et $\phi|_{\mathrm{D}(f)} = a/f$. Alors, il existe g tel que $x \in \mathrm{D}(g) \subseteq \mathrm{V} \cap \mathrm{D}(f)$. Comme $\mathrm{D}(g) \subseteq \mathrm{D}(f)$, alors $\mathrm{V}(g) \supseteq \mathrm{V}(f)$ et donc, d'après le théorème des zéros, il existe $n > 0$, $b \in \mathrm{A}$ tels que $g^n = bf$. Alors $\mathrm{A}_g = (\mathrm{A}_f)_b$ et l'on a $a/f = ab/g^n$ dans A_g, d'où $\phi|_{\mathrm{D}(g)} \in \mathrm{A}_g$. Ceci montre que $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ vérifie la condition 1). De plus, si on note X_f la variété affine $\mathrm{Max}(\mathrm{A}_f)$, alors on déduit aussi de l'argument qui précède que $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}|_{\mathrm{D}(f)}$ coïncide avec $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_f}$.

Il reste à montrer que, pour tout f, $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{D}(f)) = \mathrm{A}_f$. Soit $\phi \in \mathscr{O}(\mathrm{D}(f))$. Alors il existe $g_1, \dots, g_n \in \mathrm{A}$ tels que $\mathrm{D}(f) = \bigcup_i \mathrm{D}(g_i)$ et que $g_i\phi$ coïncide sur $\mathrm{D}(g_i)$ avec un élément a_i de A.

Pour tout i, la fonction $(g_i\phi - a_i)g_i$ est nulle sur $\mathrm{D}(g_i)$ et sur $\mathrm{V}(g_i) \cap \mathrm{U}$, donc sur U tout entier. Donc $g_i^2\phi$ coïncide sur U avec $a_i g_i$. D'autre part, de $\mathrm{D}(f) = \bigcup_i \mathrm{D}(g_i)$ et $\mathrm{D}(g_i^2) = \mathrm{D}(g_i)$, on déduit que $\mathrm{V}(f) = \mathrm{V}(\sum_i \mathrm{A} g_i^2)$. Donc il existe $r > 0$ et $b_1, \dots, b_n \in \mathrm{A}$ tels que $f^r = \sum_i b_i g_i^2$. Posons $a = \sum_i b_i a_i g_i$. Alors, $f^r\phi$ coïncide sur U avec a. On en déduit que ϕ coïncide sur $\mathrm{D}(f)$ avec a/f^r. Ceci prouve (b). □

8.5. Prévariétés algébriques. —

Définition 8.25 **(Parties localement fermées).** — Soit X un espace topologique. Un sous-espace Y de X est **localement fermé** si $\mathrm{Y} = \mathrm{U} \cap \mathrm{F}$, où U est ouvert et F fermé. Dans ce cas, F contient l'adhérence $\overline{\mathrm{Y}}$ de Y, et donc l'on a $\mathrm{Y} = \mathrm{U} \cap \overline{\mathrm{Y}}$. Par conséquent :

Y est localement fermé $\Leftrightarrow$ Y est ouvert dans son adhérence.

Définition 8.26. — Une **prévariété algébrique** est un espace annelé $(\mathrm{X}, \mathscr{O})$ tel que :

a) X est noethérien,

b) il existe un recouvrement ouvert (U_α) de X tel que chaque $(\mathrm{U}_\alpha, \mathscr{O}_{|\mathrm{U}_\alpha})$ soit isomorphe à une variété algébrique affine.
On notera $k[\mathrm{X}] := \mathscr{O}(\mathrm{X})$.

Si X, Y sont deux prévariétés, un **morphisme** $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un morphisme d'espaces annelés $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$.

Définition 8.27 **(Ouverts affines)**. — Soit $(\mathrm{X}, \mathscr{O}_\mathrm{X})$ une prévariété algébrique. On dit qu'un ouvert U de X est un **ouvert affine** si $(\mathrm{U}, \mathscr{O}|_\mathrm{U})$ est isomorphe à une variété affine.

Il résulte de la définition 8.26 et de la proposition 8.23 que tout ouvert de X est réunion finie d'ouverts affines.

Exemple 8.28. — Soit X une variété algébrique affine, et $\mathscr{O}_\mathrm{X}$ son faisceau structural (8.24). Alors $(\mathrm{X}, \mathscr{O}_\mathrm{X})$ est une prévariété algébrique. Plus généralement, si Y est une partie localement fermée de X (par exemple, un ouvert ou un fermé), alors $(\mathrm{Y}, \mathscr{O}_\mathrm{X}|_\mathrm{Y})$ est une prévariété algébrique, d'après la proposition suivante.

Proposition 8.29. — *Soient* $(\mathrm{X}, \mathscr{O})$ *une prévariété et* Y *un sous-espace localement fermé, muni du faisceau induit. Alors* Y *est une prévariété.*

Démonstration. — Traitons d'abord le cas où Y fermé. Prenant un recouvrement ouvert affine de X, on peut supposer que X est affine. Alors, Y est une sous-variété fermée, on a $\mathrm{Y} = \mathrm{Max}(\mathrm{A}/\mathrm{I})$, où $\mathrm{I} = \mathscr{I}(\mathrm{Y})$, et il résulte des définitions que $\mathscr{O}_\mathrm{X}|_\mathrm{Y}$ coïncide avec le faisceau structural $\mathscr{O}_\mathrm{Y}$ défini par A/I. Ceci prouve le résultat lorsque Y est fermé.

Traitons maintenant le cas général. Par hypothèse, Y est ouvert dans son adhérence $\overline{\mathrm{Y}}$. Or, d'après ce qui précède, $\overline{\mathrm{Y}}$ est une prévariété. Donc, remplaçant X par $\overline{\mathrm{Y}}$, on se ramène au cas où Y est un ouvert U de X. Prenant un recouvrement ouvert affine de X, on se ramène au cas où X est affine. Le résultat est alors clair, puisque U est recouvert par des ouverts affines $\mathrm{D}(f)$. La proposition est démontrée. □

Théorème 8.30 **(Définition par cartes)**. — *Soit* X *un ensemble. Pour définir une structure de prévariété algébrique sur* X*, il suffit de se donner des couples* (U_1, ϕ_1), …, (U_n, ϕ_n)*, où* U_i *est un sous-ensemble de* X *et* ϕ_i *une bijection de* U_i *sur une variété algébrique affine* V_i*, vérifiant la condition suivante : pour tout* $i \neq j$, $\mathrm{V}_{i,j} := \phi_i(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j)$ *est un ouvert de* V_i *et*

$$(*) \qquad \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \mathrm{V}_{ij} \longrightarrow \mathrm{V}_{ji}$$

est un morphisme de prévariétés.

Démonstration. — On définit une topologie sur X en déclarant qu'une partie U est ouverte si et seulement si chaque $\phi_i(\mathrm{U} \cap \mathrm{U}_i)$ est ouvert dans V_i. (On vérifie que ceci est bien une topologie). Puis, pour tout ouvert U, on pose

$$\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U}) = \{f : \mathrm{U} \longrightarrow k \mid f \circ \phi_i^{-1} \in \mathscr{O}_{\mathrm{V}_i}(\phi_i(\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U})), \quad \forall\, i = 1, \dots, n\}.$$

On vérifie facilement que c'est un faisceau de fonctions sur X. Pour tout $i = 1, \dots, n$, notons $\mathscr{O}_{\mathrm{U}_i}$ la restriction de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ à U_i ; alors ϕ_i est un isomorphisme d'espaces annelés :

$$(\mathrm{U}_i, \mathscr{O}_{\mathrm{U}_i}) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{V}_i, \mathscr{O}_{\mathrm{V}_i}).$$

En effet, il résulte des définitions que ϕ_i est un homéomorphisme, et si $f \in \mathscr{O}_{\mathrm{U}_i}(\mathrm{U})$, où U est un ouvert de U_i, alors $f \circ \phi_i^{-1} \in \mathscr{O}_{\mathrm{V}_i}(\phi_i(\mathrm{U}))$, ce qui prouve que ϕ_i^{-1} est un morphisme de prévariétés. Réciproquement, soient V un ouvert de V_i, $\mathrm{U} = \phi_i^{-1}(\mathrm{V})$ et $\theta \in \mathscr{O}_{\mathrm{V}_i}(\mathrm{V})$. Il s'agit de montrer que

$$\theta \circ \phi_i \in \mathscr{O}_{\mathrm{U}_i}(\mathrm{U}),$$

c.-à-d., que $\theta \circ \phi_i \circ \phi_j^{-1} \in \mathscr{O}_{\mathrm{V}_j}(\phi_j(\mathrm{U}_j \cap \mathrm{U}))$; or ceci résulte de l'hypothèse $(*)$. Le théorème est démontré. □

Exemple 8.31. — L'espace projectif $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(k^{n+1})$ est une prévariété algébrique.

Proposition 8.32. — *Soient* X, Y *deux prévariétés et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme. Alors* f *induit un morphisme de prévariétés* $\mathrm{X} \to \overline{f(\mathrm{X})}$.

Démonstration. — D'après la proposition 8.29, $\overline{f(\mathrm{X})} := \mathrm{Z}$ est une prévariété. D'autre part, il est clair que $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ est continue. Soit V un ouvert de Z. Alors $\mathrm{V} = \mathrm{Z} \cap \mathrm{U}$, pour un ouvert U de Y, et l'on a $f^{-1}(\mathrm{V}) = f^{-1}(\mathrm{U})$. Soit $\phi \in \mathscr{O}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{V})$. Par définition de $\mathscr{O}_{\mathrm{Z}}$, il existe des ouverts $\mathrm{W}_1, \dots, \mathrm{W}_n$ de U et $\phi_i \in \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{W}_i)$ tels que $\mathrm{Z} \subseteq \bigcup_i \mathrm{W}_i$ et que ϕ et ϕ_i coïncident sur $\mathrm{W}_i \cap \mathrm{Z}$. Alors $f^{-1}(\mathrm{U}) = \bigcup_i f^{-1}(\mathrm{W}_i)$ et $\phi \circ f$ coïncide sur $f^{-1}(\mathrm{W}_i)$ avec $\phi_i \circ f$. Enfin, chaque $\phi_i \circ f$ appartient à $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(f^{-1}(\mathrm{W}_i))$ puisque $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un morphisme. La proposition est démontrée. □

8.6. Produit de prévariétés algébriques. — D'après 6.8, si $\mathrm{X} = \mathrm{Max(A)}$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{Max(B)}$ sont des variétés algébriques affines, alors $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ est réduite et $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ s'identifie à $\mathrm{Max}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})$, muni de la topologie de Zariski correspondante. Le produit de deux prévariétés arbitraires est défini de la façon suivante (voir [**Die**, § 2.4]).

Proposition 8.33. — *Soient* X *et* Y *deux prévariétés.*

(a) *Il existe sur* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *une et une seule topologie qui induise sur chaque produit* $\mathrm{U} \times \mathrm{V}$ *d'ouverts affines la topologie de Zariski mentionnée plus haut.*

(b) *Il existe un unique faisceau de fonctions* $\mathscr{O}$ *sur* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *tel que* $\mathscr{O}|_{\mathrm{U}\times\mathrm{V}} = \mathscr{O}_{\mathrm{U}\times\mathrm{V}}$*, pour tous ouverts affines* $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{X}$ *et* $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{Y}$.

(c) *Les projections* $\mathrm{pr}_{\mathrm{X}} : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *et* $\mathrm{pr}_{\mathrm{Y}} : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$ *sont des morphismes.*

(d) $(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}, \mathscr{O})$ *est le produit de* X *et* Y *dans la catégorie des prévariétés, c.-à-d., pour toute prévariété* Z*, on a :*

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Z}, \mathrm{X} \times \mathrm{Y}) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Z}, \mathrm{X}) \times \mathrm{Hom}(\mathrm{Z}, \mathrm{Y}),$$

c.-à-d., étant donnés des morphismes $f : \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ *et* $g : \mathrm{Z} \to \mathrm{Y}$*, l'application* $\phi : z \mapsto (f(z), g(z))$ *est un morphisme, et c'est l'unique morphisme* $\phi : \mathrm{Z} \to \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *tel que* $\mathrm{pr}_{\mathrm{X}} \circ \phi = f$ *et* $\mathrm{pr}_{\mathrm{Y}} \circ \phi = g$.

(e) *Pour tout* $x_0 \in \mathrm{X}$, $\{x_0\} \times \mathrm{Y}$ *est un fermé de* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$*, isomorphe à* Y*, et de même pour* $\mathrm{X} \times \{y_0\}$*, pour* $y_0 \in \mathrm{Y}$.

Corollaire 8.34. — *Si* X *et* Y *sont irréductibles, alors* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ *l'est aussi.*

Démonstration. — D'après le point (e) ci-dessus, pour tout $x \in \mathrm{X}$, $y \in \mathrm{Y}$, les applications $\tau_x : \mathrm{Y} \to \mathrm{X} \times \mathrm{Y}, z \mapsto (x, z)$ et $\tau_y : \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, $u \mapsto (u, y)$ sont continues. Supposons $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} = \mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2$. Alors, pour chaque $y \in \mathrm{Y}$ on a $\mathrm{X} = \tau_y^{-1}(\mathrm{F}_1)$ ou $\mathrm{X} = \tau_y^{-1}(\mathrm{F}_2)$. Par conséquent, $\mathrm{Y} = \mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2$, où $\mathrm{Y}_i = \{y \in \mathrm{Y} \mid \tau_y(\mathrm{X}) = \mathrm{F}_i\}$. Mais $\mathrm{Y}_i = \bigcap_{x\in\mathrm{X}} \tau_x^{-1}(\mathrm{F}_i)$ et donc Y_1, Y_2 sont fermés. Ceci implique que, disons, $\mathrm{Y} = \mathrm{Y}_1$ et donc $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} = \mathrm{F}_1$. □

8.7. Variétés algébriques. — Soit X une prévariété algébrique.

Définition 8.35. — On dit que X est une **variété algébrique** si elle vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) La diagonale Δ_{X} est fermée dans $\mathrm{X}\times\mathrm{X}$ (muni de la topologie de Zariski).

(ii) pour tout couple (f, g) de morphismes d'une prévariété Y dans X, l'ensemble des y tels que $f(y) = g(y)$ est fermé.

Remarque 8.36. — (i) résulte de (ii) appliqué aux deux projections de $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ sur X. Réciproquement, si f, g sont des morphismes $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$, leur lieu de coïncidence est l'image inverse de Δ_{X} par le morphisme $\phi = (f, g)$. Ceci prouve l'équivalence des deux conditions.

Proposition 8.37. — (i) *Tout sous-espace localement fermé d'une variété est une variété.*

(ii) *Le produit de deux variétés est une variété.*

(iii) *Soient* X, Y *deux variétés et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme. Alors le graphe de* f *est fermé dans* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$.

Démonstration. — Voir [**Die**, § 2.6, Prop. 9]. □

De plus, on a le théorème suivant, qui fournit un critère pratique pour vérifier qu'une prévariété définie par des cartes (cf. 8.30) est une variété.

Théorème 8.38. — 1) *Soit* X *une prévariété et soit* $X = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ *un recouvrement de* X *par des ouverts affines. On suppose que, pour tout* i, j, $U_i \cap U_j$ *est un ouvert affine et l'application naturelle*

$$k[U_i] \otimes k[U_j] \longrightarrow k[U_i \cap U_j]$$

est surjective. Alors X *est une variété.*

2) *Réciproquement, si* X *est une variété et* U, V *des ouverts affines, alors* $U \cap V$ *est un ouvert affine et l'application* $k[U] \otimes k[V] \to k[U \cap V]$ *est surjective.*

Démonstration. — Voir [**Die**, § 2.6], Th. 1 et Remarque qui le suit. □

Exemple 8.39. — L'espace projectif $\mathbb{P}^n$ est une variété.

8.8. Corps des fonctions rationnelles et dimension. — Soit X une variété algébrique irréductible. Si U, V sont des ouverts non-vides, $U \cap V$ est un ouvert non-vide et l'application de restriction $k[U] \to k[U \cap V]$ est injective (car $U \cap V$ est dense).

Définition 8.40. — On note $k(X)$ la limite injective des $k[U]$, pour U ouvert non-vide.

En d'autres termes, $k(X)$ s'identifie à l'ensemble des couples (U, f) où U est un ouvert non-vide et $f \in k[U]$, modulo la relation d'équivalence : $(U, f) \sim (V, g)$ si f et g coïncident sur un ouvert non-vide $W \subseteq U \cap V$ (dans ce cas, $f = g$ sur $U \cap V$). C'est un corps, car si f est non-nulle et appartient à $k[U]$ alors $1/f$ appartient à $k[U \cap D(f)]$, où l'on rappelle que $D(f)$ désigne l'ouvert : $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$.

Proposition 8.41. — *Soit* X *irréductible. Alors* $k(X) = \mathrm{Frac}(k[U])$, *pour tout ouvert affine* U.

Démonstration. — D'abord, il résulte de la définition que $k(X) = k(U)$ pour tout ouvert non-vide U. Donc il suffit de montrer que si X est affine alors $k(X) = \mathrm{Frac}(k[X])$. Il est clair que $k[X] \subseteq k(X)$. Réciproquement, soit $f \in k(X)$. Alors $f \in k[V]$ pour un ouvert non-vide V, et il existe $g \in k[X]$ tel $D(g) \subseteq k[V]$. Alors $f \in k[D(g)] = k[X]_g \subseteq k(X)$. □

Pour tout corps K extension de type fini de k, on notera $\deg \mathrm{tr}_k K$ son degré de transcendance sur k. On admettra le résultat suivant ; voir, par exemple, [**Hu2**, 3.2, 3.4.A].

Théorème 8.42. — *Soit* X *irréductible. Pour tout* $x \in X$, *on a* $\dim_x X = \deg \mathrm{tr}_k k(X)$. *En particulier,* $\dim X = \deg \mathrm{tr}_k k(X)$.

8.9. Image et fibres d'un morphisme, théorème de Chevalley. —

Définition 8.43. — Soient X, Y deux variétés algébriques et $f : X \to Y$ un morphisme. On dit que f est **dominant** si $f(X)$ est dense dans Y, c.-à-d., si $\overline{f(X)} = Y$.

Si X et Y sont affines, ceci équivaut à ce que le comorphisme $f^* : k[Y] \to k[X]$ soit injectif.

On admet le théorème suivant (voir [**Die**, § 4]), qui est une variante du théorème de constructibilité de Chevalley, voir [**Laf77**, Chap.7, § 3.2] ou [**Ma1**, (6.E)].

***Théorème 8.44* (Chevalley)**. — *Soient* X, Y **irréductibles** *et* $f : X \to Y$ *un morphisme dominant.*

a) *Il existe un ouvert dense* V *de* Y*, contenu dans* $f(X)$*, tel que, pour tout* $v \in V$*, toute composante irréductible de* $f^{-1}(v)$ *soit de dimension* $\dim X - \dim Y \geqslant 0$.

b) *Pour tout* $y \in f(X)$ *et toute composante irréductible* Z *de* $f^{-1}(v)$*, on a* $\dim Z \geqslant \dim X - \dim Y$.

b′) *La fonction* $X \to \mathbb{N}$*,* $x \mapsto \dim_x f^{-1}(f(x))$ *est semi-continue supérieurement, c.à.d., pour tout* n*, l'ensemble des* $x \in X$ *tels qu'il existe une composante* Z *de* $f^{-1}(f(x))$ *contenant* x *et de dimension* $\geqslant n$*, est fermé.*

Corollaire 8.45. — *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme de variétés. Alors* $f(X)$ *contient un ouvert dense de* $\overline{f(X)}$*.*

Démonstration. — Remplaçant si nécessaire Y par $\overline{f(X)}$, on peut supposer que f est dominant. On se ramène alors au cas irréductible comme suit.

Notons $X_1, \dots, X_n$ les composantes irréductibles de X et posons $Y_i = \overline{f(X_i)}$. Alors, d'une part, $Y_1 \cup \dots \cup Y_n$ égale Y, car c'est un fermé contenant $f(X)$. D'autre part, chaque Y_i est irréductible donc, d'après le théorème précédent, $f(X_i)$ contient un ouvert dense U_i de Y_i. Alors $U_1 \cup \dots \cup U_n$ est un ouvert dense de Y contenu dans $f(X)$. □

9. Groupes algébriques, morphismes et orbites

9.1. Composante neutre. —

Proposition 9.1. — *Soit* G *un groupe algébrique.*
(a) *Les composantes connexes de* G *coïncident avec les composantes irréductibles.*
(b) *Soit* G^0 *la composante connexe de l'identité. Alors* G^0 *est un sous-groupe fermé distingué d'indice fini. Tout sous-groupe fermé connexe est contenu dans*

G^0.
(c) *Tout sous-groupe fermé d'indice fini contient* G^0.

Démonstration. — Soient $X_1, \dots, X_m$ les composantes irréductibles de G contenant e. Notons $Y = X_1 \cdots X_m$ l'image de $X_1 \times \cdots X_m$ par le morphisme $(x_1, \dots, x_m) \mapsto x_1 \cdots x_m$. Alors Y est une partie irréductible de G contenant e et est donc contenue dans un certain X_i, disons X_1. Comme chaque X_i est contenu dans Y, il en résulte $m = 1$. Donc e est contenu dans une unique composante irréductible ; notons-la G^0. C'est un fermé de G, stable par multiplication d'après ce qui précède.

Pour tout $g \in G$, $g^{-1}G^0$ est une composante irréductible de G, car image de G^0 par un automorphisme de G. De plus, si $g \in G^0$ alors $g^{-1}G^0$ contient e et est donc égal à G^0. Ceci prouve que G^0 est un sous-groupe fermé. De même, pour tout $g \in G$, gG^0g^{-1} est une composante irréductible de G contenant e, et donc $gG^0g^{-1} = G^0$. Par conséquent, G^0 est un sous-groupe normal.

Comme chaque classe gG^0 est une composante irréductible de G, la proposition 8.10 entraîne que $[G : G^0] < \infty$. Les classes gG^0, étant en nombre fini, sont aussi ouvertes, et sont donc les composantes connexes de G.

Enfin, si H est un sous-groupe fermé connexe, alors $H \cap G^0$ est ouvert et fermé et non-vide (il contient e), donc égal à H, d'où $H \subseteq G^0$. Ceci prouve (a) et (b).

Prouvons (c). Si H est un sous-groupe fermé d'indice fini, il est aussi ouvert, et est donc une réunion de composantes connexes de G. Comme $e \in H$, alors H contient G^0. □

Remarque 9.2. — Les groupes algébriques non-connexes se rencontrent naturellement. Par exemple, soient T le sous-groupe des matrices diagonales dans SL_2 et N son *normalisateur* dans SL_2 (c.à.d. $N = \{g \in SL_2 \mid gTg^{-1} = T\}$). Alors $N^0 = T$ et on a une suite exacte $1 \to T \to N \to \{\pm 1\} \to 1$; mais N n'est pas un *produit semi-direct* de $\{\pm 1\}$ par T (exercice !).

9.2. Lemme des deux ouverts et sous-groupes. — On aura besoin des résultats suivants.

Lemme 9.3. — *Soient* G *un groupe algébrique,* U *un ouvert et* Γ *une partie dense. Alors* $G = U\Gamma = \Gamma U$.

Démonstration. — Soit $g \in G$. L'ouvert gU rencontre Γ, et donc $g \in \Gamma U$. En considérant Ug, on obtient de même que $G = U\Gamma$. □

Proposition 9.4. — *Soient* G *un groupe algébrique et* H *un sous-groupe abstrait de* G.
(a) $\overline{H}$ *est un sous-groupe fermé de* G.
(b) *Si* H *contient un ouvert non-vide de* $\overline{H}$, *alors* $H = \overline{H}$.

Démonstration. — Prouvons (a). Pour $g \in \mathrm{G}$, notons λ_g la translation à gauche $g' \mapsto gg'$ et δ_g la translation à droite $g' \mapsto g'g$. Soit $h \in \mathrm{H}$. L'image inverse du fermé $\overline{\mathrm{H}}$ par l'application continue λ_h est un fermé contenant H et donc $\overline{\mathrm{H}}$. Par conséquent, $\mathrm{H}{\cdot}\overline{\mathrm{H}} \subseteq \overline{\mathrm{H}}$.

Soit maintenant $y \in \overline{\mathrm{H}}$. L'image inverse du fermé $\overline{\mathrm{H}}$ par l'application continue δ_y est un fermé contenant H et donc $\overline{\mathrm{H}}$. Par conséquent, $\overline{\mathrm{H}}{\cdot}\overline{\mathrm{H}} \subseteq \overline{\mathrm{H}}$. Enfin, notons τ le morphisme $g \mapsto g^{-1}$. Alors le fermé $\tau^{-1}(\overline{\mathrm{H}})$ contient H et donc $\overline{\mathrm{H}}$, d'où $\tau(\overline{\mathrm{H}}) \subseteq \overline{\mathrm{H}}$. Ceci prouve (a).

Prouvons (b). Soit U un ouvert non-vide contenu dans H. Alors H est égal à $\bigcup_{h\in \mathrm{H}} h\mathrm{U}$, et est donc ouvert dans $\overline{\mathrm{H}}$. Il y est aussi dense, et donc d'après le lemme 9.3 on a $\overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H}{\cdot}\mathrm{H} = \mathrm{H}$. □

9.3. Morphismes de groupes algébriques. — Soit G un groupe algébrique. Comme les composantes connexes de G sont des translatées de G^0, elles ont toutes la même dimension. Par conséquent, $\dim \mathrm{G} = \dim \mathrm{G}^0$.

Théorème 9.5. — *Soit $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ un morphisme de groupes algébriques.*
(a) $\mathrm{Ker}\,\phi$ *est un sous-groupe fermé de* G.
(b) $\mathrm{Im}\,\phi$ *est un sous-groupe fermé de* G'.
(c) *On a* $\dim \phi(\mathrm{G}) = \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{Ker}\,\phi$.
(d) $\phi(\mathrm{G}^0) = \phi(\mathrm{G})^0$.

Démonstration. — (a) est clair. D'autre part, $\mathrm{Im}\,\phi$ est un sous-groupe de G' et contient, d'après le corollaire 8.45, un ouvert dense de $\overline{\mathrm{Im}\,\phi}$. On a donc $\mathrm{Im}\,\phi = \overline{\mathrm{Im}\,\phi}$, d'après la proposition 9.4. Ceci prouve (b).

De plus, $\phi(\mathrm{G}^0)$ est un sous-groupe fermé de $\phi(\mathrm{G})$, connexe et d'indice fini. Donc $\phi(\mathrm{G}^0) = \phi(\mathrm{G})^0$, ce qui prouve (d).

Enfin, appliquons l'assertion a) du théorème 8.44 au morphisme $\phi : \mathrm{G}^0 \to \phi(\mathrm{G}^0)$. Chaque fibre étant un translaté de $\mathrm{Ker}\,\phi$, et donc de dimension $\dim \mathrm{Ker}\,\phi$, on obtient (c). □

Remarque 9.6. — **Attention !** En caractéristique $p > 0$, un morphisme bijectif de groupes algébriques n'est pas nécessairement un isomorphisme. Par exemple, le morphisme surjectif $\mathrm{SL}_n \to \mathrm{PGL}_n$ a pour noyau le sous-groupe $\{\lambda \mathrm{I}_n \mid \lambda^n = 1\}$. Si $n = p$, ce sous-groupe égale $\{\mathrm{I}_n\}$ et donc $\mathrm{SL}_p \to \mathrm{PGL}_p$ est un morphisme de groupes algébriques bijectif. Mais ce n'est pas un isomorphisme, car son comorphisme est l'inclusion (‡) de 1.2, exemple 9), qui est une inclusion stricte.

De plus, on peut montrer, en considérant leurs algèbres de Lie, que SL_p et PGL_p ne sont pas isomorphes commes groupes algébriques.

Un autre exemple, plus simple, est le suivant. Considérons le morphisme de groupes algébriques $\phi : \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$, $x \mapsto x^p$. Alors ϕ est bijectif. Son comorphisme est le morphisme de k-algèbres $k[\mathrm{T}] \to k[\mathrm{T}]$, $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{T}^p$; ce n'est pas un isomorphisme.

9.4. Action sur une variété, stabilisateurs et orbites. — Soient G un groupe algébrique et X une G-variété. Pour des sous-espaces Y, Z de X, on pose

$$\mathrm{Tran}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \{g \in \mathrm{G} \mid g\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{Z}\}, \quad \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}) = \mathrm{Tran}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Y}).$$

Si Y est un singleton $\{x\}$, on note $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\{x\}) = \mathrm{G}_x$.

Lemme 9.7. — a) *Si* Z *est un fermé de* X*, alors* $\mathrm{Tran}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ *est un fermé de* G*. Par conséquent, pour tout* $x \in \mathrm{X}$, G_x *est un sous-groupe fermé.*

b) *Si* Y *est localement fermé, alors* $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y})$ *égale* $\{g \in \mathrm{G} \mid g\mathrm{Y} = \mathrm{Y}\}$*, et est un sous-groupe fermé.*

Démonstration. — Pour $x \in \mathrm{X}$, notons μ_x l'application $g \mapsto gx$. C'est un morphisme de variétés.

a) Pour tout $y \in \mathrm{Y}$, $\mathrm{Tran}_{\mathrm{G}}(\{y\}, \mathrm{Z}) = \mu_y^{-1}(\mathrm{Z})$ est un fermé de G. Il en est donc de même de $\mathrm{Tran}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}) = \bigcap_{y \in \mathrm{Y}} \mathrm{Tran}_{\mathrm{G}}(\{y\}, \mathrm{Z})$. L'assertion a) en découle.

b) Soit $g \in \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y})$. Notons d'abord que $g\overline{\mathrm{Y}} \subseteq \overline{\mathrm{Y}}$. Par conséquent, on a une suite décroissante de fermés $\overline{\mathrm{Y}} \supseteq g\overline{\mathrm{Y}} \supseteq g^2\overline{\mathrm{Y}} \supseteq \cdots$. Cette suite étant stationnaire, on en déduit que $\overline{\mathrm{Y}} = g\overline{\mathrm{Y}}$. Donc $\overline{\mathrm{Y}}$ est stable par g et g^{-1}. Comme Y est ouvert dans $\overline{\mathrm{Y}}$, la suite $\mathrm{Y} \subseteq g^{-1}\mathrm{Y} \subseteq g^{-2}\mathrm{Y} \subseteq \cdots$ est une suite croissante d'ouverts de $\overline{\mathrm{Y}}$ et est donc stationnaire. On en déduit que $\mathrm{Y} = g^{-1}\mathrm{Y}$, d'où $g\mathrm{Y} = \mathrm{Y}$. Ceci prouve que $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y})$ est un sous-groupe. De plus, on déduit de ce qui précède que $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y})$ égale

$$\big\{g \in \mathrm{G} \mid g\overline{\mathrm{Y}} = \overline{\mathrm{Y}} \text{ et } g(\overline{\mathrm{Y}} \setminus \mathrm{Y}) = \overline{\mathrm{Y}} \setminus \mathrm{Y}\big\} = \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\overline{\mathrm{Y}}) \cap \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\overline{\mathrm{Y}} \setminus \mathrm{Y}).$$

D'après le point a), on conclut que $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Y})$ est un sous-groupe fermé de G. $\square$

Théorème 9.8. — *Pour tout* $x \in \mathrm{X}$*, l'orbite* $\mathrm{G}x$ *est ouverte et dense dans* $\overline{\mathrm{G}x}$*. En particulier,* $\mathrm{G}x$ *est une sous-variété localement fermée de* X*.*

Démonstration. — $\mathrm{G}x$ est l'image du morphisme μ_x donc contient, d'après le corollaire 8.45, un ouvert dense U de $\overline{\mathrm{G}x}$. Mais alors $\mathrm{G}x$ est la réunion des ouverts $g\mathrm{U}$ et est donc ouvert (et dense) dans $\overline{\mathrm{G}x}$. $\square$

Corollaire 9.9. — *Tout fermé* G*-stable* $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{X}$ *contient au moins une orbite fermée.*

Démonstration. — L'ensemble des fermés non-vides et G-stables de F est non-vide (il contient F) donc admet au moins un élément minimal Z. Soit $z \in \mathrm{Z}$. Par minimalité, on a $\mathrm{Z} = \overline{\mathrm{G}z}$. Alors, d'après la proposition, $\mathrm{Z} \setminus \mathrm{G}z$ est un fermé G-stable strictement contenu dans Z et est donc vide. Donc $\mathrm{G}z = \mathrm{Z}$ est une orbite fermée. □

Remarque 9.10. — **Attention !** En caractéristique $p > 0$, le fait que $\mathrm{G}_x = \{1\}$ n'entraîne pas que $\mu_x : \mathrm{G} \to \mathrm{G}x$ soit un isomorphisme, même si $\mathrm{G}x$ est fermée ; voir la remarque 9.6.

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[Abe] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge Univ. Press, 1977.

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.

[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.

[AM] M. Atiyah, I. G. Macdonald, Commutative algebra, Addison Wesley, 1969.

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[Bo] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Springer Verlag, 1991.

[BA1-3] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 1 à 3, 1981.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BL7-8] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 7-8, 1975.

[BI7-8] N. Bourbaki, Intégration, Chap. 7-8, 1963.

[BrM] J. Briançon, Ph. Maisonobe, Éléments d'algèbre commutative, niveau M1, Ellipses, 2004.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.

[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.

[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.

[Do88] D. Z. Doković, An elementary proof of the structure theorem for connected solvable affine algebraic groups, Enseign. Math. (2) 34 (1988), 269-273.

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Eis] D. Eisenbud, Commutative algebra with a view towards algebraic geometry, Springer, 1995.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[GH] M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1977.

[Hel] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press 1978, ninth printing Amer. Math. Soc. 2001.

[Her] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.

[Ho81] G. P. Hochschild, Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, Springer-Verlag, 1981.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Hu2] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, 1975, corrected 2nd printing 1981.

[Iit] S. Iitaka, Algebraic geometry, Springer, 1982.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Jac80] N. Jacobson, Basic Algebra II, Freeman & Co., 1980.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Ke] G. R. Kempf, Algebraic varieties, Cambridge Univ. Press, 1993.

[Kna] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser, 1996, 2nd edition, 2002.

[Ku] E. Kunz, Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkhäuser, 1985.

[Laf74] J.-P. Lafon, Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative, Hermann, 1974.

[Laf77] J.-P. Lafon, Algèbre commutative (Langages géométrique et algébrique), Hermann, 1977.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[Lu99] Retour sur un théorème de Chevalley, Enseign. Math. (2) 45 (1999), 317-320.

[Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.

[Ma1] H. Matsumura, Commutative algebra (2nd edition), Benjamin, 1980.

[Ma2] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 1986, paperback edition with corrections, 1989.

[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Pe] D. Perrin, Géométrie algébrique - Une introduction, Inter Éditions/-CNRS Éditions, 1995.

[Po] P. Polo, Algèbre et théorie de Galois, cours de M1 2005/06 à l'Université Paris 6, www.math.jussieu.fr/~polo

[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Sp] T. A. Springer, Linear algebraic groups, Birkäuser, 1981, 2nd edition 1998.

[Sw] M. E. Sweedler, Hopf Algebras, Benjamin, 1969.

[Ti] J. Tits, Liesche Gruppen und Algebren, Springer-Verlag, 1983.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.