PARTIE FI : VARIÉTÉS HOMOGÈNES G/H SÉANCE DU 27 NOVEMBRE

Soient k un corps algébriquement clos, G un k-groupe algébrique affine, H un sous-groupe fermé de G. Le but de ce chapitre est, principalement, d'introduire une structure de variété algébrique sur G/H de sorte que G/H vérifie la propriété universelle suivante : soient Z une variété algébrique et $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{Z}$ un morphisme tel que $\phi(gh) = \phi(g)$, pour tout $g \in \mathrm{G}$, $h \in \mathrm{H}$, alors ϕ se factorise de façon unique en un morphisme de variétés $\overline{\phi} : \mathrm{G/H} \to \mathrm{Z}$. En particulier, G/H est unique à isomorphisme près.

Pour établir cela, on aura besoin de résultats qui assurent que, sous certaines hypothèses, un morphisme bijectif de variétés algébriques est un isomorphisme. Ceci n'est pas vrai pour tout morphisme bijectif, en voici deux exemples.

Exemple 1. Soit C la courbe plane d'équation $y^2 = x^3$. Alors, notant $\mathbb{A}^1 = k = \mathrm{Max}(k[\mathrm{T}])$, le morphisme

$$\phi : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathrm{C}, \qquad t \mapsto (t^2, t^3)$$

est bijectif ; son comorphisme est le morphisme d'algèbres

$$\phi^* : k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]/(\mathrm{Y}^2 - \mathrm{X}^3) \longrightarrow k[\mathrm{T}], \qquad \mathrm{X} \mapsto \mathrm{T}^2, \quad \mathrm{Y} \mapsto \mathrm{T}^3;$$

c.-à-d., ϕ^* est un isomorphisme de $k[\mathrm{C}]$ sur le sous-anneau $k[\mathrm{T}^2, \mathrm{T}^3]$ de $k[\mathrm{T}] = k[\mathbb{A}^1]$, donc ϕ n'est pas un isomorphisme. Ceci provient du fait que le point $(0, 0)$ de la courbe C est un point « singulier » de la courbe C ; en particulier C n'est pas une variété normale (voir plus bas).

Exemple 2. Voici un exemple spécifique à la caractéristique $p > 0$. Le morphisme de groupes algébriques

$$\phi : \mathbb{G}_a \longrightarrow \mathbb{G}_a, \qquad t \mapsto t^p$$

---

(0) version du 5/12/06

est bijectif, mais n'est pas un isomorphisme : son comorphisme est l'inclusion $k[\mathrm{T}^p] \hookrightarrow k[\mathrm{T}]$, et l'extension de corps correspondante

$$k(\mathrm{T}^p) \subset k(\mathrm{T}) \qquad \text{n'est } \textbf{pas séparable};$$

en effet, T est algébrique sur $\mathrm{K} := k(\mathrm{T}^p)$ et son polynôme minimal sur K est $\mathrm{X}^p - \mathrm{T}^p$ (irréductible dans K[X]) ; dans $k(\mathrm{T})[\mathrm{X}]$ il se décompose :

$$\mathrm{X}^p - \mathrm{T}^p = (\mathrm{X} - \mathrm{T})^p$$

donc a T pour racine de multiplicité p. Ceci montre que l'élément $\mathrm{T} \in k(\mathrm{T})$ n'est pas séparable sur le sous-corps $\mathrm{K} = k(\mathrm{T}^p)$. Cet exemple explique pourquoi il faut passer par la discussion (plutôt longue) des questions de séparabilité, si l'on veut des résultats valables en caractéristique arbitraire.

Le cours étant dirigé vers les groupes algébriques sur $\mathbb{C}$ et les groupes de Lie, ces aspects n'ont pas été traités en cours, et les lecteurs ne désirant pas s'investir dans le cas de la caractéristique $p > 0$ pourront tranquillement sauter tous les passages traitant de séparabilité.

Les questions de séparabilité nécessitent l'étude algébrique de l'algèbre de Lie, Lie(G), d'un groupe algébrique G. Ceci est fait dans la section 12, où l'on introduit aussi l'*algèbre des distributions* (à l'origine) d'un groupe algébrique, qui permet de donner une meilleure définition du crochet de Lie sur Lie(G). Ceci présente un intérêt en soi (indépendamment des questions de séparabilité), et d'ailleurs ceci se transpose au cas des groupes de Lie (voir par exemple [**Go**, § 5]).

Dans tout ce chapitre, le corps de base k est algébriquement clos, *a priori* de caractéristique arbitraire, mais comme indiqué plus haut le lecteur peut prendre $k = \mathbb{C}$ et ignorer les questions de séparabilité.

10. Propriétés locales d'une variété algébrique

10.1. Anneaux locaux et espaces tangents. — Soient X une variété algébrique et $x \in \mathrm{X}$. Si U, V sont des voisinages ouverts affines de x, alors $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ est un voisinage ouvert affine de x, et l'on a des applications de restriction $k[\mathrm{U}] \to k[\mathrm{U} \cap \mathrm{V}]$ et $k[\mathrm{V}] \to k[\mathrm{U} \cap \mathrm{V}]$.

Définition 10.1. — On note $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ la limite injective des $k[\mathrm{U}]$, pour U voisinage ouvert affine de x. On l'appelle **l'anneau local de** X **en** x.

Cette définition à l'avantage d'être intrinsèque, c.-à-d., elle définit $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ sans avoir recours à des choix auxillaires. Cependant, en pratique, on pense à $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ de la façon suivante.

Proposition 10.2. — *Soit* U *un voisinage ouvert affine de* x, *et* $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\mathrm{U},x}$ *l'idéal maximal de* $\mathrm{A} = k[\mathrm{U}]$ *correspondant à* x. *Alors,* $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *s'identifie à* $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$, *le localisé de* A *en* $\mathfrak{m}$. *En particulier,* $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *est un* **anneau local**. *On notera* $\mathfrak{m}_x$ *son idéal maximal.*

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

Lemme 10.3. — *Soient* X *une variété algébrique, et* $x \in \mathrm{X}$. *Les composantes irréductibles de* X *contenant* x *sont en bijection avec les idéaux premiers minimaux de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$. *En particulier, si* $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *est intègre, alors* x *appartient à une unique composante irréductible de* X.

Démonstration. — Soit U un ouvert affine de X contenant x et soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $k[\mathrm{U}]$ correspondant à x. D'une façon générale, les composantes irréductibles U_i de U correspondent aux idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_i$ de $k[\mathrm{U}]$, et comme $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x} = k[\mathrm{U}]_{\mathfrak{m}}$, les idéaux premiers miminaux de $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ sont les $\mathfrak{p}_i\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ tels que $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{m}$, c.-à-d., $x \in \mathrm{U}_i$.

Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ les composantes irréductibles de X qui contiennent x. Si Y est une composante irréductible de U contenant x, alors Y est contenu dans une composante irréductible de X qui contient x, donc dans l'un des $\mathrm{U} \cap \mathrm{X}_i$.

Réciproquement, chaque $\mathrm{U} \cap \mathrm{X}_i$ est un ouvert non vide de X_i (il contient x), donc est irréductible, et dense dans X_i. De plus, pour $i \neq j$ on ne peut avoir $\mathrm{U} \cap \mathrm{X}_i \subseteq \mathrm{X}_j$, car sinon X_j contiendrait X_i.

Ceci montre que les composantes irréductibles de U contenant x sont exactement les $\mathrm{X}_i \cap \mathrm{U}$. Le lemme est démontré. □

10.2. Extensions de corps. — Suivant l'usage, une extension de corps $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{L}$ est notée on note L/K ; son degré est $[\mathrm{L} : \mathrm{K}] := \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{L}$, c'est un élément de $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$.

Définition 10.4. — Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ un polynôme **irréductible** (donc de degré $\geqslant 1$). On dit que P est **séparable** s'il est sans facteur commun avec son polynôme dérivé P', ce qui est le cas si et seulement si $\mathrm{P}' \neq 0$. Par conséquent, P est non séparable si et seulement si $\mathrm{car}(\mathrm{K}) = p > 0$ et $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}^p]$.

Définition et proposition 10.5. — *Soit* L/K *une extension* **algébrique**.

1) *Un élément* $x \in \mathrm{L}$ *est dit* **séparable sur** K *si son polynôme minimal* $\mathrm{M}_{\mathrm{K}}(x)$ *est séparable.*

2) *On dit que* L *est* **séparable sur** K *si tous ses éléments le sont.*

3) **(Transitivité)** *Si* $\mathrm{L} = \mathrm{K}(x_1, \ldots, x_n)$ *et si chaque* x_i *est séparable sur* K, *alors* L/K *est séparable. De plus, si* L/L' *et* L'/K *sont séparables, alors* L/K *l'est aussi.*

Démonstration. — Pour une preuve du point 3), voir par exemple [**Po**, Chap.6], Cor. 26.1.9 ou 25.3.4. □

Définition 10.6. — Soit L/K une extension de type fini. On rappelle qu'une **base de transcendance** de L/K est un ensemble $B = \{x_1, \ldots, x_r\}$ d'élements de L, algébriquement indépendants sur K, et tels que L soit algébrique sur K(B). Toutes les bases de transcendance de L/K ont le même cardinal, appelé *degré de transcendance de* L/K et noté $\deg \mathrm{tr}_{\mathrm{K}} \mathrm{L}$.

Définition 10.7. — Soit L/K une extension de type fini. Elle est dite **séparablement engendrée** s'il existe une base de transcendance B de L sur K telle que l'extension algébrique L/K(B) soit séparable. Dans ce cas, on dit que B est une base de transcendance **séparante**.

En particulier, une extension transcendante pure ou bien algébrique séparable est séparablement engendrée.

Remarque 10.8. — Si $\mathrm{car}(\mathrm{K}) = 0$, toute extension de type fini L/K est séparablement engendrée.

10.3. Morphismes séparables et morphismes birationnels. — Si X est une variété algébrique **irréductible**, on renvoie au § 8.40 (séances 20-21 nov.) pour la définition du corps $k(\mathrm{X})$ des fonctions rationnelles sur X.

Définition 10.9. — Soit $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de variétés. On rappelle que ϕ est dit **dominant** si $\phi(\mathrm{X})$ est dense dans Y. Comme, d'après le théorème de constructibilité de Chevalley, $f(\mathrm{X})$ contient un ouvert dense de son adhérence, ceci équivaut à dire que $f(\mathrm{X})$ contient un ouvert dense $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{Y}$. Dans ce cas, pour tout ouvert affine $\mathrm{U} \subseteq \mathrm{V}$, le comorphisme $\phi^* : \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{U}) \to \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\phi^{-1}(\mathrm{U}))$ est injectif.

Par conséquent, si X et Y sont de plus supposées irréductibles, alors ϕ^* induit un morphisme de corps $k(\mathrm{Y}) \hookrightarrow k(\mathrm{X})$.

Définition 10.10. — Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de variétés irréductibles. On dit que f est **séparable** s'il est dominant et si l'extension $k(\mathrm{Y}) \subseteq k(\mathrm{X})$ est séparablement engendré (cf. 10.7).

On dit que ϕ est **birationnel** s'il est dominant et si ϕ^* induit un isomorphisme $k(\mathrm{Y}) \xrightarrow{\sim} k(\mathrm{X})$.

Proposition 10.11. — *ϕ est birationnel si, et seulement si, il existe un ouvert non-vide* W *de* Y *tel que ϕ induise un isomorphisme de* $\phi^{-1}(\mathrm{W})$ *sur* W.

Démonstration. — La condition est suffisante, d'après la proposition 8.41. Réciproquement, supposons ϕ birationnel ; en particulier, ϕ est dominant. Soit V un ouvert affine de Y contenu dans $\phi(\mathrm{X})$, et soit U un ouvert affine non vide contenu dans $\phi^{-1}(\mathrm{V})$. Alors $\phi(\mathrm{U})$ est dense dans V et donc

$\phi^* : k[\mathrm{V}] \to k[\mathrm{U}]$ est injectif. Comme $k[\mathrm{U}]$ est une k-algèbre de type fini, il existe $f_1, \ldots, f_n \in k[\mathrm{U}]$ tels que $k[\mathrm{U}] = k[\mathrm{V}][f_1, \ldots, f_n]$. Or, d'après l'hypothèse, on a $\mathrm{Frac}(k[\mathrm{V}]) = \mathrm{Frac}(k[\mathrm{U}])$. Par conséquent, il existe $g \in k[\mathrm{V}]$ tel que $gf_i \in k[\mathrm{V}]$ pour tout i. Alors, $k[\mathrm{V}]_g = k[\mathrm{U}]_g$ et, par conséquent, ϕ induit un isomorphisme entre les ouverts affines $\mathrm{D}(\phi^*(g)) \subseteq \mathrm{U}$ et $\mathrm{D}(g) \subseteq \mathrm{V}$. La proposition est démontrée. □

Remarque 10.12. — Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, le morphisme $k \to k$, $x \mapsto x^p$ est bijectif mais pas birationnel. Il n'est pas séparable non plus, car l'extension correspondante $k(\mathrm{T}^p) \subset k(\mathrm{T})$ est algébrique non séparable.

L'intérêt de la notion de séparabilité apparaît, par exemple, dans le théorème suivant (cf. [**Sp**, Thm. 5.1.6]).

Théorème 10.13. — *Soient* X, Y *des variétés affines irréductibles* **de même dimension** *et* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme* **séparable**. *Alors il existe un ouvert* W *de* Y *contenu dans* $\phi(\mathrm{X})$ *tel que, pour tout* $v \in \mathrm{V}$, *l'ensemble* $\phi^{-1}(v)$ *est fini, de cardinal* $[k(\mathrm{Y}) : k(\mathrm{X})]$.

En particulier, si ϕ *est injectif, il est birationnel.*

Démonstration. — Posons $\mathrm{K} = k(\mathrm{Y})$ et $\mathrm{L} = k(\mathrm{X})$. Alors

$$\deg\mathrm{tr}_k \mathrm{K} = \dim \mathrm{Y} = \dim \mathrm{X} = \deg\mathrm{tr}_k \mathrm{L}$$

et donc l'extension L/K est algébrique, et de type fini (car L/k l'est déjà), donc de degré fini. Alors KB, étant une sous-K-algèbre de L, est intègre et de dimension finie sur K, donc est un corps, donc égale L. Par conséquent, tout $x \in \mathrm{L}$ s'écrit $x = b/s$, avec $b \in k[\mathrm{X}]$ et $s \in k[\mathrm{Y}]$.

De plus, on a supposé l'extension L/K séparable. Donc, d'après le théorème de l'élément primitif, l'extension L/K est monogène, c.-à-d., il existe $f \in \mathrm{L}$ tel que $\mathrm{L} = \mathrm{K}[f]$. D'après ce qui précède, on peut supposer $f \in k[\mathrm{X}]$.

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des générateurs de la k-algèbre de type fini $k[\mathrm{X}]$; d'après ce qui précède, chaque x_i s'écrit comme un polynôme P_i en f, à coefficients dans $k(\mathrm{Y})$. Soit $a \in k[\mathrm{Y}]$ tel que les coefficients de tous les P_i appartiennent à $k[\mathrm{Y}]_a$. Alors l'image inverse par ϕ de l'ouvert affine $\mathrm{V} = \mathrm{D}(a)$ de Y est l'ouvert affine $\mathrm{U} = \mathrm{D}(a \circ \phi)$ de X, et le comorphisme ϕ^* induit un isomorphisme

$$k[\mathrm{U}] \xrightarrow{\sim} (k[\mathrm{V}])[f],$$

car les x_i appartiennent à $(k[\mathrm{V}])[f]$. Soit T une indéterminée ; on a donc un morphisme surjectif (de $k[\mathrm{V}]$-algèbres) $(k[\mathrm{V}])[\mathrm{T}] \twoheadrightarrow k[\mathrm{U}]$. Son noyau n'est pas nécessairement un idéal principal de $(k[\mathrm{V}])[\mathrm{T}]$, mais on s'y ramène de la façon suivante.

Soit $\mathrm{P} = \mathrm{T}^d + a_1\mathrm{T}^{d-1} + \cdots + a_d$ le polynôme minimal de f sur $\mathrm{K} = k(\mathrm{V})$, soit $b \in k[\mathrm{V}]$ tel que les coefficients a_i de P appartiennent à $k[\mathrm{V}]_b$, et soit $g = ab$.

Alors, l'image inverse par ϕ de l'ouvert affine $\mathrm{V}' = \mathrm{D}(g)$ de V est l'ouvert affine $\mathrm{U}' = \mathrm{D}(g \circ \phi)$ de U, on a $\mathrm{P} \in (k[\mathrm{V}'])[\mathrm{T}]$ et ϕ^* induit un isomorphisme

$$(*) \qquad \varepsilon : k[\mathrm{U}'] \xrightarrow{\sim} (k[\mathrm{V}'])[\mathrm{T}]/(\mathrm{P}).$$

En effet, posons $\mathrm{A} = k[\mathrm{V}']$ et soit $\mathrm{Q} \in \mathrm{A}[\mathrm{T}]$ tel que $\mathrm{Q}(f) = 0$. Comme P est unitaire, on peut faire la division euclidienne de Q par P ; alors le reste R vérifie $\mathrm{R}(f) = 0$ et est nul ou bien de degré $< \deg \mathrm{P}$. Comme P est le polynôme minimal de f dans K[T], la seconde possibilité est exclue, donc $\mathrm{R} = 0$ et P divise Q dans A[T]. Ceci prouve $(*)$.

Alors, le morphisme $\tau : \mathrm{U}' \to \mathrm{V}' \times k$, $x \mapsto (\phi(x), f(x))$ est une immersion fermée, car son comorphisme n'est autre que ε. Il en résulte qu'on peut identifier U' à la sous-variété fermée de $\mathrm{V}' \times k$ suivante :

$$\mathrm{U}' = \{(y,t) \in \mathrm{V}' \times k \mid \mathrm{P}_y(t) = 0\},$$

où $\mathrm{P}_y = \mathrm{T}^d + a_1(y)\mathrm{T}^{d-1} + \cdots + a_d(y)$ désigne le polynôme P dans lequel on a spécialisé les coefficients en y. Donc, en chaque $y \in \mathrm{V}'$, la fibre $\phi^{-1}(y)$ s'identifie à l'ensemble des racines (dans k !) du polynôme spécialisé P_y.

Il reste à voir qu'il existe un ouvert non vide W de V' tel que P_y ait d racines distinctes pour tout $y \in \mathrm{W}$. Ceci découle de l'existence du polynôme discriminant, comme suit.

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_d$ (où $d = \deg \mathrm{P}$ et $f = f_1$) les racines de P dans une clôture algébrique $\overline{\mathrm{L}}$ de L. Comme f est séparable (car L/K l'est), les f_i sont deux à deux distincts, et donc le discriminant de P :

$$\operatorname{disc}(\mathrm{P}) = \prod_{i<j} (f_i - f_j)^2$$

est un élément non nul de $\overline{\mathrm{L}}$. En fait, comme c'est un polynôme symétrique en les f_i, c'est un polynôme en les fonctions symétriques élémentaires des f_i, qui sont les coefficients de P, donc des éléments de $k[\mathrm{V}']$. Donc disc(P) est un élément non nul δ de $k[\mathrm{V}']$.

Soit W l'ouvert affine $\mathrm{D}(\delta)$ de V'. Pour tout $y \in \mathrm{W}$, le discriminant de P_y égale $\delta(y)$, qui est non nul, donc P_y a d racines distinctes. Le théorème est démontré. □

Corollaire 10.14. — *Soient* X, Y *des variétés irréductibles et* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme* **bijectif et séparable**. *Alors ϕ est birationnel.*

Démonstration. — Comme ϕ est bijectif, $\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{Y}$, d'après 8.44. Soit V un ouvert affine non vide de Y et soit U un ouvert affine non vide de X contenu dans $\phi^{-1}(\mathrm{U})$. Alors la restriction de ϕ à U est un morphisme $\mathrm{U} \to \mathrm{V}$ séparable et injectif. D'après la proposition précédente, ϕ induit un isomorphisme $k(\mathrm{V}) \xrightarrow{\sim} k(\mathrm{U})$, et donc ϕ est birationnel. □

En particulier, comme en caractéristique nulle toute extension de cops est séparable, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 10.15. — *Supposons* $k = \mathbb{C}$. *Soient* X, Y *des variétés irréductibles et* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme* **bijectif**. *Alors* ϕ *est birationnel.*

10.4. Variétés homogènes : définition et premiers résultats. —

Définition 10.16. — Soient G un groupe algébrique et X une G-variété. On dit que X est une G-variété **homogène** si l'action de G est **transitive** (c.à.d., si l'on a $\mathrm{X} = \mathrm{G}x$ pour un, et donc tout, $x \in \mathrm{X}$).

Lemme 10.17. — *Soit* X *une* G*-variété homogène.*

a) *Les composantes irréductibles de* X *coïncident avec les composantes connexes, et chacune est une variété homogène sous* G^0. *Elles sont translatées l'une de l'autre, et sont toutes de dimension* $\dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{G}_x$ (*pour* x *arbitraire*).

b) *Si* X *et* G_x *sont irréductibles, alors* G *aussi. En particulier, si l'on a une suite exacte* $1 \to \mathrm{K} \to \mathrm{G} \to \mathrm{H} \to 1$ *avec* H, K *connexes, alors* G *l'est aussi.*

Démonstration. — Soient $e = g_1, \ldots, g_n$ un système de représentants de G/G^0, et $x \in \mathrm{X}$. Alors $\mathrm{G} = \mathrm{G}^0 g_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathrm{G}^0 g_n$ et, comme les $\mathrm{G}^0 g_i x$ sont deux à deux disjoints ou égaux, on peut supposer que $\mathrm{X} = \mathrm{G}^0 x \sqcup \cdots \sqcup \mathrm{G}^0 g_m x$, pour un $m \leqslant n$. L'une au moins de ces G^0-orbites est fermée, d'après le corollaire 9.9. Or, pour $i, j = 1, \ldots, m$, on a $\mathrm{G}^0 g_j x = g_j g_i^{-1} \mathrm{G}^0 g_i x$. Il en résulte que les $\mathrm{G}^0 g_i x$, $1 \leqslant i \leqslant m$, sont toutes fermées et ouvertes. Ce sont donc les composantes connexes de X. Enfin, notons ϕ le morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{X}$, $g \mapsto gx$. Pour tout g, on a $\phi^{-1}(gx) = g\mathrm{G}_x$. D'après le théorème 8.44, on en déduit que chaque composante de X est de dimension $\dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{G}_x$. Ceci prouve a).

Voyons b). D'après a), on a $\mathrm{X} = \mathrm{G}^0 x$. Soit $g \in \mathrm{G}$. Alors, $gx = hx$ pour un $h \in \mathrm{G}^0$, et donc $h^{-1} g \in \mathrm{G}_x$. Or $\mathrm{G}_x \subseteq \mathrm{G}^0$, puisque G_x est connexe, et donc $g \in \mathrm{G}^0$. Ceci prouve le lemme. □

Remarque 10.18. — On peut avoir G et X irréductibles sans que G_x le soit. Par exemple, considérons l'action adjointe de $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_2$ dans $\mathfrak{sl}_2$. Soit $x = \mathrm{E}_{11}$. Alors G et $\mathrm{G}x$ sont irréductibles, mais pas G_x.

On obtient alors la proposition suivante, qui fournit un premier critère d'isomorphisme, suffisant pour certaines applications.

Proposition 10.19. — *Soient* G *un groupe algébrique,* X, Y *deux* G*-variétés homogènes irréductibles, et* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme* G*-équivariant birationnel. Alors* ϕ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — D'après la proposition 10.11, il existe un ouvert non vide V de Y tel que ϕ induise un isomorphisme de $\phi^{-1}(\mathrm{V})$ sur V. Alors, pour tout $g \in \mathrm{G}$, ϕ induit un isomorphisme de $\phi^{-1}(g\mathrm{V})$ sur $g\mathrm{V}$, et la proposition en résulte. □

***Corollaire 10.20* (Isomorphisme de $\mathbb{C}$-variétés homogènes)**

Supposons $k = \mathbb{C}$. Soient X, Y des variétés et $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme G-équivariant bijectif. Alors ϕ est isomorphisme.

Démonstration. — En utilisant le lemme 10.17, on se ramène au cas au $\mathrm{G}, \mathrm{X}, \mathrm{Y}$ sont irréductibles. Alors, d'après le corollaire 10.15, ϕ est birationnel, donc un isomorphisme d'après la proposition précédente. □

Pour certaines applications, on aura besoin d'un critère d'isomorphisme plus précis, qui repose sur le théorème principal de Zariski et la notion de points normaux ou lisses.

10.5. Points lisses et points normaux. —

Définition 10.21. — 1) Soient $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ deux anneaux. On rappelle qu'un élément $x \in \mathrm{B}$ est dit **entier sur** A s'il existe un polynôme unitaire $\mathrm{P} \in \mathrm{A}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(x) = 0$.

2) Soient A un anneau intègre et K son corps des fractions. On dit que A est **intégralement clos** si tout $x \in \mathrm{K}$ qui est entier sur A appartient à A.

***Définition 10.22* (Espaces tangents de Zariski)**. — Soient X une k-variété algébrique, $x \in \mathrm{X}$, et $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$. On définit l'**espace tangent** de Zariski à X en x par

$$\mathrm{T}_x\mathrm{X} := (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*;$$

l'**espace cotangent** étant $\mathrm{T}_x^*\mathrm{X} := \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

Proposition 10.23. — *Soit X une k-variété algébrique. Pour tout $x \in \mathrm{X}$, on a*

$$\dim_k \mathrm{T}_x\mathrm{X} \geqslant \dim_x \mathrm{X}.$$

Si l'égalité a lieu, alors $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est intègre et intégralement clos.

Démonstration. — Voir, par exemple, [**Ma1**, § 17]. L'idée est que l'algèbre graduée $\mathrm{A} := \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathfrak{m}_x^n/\mathfrak{m}_x^{n+1}$ est engendrée par $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ et de dimension égale à $\dim_x \mathrm{X}$. Lorsque $\dim \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = \dim_x \mathrm{X}$, A est une algèbre de polynômes et ceci entraîne que $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est intègre et intégralement clos. □

Définition 10.24. — 1) On dit que $x \in \mathrm{X}$ est un point **lisse** de X si $\dim_k \mathrm{T}_x\mathrm{X} = \dim_x \mathrm{X}$. Sinon, si $\dim_k \mathrm{T}_x\mathrm{X} > \dim_x \mathrm{X}$, on dit que x est un point singulier. On dit que X est **lisse** si tous ses points le sont ; sinon X est dite singulière.

2) On dit que $x \in \mathrm{X}$ est un point **normal** si l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est **intègre et intégralement clos**, et X est **normale** si tout $x \in \mathrm{X}$ est normal. D'après la proposition 10.23, tout point lisse est normal, et donc X est normale si elle est lisse.

3) Si x est un point normal, alors $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est intègre donc il résulte du lemme 10.3 que x est contenu dans une unique composante irréductible de X. Donc, si X est normale, ses composantes irréductibles sont deux à deux disjointes, donc sont les composantes connexes de X. Par conséquent :

Les composantes connexes d'une variété normale sont **irréductibles**.

Soit X une k-variété algébrique. Un résultat dont on aura besoin plus tard est que X contient au moins un point normal. En fait, on a le résultat plus précis suivant.

Théorème 10.25. — *Soit* X *une variété algébrique. L'ensemble* Rég(X) *des points lisses est un ouvert dense.*

Démonstration. — (Une réduction.) D'après la proposition 10.23 et le lemme 10.3, Rég(X) est contenu dans l'ouvert de X formé des points qui n'appartiennent qu'à une seule composante irréductible de X. Il suffit donc de montrer que si X est irréductible alors Rég(X) est un ouvert non-vide. En recouvrant X par des ouverts affines, on se ramène au cas où X est irréductible et affine.

La suite de la démonstration nécessite de développer de façon algébrique le « calcul différentiel » sur une variété algébrique. Ceci est l'objet de la section 11 suivante. □

10.6. Théorème principal de Zariski. — Il existe différentes versions du théorème principal de Zariski, voir par exemple [**Die**, § 5.4] ou [**Ha**, § III.11]. La version donnée plus bas suffit à nos besoins, et est démontrée dans [**Hu2**, § 5.3]. Nous en esquissons une démonstration utilisant la notion d'*application rationnelle*, qui généralise la notion de fonction rationnelle $\mathrm{X} \to k$ sur une variété irréductible, introduite au § 8.8.

Soient X, Y deux variétés algébriques. Sur l'ensemble des couples (U, ϕ), où U est un ouvert dense de X et $\phi : \mathrm{U} \to \mathrm{Y}$ un morphisme, on considère la relation d'équivalence $\sim$ définie par : $(\mathrm{U}, \phi) \sim (\mathrm{V}, \psi)$ si ϕ et ψ coïncident sur $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$.

Définition 10.26. — Une **application rationnelle** $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est une classe d'équivalence pour $\sim$. On dit que f est **définie en** x si f est représentée par un couple (U, ϕ) avec $x \in \mathrm{U}$. On voit alors que l'ensemble des x où f est définie forme un ouvert de X, noté $\mathrm{dom}(f)$, et que f induit un morphisme $\mathrm{dom}(f) \to \mathrm{Y}$.

Notation 10.27. — Si Y est une sous-variété fermée d'une variété irréductible X, la différence $\dim \mathrm{X} - \dim \mathrm{Y}$ est notée $\mathrm{codim}_{\mathrm{X}}(\mathrm{Y})$ ou simplement $\mathrm{codim}(\mathrm{Y})$.

Théorème 10.28. — *Soit* X *une variété irréductible normale.*

a) *Soit* $f \in k(\mathrm{X})$. *Si* $\mathrm{codim}(\mathrm{X} \setminus \mathrm{dom}(f)) \geqslant 2$, *alors* $f \in k[\mathrm{X}]$.

b) *Soient* Y *une variété projective et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *une application rationnelle. Alors* $\mathrm{codim}(\mathrm{X} \setminus \mathrm{dom}(f)) \geqslant 2$.

c) *Soit* $f \in k(\mathrm{X}) \setminus k[\mathrm{X}]$. *Alors il existe* $x \in \mathrm{X}$ *tel que* $1/f$ *soit définie au voisinage de* x *et s'annule en* x.

Démonstration. — Pour a), voir [**Iit**, § 2.8, Th. 2.15]. Pour b), voir [*loc. cit.*, § 2.10, Th. 2.17], ou bien [**Ke**, 10.6.1] (pour X lisse). On peut voir que c) découle de a) et b) (le vérifier !). D'autre part, une démonstration directe (mais peu éclairante) de c) est donnée dans [**Hu2**, § 5.3]. □

On déduit du théorème précédent le théorème ci-dessous.

***Théorème 10.29* (Théorème principal de Zariski)**. — *Soient* X, Y *irréductibles et* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme bijectif et birationnel. On suppose* Y *normale. Alors* $\phi^* : k[\mathrm{Y}] \to k[\mathrm{X}]$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Puisque ϕ est dominant, ϕ^* est injectif, et il s'agit de voir qu'il est surjectif. Soit $f \in k[\mathrm{X}]$. Comme $\phi^* k(\mathrm{Y}) = k(\mathrm{X})$, il existe $h \in k(\mathrm{Y})$ tel que $f = \phi^*(h)$. Si $h \notin k[\mathrm{Y}]$ alors, d'après le point c) du théorème précédent, il existe $y \in \mathrm{Y}$ tel que $1/h$ soit régulière au voisinage de y et nulle en y. Alors $1/f = \phi^*(1/h)$ est régulière au voisinage de $x = \phi^{-1}(y)$, et nulle en x. C'est absurde, puisque f est régulière en x. □

11. Espaces tangents et différentielles

11.1. Dérivations. — k désigne toujours un corps algébriquement clos. Sauf mention du contraire, « k-algèbre » signifie « k-algèbre commutative ».

Définition 11.1. — Soient A une k-algèbre et M un A-module. On pose

$$\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M}) = \{\mathrm{D} \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M}) \mid \forall\, a, b \in \mathrm{A}, \quad \mathrm{D}(ab) = a\mathrm{D}(b) + b\mathrm{D}(a)\};$$

c'est un sous-A-module de $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M})$ (l'action de $a \in \mathrm{A}$ sur un morphisme $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{M}$ étant définie par $(a\phi)(b) = a\phi(b)$, pour tout $b \in \mathrm{A}$). Notons que $\mathrm{D}(1) = \mathrm{D}(1 \cdot 1) = \mathrm{D}(1) + \mathrm{D}(1)$, d'où $\mathrm{D}(1) = 0$. On pose $\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}) = \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}, \mathrm{A})$.

Proposition 11.2. — 1. **(Fonctorialité)** *Soient* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ *un morphisme de* A*-modules, et* $\varphi : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ *un morphisme de* k*-algèbres. Alors on a un morphisme de* B*-modules* $\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M}) \to \mathrm{Dér}_k(\mathrm{B}, \mathrm{M}')$, $\mathrm{D} \mapsto f \circ \mathrm{D} \circ \varphi$.

2. **(Localisation)** *Soient* S *une partie multiplicative de* A *et* N *un* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$*-module. Le morphisme* $\mathrm{A} \to \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$ *induit un isomorphisme* $\mathrm{Dér}_k(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}, \mathrm{N}) \to \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}, \mathrm{N})$.

3. **(Produits)** *Soient* $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ *deux* k*-algèbres,* $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \otimes \mathrm{A}_2$*, et* M *un* A*-module. Alors*

$$\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M}) \cong \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}_1, \mathrm{M}) \oplus \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}_2, \mathrm{M}).$$

Démonstration. — 1. est immédiat et 2. laissé au lecteur. Voyons 3. Tout $\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M})$ est déterminé par ses restrictions D_1 et D_2 à $\mathrm{A}_1 \otimes k$ et $k \otimes \mathrm{A}_2$, puisque $\mathrm{D}(a \otimes b) = a\mathrm{D}_2(b) + b\mathrm{D}_1(a)$. Par conséquent, l'application naturelle $\sigma : \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M}) \to \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}_1, \mathrm{M}) \oplus \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}_2, \mathrm{M})$ est injective. C'est un isomorphisme, car étant donné $\mathrm{D}_i \in \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}_i, \mathrm{M})$, l'application $\mathrm{D} : a \otimes b \mapsto a\mathrm{D}_2(b) + b\mathrm{D}_1(a)$ est une dérivation $\mathrm{A} \to \mathrm{M}$ telle que $\sigma(\mathrm{D}) = (\mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2)$. □

11.2. Espaces tangents et dérivations ponctuelles. — Soient X une variété algébrique, $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ l'anneau local en un point $x \in \mathrm{X}$, et $\mathfrak{m}_x$ son idéal maximal. On pose $k_x = \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}/\mathfrak{m}_x$ et l'on note ε_x le morphisme d'algèbres $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \to k_x$. C'est l'évaluation en x, c.-à-d., pour tout $f \in \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ on a : $\varepsilon_x(f) = f(x)$.

Définition 11.3. — On appelle **dérivations ponctuelles en** x les éléments de

$$\mathrm{Dér}_k(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}, k_x) = \{\delta \in \mathrm{Hom}_k(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}, k) \mid \delta(ab) = a(x)\delta(b) + b(x)\delta(a)\}.$$

***Proposition 11.4* (Espaces tangents et dérivations).** — 1) *Soit* $x \in \mathrm{X}$*, alors*

$$\mathrm{T}_x\mathrm{X} := (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^* \cong \mathrm{Dér}_k(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}, k_x).$$

2) *De plus, pour tout ouvert affine* U *contenant* x*, on a*

$$\mathrm{T}_x\mathrm{X} \cong \mathrm{Dér}_k(k[\mathrm{U}], k_x) \cong (\mathfrak{m}_{\mathrm{U},x}/\mathfrak{m}_{\mathrm{U},x}^2)^*,$$

où $\mathfrak{m}_{\mathrm{U},x}$ *désigne l'idéal maximal de* $k[\mathrm{U}]$ *correspondant à* x.

Démonstration. — Comme $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x} = k1 \oplus \mathfrak{m}_x$, alors le dual $\mathfrak{m}_x^*$ de $\mathfrak{m}_x$ s'identifie au sous-espace des $f \in \mathscr{O}_{\mathrm{X}_x}^*$ telles que $f(1) = 0$. Comme toute dérivation ponctuelle δ vérifie $\delta(1) = 0$, on a donc une inclusion

$$\mathrm{Dér}_k(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}, k_x) \subseteq \{f \in \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}^* \mid f(1) = 0 = f(\mathfrak{m}_x^2)\} \cong (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*.$$

De plus, cette inclusion est une égalité. En effet, pour tout $a, b \in \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$,

$$ab - a(x)b - b(x)a + a(x)b(x)1 = (a - a(x)1)(b - b(x)1)$$

appartient à $\mathfrak{m}_x^2$, donc si $f \in \mathscr{O}_{\mathrm{X}_x}^*$ vérifie $f(1) = 0 = f(\mathfrak{m}_x^2)$, alors $f(ab) = a(x)f(b) + b(x)f(a)$. Ceci prouve le point 1).

Le point 2) résulte du point 2. de la proposition 11.2 (voir aussi 11.21 plus loin) et montre que, pour calculer $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$, on peut se placer dans le cas affine. □

Définition 11.5. — Soient $f \in k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in k^n$. La **différentielle de** f au point x est l'application linéaire :

$$\mathrm{d}_x f : k^n \longrightarrow k, \quad (\eta_1, \ldots, \eta_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\eta_i.$$

On peut donc voir $\mathrm{d}f$ comme une application polynomiale $k^n \times k^n \to k$,

$$(x, \eta) \mapsto \mathrm{d}_x f(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\eta_i.$$

Proposition 11.6. — *Soit* V *une sous-variété algébrique fermée de* k^n*, soit* $\mathrm{I} = \mathrm{I}(\mathrm{V})$ *son idéal, et soient* $f_1, \ldots, f_m$ *des générateurs de* I. *Alors, pour tout* $x \in \mathrm{V}$*, l'espace tangent* $\mathrm{T}_x\mathrm{V}$ *est le sous-espace suivant de* k^n *:*

$$\bigcap_{\ell=1}^{m} \operatorname{Ker} \mathrm{d}_x f_\ell = \{\eta \in k^n \mid \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\ell}{\partial x_i}(x)\eta_i, \ \forall\, \ell = 1, \ldots, n\}.$$

Sa dimension est $n - r(x)$*, où* $r(x)$ *est le rang de la matrice jacobienne*

$$\mathrm{J}_x(f_1, \ldots, f_m) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_\ell} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_\ell} \end{pmatrix} (x).$$

Par conséquent, il existe un ouvert non-vide U *de* V *sur lequel cette dimension est* **minimale***.*

Si V *est irréductible, de dimension* d*, alors* $\dim_k \mathrm{T}_x\mathrm{X} = d$ *pour tout* $x \in \mathrm{U}$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{m}_x = (\mathrm{X}_1 - x_1, \ldots, \mathrm{X}_n - x_n)$ l'idéal de x dans $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ et soit $\overline{\mathfrak{m}}_x$ son image dans $k[\mathrm{V}]$. D'une part, l'espace cotangent $\mathrm{T}^*_x k^n = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ s'identifie à l'espace dual $(k^n)^*$, l'image de $\mathrm{X}_i - x_i$ s'identifiant à l'élément ε_i^* de la base duale, qu'on désigne souvent par $\mathrm{d}x_i$ (ce n'est rien d'autre que la forme linéaire « i-ème coordonnée »).

D'autre part, $\overline{\mathfrak{m}}_x = \mathfrak{m}_x/\mathrm{I}$ et $\overline{\mathfrak{m}}_x^2 = (\mathfrak{m}_x^2 + \mathrm{I})/\mathrm{I}$, et donc

$$\mathrm{T}^*_x\mathrm{V} = \overline{\mathfrak{m}}_x/\overline{\mathfrak{m}}_x^2 = \mathfrak{m}_x/(\mathfrak{m}_x^2 + \mathrm{I})$$

est le quotient de $(k^n)^*$ par le sous-espace image de I, qui est le sous-espace vectoriel engendré par les images de $f_1, \ldots, f_m$. D'après la formule de Taylor, pour tout $\mathrm{P} \in k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$ on a

$$(*) \qquad \mathrm{P} = \mathrm{P}(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x_i}(x)(\mathrm{X}_i - x_i) \mod \mathfrak{m}_x^2.$$

On en déduit que, pour $\ell = 1, \ldots, m$, l'image de f_ℓ dans $(k^n)^*$ est la forme linéaire

$$\mathrm{d}_x f_\ell = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\ell}{\partial x_i}(x)\mathrm{d}x_\ell.$$

Par conséquent, l'espace dual $\mathrm{T}_x\mathrm{V}$ s'identifie au sous-espace de k^n annulé par $\mathrm{d}_x f_1, \ldots, \mathrm{d}_x f_m$. Ceci prouve la première assertion de la proposition, et la seconde en découle aussitôt.

Pour tout $d \geqslant 0$, l'ensemble $\mathrm{V}(\leqslant d) = \{x \in \mathrm{V} \mid r(x) \leqslant d\}$ est le lieu d'annulation de tous les mineurs d'ordre $d+1$ de la matrice jacobienne J. Comme les coefficients de J sont des polynômes en x, il en est de même des mineurs, et donc $\mathrm{V}(\leqslant d)$ est une sous-variété fermée. Par conséquent, le lieu des points $x \in \mathrm{V}$ pour lesquels $r(x)$ est maximal, c.-à-d., $\dim \mathrm{T}_x\mathrm{V}$ **minimal**, est un ouvert non-vide de V.

Enfin, pour la dernière assertion, voir [**Hu2**, § 5.2] ou [**Ku**, § VI.1] ou la section 13 plus loin. □

Soit X une k-variété algébrique. Rappelons (10.24) qu'un point $x \in \mathrm{X}$ est dit **lisse** si $\dim_k \mathrm{T}_x\mathrm{X} = \dim_x \mathrm{X}$. La proposition précédente achève la preuve du théorème 10.25, que nous récrivons ci-dessous.

***Théorème 11.7* (L'ouvert des points lisses)**. — *Soit* X *une variété algébrique. L'ensemble* Rég(X) *des points lisses de* X *est un ouvert dense.*

Corollaire 11.8. — *Supposons $k = \mathbb{C}$. Soit* X *une $\mathbb{C}$-variété algébrique irréductible, de dimension d. Alors, l'ouvert* Rég(X) *est une variété analytique complexe de dimension d, et donc une variété* C^∞ *de dimension réelle* $2d$.

Démonstration. — Soit $x \in$ Rég(X) et soit V un voisinage ouvert affine de x. Choisissons des générateurs de l'algèbre $\mathbb{C}[\mathrm{V}]$, d'où un isomorphisme

$$\mathbb{C}[\mathrm{V}] \cong \mathbb{C}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]/\mathrm{I}.$$

Soient $f_1, \ldots, f_m$ des générateurs de I. Considérons l'application

$$\phi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m, \qquad y \mapsto (f_1(y), \ldots, f_m(y)).$$

D'après la proposition 11.6, il existe un voisinage Zariski-ouvert U de x dans $\mathbb{C}^n$ tel que $d_y\phi$ soit de rang $n-d$, pour tout $y \in \mathrm{U}$. Le corollaire résulte alors de la version analytique complexe du théorème du rang constant, voir [**Ca2**, § IV.6] ou [**Va**, § 1.2]. Ou bien, si l'on préfère, on peut ignorer la structure complexe et considérer ϕ simplement comme une application C^∞ de $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}^{2m}$, alors pour tout $y \in \mathrm{U}$ l'image de $d_y\phi$ est un sous-espace de dimension réelle $2(n-d)$, donc ϕ est de rang constant $2n-2d$ au voisinage de x, et l'on peut appliquer le théorème du rang constant (cours d'Introduction, 2/10, 7.35). □

Remarque 11.9. — Soient V une variété algébrique affine, $x \in \mathrm{V}$, et $f \in k[\mathrm{V}]$. De l'égalité $(*)$ dans la preuve de la proposition 11.6, on déduit que $\mathrm{d}_x f$ s'identifie à l'image de $f - f(x)$ dans $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = \mathrm{T}_x^*\mathrm{V}$. Par conséquent, pour tout $\xi \in \mathrm{T}_x\mathrm{V}$, on a

$$(**) \qquad \xi(f) = \mathrm{d}_x f(\xi),$$

où, à gauche, ξ est vu comme élément de $\mathrm{Dér}_k(k[\mathrm{V}], k_x)$.

11.3. Différentielle d'un morphisme. —

Définition et proposition 11.10 **(Différentielle d'un morphisme en un point)**

Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de variétés algébriques. Alors, pour tout* $x \in \mathrm{X}$*,* f *induit une application linéaire* $\mathrm{d}_x f : \mathrm{T}_x\mathrm{X} \to \mathrm{T}_{f(x)}\mathrm{Y}$*,* **la différentielle de** f **en** x*. Elle est définie de l'une des façons suivantes.*

1) *Soient* $x \in \mathrm{X}$ *et* $y = f(x)$*. Alors* f *induit un morphisme* $f^\# : \mathscr{O}_{\mathrm{Y},y} \to \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$*, qui envoie* $\mathfrak{m}_y$ *dans* $\mathfrak{m}_x$*, et donc* $\mathfrak{m}_y^2$ *dans* $\mathfrak{m}_x^2$*. Donc* $f^\#$ *induit un morphisme* $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2 \to \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$*, qu'on notera encore* $f^\#$*, par abus de notation. Par définition,* $\mathrm{d}_x f$ *est le transposé de ce morphisme. On a donc* $\mathrm{d}_x f(\delta) = \delta \circ f^\#$*, pour tout* $\delta \in (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$*.*

2) *Si on identifie* $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$ *à* $\mathrm{Dér}_k(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}, k_x)$*, et de même pour* $\mathrm{T}_y\mathrm{Y}$*, alors* $\mathrm{d}_x f$ *est définie par* $\mathrm{d}_x f(\delta) = \delta \circ f^\#$*, pour tout* $\delta \in \mathrm{Dér}_k(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}, k_x)$*.*

3) *Soient* V *un ouvert affine contenant* y *et* U *un ouvert affine de* $f^{-1}(\mathrm{V})$ *contenant* x*. Plongeant* V *(resp.* U*) dans un certain* k^n *(resp.* k^m*), on obtient que la restriction de* f *à* U *est donnée par un* n*-uplet* $(f_1, \dots, f_n)$ *d'éléments de* $k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_m]$*. Alors* $\mathrm{d}_x f$ *est la restriction à* $\mathrm{T}_x\mathrm{U} \subseteq k^m$ *de l'application linéaire* $k^m \to k^n$ *dont la* i*-ème composante est* $\mathrm{d}_x f_i$*, c.-à-d., dont la matrice est*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

Démonstration. — Il est clair que les définitions 1) et 2) coïncident ; elles montrent que $\mathrm{d}_x f$ est défini de façon intrinsèque. Le calcul de 3) ne présente pas de difficultés et est laissé au lecteur. □

Lemme 11.11. — *Soient* X *une variété algébrique affine et* $f \in k[\mathrm{X}]$*. Alors* f *est un morphisme* $\mathrm{X} \to k$ *et, pour tout* $x \in \mathrm{X}$*, la différentielle* $\mathrm{d}_x f$ *au sens de la définition précédente s'identifie à l'image dans* $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ *de* $f - f(x)$*, et donc, d'après la remarque* 11.9*, à la différentielle de la fonction* f*, définie dans* 11.5*.*

Démonstration. — Il vaut mieux se convaincre que c'est évident, ou qu'il ne peut en être autrement, plutôt que d'écrire une démonstration, qui est nécessairement formelle et peu éclairante. Enfin, en voici une.

Il est clair que f est un morphisme. Son comorphisme est le morphisme d'algèbres $f^{\#} : k[\mathrm{T}] \to k[\mathrm{X}]$ (où T est une indéterminée) défini par $f^{\#}(\mathrm{T}) = f$. Soient $x \in \mathrm{X}$ et $y = f(x) \in k$. Le point est que l'image de $\mathrm{T}-y$ est le générateur naturel de l'espace cotangent

$$\mathrm{T}_y^* k = (\mathrm{T} - y)/(\mathrm{T} - y)^2,$$

et donc on identifie $\mathrm{T}_y k \cong k$ via $\eta \mapsto \eta(\mathrm{T} - y)$. En particulier, pour tout $\xi \in \mathrm{T}_x\mathrm{X}$, $\mathrm{d}_x f(\xi)$ est par définition le vecteur tangent $\xi \circ f^{\#} \in \mathrm{T}_y k$; il s'identifie donc au scalaire

$$(\xi \circ f^{\#})(\mathrm{T} - y) = \langle \xi, f - f(x) \rangle.$$

Ceci montre que $\mathrm{d}_x f$ s'identifie à l'image de $f - f(x)$ dans $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = \mathrm{T}_x^*\mathrm{X}$. (Ouf...) $\square$

Il est clair, d'après la définition, que $\mathrm{d}_x \,\mathrm{id}_{\mathrm{X}} = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_x\mathrm{X}}$. De plus, on a la

***Proposition 11.12* (Fonctorialité).** — *Soient* $\mathrm{X} \xrightarrow{f} \mathrm{Y} \xrightarrow{g} \mathrm{Z}$ *des morphismes de variétés algébriques. Pour tout* $x \in \mathrm{X}$ *on a* $\mathrm{d}_x(g \circ f) = \mathrm{d}_{f(x)} g \circ \mathrm{d}_x f$.

Démonstration. — Soient $x \in \mathrm{X}$ et $y = f(x)$, $z = g(y)$. Alors $(g \circ f)^{\#} : \mathscr{O}_{\mathrm{Z},z} \to \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est la composée de $g^{\#} : \mathscr{O}_{\mathrm{Z},z} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}$ et de $f^{\#} : \mathscr{O}_{\mathrm{Y},y} \to \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$, et la proposition en résulte aussitôt, en utilisant l'une des définitions 1) ou 2). $\square$

***Proposition 11.13*.** — *Soient* $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ *des variétés algébriques,* $\phi : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ *un morphisme de variétés, et* $x \in \mathrm{X}$, $y \in \mathrm{Y}$. *Alors*

$$\mathrm{T}_{(x,y)}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) \cong \mathrm{T}_x\mathrm{X} \oplus \mathrm{T}_y\mathrm{Y}.$$

De plus, si l'on fait cette identification, alors

$$\mathrm{d}_{(x,y)}\phi = \mathrm{d}_x\phi_y + \mathrm{d}_y\phi_x,$$

où $\phi_y : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$ *et* $\phi_x : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ *sont les morphismes définis par* $\phi_y(a) = \phi(a, y)$, $\phi_x(b) = \phi(x, b)$, *pour* $a \in \mathrm{X}$, $b \in \mathrm{Y}$.

Démonstration. — L'isomorphisme $\mathrm{T}_{(x,y)}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) \cong \mathrm{T}_x\mathrm{X} \oplus \mathrm{T}_y\mathrm{Y}$ résulte de la proposition 11.2.

Soit $(u, v) \in \mathrm{T}_{(x,y)}(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}) \cong \mathrm{T}_x\mathrm{X} \oplus \mathrm{T}_y\mathrm{Y}$. Alors,

$$\mathrm{d}_{(x,y)}\phi(u, v) = \mathrm{d}_{(x,y)}\phi(u, 0) + \mathrm{d}_{(x,y)}\phi(0, v).$$

Or, avec des notations évidentes, on a $\phi_y = \phi \circ \tau_y$, et $\mathrm{d}_x\tau_y(u) = (u, 0)$ pour tout $u \in \mathrm{T}_x\mathrm{X}$. On en déduit que $\mathrm{d}_{(x,y)}\phi(u, 0) = \mathrm{d}_x\phi_y(u)$ et, de même, $\mathrm{d}_{(x,y)}\phi(0, v) = \mathrm{d}_y\phi_x(v)$. Le résultat en découle. $\square$

À titre d'application, signalons le corollaire suivant. Soit G un groupe algébrique. Soient $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ la multiplication, et $\iota : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ le passage à l'inverse. Désignons simplement par $\mathrm{d}\mu$, resp. $\mathrm{d}\iota$, leur différentielles au point (e, e), resp. e.

Corollaire 11.14. — *On a* $\mathrm{d}\mu(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$ *et* $\mathrm{d}\iota(\mathrm{X}) = -\mathrm{X}$, *pour* $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{T}_e(\mathrm{G})$.

Démonstration. — La première assertion résulte de la proposition 11.13, car $\mu(e, \cdot) = \mathrm{id}_{\mathrm{G}} = \mu(\cdot, e)$. D'autre part, $\mu \circ (\mathrm{id}, \iota)$ est l'application constante $\mathrm{G} \to \{e\}$. On en déduit que $0 = \mathrm{id}_{\mathrm{T}_e(\mathrm{G})} + \mathrm{d}\iota$, d'où la seconde assertion. □

***Remarque 11.15* (Immersions ouvertes)**. — Soient $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme et $x \in \mathrm{X}$. Il résulte des définitions que, si V est un voisinage ouvert de $f(x)$ dans Y, et si on note φ la restriction de f à $f^{-1}(\mathrm{V})$, alors $\mathrm{d}_x\varphi = \mathrm{d}_x f$. En particulier, si f est une immersion ouverte (c.-à-d., un isomorphisme de X sur un ouvert de Y), alors $\mathrm{d}_x f$ est un isomorphisme, pour tout $x \in \mathrm{X}$.

D'autre part, on a vu que si X est une sous-variété fermée de k^n, alors chaque $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$ s'identifie à un sous-espace de k^n. Ceci se généralise comme suit au cas d'une immersion fermée quelconque.

***Proposition 11.16* (Immersions fermées)**. — *Si* $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ *est une immersion fermée alors* $\mathrm{d}_y f$ *est injective, pour tout* $y \in \mathrm{Y}$. *Par conséquent, si* Y *est une sous-variété fermée de* X *alors, pour tout* $y \in \mathrm{Y}$, $\mathrm{T}_y\mathrm{Y}$ *s'identifie à un sous-espace de* $\mathrm{T}_y\mathrm{X}$.

Démonstration. — On peut supposer X et Y affines. Alors, on a $k[\mathrm{Y}] \cong k[\mathrm{X}]/\mathrm{I}$. Pour $y \in \mathrm{Y}$, notons $\mathfrak{m}_y$ et $\overline{\mathfrak{m}}_y$ les idéaux correspondants de $k[\mathrm{X}]$ et $k[\mathrm{Y}]$. Alors $\overline{\mathfrak{m}}_y = \mathfrak{m}_y/\mathrm{I}$ et $\overline{\mathfrak{m}}_y^2 = (\mathfrak{m}_y^2 + \mathrm{I})/\mathrm{I}$, et donc $\overline{\mathfrak{m}}_y/\overline{\mathfrak{m}}_y^2 = \mathfrak{m}_y/(\mathfrak{m}_y^2 + \mathrm{I})$ est un quotient de $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2$. La proposition en résulte. □

11.4. Distributions à support dans un point. — Soient X une variété algébrique, $x \in \mathrm{X}$, et $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$. Notons $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}^*$ l'espace vectoriel dual. Comme $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x} = k1 \oplus \mathfrak{m}_x$, alors l'espace dual $\mathfrak{m}_x^*$ s'identifie au sous-espace des $\phi \in \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}^*$ vérifiant $\phi(1) = 0$.

Définition 11.17. — Pour $n \geqslant 0$, on introduit les espaces vectoriels

$$\mathrm{Dist}_n(\mathrm{X}, x) := \{\phi \in \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}^* \mid \phi(\mathfrak{m}_x^{n+1}) = 0\} \cong (\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}/\mathfrak{m}_x^{n+1})^*,$$

$$\mathrm{Dist}_n^+(\mathrm{X}, x) := \{\phi \in \mathrm{Dist}_n(\mathrm{X}, x) \mid \phi(1) = 0\} \cong (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^{n+1})^*,$$

et on pose

$$\mathrm{Dist}(\mathrm{X}, x) := \bigcup_n \mathrm{Dist}_n(\mathrm{X}, x), \quad \text{et} \quad \mathrm{Dist}^+(\mathrm{X}, x) := \bigcup_n \mathrm{Dist}_n^+(\mathrm{X}, x).$$

***Définition 11.18* (Image des distributions)**. — Soient $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de variétés, $y = f(x)$ et φ le comorphisme $\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y} \to \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$. Alors $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_x) = \mathfrak{m}_y$, d'où $\varphi(\mathfrak{m}_y^n) \subseteq \mathfrak{m}_x^n$ pour tout n. On en déduit que la transposée ${}^t\varphi$ applique $\mathrm{Dist}_n(\mathrm{X}, x)$ dans $\mathrm{Dist}_n(\mathrm{Y}, y)$, et $\mathrm{Dist}_n^+(\mathrm{X}, x)$ dans $\mathrm{Dist}_n^+(\mathrm{Y}, y)$.

Pour $n = 1$, $\mathrm{Dist}_1^+(\mathrm{X}, x) \cong \mathrm{T}_x\mathrm{X}$ et ${}^t\varphi$ n'est autre que la différentielle $\mathrm{d}_x f$. Donc, on peut se permettre de noter $\mathrm{d}_x f$ l'application ${}^t\varphi : \mathrm{Dist}(\mathrm{X}, x) \to \mathrm{Dist}(\mathrm{Y}, y)$.

Alors on obtient facilement la proposition suivante, qui généralise la Proposition 11.12.

Proposition 11.19. — *Soient* $\mathrm{X} \xrightarrow{f} \mathrm{Y}$ *et* $\mathrm{Y} \xrightarrow{g} \mathrm{Z}$ *des morphismes de variétés,* $x \in \mathrm{X}$*,* $y = f(x)$*, et* $\mathrm{d}_x f : \mathrm{Dist}(\mathrm{X}, x) \to \mathrm{Dist}(\mathrm{Y}, y)$*,* $\mathrm{d}_y g : \mathrm{Dist}(\mathrm{Y}, y) \to \mathrm{Dist}(\mathrm{Z}, z)$*. Alors* $\mathrm{d}_x(g \circ f) = \mathrm{d}_{f(x)} g \circ \mathrm{d}_x f$*.*

Remarque 11.20. — Soit U un quelconque ouvert affine de X contenant le point X, et soient $\mathrm{A} = k[\mathrm{U}]$ et $\mathfrak{m}$ l'idéal de x dans A. Alors, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$(*) \qquad \mathrm{A}/\mathfrak{m}^n \cong \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}/\mathfrak{m}_{\mathrm{X},x}^n,$$

et donc $\mathrm{Dist}(\mathrm{U}, x) = \mathrm{Dist}(\mathrm{X}, x)$ et $\mathrm{T}_x\mathrm{U} = \mathrm{T}_x\mathrm{X}$. En effet, $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est le localisé de A en la partie multiplicative $\mathrm{S} = \mathrm{A} \setminus \mathfrak{m}$, et donc $(*)$ résulte du lemme ci-dessous.

Lemme 11.21. — a) *Soient* A *un anneau,* I *un idéal et* S *une partie multiplicative de* A*. On note* $\mathrm{B} = \mathrm{A}/\mathrm{I}$ *et* $\overline{\mathrm{S}}$ *l'image de* S *dans* B*. Alors* $\overline{\mathrm{S}}^{-1}\mathrm{B} \cong \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}/\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$*.*

b) *Soient* $\mathfrak{m}$ *un idéal maximal de* A*, et* $\mathrm{S} = \mathrm{A} \setminus \mathfrak{m}$*. Si* $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathrm{I} \subseteq \mathfrak{m}$*, pour un* $n \geqslant 1$*, alors* $\mathrm{A}/\mathrm{I} \cong \mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}/\mathrm{S}^{-1}\mathrm{I}$*.*

Démonstration. — Pour a) voir, par exemple, [**AM**, Prop.3.5 et Ex.3.4]. Voyons b). D'abord, B est un anneau local, d'idéal maximal $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}/\mathrm{I}$. En effet, comme $\overline{\mathfrak{m}}^{\,n} = 0$, tout idéal premier de B contient $\overline{\mathfrak{m}}$, d'où l'assertion puisque $\overline{\mathfrak{m}}$ est maximal. Par conséquent, tout élément t de $\mathrm{T} := \mathrm{B} \setminus \overline{\mathfrak{m}}$ est inversible, car $\mathrm{B}t = \mathrm{B}$ puisque $\mathrm{B}t \not\subseteq \overline{\mathfrak{m}}$. D'autre part, puisque $\mathrm{I} \subseteq \mathfrak{m}$, alors $\overline{\mathrm{S}} = \mathrm{T}$. Il en résulte que $\overline{\mathrm{S}}^{-1}\mathrm{B} = \mathrm{B}$, d'où l'assertion b). □

12. Algèbre de Lie d'un groupe algébrique

12.1. Dérivations invariantes. — Soit G un groupe algébrique affine. On peut définir son algèbre de Lie de plusieurs manières. Commençons par la définition en termes de dérivations invariantes. On note $\varepsilon : \mathscr{O}_{\mathrm{G},e} \to k$, $\phi \mapsto \phi(e)$.

L'action de G sur lui-même par translation à gauche induit une action de G par automorphismes d'algèbres dans $k[\mathrm{G}]$: $(\lambda(g)\varphi)(h) = \varphi(g^{-1}h)$. Alors G opère par automorphismes d'algèbres dans $\mathrm{End}_k(k[\mathrm{G}])$ par $g{\cdot}\mathrm{D} = \lambda(g) \circ \mathrm{D} \circ \lambda(g^{-1})$, et cette action laisse stable $\mathrm{Dér}_k(k[\mathrm{G}])$. Il en résulte que les dérivations invariantes :

$$\mathrm{Dér}_k(k[\mathrm{G}])^{\lambda(\mathrm{G})} = \{\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}_k(k[\mathrm{G}]) \mid \lambda(g) \circ \mathrm{D} \circ \lambda(g^{-1}) = \mathrm{D}, \quad \forall\, g \in \mathrm{G}\},$$

forment une sous-algèbre de Lie. On la note L(G).

Proposition 12.1. — *L'application* $\mathrm{D} \mapsto \varepsilon \circ \mathrm{D}$ *induit un isomorphisme d'espaces vectoriels* $\mathrm{L(G)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_e\mathrm{G}$.

Démonstration. — Si $\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}_k(k[\mathrm{G}])$ alors $\varepsilon \circ \mathrm{D} \in \mathrm{Dér}_k(k[\mathrm{G}], k_e) = \mathrm{T}_e\mathrm{G}$, donc l'application est bien définie. De plus, si $\mathrm{D} \in \mathrm{L(G)}$ alors

$$\forall\, \varphi \in k[\mathrm{G}],\ g \in \mathrm{G}, \quad (\mathrm{D}\varphi)(g^{-1}) = (g{\cdot}\mathrm{D})(\lambda(g)\varphi)(e) = (\varepsilon \circ \mathrm{D})(\lambda(g)\varphi).$$

Par conséquent, l'application est injective. Montrons qu'elle est surjective. On a $\mathrm{T}_e\mathrm{G} \cong \mathrm{Dér}_k(k[\mathrm{G}], k_e)$. Pour $\delta \in \mathrm{Dér}_k(k[\mathrm{G}], k_e)$, définissons D_δ par

$$\mathrm{D}_\delta = (\mathrm{id} \otimes \delta)\Delta : k[\mathrm{G}] \longrightarrow k[\mathrm{G}];$$

c.-à-d., si $\Delta(\phi) = \sum_i \eta_i \otimes \xi_i$, alors $\mathrm{D}_\delta \phi = \sum_i \eta_i \delta(\xi_i)$. On vérifie facilement que D_δ est une dérivation. Pour montrer que $g \cdot \mathrm{D}_\delta = \mathrm{D}_\delta$, pour tout $g \in \mathrm{G}$, le plus simple est sans doute d'écrire que, pour tout $\phi \in k[\mathrm{G}]$,

$$\mathrm{D}_\delta(\phi)(h) = \sum_i \eta_i(h)\delta(\xi_i) = \delta(\lambda(h^{-1})\phi),$$

et donc

$$(g \cdot \mathrm{D}_\delta)(\phi) = \lambda(g)(\mathrm{D}_\delta(\lambda(g^{-1})\phi))$$

est la fonction qui envoie tout $h \in \mathrm{G}$ sur

$$\mathrm{D}_\delta(\lambda(g^{-1})\varphi)(g^{-1}h) = \delta(\lambda(h^{-1}g)\lambda(g^{-1})\varphi) = \delta(\lambda(h^{-1})\varphi) = \mathrm{D}_\delta(\varphi)(h).$$

Ceci montre que $g \cdot \mathrm{D}_\delta = \mathrm{D}_\delta$, et donc $\mathrm{D}_\delta \in \mathrm{L(G)}$. Enfin, il est clair que $\varepsilon \circ \mathrm{D}_\delta = \delta$. Ceci démontre la proposition. □

Remarque 12.2. — On peut aussi montrer que $g \cdot \mathrm{D}_\delta = \mathrm{D}_\delta$ en écrivant que $\lambda(g^{-1}) = (\varepsilon_g \otimes \mathrm{id})\Delta$, d'où

$$\lambda(g^{-1}) \circ \mathrm{D}_\delta \circ \lambda(g) = (\varepsilon_g \otimes \varepsilon_{g^{-1}} \otimes \mathrm{id} \otimes \delta) \circ (\Delta^2 \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta, \tag{†}$$

où l'on a noté $\Delta^2 = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta$. Comme

$$(\varepsilon_g \otimes \varepsilon_{g^{-1}} \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta^2 = \mathrm{id},$$

le terme de droite de (†) égale $(\mathrm{id} \otimes \delta)\Delta = \mathrm{D}_\delta$, ce qui prouve que $g \cdot \mathrm{D}_\delta = \mathrm{D}_\delta$.

Définition 12.3. — On munit $\mathrm{T}_e\mathrm{G}$ de la structure d'algèbre de Lie déduite de l'isomorphisme $\mathrm{L(G)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_e\mathrm{G}$, $\mathrm{D} \mapsto \varepsilon \circ \mathrm{D}$.

12.2. L'algèbre des distributions à l'origine (cas affine). — Soient G un groupe algébrique affine, $k[\mathrm{G}]$ son algèbre des fonctions, $\mathfrak{m}_e = \operatorname{Ker}\varepsilon$ l'idéal d'augmentation. On pose

$$\operatorname{Dist}(\mathrm{G}) = \bigcup_{n\geqslant 0} \operatorname{Dist}_n(\mathrm{G}) \quad \text{et} \quad \operatorname{Dist}^+(\mathrm{G}) = \bigcup_{n\geqslant 0} \operatorname{Dist}_n^+(\mathrm{G}),$$

où $\operatorname{Dist}_n(\mathrm{G}) = \{\eta \in k[\mathrm{G}]^* \mid \eta(\mathfrak{m}_e^{n+1}) = 0\}$ et $\operatorname{Dist}_n^+(\mathrm{G}) = \{\eta \in \operatorname{Dist}_n(\mathrm{G}) \mid \eta(1) = 0\}$.

On va voir que la structure d'algèbre de Hopf de $k[\mathrm{G}]$ permet de munir $\operatorname{Dist}(\mathrm{G})$ d'une structure d'algèbre associative. Notons $\Delta : k[\mathrm{G}] \to k[\mathrm{G}] \otimes k[\mathrm{G}]$ la comultiplication. Comme $k[\mathrm{G}] = k1 \oplus \mathfrak{m}_e$, alors

$$\begin{aligned} k[\mathrm{G}] \otimes k[\mathrm{G}] &= k1 \otimes 1 \oplus k1 \otimes \mathfrak{m}_e \oplus \mathfrak{m}_e \otimes k1 \oplus \mathfrak{m}_e \otimes \mathfrak{m}_e \\ &= k1 \otimes 1 \bigoplus (\mathfrak{m}_e \otimes k[\mathrm{G}] + k[\mathrm{G}] \otimes \mathfrak{m}_e). \end{aligned} \tag{1}$$

Comme $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta = \mathrm{id} = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta$, alors $(\varepsilon \otimes \varepsilon)\Delta(\phi) = \phi(e)$, pour tout $\phi \in k[\mathrm{G}]$. Par conséquent,

$$\forall\, \phi \in \mathfrak{m}_e, \qquad \Delta(\phi) \in \mathfrak{m}_e \otimes k[\mathrm{G}] + k[\mathrm{G}] \otimes \mathfrak{m}_e.$$

Comme Δ est un morphisme d'algèbres, on obtient que

$$\Delta(\mathfrak{m}_e^2) \subseteq \mathfrak{m}_e^2 \otimes k[\mathrm{G}] + \mathfrak{m}_e \otimes \mathfrak{m}_e + k[\mathrm{G}] \otimes \mathfrak{m}_e^2,$$

et l'on montre par récurrence sur $n \geqslant 1$ que

$$\Delta(\mathfrak{m}_e^n) \subseteq \sum_{\substack{i,j\geqslant 0\\ i+j=n}} \mathfrak{m}_e^i \otimes \mathfrak{m}_e^j.$$

Par conséquent, Δ induit, pour tout $r, s \in \mathbb{N}$, un morphisme d'algèbres

$$\Delta_{r,s} : k[\mathrm{G}]/\mathfrak{m}_e^{r+s+1} \longrightarrow k[\mathrm{G}]/\mathfrak{m}_e^{r+1} \otimes k[\mathrm{G}]/\mathfrak{m}_e^{s+1}.$$

Alors, pour tout $\eta \in \operatorname{Dist}_r(\mathrm{G})$, $\xi \in \operatorname{Dist}_s(\mathrm{G})$, on définit le produit $\eta\xi \in \operatorname{Dist}_{r+s}(\mathrm{G})$ par :

$$\eta\xi := (\eta \otimes \xi)\Delta_{r,s}.$$

Ceci ne dépend pas de r et s, car pour $t \geqslant r$, $u \geqslant s$, on le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} k[\mathrm{G}]/\mathfrak{m}_e^{t+u+1} & \xrightarrow{\Delta_{t,u}} & k[\mathrm{G}]/\mathfrak{m}_e^{t+1} \otimes k[\mathrm{G}]/\mathfrak{m}_e^{u+1} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ k[\mathrm{G}]/\mathfrak{m}_e^{r+s+1} & \xrightarrow{\Delta_{r,s}} & k[\mathrm{G}]/\mathfrak{m}_e^{r+1} \otimes k[\mathrm{G}]/\mathfrak{m}_e^{s+1}. \end{array}$$

De plus, en utilisant la co-associativité de Δ, on vérifie sans difficulté que le produit ainsi défini est associatif. Enfin, $\operatorname{Dist}_0(\mathrm{G}) = k\varepsilon$, et les égalités

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta = \mathrm{id} = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta$$

entraînent que ε est l'élément unité pour la multiplication ainsi définie sur Dist(G). On a ainsi obtenu le théorème suivant.

Théorème 12.4. — $\mathrm{Dist}(\mathrm{G}) = \bigcup_{n\geqslant 0}\mathrm{Dist}_n(\mathrm{G})$ *est une algèbre associative filtrée, c.-à-d., telle que* $\mathrm{Dist}_r(\mathrm{G})\mathrm{Dist}_s(\mathrm{G}) \subseteq \mathrm{Dist}_{r+s}(\mathrm{G})$*, pour tout* $r, s \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, comme toute k-algèbre associative, Dist(G) est munie de la structure d'algèbre de Lie définie par $[\eta,\xi] = \eta\xi - \xi\eta$, et il est clair que $\mathrm{Dist}^+(\mathrm{G})$ est une sous-algèbre de Lie.

Théorème 12.5. — $\mathrm{Dist}_1^+(\mathrm{G})$ *est stable pour le crochet* $[\mathrm{X},\mathrm{Y}] = \mathrm{XY} - \mathrm{YX}$*, et est donc muni d'une structure d'algèbre de Lie.*

Démonstration. — Soient $\eta,\xi \in \mathrm{Dist}_1^+(\mathrm{G})$. Alors $\eta\xi$ et $\xi\eta$ appartiennent tous deux à $\mathrm{Dist}_2^+(\mathrm{G})$, et il s'agit de montrer que leur différence est nulle sur $\mathfrak{m}_e^2$.

Soient $\phi,\psi \in \mathfrak{m}_e$. On utilisant la décomposition (1) et les égalités $(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\Delta = \mathrm{id} = (\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\Delta$, on obtient que

$$\Delta(\phi) - \phi\otimes 1 - 1\otimes\phi \in \mathfrak{m}_e\otimes\mathfrak{m}_e,$$

et de même pour ψ. Comme

$$(\eta\xi)(\phi\psi) = (\eta\otimes\xi)\Delta(\phi\psi) = (\eta\otimes\xi)(\Delta(\phi)\Delta(\psi)),$$

et comme $\eta(\mathfrak{m}_e^2) = 0 = \xi(\mathfrak{m}_e^2)$, on en déduit que

$$(\eta\xi)(\phi\psi) = \eta(\phi)\xi(\psi) + \xi(\phi)\eta(\psi).$$

Ceci est symétrique en η et ξ, et égale donc $(\xi\eta)(\phi\psi)$. Il en résulte que $[\xi,\eta]$ est nul sur $\mathfrak{m}^2$, donc appartient à $\mathrm{Dist}_1^+(\mathrm{G})$. Le théorème est démontré. $\square$

12.3. L'algèbre des distributions à l'origine (cas général). — La définition de l'algèbre Dist(G) se généralise au cas d'un groupe algébrique non nécessairement affine. (Et les arguments ci-dessous s'appliquent aussi dans le cas des groupes de Lie, cf. [**Go**, § 5]).

Soit G un k-groupe algébrique non nécessairement affine. Notons m la multiplication $\mathrm{G}\times\mathrm{G}\to\mathrm{G}$. Son comorphisme $m^\#$ envoie $\mathscr{O}_e$ dans $\mathscr{O}_{(e,e)}$, et $\mathfrak{m}_e$ dans l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{(e,e)}$. Soient $r, s \geqslant 0$. On veut construire une application $\Delta_{r,s}$ de $\mathscr{O}_e/\mathfrak{m}_e^{r+s+1}$ vers $\mathscr{O}_e/\mathfrak{m}_e^{r+1}\otimes\mathscr{O}_e/\mathfrak{m}_e^{s+1}$.

Soient U un voisinage ouvert affine de e dans G, et $\mathfrak{m}_{\mathrm{U},e}\subset k[\mathrm{U}]$ l'idéal maximal en e. Alors $\mathfrak{m}_{\mathrm{U}\times\mathrm{U},(e,e)}$, l'idéal maximal de (e,e) dans $k[\mathrm{U}\times\mathrm{U}] = k[\mathrm{U}]\otimes k[\mathrm{U}]$, est égal à $\mathfrak{m}_{\mathrm{U},e}\otimes k[\mathrm{U}] + k[\mathrm{U}]\otimes\mathfrak{m}_{\mathrm{U},e}$. On montre par récurrence que, pour tout $t\geqslant 1$,

$$\mathfrak{m}_{\mathrm{U}\times\mathrm{U},(e,e)}^t = \sum_{i=0}^{t}\mathfrak{m}_{\mathrm{U},e}^i\otimes\mathfrak{m}_{\mathrm{U},e}^{t-i}. \tag{1}$$

Posons $\mathrm{J}_{r,s} = \mathfrak{m}_{\mathrm{U},e}^{r+1} \otimes k[\mathrm{U}] + k[\mathrm{U}] \otimes \mathfrak{m}_{\mathrm{U},e}^{s+1}$. Soit $n \geqslant r+s+1$. D'une part, on a $\mathfrak{m}^n_{\mathrm{U}\times\mathrm{U},(e,e)} \subseteq \mathrm{J}_{r,s}$. D'autre part, d'après l'égalité $(*)$ de 11.20, appliquée à $k[\mathrm{U}]$ puis à $k[\mathrm{U}\times\mathrm{U}]$, on a :

$$(2) \qquad k[\mathrm{U}\times\mathrm{U}]/\mathrm{J}_{r,s} \cong k[\mathrm{U}]/\mathfrak{m}_{\mathrm{U},e}^{r+1} \otimes k[\mathrm{U}]/\mathfrak{m}_e^{s+1} \cong \mathscr{O}_e/\mathfrak{m}_e^{r+1} \otimes \mathscr{O}_e/\mathfrak{m}_e^{s+1}.$$

$$(3) \qquad \mathscr{O}_{(e,e)}/\mathfrak{m}^n_{(e,e)} = k[\mathrm{U}\times\mathrm{U}]/\mathfrak{m}^n_{\mathrm{U}\times\mathrm{U},(e,e)}.$$

Notons $\mathrm{B}(n)$ cet anneau local, $\mathfrak{m}(n)$ son idéal maximal, π_n la projection $\mathscr{O}_{(e,e)} \to \mathrm{B}(n)$ et $\psi_n = \pi_n \circ m^{\#} : \mathscr{O}_e \to \mathrm{B}(n)$. Alors $\psi_n(\mathfrak{m}_e) \subseteq \mathfrak{m}(n)$. On déduit alors de (1) que $\psi(\mathfrak{m}_e^{r+s+1})$ est contenu dans l'image de $\mathrm{J}_{r,s}$ dans $\mathrm{B}(n)$. On obtient donc un morphisme $\Delta_{r,s}$ de $\mathscr{O}_e/\mathfrak{m}_e^{r+s+1}$ vers $k[\mathrm{U}\times\mathrm{U}]/\mathrm{J}_{r,s} = \mathscr{O}_e/\mathfrak{m}_e^{r+1} \otimes \mathscr{O}_e/\mathfrak{m}_e^{s+1}$, comme voulu.

De plus, on vérifie que pour $t \geqslant r$, $u \geqslant s$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{O}_{\mathrm{G},e}/\mathfrak{m}_e^{t+u+1} & \xrightarrow{\Delta_{t,u}} & \mathscr{O}_{\mathrm{G},e}/\mathfrak{m}_e^{t+1} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{G},e}/\mathfrak{m}_e^{u+1} \\
\big\downarrow & & \big\downarrow \\
\mathscr{O}_{\mathrm{G},e}/\mathfrak{m}_e^{r+s+1} & \xrightarrow{\Delta_{r,s}} & \mathscr{O}_{\mathrm{G},e}/\mathfrak{m}_e^{r+1} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{G},e}/\mathfrak{m}_e^{s+1}.
\end{array}$$

On en déduit que $\mathrm{Dist}(\mathrm{G}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{Dist}_n(\mathrm{G})$ est une algèbre, le produit étant défini comme suit : si $\phi, \psi \in \mathrm{Dist}_n(\mathrm{G})$ alors $\phi\psi = (\phi \otimes \psi)\Delta_{n,n} \in \mathrm{Dist}_{2n}(\mathrm{G})$. On vérifie que cette multiplication est associative, en utilisant l'associativité de m.

Soit $\varepsilon : \mathscr{O}_e \to k$, $\phi \mapsto \phi(e)$. Alors ε s'annule sur $\mathfrak{m}_e$ donc appartient à $\mathrm{Dist}_0(\mathrm{G})$. On vérifie aussi que, quels que soient r, s, on a

$$(4) \qquad (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta_{r,s} = \mathrm{id} = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta_{r,s}$$

De ceci, on tire que $\mathrm{Dist}(\mathrm{G})$ est une algèbre unitaire, d'unité ε. En effet, pour tout $\delta \in \mathrm{Dist}_n(\mathrm{G})$ on a $\delta\varepsilon = (\delta \otimes \varepsilon)\Delta_{n,n} = \delta$, et de même $\varepsilon\delta = \delta$.

Enfin, les égalités (4) permettent de démontrer le théorème suivant.

Théorème 12.6. — *Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathrm{Dist}_n(\mathrm{G})\mathrm{Dist}_m(\mathrm{G}) \subseteq \mathrm{Dist}_{n+m}(\mathrm{G}).$$

De plus, $\mathrm{Dist}_1^+(\mathrm{G})$ *est stable pour le crochet* $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto \mathrm{XY} - \mathrm{YX}$*, et est donc muni d'une structure d'algèbre de Lie.*

Démonstration. — On a vu la 1ère assertion. Prouvons la 2ème. Pour tout n, notons $\mathfrak{m}(n)$ l'image de $\mathfrak{m}_e$ dans $\mathscr{O}_e/\mathfrak{m}_e^n$. Soient $\gamma, \delta \in \mathrm{Dist}_1(\mathrm{G})$. Alors $\gamma\delta - \delta\gamma \in \mathrm{Dist}_2(\mathrm{G}) = (\mathscr{O}_e/\mathfrak{m}_e^3)^*$. Il s'agit alors de montrer que $\gamma\delta - \delta\gamma$ est nul sur $\mathfrak{m}(3)^2$. Pour cela, il suffit de voir que $(\gamma\delta - \delta\gamma)(\phi\psi) = 0$, quelques soient $\phi, \psi \in \mathfrak{m}(3)$. Considérons $\Delta_{1,1} : \mathscr{O}_e/\mathfrak{m}_e^3 \to \mathscr{O}_e/\mathfrak{m}_e^2 \otimes \mathscr{O}_e/\mathfrak{m}_e^2$. Il résulte de (4) que

$$\Delta_{1,1}(\phi) - (\phi \otimes 1 + 1 \otimes \phi) \in \mathfrak{m}(2) \otimes \mathfrak{m}(2),$$

et de même pour ψ, d'où

$$\Delta_{1,1}(\phi\psi) = \phi \otimes \psi + \psi \otimes \phi \quad (\text{égalité dans } \mathscr{O}_e/\mathfrak{m}_e^2 \otimes \mathscr{O}_e/\mathfrak{m}_e^2).$$

On en déduit que $\gamma\delta - \delta\gamma \in \mathrm{Dist}_1(\mathrm{G})$. Ceci montre que $\mathrm{Dist}_1(\mathrm{G})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Dist}(\mathrm{G})$, pour le crochet $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \mathrm{XY} - \mathrm{YX}$. Enfin, il est clair que $\mathrm{Dist}_1^+(\mathrm{G}) = \{\delta \in \mathrm{Dist}_1(\mathrm{G}) \mid \delta(1) = 0\}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{Dist}_1(\mathrm{G})$. □

12.4. Équivalence des deux constructions et fonctorialité. — On revient, désormais, au cas d'un groupe algébrique affine.

Définition et proposition 12.7. — *L'application* $\mathrm{Dist}_1^+(\mathrm{G}) \to \mathrm{L}(\mathrm{G})$, $\delta \mapsto \mathrm{D}_\delta$, *est un isomorphisme d'algèbres de Lie. On notera* $\mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ *cette algèbre de Lie.*

Démonstration. — On sait déjà que $\delta \mapsto \mathrm{D}_\delta$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, dont l'inverse est $\mathrm{D} \mapsto \varepsilon \circ \mathrm{D}$. Soient $\gamma, \delta \in \mathrm{Dist}_1^+(\mathrm{G})$. Il faut voir que $\mathrm{D}_{\gamma\delta-\delta\gamma} = \mathrm{D}_\gamma \mathrm{D}_\delta - \mathrm{D}_\delta \mathrm{D}_\gamma$. Pour cela, il suffit de voir que $\gamma\delta - \delta\gamma = \varepsilon \circ (\mathrm{D}_\gamma \mathrm{D}_\delta - \mathrm{D}_\delta \mathrm{D}_\gamma)$.

On a vu en 12.1 que $\mathrm{D}_\delta = (\mathrm{id} \otimes \delta) \circ \Delta$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \varepsilon \circ \mathrm{D}_\gamma \circ \mathrm{D}_\delta &= (\varepsilon \otimes \gamma \otimes 1)(\Delta \otimes 1)(1 \otimes \delta)\Delta \\ &= (1 \otimes \gamma \otimes \delta)(\varepsilon \otimes 1 \otimes 1)(\Delta \otimes 1)\Delta = (\gamma \otimes \delta)\Delta = \gamma\delta. \end{aligned}$$

Ceci prouve la proposition. □

On note $\mathrm{U}(\mathrm{Lie}(\mathrm{G}))$ l'algèbre enveloppante de $\mathrm{Lie}(\mathrm{G})$; voir cours d'Introduction, 16-17 octobre, § 3.2.

Corollaire 12.8. — *On a un morphisme naturel* $\mathrm{U}(\mathrm{Lie}(\mathrm{G})) \to \mathrm{Dist}(\mathrm{G})$ *; son image est la sous-algèbre de* $\mathrm{Dist}(\mathrm{G})$ *engendrée par* $\mathrm{Dist}_1^+(\mathrm{G})$.

Exemple 12.9. — Considérons $\mathrm{G} = \mathbb{G}_a$. On a $k[\mathrm{G}] = k[\mathrm{T}]$. Pour $i \geqslant 0$, soit γ_i l'élément de $\mathrm{Dist}_i(\mathrm{G})$ défini par $\gamma_i(\mathrm{T}^j) = \delta_{i,j}$. Alors les γ_i, $i \geqslant 0$, forment une base de $\mathrm{Dist}(\mathrm{G})$ et l'on a

$$\gamma_i \, \gamma_j = \binom{i+j}{i} \gamma_{i+j}, \quad \forall\, i, j \geqslant 0.$$

On a $\mathrm{U}(\mathrm{Lie}(\mathrm{G})) \cong k[\gamma_1]$, et l'application naturelle $k[\gamma_1] \to \mathrm{Dist}(\mathrm{G})$ envoie γ_1^n sur $n!\,\gamma_n$. C'est donc un isomorphisme si $\mathrm{car}(k) = 0$; si $\mathrm{car}(k) = p > 0$ son image est la sous-algèbre de dimension p ayant pour base $\{\gamma_i, 0 \leqslant i < p\}$.

***Proposition 12.10* (Fonctorialité).** — *Soit* $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de groupes algébriques. Alors* $\mathrm{d}\phi : \mathrm{Dist(G)} \to \mathrm{Dist(H)}$ *est un morphisme d'algèbres. En particulier, il induit un morphisme d'algèbres de Lie* $\mathrm{Lie(G)} \to \mathrm{Lie(H)}$.

Démonstration. — $\mathrm{d}\phi$ est donné par $\delta \mapsto \delta \circ \phi^*$, pour $\delta \in \mathrm{Dist(G)}$. Comme $\phi \circ m_{\mathrm{G}} = m_{\mathrm{H}} \circ \phi$, alors $\Delta_{\mathrm{G}} \circ \phi^* = \phi^* \circ \Delta_{\mathrm{H}}$. Donc, pour $\gamma, \delta \in \mathrm{Dist(G)}$, on a

$$\mathrm{d}\phi(\gamma)\cdot\mathrm{d}\phi(\delta) = (\gamma \circ \phi^* \otimes \delta \circ \phi^*) \circ \Delta_{\mathrm{H}} = (\gamma \otimes \delta) \circ \Delta_{\mathrm{G}} \circ \phi^* = \gamma\delta \circ \phi^* = \mathrm{d}\phi(\gamma\delta).$$

La proposition est démontrée. □

Corollaire 12.11. — *Si* G *est un sous-groupe fermé de* H, *alors* Lie(G) *est une sous-algèbre de Lie de* Lie(H).

Démonstration. — On combine la proposition précédente et la proposition 11.16. □

Proposition 12.12. — *On a* $\mathrm{Dist(G)} = \mathrm{Dist(G^0)}$ *et* $\mathrm{Lie(G)} = \mathrm{Lie(G^0)}$ *; c.-à-d.,* Dist(G) *et* Lie(G) *ne dépendent que de* G^0.

Démonstration. — $\mathrm{Dist(G^0)} \to \mathrm{Dist(G)}$ est un morphisme d'algèbres bijectif, d'après la proposition 12.10 et la remarque 11.20. □

12.5. Exemples de GL_n et SL_n. — Soit $n \geqslant 1$. On rappelle que $\mathrm{SL}_n(k) = \{g \in \mathrm{GL}_n(k) \mid \mathrm{dét}(g) = 1\}$. On note $\mathfrak{gl}_n$ l'algèbre de Lie $\mathrm{M}_n(k)$, munie du crochet $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \mathrm{XY} - \mathrm{YX}$, et $\mathfrak{sl}_n$ la sous-algèbre de Lie des matrices de trace nulle. Pour tout i, j, on désigne par E_{ij} la matrice élémentaire correspondante.

Proposition 12.13. — *On a* $\mathrm{Lie(GL}_n(k)) \cong \mathfrak{gl}_n$.

Démonstration. — Posons $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n(k)$ et soit $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_e$ l'idéal maximal de e dans $k[\mathrm{G}]$. On note C_{ij} les coefficients matriciels. Comme $k[\mathrm{G}] = k[\mathrm{M}_n(k)]_{\mathrm{D}}$, où D est le déterminant, les images des C_{ij}, pour $j \neq i$, et des $\mathrm{C}_{ii} - 1$ engendrent $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. On en déduit que $\mathrm{T}_e\mathrm{G}$ admet pour base les dérivations ponctuelles $e_{ij} : k[\mathrm{G}] \to k_e$ définies par $e_{ij}(\mathrm{C}_{rs}) = \delta_{i,r}\delta_{j,s}$. Vérifions que l'application $e_{ij} \mapsto \mathrm{E}_{ij}$ est un (iso)morphisme d'algèbres de Lie.

Pour tout i, j, i', j', on a

$$\begin{aligned}
[e_{ij}, e_{i'j'}]\mathrm{C}_{rs} &= (e_{ij} \otimes e_{i'j'} - e_{i'j'} \otimes e_{ij})\Delta(\mathrm{C}_{rs}) \\
&= \textstyle\sum_t (e_{ij}\mathrm{C}_{rt} \otimes e_{i'j'}\mathrm{C}_{ts} - e_{i'j'}\mathrm{C}_{rt} \otimes e_{ij}\mathrm{C}_{ts}) \\
&= \delta_{j,i'}\delta_{i,r}\delta_{j',s} - \delta_{j',i}\delta_{i',r}\delta_{j,s} \\
&= (\delta_{j,i'}e_{ij'} - \delta_{j',i}e_{i'j})\mathrm{C}_{rs}.
\end{aligned}$$

Ceci montre que $[e_{ij}, e_{i'j'}] = \delta_{j,i'}e_{ij'} - \delta_{j',i}e_{i'j}$. La proposition est démontrée. □

Pour traiter le cas de SL_n, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 12.14. — *Soient* G *un groupe algébrique affine,* H *un sous-groupe fermé, et* $f_1, \dots, f_r$ *des générateurs de l'idéal de* H *dans* $k[\mathrm{G}]$*. Alors* $\mathrm{Lie(H)} = \{\mathrm{X} \in \mathrm{Lie(G)} \mid \mathrm{d}f_1(\mathrm{X}) = 0 = \dots = \mathrm{d}f_r(\mathrm{X})\}$.

Démonstration. — Si on note $\mathfrak{m}_\mathrm{G}$, resp. $\mathfrak{m}_\mathrm{H}$, l'idéal de e dans $k[\mathrm{G}]$, resp. $k[\mathrm{H}]$, alors $\mathfrak{m}_\mathrm{H}/\mathfrak{m}_\mathrm{H}^2$ est le quotient de $\mathfrak{m}_\mathrm{G}/\mathfrak{m}_\mathrm{G}^2$ par le sous-espace engendré par les $\mathrm{d}f_i$. L'assertion en découle. □

Proposition 12.15. — *Pour tout* $\mathrm{X} \in \mathfrak{gl}_n$*, on a* $\mathrm{X}(\text{dét}) = \mathrm{Tr(X)}$*. Par conséquent,* $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_n(k)) \cong \mathfrak{sl}_n$.

Démonstration. — On vérifie sans difficulté que $\mathrm{d}_e\text{dét} = \mathrm{Tr}$. Par conséquent, d'après la remarque 11.9, $\mathrm{X}(\text{dét}) = \mathrm{Tr(X)}$, pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{gl}_n$. La proposition découle alors du lemme précédent. □

12.6. Action dérivée de Dist(G) sur une représentation de G. —

Proposition 12.16. — *Soient* G *un groupe algébrique affine et* V *un* $k[\mathrm{G}]$*-comodule.*

a) V *est naturellement muni d'une structure de* Dist(G)*-module, définie par* $\delta v = (1 \otimes \delta)\Delta_\mathrm{V}(v)$*, pour* $v \in \mathrm{V}$*,* $\delta \in \mathrm{Dist(G)}$*. En particulier,* V *est un* Lie(G)*-module.*

b) *Si* $\dim_k(\mathrm{V}) < \infty$*, l'application* $\mathrm{Lie(G)} \to \mathrm{End(V)} = \mathrm{Lie(GL(V))}$ *ainsi obtenue est la différentielle du morphisme* $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{GL(V)}$.

Démonstration. — a) Soit $v \in \mathrm{V}$. Alors $\varepsilon v = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta_\mathrm{V}(v) = v$ et, pour $\gamma, \delta \in \mathrm{Dist(G)}$, l'on a :

$$\begin{aligned}\gamma(\delta v) &= (1 \otimes \gamma \otimes 1)(\Delta_\mathrm{V} \otimes 1)(1 \otimes \delta)\Delta_\mathrm{V}(v)\\ &= (1 \otimes \gamma \otimes \delta)(1 \otimes \Delta)\Delta_\mathrm{V}(v)\\ &= (1 \otimes \gamma\delta)\Delta_\mathrm{V}(v) = (\gamma\delta)v.\end{aligned}$$

Ceci prouve que V est un Dist(G)-module.

Démontrons b). Soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de V et soient C_{ij} les coefficients matriciels associés ; ce sont par définition des formes linéaires sur $\mathrm{M}_n(k)$. On désignera par C'_{ij} leur restriction à l'ouvert $\mathrm{GL}_n(k) \subset \mathrm{M}_n(k)$; alors on a $\mathrm{d}_e\mathrm{C}'_{ij} = \mathrm{C}_{ij}$, et donc, d'après la remarque 11.9,

$$\mathrm{X}(\mathrm{C}'_{ij}) = \mathrm{d}_e\mathrm{C}'_{ij}(\mathrm{X}) = \mathrm{C}_{ij}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}_{ij},$$

pour tout $\mathrm{X} \in \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n) = \mathrm{M}_n(k)$.

D'autre part, d'après la preuve du corollaire 7.21 (et le lemme 7.20), la structure de $k[\mathrm{G}]$-comodule sur V est donnée, pour $j = 1, \dots, n$, par

$$\Delta_\mathrm{V}(v_j) = \sum_{i=1}^n v_i \otimes \phi^\#(\mathrm{C}'_{ij}),$$

où $\phi^\# : k[\mathrm{GL}(\mathrm{V})] \to k[\mathrm{G}]$ est le comorphisme de ϕ.

Enfin, pour tout $\xi \in \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, on a $\xi \circ \phi^\# = \mathrm{d}_e\phi(\xi)$. Par conséquent, on a, pour $j = 1, \ldots, n$, et $\xi \in \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$:

$$\xi v_j = (\mathrm{id} \otimes \xi)\Delta_{\mathrm{V}}(v_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_e\phi(\xi)(\mathrm{C}'_{ij})v_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_e\phi(\xi)_{ij}v_i = \mathrm{d}_e\phi(\xi)v_j.$$

Ceci prouve b). La proposition est démontrée. □

Soit X une variété algébrique affine sur laquelle G agit **à droite**, c.-à-d., on se donne un morphisme $\mathrm{X} \times \mathrm{G} \to \mathrm{X}$, $(x, g) \mapsto xg$, tel que $xe = x$ et $x(gh) = (xg)h$, pour tout $x \in \mathrm{X}$ et $g, h \in \mathrm{G}$. Alors son comorphisme

$$\Delta_{\mathrm{X}} : k[\mathrm{X}] \longrightarrow k[\mathrm{X}] \otimes k[\mathrm{G}]$$

fait de $k[\mathrm{X}]$ un G-comodule (à droite) au sens de notre définition 7.11, c.-à-d., $k[\mathrm{X}]$ est un G-module (rationnel) **à gauche** pour l'action définie par $(g\phi)(x) = \phi(xg)$, pour tout $g \in \mathrm{G}$, $\phi \in k[\mathrm{X}]$, $x \in \mathrm{X}$.

D'après la proposition précédente, $k[\mathrm{X}]$ est un Dist(G)-module à gauche. De plus, on a la proposition suivante.

Proposition 12.17. — 1) Lie(G) *agit sur* $k[\mathrm{X}]$ *par dérivations.*

2) *Pour* $\phi \in k[\mathrm{X}]$ *et* $x \in \mathrm{X}$, *soit* $\phi_x = (\varepsilon_x \otimes \mathrm{id})\Delta \in k[\mathrm{G}]$ *; c'est la fonction* $g \mapsto \phi(gx)$. *Alors, pour tout* $\xi \in \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, *on a* $(\xi \cdot \phi)(x) = \mathrm{d}_e\phi_x(\xi)$.

3) *En particulier, si* X = G, *où* G *agit par translations à droite, alors l'action dérivée de* $\xi \in \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ *sur* $k[\mathrm{G}]$ *coïncide avec l'action de la dérivation* D_ξ, *invariante par translations à gauche, définie en* 12.1.

Démonstration. — Soit $\xi \in \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ et soient $\alpha, \beta \in k[\mathrm{X}]$. Posons

$$\Delta_{\mathrm{X}}(\alpha) = \sum_i a_i \otimes \phi_i, \qquad \Delta_{\mathrm{X}}(\beta) = \sum_j b_j \otimes \psi_j.$$

Alors $\xi(\alpha\beta) = (\mathrm{id} \otimes \xi)\Delta_{\mathrm{X}}(ab)$ égale

$$\sum_{i,j} a_i b_j \xi(\phi_i\psi_j) = \sum_{i,j} a_i b_j (\varepsilon(\phi_i)\xi(\psi_j) + \varepsilon(\psi_j)\xi(\phi_i)) = \alpha\xi(\beta) + \beta\xi(\alpha).$$

Ceci prouve que ξ agit par dérivations sur $k[\mathrm{X}]$. De plus, avec les notations précédentes, α_x égale $\sum_i a_i(x)\phi_i$ et donc, d'après la remarque 11.9, on obtient :

$$(\xi\alpha)(x) = \sum_i a_i(x)\xi(\phi_i) = \xi(\alpha_x) = \mathrm{d}_e\alpha_x.$$

Ceci prouve 2). Enfin, 3) résulte de 2) et de la définition $\mathrm{D}_\xi = (\mathrm{id} \otimes \xi)\Delta$ donnée en 12.1. □

(**Nota** Il faut rectifier la définition 7.27 : si G agit à gauche sur X via $\mu_X : G\times X \to X$, alors G agit à gauche sur les fonctions sur X via : $(g\cdot\phi)(x) = \phi(g^{-1}x)$. Par conséquent, la structure de comodule à droite sur $k[X]$ est donnée par

$$\Delta_X = (\mathrm{id}\otimes\tau)\circ\mu_X^* : k[X] \longrightarrow k[X]\otimes k[G],$$

où $\tau(\phi)(g) = \phi(g^{-1})$ et μ_X^* est le le comorphisme de μ_X.)

Remarque 12.18. — **Attention** Si $\rho : G \to GL(V)$ est une représentation fidèle (c.-à-d., injective), sa dérivée $d\rho : \mathrm{Lie}(G) \to \mathfrak{gl}(V)$ n'est pas nécessairement injective, si $\mathrm{car}(k) > 0$. On peut même avoir $d\rho = 0$, comme le montre l'exemple ci-dessous.

La difficulté vient du fait qu'un morphisme bijectif de groupes algébriques n'est pas nécessairement un isomorphisme, en raison de phénomènes de non-séparabilité. C'est ce qui se passe pour le morphisme $f : \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$, $z \mapsto z^p$, où $p = \mathrm{car}(k)$. Il est bijectif, mais sa différentielle est nulle.

Toutefois, on a la remarque suivante, qui sera utile dans l'étude de la décomposition de Jordan.

Remarque 12.19. — La représentation de Lie(G) dans $k[G]$ via l'identification de Lie(G) aux dérivations invariantes à gauche, est la dérivée de la représentation rationnelle ρ de G définie par $(\rho(g)\phi)(h) = \phi(hg)$. Par conséquent, $d\rho$ est une représentation fidèle.

Soient H un sous-groupe fermé et I l'idéal de H dans $k[G]$. Le lemme suivant sera utilisé de façon cruciale dans la suite, pour la construction du quotient G/H, puis pour la décomposition de Jordan.

On considère l'action de G dans $k[G]$ définie par $(g\phi)(h) = \phi(hg)$. On rappelle que L(G), l'algèbre de Lie des dérivations de $k[G]$ invariantes à gauche (§ 12.1), s'identifie à Lie(G) via $D \mapsto \varepsilon\circ D$, cf. Proposition 12.7.

Lemme 12.20. — a) $H = \{g \in G \mid gI = I\}$.

b) $\mathrm{Lie}(H) = \{\delta \in \mathrm{Lie}(G) \mid \delta(I) = 0\}$.

c) $L(H) = \{D \in L(G) \mid D(I) \subseteq I\}$.

Démonstration. — a) est facile et laissé au lecteur. D'après les définitions, Lie(H) égale

$$\mathrm{Dér}_k(k[H], k_e) = \mathrm{Dér}_k(k[G]/I, k_e) = \{\delta \in \mathrm{Dér}_k(k[G], k_e) \mid \delta(I) = 0\},$$

d'où b). Voyons c). Comme H contient e alors $I \subseteq \mathfrak{m}_{G,e}$. Donc, si $D(I) \subseteq I$ alors $(\varepsilon\circ D)(I) = 0$ et donc $\varepsilon\circ D \in \mathrm{Lie}(H)$, d'où $D \in L(H)$. Réciproquement, soient $D \in L(H)$, $\phi \in I$ et $h \in H$. Alors $\lambda(h^{-1})\phi \in I$ et donc

$$(D\phi)(h) = \varepsilon(\lambda(h^{-1})D\phi) = (\varepsilon\circ D)(\lambda(h^{-1})\phi) = 0,$$

ce qui montre que $D(I) \subseteq I$. Le lemme est démontré. □

12.7. Actions adjointes. — Soient G un groupe algébrique affine et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. Pour $g \in \mathrm{G}$, on note $\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ la différentielle de l'automorphisme $\mathrm{Int}(g) : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $h \mapsto ghg^{-1}$. Alors $\mathrm{Ad}(g)$ est un automorphisme d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Comme $\mathrm{Int}(gg') = \mathrm{Int}(g) \circ \mathrm{Int}(g')$, l'application $\mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, $g \mapsto \mathrm{Ad}(g)$ est un morphisme de groupes ; on va voir que c'est un morphisme de variétés, et calculer sa différentielle.

Remarque 12.21. — Soient $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On pose $\mathrm{A}_\eta = \mathrm{id} + \eta\mathrm{X}$, $\mathrm{B}_\eta = \mathrm{id} + \eta\mathrm{Y}$, avec $\eta \in \mathbb{R}^+$ « assez petit ». On vérifie que

$$\mathrm{A}_\eta \mathrm{B}_\eta \mathrm{A}_\eta^{-1} \mathrm{B}_\eta^{-1} = \mathrm{id} + \eta^2(\mathrm{XY} - \mathrm{YX}) + \mathrm{O}(\eta^3).$$

Donc, on peut voir le crochet de Lie $\mathrm{XY} - \mathrm{YX}$ comme une sorte de dérivée seconde du commutateur $\mathrm{A}_\eta \mathrm{B}_\eta \mathrm{A}_\eta^{-1} \mathrm{B}_\eta^{-1}$. On va donner un sens précis à cette assertion.

Théorème 12.22. — *L'application* $\mathrm{G} \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, $g \mapsto \mathrm{Ad}(g)$ *est un morphisme de groupes algébriques. Sa différentielle est l'application* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, *définie par* $\mathrm{ad}(\mathrm{X})(\mathrm{Y}) = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$, *pour* $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}$.

Démonstration. — Voyons la 1ère assertion. On plonge G dans un GL(V). Il suffit de prouver l'assertion pour GL(V). En effet, soit $\{e_1, \dots, e_r\}$ une base de $\mathfrak{gl}(\mathrm{V})$, telle que $\{e_1, \dots, e_m\}$ soit une base de $\mathfrak{g}$. Soient C_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant r$ les coefficients matriciels sur $\mathrm{End}(\mathfrak{gl}(\mathrm{V}))$. Si on montre que $\mathrm{C}_{ij} \circ \mathrm{Ad} \in k[\mathrm{GL}(\mathrm{V})]$, pour $i, j = 1, \dots, r$, on aura a fortiori $(\mathrm{C}_{ij} \circ \mathrm{Ad})_{|\mathrm{G}} \in k[\mathrm{G}]$, pour $i, j = 1, \dots, m$, d'où l'assertion voulue.

De même, comme, pour $g \in \mathrm{G}$, on a $\mathrm{Int}_{\mathrm{G}}(g) = \mathrm{Int}_{\mathrm{GL}(\mathrm{V})}(g)_{|\mathrm{G}}$, on en déduit que $\mathrm{dAd}_{\mathfrak{g}} = (\mathrm{dAd}_{\mathfrak{gl}(\mathrm{V})})_{|\mathfrak{g}}$. De plus, pour $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$ on a $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{X}) = \mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(\mathrm{V})}(\mathrm{X})_{|\mathfrak{g}}$, puisque $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathrm{V})$. Donc il suffit également de montrer la 2ème assertion pour GL(V). Ceci montre que le théorème découle de la proposition suivante. □

Proposition 12.23. — a) *Pour* $g \in \mathrm{GL}(\mathrm{V})$, $\mathrm{X} \in \mathfrak{gl}(\mathrm{V})$, *on a* $\mathrm{Ad}(g)(\mathrm{X}) = g\mathrm{X}g^{-1}$. *Par conséquent,* $\mathrm{Ad} : \mathrm{GL}(\mathrm{V}) \to \mathrm{GL}(\mathfrak{gl}(\mathrm{V}))$ *est un morphisme de groupes algébriques.*

b) *On a* $\mathrm{dAd} = \mathrm{ad}$.

Démonstration. — Posons $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ et $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(\mathrm{V})$. Démontrons le point a). Soient $g \in \mathrm{G}$ et $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$. Par définition, on a $\mathrm{Ad}(g)(\mathrm{X}) = \mathrm{d}\,\mathrm{Int}(g)(\mathrm{X}) = \mathrm{X} \circ \mathrm{Int}(g)^{\#} = \mathrm{X} \circ \rho(g^{-1})^{\#} \circ \lambda(g)^{\#}$, où $\rho(h)$ et $\lambda(h)$ désignent les translations à droite et à gauche par h.

Si $\phi \in k[\mathrm{G}]$ et $\Delta(\phi) = \sum_i \eta_i \otimes \xi_i$, alors

$$\big(\mathrm{X} \circ \rho(g^{-1})^{\#} \circ \lambda(g)^{\#}\big)(\phi) = \sum_i \eta_i(g)\, \big(\mathrm{X} \circ \rho(g^{-1})^{\#}\big)(\xi_i),$$

et $\big(\mathrm{X} \circ \rho(g^{-1})^{\#}\big)(\xi_i) = (\mathrm{X} \otimes \varepsilon_{g^{-1}})\Delta(\xi_i)$. On en déduit que

$$\mathrm{Ad}(g)(\mathrm{X}) = (\varepsilon_g \otimes \mathrm{X} \otimes \varepsilon_{g^{-1}})(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta,$$

et donc, pour $i, j = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ad}(g)(\mathrm{X})(\mathrm{C}_{i,j}) &= (\varepsilon_g \otimes \mathrm{X} \otimes \varepsilon_{g^{-1}}) \sum_{\ell,m} \mathrm{C}_{i,\ell} \otimes \mathrm{C}_{\ell,m} \otimes \mathrm{C}_{m,j} \\ &= \sum_{\ell,m} g_{i,\ell}\ \mathrm{X}_{\ell,m}\ (g^{-1})_{m,j} \\ &= (g\mathrm{X}g^{-1})_{i,j} = (g\mathrm{X}g^{-1})(\mathrm{C}_{i,j}).\end{aligned}$$

Comme les C_{ij} engendrent $k[\mathrm{G}]$, on en déduit que $\mathrm{Ad}(g)(\mathrm{X}) = g\mathrm{X}g^{-1}$. Enfin, on vérifie sans difficultés que l'application $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{M}_n(k) \to \mathrm{M}_n(k)$, $(g, u) \mapsto gug^{-1}$ est un morphisme de variétés. Ceci prouve le point (a).

Remarque 12.24. — On peut aussi prouver la 1ère assertion de a) comme suit. Posons $\mathrm{T}_{ij} = \mathrm{C}_{ij} - \delta_{i,j}$, pour $i, j = 1, \ldots, n$. Alors les images des T_{ij} forment une base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$; on peut les regarder comme des formes linéaires sur $\mathfrak{g} = (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$. Par conséquent, pour $g \in \mathrm{G}$ et $i, j = 1, \ldots, n$ on a

$$\mathrm{d}(\mathrm{T}_{ij} \circ \mathrm{Int}(g)) = \mathrm{T}_{ij} \circ \mathrm{d}\,\mathrm{Int}(g) = \mathrm{T}_{ij} \circ \mathrm{Ad}(g). \qquad (*)$$

Or $\mathrm{T}_{ij} \circ \mathrm{Int}(g)$ est l'application $\mathrm{GL}_n \to k$ qui à une matrice A associe le coefficient $(g\mathrm{A}g^{-1})_{ij}$; on vérifie que sa dérivée est l'application $\mathfrak{gl}_n \to k$, $\mathrm{X} \mapsto (g\mathrm{X}g^{-1})_{ij}$. Il résulte alors de $(*)$ que $g\mathrm{X}g^{-1} = \mathrm{Ad}(g)(\mathrm{X})$, pour tout $\mathrm{X} \in \mathfrak{gl}(\mathrm{V})$.

Démontrons maintenant le point b) de la proposition. Soit $\mathrm{Y} \in \mathfrak{gl}_n$. Considérons les morphismes $\mathrm{Ev}_{\mathrm{Y}} : \mathrm{End}_k(\mathfrak{gl}_n) \to \mathfrak{gl}_n$, $u \mapsto u(\mathrm{Y})$, et $\theta_{\mathrm{Y}} : \mathrm{G} \to \mathfrak{gl}_n$, $g \mapsto \mathrm{Ad}(g)(\mathrm{Y}) = g\mathrm{Y}g^{-1}$. Alors $\theta_{\mathrm{Y}} = \mathrm{Ev}_{\mathrm{Y}} \circ \mathrm{Ad}$, et on en déduit que $\mathrm{dAd}(\mathrm{X})(\mathrm{Y}) = \mathrm{d}\theta_{\mathrm{Y}}(\mathrm{X}) = \mathrm{X} \circ \phi_{\mathrm{Y}}$, où $\phi_{\mathrm{Y}} : k[\mathfrak{gl}_n] \to k[\mathrm{G}]$ est le comorphisme de θ_{Y}.

On a $\phi_{\mathrm{Y}}(\mathrm{C}_{i,j})(g) = \mathrm{C}_{i,j}(g\mathrm{Y}g^{-1}) = \sum_{\ell,m} \mathrm{C}_{i,\ell}(g)\mathrm{Y}_{\ell,m}\tau(\mathrm{C}_{m,j})(g)$, et donc

$$\phi_{\mathrm{Y}}(\mathrm{C}_{i,j}) = \sum_{\ell,m} \mathrm{C}_{i,\ell}\ \mathrm{Y}_{\ell,m}\ \tau(\mathrm{C}_{m,j}).$$

Appliquant $\mathrm{X} \in \mathfrak{gl}_n \cong \mathrm{Dér}_k(k[\mathrm{GL}_n], k_e)$ à cette égalité, on obtient

$$\mathrm{X}(\phi_{\mathrm{Y}}(\mathrm{C}_{i,j})) = \sum_{\ell,m} \mathrm{X}(\mathrm{C}_{i,\ell})\ \mathrm{Y}_{\ell,m}\ \tau(\mathrm{C}_{m,j})(e) + \sum_{\ell,m} \mathrm{C}_{i,\ell}(e)\ \mathrm{Y}_{\ell,m}\ \mathrm{X}(\tau(\mathrm{C}_{m,j})).$$

Mais $\mathrm{X} \circ \tau = \mathrm{d}\iota(\mathrm{X}) = -\mathrm{X}$, d'après le corollaire 11.14, et donc il vient

$$\mathrm{X} \circ \phi_{\mathrm{Y}}(\mathrm{C}_{i,j}) = \sum_{\ell} \mathrm{X}_{i,\ell}\mathrm{Y}_{\ell,j} - \sum_{m} \mathrm{Y}_{i,m}\mathrm{X}_{m,j} = (\mathrm{XY} - \mathrm{YX})(\mathrm{C}_{i,j}).$$

On en déduit que $\mathrm{dAd(X)(Y)} = \mathrm{XY} - \mathrm{YX} = \mathrm{ad(X)(Y)}$. Ceci prouve le point b), et achève la preuve de la proposition 12.23 et du théorème 12.22. □

13. Différentielles, lissité et séparabilité

13.1. Module des différentielles. — Dans ce paragraphe, k désigne un **anneau commutatif arbitraire**. Le symbole $\otimes$ désigne le produit tensoriel sur k.

Soit A une k-algèbre commutative et soit I le noyau du morphisme d'algèbres $\mathrm{A} \otimes \mathrm{A} \to \mathrm{A}$. Dans ce qui suit, on considère $\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}$ comme un A-module pour l'action de A sur le facteur de gauche, c.-à-d.,

$$a \cdot (b \otimes c) = ab \otimes c = (a \otimes 1)(b \otimes c).$$

Alors I est un sous-A-module (puisque c'est un idéal de $\mathrm{A} \otimes \mathrm{A}$).

Définition 13.1. — On note $\Omega_{\mathrm{A}/k} = \mathrm{I}/\mathrm{I}^2$ et d l'application linéaire $\mathrm{A} \to \Omega_{\mathrm{A}}$ qui associe à un élément a la classe dans I/I^2 de $1 \otimes a - a \otimes 1$.

$\Omega_{\mathrm{A}/k}$ s'appelle le **module des différentielles** (de Kähler) **de** A **sur** k.

Lemme 13.2. — i) I, *resp.* $\Omega_{\mathrm{A}/k}$, *est engendré comme* A-*module par les éléments* $1 \otimes a - a \otimes 1$, *resp. par leurs images* da.

ii) $\mathrm{d} : \mathrm{A} \to \Omega_{\mathrm{A}/k}$ *est une* k-*dérivation.*

iii) *Si* $\mathrm{A} = k[x_1, \dots, x_n]$ *est une* k-*algèbre de type fini, alors* $\Omega_{\mathrm{A}/k} = \mathrm{A}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \mathrm{A}\mathrm{d}x_n$ *est un* A-*module de type fini.*

iv) *Le* A-*module* $\Omega_{\mathrm{A}/k}$ *représente le foncteur* $\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}, -)$, *qui à tout* A-*module* M *associe* $\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M})$ *; c.-à-d., pour tout* M, *on a un isomorphisme :*

$$\theta_{\mathrm{M}} : \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\Omega_{\mathrm{A}}, \mathrm{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M}), \qquad \phi \mapsto \phi \circ \mathrm{d},$$

et cet isomorphisme est fonctoriel en M, *c.-à-d., si* $\psi : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ *est un morphisme de* A-*modules, alors le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\Omega_{\mathrm{A}/k}, \mathrm{M}) & \xrightarrow{\theta_{\mathrm{M}}} & \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M}) \\ {\scriptstyle \phi \mapsto \psi \circ \phi} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \mathrm{D} \mapsto \psi \circ \mathrm{D}} \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\Omega_{\mathrm{A}/k}, \mathrm{M}') & \xrightarrow{\theta_{\mathrm{M}'}} & \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M}'). \end{array}$$

Démonstration. — i) Soit $x = \sum_i a_i \otimes b_i$ un élément de I. Alors $\sum a_i b_i = 0$ et donc $x = x - \sum_i a_i b_i \otimes 1 = \sum_i a_i (1 \otimes b_i - b_i \otimes 1)$, d'où i).

b) Notons π la projection $\mathrm{I} \to \mathrm{I}/\mathrm{I}^2$. Il est clair que d est k-linéaire, et pour $a, b \in \mathrm{A}$ on a

$$1 \otimes ab - ab \otimes 1 = a(1 \otimes b - b \otimes 1) + (1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b).$$

Comme $(1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1) \in \mathrm{I}^2$, on obtient que

$$\mathrm{d}(ab) = a\mathrm{d}(b) + b\mathrm{d}(a).$$

Ceci prouve ii).

iii) Supposons $\mathrm{A} = k[x_1, \ldots, x_n]$. Alors tout $a \in \mathrm{A}$ est combinaison k-linéaire des monômes

$$x^\nu := x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}, \quad \text{pour } \nu \in \mathbb{N}^n,$$

et donc $\Omega_{\mathrm{A}/k}$ est engendré comme k-module par les $\mathrm{d}(x^\nu)$. Or, comme d est une dérivation, on obtient que

$$(*) \qquad \mathrm{d}(x^\nu) = \sum_{i=1}^{n} \nu_i x^{\nu - \varepsilon_i} \mathrm{d}(x_i),$$

où l'on désigne par ε_i le n-uplet dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i-ème qui vaut 1. Il résulte alors de $(*)$ que $\Omega_{\mathrm{A}/k}$ est engendré comme A-module par $\mathrm{d}(x_1), \ldots, \mathrm{d}(x_n)$. Ceci prouve iii).

iv) Soit $\phi : \Omega_{\mathrm{A}/k} \to \mathrm{M}$ un morphisme de A-modules. Comme d est une k-dérivation, il en est de même de $\phi \circ \mathrm{d}$. De plus, comme $\Omega_{\mathrm{A}/k}$ est engendré comme A-module par les $\mathrm{d}(a)$, pour $a \in \mathrm{A}$, alors θ_{M} est injective. Montrons qu'elle est surjective.

Soit $\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M})$. On peut étendre D en une application A-linéaire $\varphi : \mathrm{A} \otimes \mathrm{A} \to \mathrm{M}$, définie par $\varphi(a \otimes b) = a\mathrm{D}(b)$. Un calcul facile montre que φ s'annule sur tout élément $(a \otimes 1 - 1 \otimes a)(b \otimes 1 - 1 \otimes b)$ et donc sur I^2. Donc φ induit un morphisme de A-modules

$$\phi : \mathrm{I}/\mathrm{I}^2 \longrightarrow \mathrm{M},$$

tel que $\phi(\mathrm{d}(a)) = \varphi(1 \otimes a - a \otimes 1) = \mathrm{D}(a)$. Ceci prouve que θ_{M} est un isomorphisme. Enfin, la commutativité du diagramme est claire, car les deux composées sont $\phi \mapsto \psi \circ \phi \circ \mathrm{d}$. Le lemme est démontré. $\square$

13.2. Lemme de Yoneda. —

***Proposition 13.3* (Lemme de Yoneda)**. — *Soient $\mathscr{C}$ une catégorie et* X, Y *deux objets de $\mathscr{C}$. Supposons qu'il existe un* **isomorphisme de foncteurs**

$$\theta : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Y}, -) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X}, -),$$

c.-à-d., qu'on ait pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{C}$ *une bijection*

$$\theta_{\mathrm{M}} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Y}, \mathrm{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X}, \mathrm{M})$$

de sorte que pour tout morphisme $f : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ *dans* $\mathscr{C}$*, le diagramme ci-dessous soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Y},\mathrm{N}) & \xrightarrow[\theta_{\mathrm{N}}]{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X},\mathrm{N}) \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Y},\mathrm{M}) & \xrightarrow[\sim]{\theta_{\mathrm{M}}} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X},\mathrm{M}), \end{array}$$

(c.-à-d., $\theta_{\mathrm{M}}(f \circ g) = f \circ \theta_{\mathrm{N}}(g)$ *pour tout* $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{N}$*). Alors,* $\mathrm{X} \cong \mathrm{Y}$.

Démonstration. — Posons $\phi = \theta_{\mathrm{Y}}(\mathrm{id}_{\mathrm{Y}})$; c'est un morphisme $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, et il induit un morphisme de foncteurs

$$\phi^* : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Y}, -) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X}, -), \quad f \mapsto f \circ \phi.$$

L'astuce est de voir que $\phi^* = \theta$. En effet, soient M un objet de $\mathscr{C}$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Y},\mathrm{M})$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Y},\mathrm{Y}) & \xrightarrow[\sim]{\theta_{\mathrm{Y}}} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Y},\mathrm{M}) & \xrightarrow[\theta_{\mathrm{M}}]{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X},\mathrm{M}), \end{array}$$

qui donne

$$\theta_{\mathrm{M}}(f) = \theta_{\mathrm{M}}(f \circ \mathrm{id}_{\mathrm{Y}}) = f \circ \theta_{\mathrm{Y}}(\mathrm{id}_{\mathrm{Y}}) = f \circ \phi.$$

Comme $\theta_{\mathrm{X}} : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{Y},\mathrm{X}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathrm{X},\mathrm{X})$ est bijective, soit $\psi = \theta_{\mathrm{X}}^{-1}(\mathrm{id}_{\mathrm{X}})$; c'est l'unique morphisme $\psi : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ tel que $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathrm{X}}$. Alors,

$$\theta_{\mathrm{Y}}(\phi \circ \psi) = \phi \circ \psi \circ \phi = \phi = \theta_{\mathrm{Y}}(\mathrm{id}_{\mathrm{Y}}),$$

et la bijectivité de θ_{Y} entraîne $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Y}}$. Donc ϕ et ψ sont des isomorphismes réciproques ; la proposition est démontrée. □

13.3. Retour aux différentielles. —

Proposition 13.4. — *Si* $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]$ *est une algèbre de polynômes, alors* $\Omega_{\mathrm{A}/k}$ *est un* A*-module libre de base* $(\mathrm{dX}_1, \dots, \mathrm{dX}_n)$ *:*

$$\Omega_{\mathrm{A}/k} = \mathrm{AdX}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{AdX}_n$$

Démonstration. — D'après le lemme 13.2, iii), $\Omega_{\mathrm{A}/k}$ est engendré comme A-module par $\mathrm{dX}_1, \dots, \mathrm{dX}_n$, donc on a un morphisme surjectif de A-modules

$$\pi : \mathrm{A}^n \longrightarrow \Omega_{\mathrm{A}/k}, \quad e_i \mapsto \mathrm{dX}_i,$$

où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de A^n. Pour montrer que π est un isomorphisme il suffit, d'après le lemme de Yoneda, de montrer que pour tout A-module M le morphisme induit :

$$(*)\qquad \begin{array}{rcl} \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\Omega_{\mathrm{A}/k}, \mathrm{M}) & \xrightarrow{\pi^*} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}^n, \mathrm{M}) \cong \mathrm{M}^n \\ \mathrm{D} & \mapsto & (\mathrm{D}(\mathrm{X}_1), \dots, \mathrm{D}(\mathrm{X}_n)) \end{array}$$

est un isomorphisme. Puisque les monômes X^ν ($\nu \in \mathbb{N}^n$) forment une k-base de $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n]$, on peut définir pour tout n-uplet $(m_1, \dots, m_n)$ d'éléments de M, une (unique) application k-linéaire $\mathrm{D} : \mathrm{A} \to \mathrm{M}$, par

$$\mathrm{D}(\mathrm{X}^\nu) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{X}^{\nu - \varepsilon_i} m_i,$$

et ceci est un élément de $\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}, \mathrm{M})$. Il en résulte que $(*)$ est un isomorphisme, et la proposition est démontrée. □

Exemples 13.5. — Soient k un corps et $\mathrm{K} = k[x]$ une extension monogène. On va voir plus bas que si x est algébrique séparable sur k, alors $\Omega_{\mathrm{K}/k} = \{0\}$. Tandis que si x est transcendant ou si $\mathrm{car}(k) = p > 0$ et

$$\mathrm{K} = k[\mathrm{X}]/(\mathrm{X}^p - a), \quad \text{où} \quad a \notin k^p,$$

alors $\Omega_{\mathrm{K}/k} = \mathrm{K}\mathrm{d}x$.

Lemme 13.6. — *Soient* A *un anneau et* $\mathrm{M} \xrightarrow{u} \mathrm{N} \xrightarrow{v} \mathrm{P}$ *des morphismes de* A-*modules, tels que* $v \circ u = 0$. *Si, pour tout* A-*module* T, *la suite*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{P}, \mathrm{T}) \xrightarrow{v^*} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{N}, \mathrm{T}) \xrightarrow{u^*} \mathrm{P}$$

est exacte, alors $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u)$.

Démonstration. — On a $\mathrm{Ker}(u^*_{\mathrm{T}}) = \{\psi : \mathrm{N} \to \mathrm{T} \mid \psi(\mathrm{Im}(u)) = 0\}$, et $\mathrm{Im}(v^*_{\mathrm{T}})$ s'identifie à

$$\{\psi : \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{T} \mid \psi(\mathrm{Ker}(v)) = 0\}.$$

Supposons $\mathrm{Im}(v^*_{\mathrm{T}}) = \mathrm{Ker}(u^*_{\mathrm{T}})$ pour tout T. Appliquant ceci à $\mathrm{T} = \mathrm{N}/\mathrm{Im}(u)$, on obtient que $\pi : \mathrm{N} \to \mathrm{N}/\mathrm{Im}(u)$ est nul sur $\mathrm{Ker}(v)$, d'où $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Im}(u)$. Ceci prouve le lemme. □

***Proposition 13.7* (Fonctorialité)**. — *Soit* $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *un morphisme de* k-*algèbres.*

a) ϕ *induit un morphisme de* B-*modules* $\varphi_* : \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \Omega_{\mathrm{A}} \to \Omega_{\mathrm{B}}$, *tel que* $\varphi_*(1 \otimes \mathrm{d}_{\mathrm{A}} a) = \mathrm{d}_{\mathrm{B}} \varphi(a)$, *pour tout* $a \in \mathrm{A}$, *et l'on une suite exacte*

$$(1)\qquad \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \Omega_{\mathrm{A}/k} \xrightarrow{\phi_*} \Omega_{\mathrm{B}/k} \longrightarrow \Omega_{\mathrm{B}/\mathrm{A}} \longrightarrow 0.$$

b) *Si* φ *est surjectif,* φ_* *l'est aussi et, posant* $\mathfrak{m} = \operatorname{Ker}\varphi$, *on a une suite exacte*

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \Omega_{\mathrm{A}/k} \longrightarrow \Omega_{\mathrm{B}/k} \longrightarrow 0. \tag{2}$$

c) *Si* S *est une partie multiplicative de* A, *le morphisme* $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{A}} \Omega_{\mathrm{A}/k} \to \Omega_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}/k}$ *est bijectif.*

Démonstration. — a) $\mathrm{d_B} \circ \varphi$ est une dérivation $\mathrm{A} \to \Omega_{\mathrm{B}/k}$ et donc induit, d'après la propriété universelle, un (unique) A-morphisme $\varphi' : \Omega_{\mathrm{A}/k} \to \Omega_{\mathrm{B}/k}$ tel que $\varphi' \circ \mathrm{d_A} = \mathrm{d_B} \circ \varphi$, c.-à-d.$\varphi'(\mathrm{d_A}a) = \mathrm{d_B}\phi(a)$, pour tout $a \in \mathrm{A}$. On étend φ' par B-linéarité à $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \Omega_{\mathrm{A}/k}$ pour obtenir $\mathrm{d}\varphi$.

D'après le lemme 13.6, pour montrer que (1) est exacte, il suffit de montrer que pour tout B-module M, la suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Dér_A(B, M)} \longrightarrow \mathrm{Dér}_k(\mathrm{B, M}) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A, M}),$$

obtenue en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom_B}(-, \mathrm{M})$, est exacte. Il est clair que la seconde flèche est une inclusion, et le noyau de φ^* est formé des k-dérivations $\mathrm{D} : \mathrm{B} \to \mathrm{M}$ qui sont nulles sur A, c.-à-d., A-linéaires, d'où $\operatorname{Ker}\varphi^* = \mathrm{Dér_A(B, M)}$. Ceci prouve a).

b) Supposons φ surjectif, de noyau $\mathfrak{m}$, de sorte que $\mathrm{B} \cong \mathrm{A}/\mathfrak{m}$. Alors, φ_* est surjectif, puisque $\Omega_{\mathrm{B}/k}$ est engendré comme B-module par les $\mathrm{d_B}\varphi(a) = \varphi_*(\mathrm{d_A}a)$, pour $a \in \mathrm{A}$.

D'autre part, pour tout B-module T et tout $\mathrm{D} \in \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A, T})$, la restriction $\mathrm{D}' = \mathrm{D}|_{\mathfrak{m}}$ est A-linéaire, puisque

$$\mathrm{D}'(ax) = a\mathrm{D}'(x) + x\mathrm{D}(a) = a\mathrm{D}'(x), \qquad \forall\, x \in \mathfrak{m},\ a \in \mathrm{A}.$$

En particulier, considérons la dérivation

$$\mathrm{D}_0 : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \Omega_{\mathrm{A}/k}, \quad a \mapsto 1 \otimes \mathrm{d_A}a.$$

et soit D'_0 sa restriction à $\mathfrak{m}$. Elle est A-linéaire et nulle sur $\mathfrak{m}^2$, donc induit une application B-linéaire $\delta : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \Omega_{\mathrm{A}/k}$ telle que

$$\delta(x + \mathfrak{m}^2) = 1 \otimes \mathrm{d_A}x,$$

et l'on a $\varphi_* \circ \delta = 0$, d'où un complexe de B-modules

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \Omega_{\mathrm{A}/k} \longrightarrow \Omega_{\mathrm{B}/k} \tag{2}$$

Pour montrer qu'il est exact, il suffit de montrer que pour tout B-module T, la suite obtenue en appliquant $\mathrm{Hom_B}(-, \mathrm{T})$ est exacte. Or, pour tout B-module T, on a

$$\mathrm{Hom_B}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, \mathrm{T}) = \mathrm{Hom_A}(\mathfrak{m}, \mathrm{T})$$

et alors, via l'identification $\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A},\mathrm{T}) = \mathrm{Hom}_\mathrm{B}(\mathrm{B}\otimes_\mathrm{A}\Omega_{\mathrm{A}/k},\mathrm{T})$ dans laquelle toute dérivation D correspond à un B-morphisme ϕ tel que $\mathrm{D}(x) = \phi(1\otimes \mathrm{d}_\mathrm{A} x)$ pour tout $x \in \mathrm{A}$, on obtient que le diagramme ci-dessous est commutatif

$$(2')\qquad \begin{array}{ccccc} \mathrm{Hom}_\mathrm{B}(\Omega_{\mathrm{B}/k},\mathrm{T}) & \to & \mathrm{Hom}_\mathrm{B}(\mathrm{B}\otimes_\mathrm{A}\Omega_{\mathrm{A}/k},\mathrm{T}) & \xrightarrow{\delta^*} & \mathrm{Hom}_\mathrm{B}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,\mathrm{T}) \\ \| & & \| & & \| \\ \mathrm{Dér}_k(\mathrm{B},\mathrm{T}) & \to & \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A},\mathrm{T}) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Hom}_\mathrm{A}(\mathfrak{m},\mathrm{T}). \end{array}$$

(On a vu plus haut que la restriction à $\mathfrak{m}$ d'une k-dérivation $\mathrm{A}\to\mathrm{T}$ est A-linéaire). Or $\mathrm{Dér}_k(\mathrm{B},\mathrm{T})$ s'identifie au sous-k-module des k-dérivations $\mathrm{A}\to\mathrm{T}$ nulles sur $\mathfrak{m}$, c.-à-d., au noyau de res. Ceci montre que $(2')$, et donc (2), est exact. Le point b) est démontré.

c) Notons K et C le noyau et le conoyau de $\Omega_{\mathrm{A}/k}\otimes_\mathrm{A}\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}\to\Omega_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}/k}$. Pour montrer que $\mathrm{K}=0=\mathrm{C}$, il suffit de montrer que pour tout $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$-module N, l'application $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}}(\Omega_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}/k},\mathrm{N})\to\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}}(\Omega_{\mathrm{A}/k}\otimes_\mathrm{A}\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A},\mathrm{N})$ est bijective. D'après la propriété universelle, ceci revient à voir que l'application naturelle $\theta : \mathrm{Dér}_k(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A},\mathrm{N})\to\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A},\mathrm{N})$ est bijective. Or, si D est une dérivation $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}\to\mathrm{N}$, alors, pour $a\in\mathrm{A}$, $s\in\mathrm{S}$, on a $\mathrm{D}(as^{-1}) = \mathrm{D}(a)s^{-1} - a\mathrm{D}(s)s^{-2}$.

Ceci montre que θ est injective. Réciproquement, pour tout $\mathrm{D}\in\mathrm{Dér}_k(\mathrm{A},\mathrm{N})$, on vérifie que la formule ci-dessus définit une dérivation $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}\to\mathrm{N}$ qui prolonge D. Donc θ est surjective. □

Corollaire 13.8. — *Si* $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n]$ *et* $\mathrm{B} = \mathrm{A}/(f_1,\dots,f_r)$, *alors*

$$\Omega_{\mathrm{B}/k} \cong (\mathrm{B}\mathrm{d}\mathrm{X}_1\oplus\cdots\oplus\mathrm{B}\mathrm{d}\mathrm{X}_n)\Big/\sum_{i=1}^r \mathrm{B}\mathrm{d}f_i.$$

Démonstration. — Posons $\mathfrak{m} = (f_1,\dots,f_r)$. D'après le point b) de la proposition précédente, on a une suite exacte

$$\mathfrak{m}\xrightarrow{1\otimes\mathrm{d}}\mathrm{B}\otimes_\mathrm{A}\bigoplus_{i=1}^n \mathrm{A}\,\mathrm{d}\mathrm{X}_i\longrightarrow\Omega_{\mathrm{B}/k}\longrightarrow 0$$

et l'image de $1\otimes\mathrm{d}$ est le sous-B-module engendré par les éléments $1\otimes\mathrm{d}f_j$, pour $j=1,\dots,r$. Ceci prouve le corollaire. □

Lemme 13.9. — *Soit* B *un anneau. Un morphisme de* B*-modules* $u : \mathrm{M}\to\mathrm{N}$ *admet un inverse à gauche (on dit aussi : une rétraction)* $v : \mathrm{N}\to\mathrm{M}$ *tel que* $v\circ u = \mathrm{id}_\mathrm{M}$ *si et seulement si pour tout* B*-module* T, *l'application*

$$u_\mathrm{T}^* : \mathrm{Hom}_\mathrm{B}(\mathrm{N},\mathrm{T})\longrightarrow\mathrm{Hom}_\mathrm{B}(\mathrm{M},\mathrm{T}),\quad f\mapsto f\circ u,$$

est surjective.

Démonstration. — Si $vu = \mathrm{id}_{\mathrm{M}}$ alors pour tout B-morphisme $f : \mathrm{M} \to \mathrm{T}$ on a $f = fvu = u_{\mathrm{T}}^*(fv)$, donc u_{T}^* est surjective. Réciproquement, si u_{M}^* est surjective, il existe $v \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathrm{N}, \mathrm{M})$ tel que $\mathrm{id}_{\mathrm{M}} = u_{\mathrm{M}}^*(v) = v \circ u$. □

On peut maintenant généraliser la proposition 13.4 et le corollaire 13.8 comme suit. Soient A une k-algèbre et $\mathrm{B} = \mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$. On s'intéresse à $\Omega_{\mathrm{B}/k}$. Notant τ l'inclusion $\mathrm{A} \hookrightarrow \mathrm{B}$, on a la suite exacte

$$(\dagger) \qquad \mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \Omega_{\mathrm{A}/k} \xrightarrow{\tau_*} \Omega_{\mathrm{B}/k} \twoheadrightarrow \Omega_{\mathrm{B}/\mathrm{A}} = \mathrm{B}d\mathrm{X}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{B}d\mathrm{X}_n.$$

Comme $\tau_*(1 \otimes \mathrm{d}_{\mathrm{A}} a) = \mathrm{d}_{\mathrm{B}} a$, pour tout $a \in \mathrm{A}$, le diagramme ci-dessous est commutatif, pour tout B-module T :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\Omega_{\mathrm{B}/k}, \mathrm{T}) & \xrightarrow{(\tau_*)^*} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\Omega_{\mathrm{A}/k}, \mathrm{T}) \\ {\scriptstyle\cong}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\cong} \\ \mathrm{Dér}_k(\mathrm{B}, \mathrm{T}) & \xrightarrow{\mathrm{res}} & \mathrm{Dér}_k(\mathrm{A}, \mathrm{T}) \end{array} .$$

Or, on peut prolonger toute k-dérivation $\mathrm{D} : \mathrm{A} \to \mathrm{T}$ en une k-dérivation $\widetilde{\mathrm{D}} : \mathrm{B} \to \mathrm{T}$ définie par

$$\widetilde{\mathrm{D}}\Big(\sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu \mathrm{X}^\nu\Big) = \sum_\nu \mathrm{X}^\nu \mathrm{D}(a_\nu).$$

(On vérifie facilement que c'est une dérivation.) Par conséquent, l'application res est surjective, et donc τ_* possède un inverse à gauche, d'après le lemme précédent. On a donc un isomorphisme de B-modules

$$(1) \qquad \Omega_{\mathrm{B}/k} \cong (\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \Omega_{\mathrm{A}/k}) \oplus \mathrm{B}d\mathrm{X}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{B}d\mathrm{X}_n.$$

De plus, via cet isomorphisme, $\mathrm{d}_{\mathrm{B}/k}$ s'identifie à

$$(2) \qquad \widetilde{\mathrm{d}_{\mathrm{A}/k}} + \mathrm{d}_{\mathrm{B}/\mathrm{A}} = \widetilde{\mathrm{d}_{\mathrm{A}/k}} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \mathrm{X}_i},$$

c.-à-d., pour tout $\mathrm{P} = \sum_\nu a_\nu \mathrm{X}^\nu$ dans B,

$$(3) \qquad \mathrm{d}_{\mathrm{B}/k}(\mathrm{P}) = \sum_\nu \mathrm{d}_{\mathrm{A}/k}(a_\nu)\mathrm{X}^\nu + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{X}_i} d\mathrm{X}_i.$$

Soient maintenant $\mathfrak{m}$ un idéal de B et $\mathrm{C} = \mathrm{B}/\mathfrak{m}$. D'après la proposition 13.7, on a une suite exacte de C-modules :

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \xrightarrow{\delta} \mathrm{C} \otimes_{\mathrm{B}} \Omega_{\mathrm{B}/k} \longrightarrow \Omega_{\mathrm{C}/k} \longrightarrow 0,$$

où $\delta(\mathrm{P} + \mathfrak{m}^2) = 1 \otimes \mathrm{d}_{\mathrm{B}/k}\mathrm{P}$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathfrak{m}$. Par conséquent, on a obtenu la proposition suivante.

Proposition 13.10. — *Soient* A *une* k*-algèbre,* $\mathrm{B} = \mathrm{A}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$, $\mathfrak{m}$ *un idéal de* B*, et* $\mathrm{C} = \mathrm{B}/\mathfrak{m}$. *Soit* $(\mathrm{P}_j)_{j\in \mathrm{J}}$ *une famille d'éléments de* B *dont les images engendrent* $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ *comme* C*-module. Alors, on a un isomorphisme de* C*-modules :*

$$\Omega_{\mathrm{C}/k} \cong \frac{\mathrm{C}\otimes_{\mathrm{A}} \Omega_{\mathrm{A}/k} \oplus \mathrm{C}\mathrm{d}\mathrm{X}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{C}\mathrm{d}\mathrm{X}_n}{\bigoplus_{j\in\mathrm{J}} \mathrm{C}\delta(\mathrm{P}_j)}$$

13.4. Application géométrique : différentielles et espaces cotangents. — Dans ce paragraphe, k désigne un corps algébriquement clos. Soit X une variété algébrique affine sur k. On note $\Omega_{\mathrm{X}/k} = \Omega_{k[\mathrm{X}]/k}$. Soit $x \in \mathrm{X}$, soit $\mathfrak{m}_x$ l'idéal maximal correspondant de $k[\mathrm{X}]$ et soit $k_x = k[\mathrm{X}]/\mathfrak{m}_x$.

Proposition 13.11. — a) *On a* $\Omega_{\mathrm{X}} \otimes_{k[\mathrm{X}]} k_x \cong \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$*, et pour tout* $f \in k[\mathrm{X}]$*, l'image de* $\mathrm{d}f \in \Omega_{\mathrm{X}}$ *dans* $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = \mathrm{T}_x^*\mathrm{X}$ *coïncide avec l'image de* $f - f(x)$*, c.-à-d., d'après le lemme* 11.11*, avec la différentielle* $\mathrm{d}_x f \in \mathrm{T}_x^*\mathrm{X}$.

b) *Soit* $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de variétés affines et soit* $\phi : k[\mathrm{Y}] \to k[\mathrm{X}]$ *son comorphisme. Considérons le morphisme de* $k[\mathrm{X}]$*-modules :*

$$\phi_* : \Omega_{\mathrm{Y}/k} \otimes_{k[\mathrm{Y}]} k[\mathrm{X}] \longrightarrow \Omega_{\mathrm{X}/k}.$$

Alors le diagramme ci-dessous est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{\mathrm{Y}} \otimes_{k[\mathrm{Y}]} k_x & \xrightarrow{\phi_*\otimes 1} & \Omega_{\mathrm{X}} \otimes_{k[\mathrm{X}]} k_x \\ \cong\big\downarrow & & \cong\big\downarrow \\ \mathfrak{m}_{u(x)}/\mathfrak{m}_{u(x)}^2 & \xrightarrow{{}^t(\mathrm{d}_x u)} & \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \end{array} .$$

Démonstration. — a) Posons $k[\mathrm{X}] = \mathrm{A}$. Alors $\mathrm{A} = \mathfrak{m}_x \oplus k1$, et la projection $\mathrm{A} \to \mathfrak{m}_x$ est donnée par $f \mapsto f - f(x)$. Composant ceci avec l'application $\mathfrak{m}_x \to \Omega_{\mathrm{A}/k} \otimes k_x$ de 13.7, et tenant compte du fait que $\Omega_{k_x/k} = \{0\}$, on obtient une application k-linéaire surjective

$$\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \overset{\delta}{\twoheadrightarrow} \Omega_{\mathrm{A}/k} \otimes k_x,$$

telle que $\delta(\overline{f - f(x)}) = \mathrm{d}f \otimes 1$ pour tout $f \in \mathrm{A}$. Réciproquement, l'application

$$\pi : \mathrm{A} \longrightarrow \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2, \quad f \mapsto \overline{f - f(x)}$$

est une k-dérivation de A dans le k_x-module $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$, puisque

$$\overline{fg - fg(x))} = f\pi(g) + g(x)\pi(f) = f\pi(g) + g\pi(f).$$

Il lui correspond donc un élément τ de

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\Omega_{\mathrm{A}/k}, \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2) = \mathrm{Hom}_{k_x}(\Omega_{\mathrm{A}/k} \otimes_{\mathrm{A}} k_x, \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)$$

tel que $\tau(\mathrm{d}f) = \overline{f - f(x)}$. Par conséquent, τ et δ sont des isomorphismes réciproques, et l'on a bien dans $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = \mathrm{T}_x^*\mathrm{X}$ l'égalité

$$\tau(\mathrm{d}f) = \overline{f - f(x)} = \mathrm{d}_x f.$$

Ceci prouve a).

L'assertion b) en résulte. En effet, posons $y = u(x)$ et soit $f \in k[\mathrm{Y}]$. L'image de $\mathrm{d}f \otimes 1$ dans $\mathfrak{m}_y/\mathfrak{m}_y^2$ est $\overline{f - f(u(x))}$ et, par définition, ${}^t(\mathrm{d}_x u)$ est l'application induite par le comorphisme $\phi : g \mapsto g \circ u$. Par conséquent, l'image de $\mathrm{d}f \otimes 1$ par la composée du bas est

$$\overline{f \circ u - f \circ u(x)}$$

qui est l'image dans $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ de

$$\mathrm{d}(f \circ u) \otimes 1 = \phi_*(\mathrm{d}f \otimes 1).$$

Comme $\Omega_{\mathrm{Y}/k} \otimes_{k[\mathrm{Y}]} k_x$ est engendré par les $\mathrm{d}f \otimes 1$, pour $f \in k[\mathrm{Y}]$, ceci prouve la commutativité du diagramme. La proposition est démontrée. $\square$

Définition 13.12. — On notera u^* le morphisme $\phi_* : \Omega_{\mathrm{Y}/k} \otimes_{k[\mathrm{Y}]} k[\mathrm{X}] \to \Omega_{\mathrm{X}/k}$. La proposition précédente montre que u^* est un analogue global des applications linéaires ${}^t(\mathrm{d}_x u)$, pour $x \in \mathrm{X}$.

Dans le cas où X et Y sont irréductibles et u dominant, on va étudier u^* au niveau des corps de fractions $k(\mathrm{Y})$ et $k(\mathrm{X})$.

13.5. Critères de séparabilité. —

Proposition 13.13. — *Soit* L/K *une extension de type fini. Alors* $\dim_{\mathrm{L}} \Omega_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \geqslant \deg \mathrm{tr}_{\mathrm{K}} \mathrm{L}$. *De plus, on a l'égalité si* L/K *est séparablement engendrée.*

Afin de démontrer ceci en se ramenant au cas où l'extension L/K est monogène (c.-à-d., $\mathrm{L} = \mathrm{K}(x)$ pour un $x \in \mathrm{L}$), il est commode de démontrer la proposition un peu plus générale suivante.

Proposition 13.14. — *Soient* $k \subseteq \mathrm{K} \subseteq \mathrm{L}$ *des corps, avec* L/K *de type fini. Alors*

$$(*) \qquad \dim_{\mathrm{L}} \Omega_{\mathrm{L}/k} \geqslant \dim_{\mathrm{K}} \Omega_{\mathrm{K}/k} + \deg \mathrm{tr}_{\mathrm{K}} \mathrm{L}.$$

De plus, on a l'égalité si L/K *est séparablement engendrée.*

Démonstration. — Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer l'inégalité dans le cas où L/K est monogène. En effet, supposons la proposition établie dans ce cas, et écrivons $\mathrm{L} = \mathrm{K}(x_1, \ldots, x_m)$. Posant $\mathrm{K}_0 = \mathrm{K}$ et $\mathrm{K}_i = \mathrm{K}_{i-1}(x_i)$ pour $i = 1, \ldots, m$, on obtient alors, pour tout $i = m, \ldots, 1$:

$$\dim_{\mathrm{K}_i} \Omega_{\mathrm{K}_i/k} \geqslant \dim_{\mathrm{K}_{i-1}} \Omega_{\mathrm{K}_{i-1}/k} + \deg \mathrm{tr}_{\mathrm{K}_{i-1}} \mathrm{K}_i.$$

Sommant ces égalités, et utilisant le fait que $\sum_{i=1}^{m} \deg \mathrm{tr}_{\mathrm{K}_{i-1}} \mathrm{K}_i = \deg \mathrm{tr}_{\mathrm{K}} \mathrm{L}$, on obtient que

$$\dim_{\mathrm{L}} \Omega_{\mathrm{L}/k} \geqslant \dim_{\mathrm{K}} \Omega_{\mathrm{K}/k} + \deg \mathrm{tr}_{\mathrm{K}} \mathrm{L}.$$

Montrons maintenant la proposition lorsque $\mathrm{L} = \mathrm{K}(x)$. Si x est transcendant, on a, d'après 13.7 c) et 13.10,

$$\Omega_{\mathrm{L}/k} = \mathrm{L} \otimes_{\mathrm{K}[x]} \Omega_{\mathrm{K}[x]/k} \cong \mathrm{L} \otimes_{\mathrm{K}} \Omega_{\mathrm{K}/k} \oplus \mathrm{Ld}x,$$

d'où

$$(1) \qquad \dim_{\mathrm{L}} \Omega_{\mathrm{L}/k} = \dim_{\mathrm{K}} \Omega_{\mathrm{K}/k} + 1 = \dim_{\mathrm{K}} \Omega_{\mathrm{K}/k} + \deg \mathrm{tr}_{\mathrm{K}} \mathrm{L},$$

c.-à-d., on a l'égalité dans $(*)$ dans ce cas.

Si x est algébrique sur K soit P désigne son polynôme minimal. Alors $\mathrm{L} = \mathrm{K}[x] \cong \mathrm{K}[\mathrm{X}]/(\mathrm{P})$ d'où, d'après 13.10, un isomorphisme

$$\Omega_{\mathrm{L}/k} \cong \frac{(\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{K}} \Omega_{\mathrm{K}/k}) \oplus \mathrm{LdX}}{\mathrm{L}\delta(\mathrm{P})}.$$

On a donc $\dim_{\mathrm{L}} \Omega_{\mathrm{L}/k} \geqslant \dim_{\mathrm{K}} \Omega_{\mathrm{K}/k}$, avec l'égalité si et seulement si $\delta(\mathrm{P}) \neq 0$. Ceci prouve déjà l'inégalité $(*)$.

De plus, si $\mathrm{P} = \mathrm{X}^d + a_1 \mathrm{X}^{d-1} + \cdots + a_d$, avec $a_i \in \mathrm{K}$,

$$\delta(\mathrm{P}) = \sum_{i=1}^{d} x^{d-i} \mathrm{d}_{\mathrm{K}/k}(a_i) + (\sum_{i=1}^{d} i a_i x^{i-1}) \mathrm{dX} = (\widetilde{\mathrm{d}_{\mathrm{K}/k}} \mathrm{P})(x) + \mathrm{P}'(x) \mathrm{dX}.$$

Comme $(\widetilde{\mathrm{d}_{\mathrm{K}/k}} \mathrm{P})(x) \in \mathrm{L} \otimes_{\mathrm{K}} \Omega_{\mathrm{K}/k}$, on a

$$(\dagger) \qquad \delta(\mathrm{P}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{P}' = 0 \text{ et } \mathrm{d}_{\mathrm{K}/k}(a_i) = 0, \ \forall\, i = 1, \ldots, d.$$

En particulier, si P est séparable, alors $\mathrm{P}'(x) \neq 0$ et donc $\delta(\mathrm{P}) \neq 0$, d'où l'égalité dans $(*)$ dans ce cas.

Supposons maintenant L/K séparablement engendrée et soit $\mathrm{B} = (\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r)$ une base de transcendance de L sur K. Posons $\mathrm{K}' = \mathrm{K}(\mathrm{B})$. Par application répétées de (1), on obtient que

$$(2) \qquad \dim_{\mathrm{K}'} \Omega_{\mathrm{K}'/k} = \dim_{\mathrm{K}} \Omega_{\mathrm{K}/k} + r = \dim_{\mathrm{K}} \Omega_{\mathrm{K}/k} + \deg \mathrm{tr}_{\mathrm{K}} \mathrm{K}'.$$

D'autre part, comme l'extension L/K' est algébrique séparable et de type fini, alors, d'après le théorème de l'élément primitif (voir, par exemple, [**Po**, Chap.6], 26.7.3 ou 25.4.2), il existe $\xi \in \mathrm{L}$, algébrique séparable sur K', tel que $\mathrm{L} = \mathrm{K}'[\xi]$. Donc, d'après la discussion précédente, l'on a

$$\dim_{\mathrm{L}} \Omega_{\mathrm{L}/\mathrm{K}'} = \dim_{\mathrm{K}'} \Omega_{\mathrm{K}'/k}.$$

Combiné avec (2), ceci donne $\dim_{\mathrm{L}} \Omega_{\mathrm{L}/k} = \dim_{\mathrm{K}} \Omega_{\mathrm{K}/k} + \deg \mathrm{tr}_{\mathrm{K}} \mathrm{L}$, c.-à-d., on a l'égalité dans $(*)$. La proposition est démontrée. □

Proposition 13.15. — *Réciproquement, soit* L/K *une extension de type fini telle que* $\dim_{\mathrm{L}} \Omega_{\mathrm{L}/k} = \deg \operatorname{tr}_{\mathrm{K}} \mathrm{L}$. *Alors* L/K *est séparablement engendrée.*

Démonstration. — Traitons d'abord le cas où L/K est algébrique, auquel cas l'hypothèse entraîne $\Omega_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} = \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{L}$ et soit P son polynôme minimal sur K. Il résulte de l'inégalité $(*)$ dans la proposition précédente que $\Omega_{\mathrm{K}[x]/\mathrm{K}} = 0$, d'où $\delta(\mathrm{P}) \neq 0$. Mais, ici $\delta(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'(x)$, puisque $\mathrm{d}_{\mathrm{K}/\mathrm{K}} = 0$. Donc $\mathrm{P}'(x) \neq 0$ et x est séparable. Ceci prouve la proposition dans le cas où L/K est algébrique.

Supposons maintenant $\dim_{\mathrm{L}} \Omega_{\mathrm{L}/k} = \deg \operatorname{tr}_{\mathrm{K}} \mathrm{L} = r > 0$ et soient $x_1, \ldots, x_r \in \mathrm{L}$ tels que $\mathrm{B} = (\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_r)$ soit une base de $\Omega_{\mathrm{L}/k}$. Posons $\mathrm{K}' = \mathrm{K}(\mathrm{B})$. Alors, dans la suite exacte

$$\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{K}'} \Omega_{\mathrm{K}'/k} \longrightarrow \Omega_{\mathrm{L}/\mathrm{K}} \longrightarrow \Omega_{\mathrm{L}/\mathrm{K}'} \longrightarrow 0,$$

la première flèche est surjective, puisque son image contient la base B de $\Omega_{\mathrm{L}/\mathrm{K}}$. Par conséquent, $\Omega_{\mathrm{L}/\mathrm{K}'} = 0$. Donc L/K' est algébrique, d'après l'inégalité $(*)$, et séparable, d'après le cas traité plus haut. Donc L' est algébrique séparable sur $\mathrm{K}' = \mathrm{K}(x_1, \ldots, x_r)$. Comme $r = \deg \operatorname{tr}_{\mathrm{K}} \mathrm{L}$, les x_i sont nécessairement algébriquement indépendants, et donc B B est une base de transcendance séparante de L/K, et L/K est séparablement engendrée. □

Définition 13.16. — On dit qu'un corps k est **parfait** si $\operatorname{car}(k) = 0$ ou bien si $\operatorname{car}(k) = p > 0$ et si le morphisme de corps $k \to k$, $x \mapsto x^p$ est surjectif (et donc bijectif). En particulier, tout corps algbériquement clos (et aussi tout corps fini) est parfait.

Proposition 13.17. — *Soit k un corps parfait. Toute extension* K/k *de type fini est séparablement engendrée. Plus précisément, si* $\mathrm{K} = k(x_1, \ldots, x_n)$ *et* $\deg \operatorname{tr}_k \mathrm{K} = r$*, il existe une permutation* $\sigma \in \mathrm{S}_n$ *telle que* $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)})$ *soit une base de transcendance séparante.*

Démonstration. — Si $\operatorname{car}(k) = 0$, toute base de transcendance est séparante, donc on suppose $\operatorname{car}(k) = p > 0$. On procède par récurrence sur n. Si $r = 0$ ou $r = n$, il n'y a rien à montrer. On peut donc supposer que $1 \leqslant r < n$ et, quitte à renuméroter les x_i, que $(x_1, \ldots, x_r)$ est une base de transcendance. Alors $x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}$ sont algébriquement indépendants, donc il existe un polynôme $\mathrm{P} \in k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{r+1}]$ tel que $\mathrm{P}(x_1, \ldots, x_{r+1}) = 0$, et de degré total minimum. Alors, P est irréductible, disons de degré $d \geqslant 1$. De plus, $\mathrm{P} \notin k[\mathrm{X}_1^p, \ldots, \mathrm{X}_{r+1}^p]$ car sinon, comme k est parfait, on pourrait former le polynôme $\mathrm{P}^{1/p}$, de degré d/p, qui s'annulerait aussi en $(x_1, \ldots, x_{r+1})$, contredisant la minimalité de d. Il existe donc au moins un indice $i \in \{1, \ldots, r+1\}$ tel que P ne soit pas un polynôme en x_i^p.

Alors, x_i est algébrique sur $\mathrm{B} = \{x_1, \ldots, x_{r+1}\} \setminus \{x_i\}$, et il en résulte que B est une base de transcendance de L/k. Par conséquent,

$$k[\mathrm{B}][\mathrm{X}] \cong k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_{r+1}]$$

et donc le polynôme $\mathrm{P}(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_{r+1})[\mathrm{X}]$ est irréductible, et n'appartient pas à $k(\mathrm{B})[\mathrm{X}^p]$. Il en résulte que x_i est algébrique **séparable** sur $k(\mathrm{B})$, et donc a fortiori sur $\mathrm{K}' = k(x_1, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n)$. Par hypothèse de récurrence, il existe un sous-ensemble $\{i_1 < \cdots < i_r\}$ de $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ tel que K' est algébrique séparable sur $\mathrm{K}_0 = k(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$. Comme x_i est algébrique séparable sur K', il l'est aussi sur K_0, par transitivité. Il en résulte que $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ est une base de transcendance séparante de L/K. La proposition est démontrée. □

Remarque 13.18. — La démonstration ci-dessus est tirée de la preuve de [**Jac80**, Thm. 8.37]. Pour une autre démonstration, qui utilise la proposition 13.15, voir [**Sp**, Prop. 4.2.10].

Corollaire 13.19. — *Soit k un corps parfait. Pour toute extension de type fini L/k, on a*

$$\dim_{\mathrm{L}} \Omega_{\mathrm{L}/k} = \dim_k \mathrm{Dér}_k(\mathrm{L}, \mathrm{L}) = \deg \mathrm{tr}_k \mathrm{L}.$$

Démonstration. — Ceci résulte de la proposition précédente et de 13.13. □

13.6. Localisation de modules et de morphismes. — Dans ce paragraphe, k est un corps algébriquement clos et X une variété algébrique sur k, affine et irréductible. On pose $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}]$ et $\mathrm{K} = k(\mathrm{X})$. Soit M un A-module non nul de type fini. Pour $x \in \mathrm{X}$ ou $f \in \mathrm{A}$, on note $\mathrm{M}_x = \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}_{\mathfrak{m}_x}$ et $\mathrm{M}_f = \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}_f$. Soient $\mathrm{M}_{\mathrm{K}} = \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{K}$ et $r = \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{M}_{\mathrm{K}}$.

Proposition 13.20. — a) *Il existe $f \in \mathrm{A} \setminus \{0\}$ tel que M_f soit un A_f-module libre de rang r.*

b) *Pour tout $x \in \mathrm{X}$, on a $\dim_k \mathrm{M}_x/\mathfrak{m}_x\mathrm{M}_x \geqslant r$. L'égalité a lieu ssi M_x est libre, et l'ensemble des tels x est un ouvert non-vide de* X.

Démonstration. — Soit $\{m_1, \ldots, m_n\}$ un système de générateurs de M. Traitons d'abord le cas où $r = 0$, c.-à-d., $\mathrm{M}_{\mathrm{K}} = \{0\}$. Dans ce cas, il existe $f \in \mathrm{A}\setminus\{0\}$ tel que $fm_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$, et l'on a $\mathrm{M}_f = \{0\}$ et $\mathrm{M}_x = \{0\}$ pour tout $x \in \mathrm{D}(f)$. Ceci prouve que

$$\mathrm{U} = \{x \in \mathrm{X} \mid \mathrm{M}_x = (0)\}$$

contient l'ouvert non-vide $\mathrm{D}(f)$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{U}$ alors pour $i = 1, \ldots, n$ il existe $g_i \in \mathrm{A} \setminus \mathfrak{m}_x$ tel que $g_i m_i = 0$; posons $g = g_1 \cdots g_n$. Alors $x \in \mathrm{D}(g) \subseteq \mathrm{U}$. Ceci prouve que U est un ouvert dense.

Supposons maintenant que $r \geqslant 1$. Quitte à renuméroter les m_i, on peut supposer que les $m_i \otimes 1$, pour $i \leqslant r$, forment une base de M_{K}. Alors, $m_1, \ldots, m_r$

sont linéairement indépendants sur A donc forment une A-base du sous-A-module N qu'ils engendrent. Le module quotient M/N vérifie $(\mathrm{M}/\mathrm{N})_{\mathrm{K}} = \{0\}$ donc d'après le premier cas, il existe $f \in \mathrm{A} \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{M}_f = \mathrm{N}_f$ soit librement engendré comme A_f-module par $m_1, \dots, m_r$. Alors, pour tout $x \in \mathrm{D}(f)$, $\mathrm{M}_x = (\mathrm{M}_f)_x$ est libre de rang r sur $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}_x}$, et donc l'ensemble $\mathrm{U} = \{x \in \mathrm{X} \mid \dim_k \mathrm{M}_x/\mathfrak{m}_x\mathrm{M}_x = r\}$ est non-vide.

D'autre part, soient $x \in \mathrm{X}$ et $s := \dim_k \mathrm{M}_x/\mathfrak{m}_x\mathrm{M}_x$. Soient $e_1, \dots, e_s$ des éléments de M dont les images engendrent $\mathrm{M}_x/\mathfrak{m}_x\mathrm{M}_x$. Il résulte du lemme de Nakayama que $e_1, \dots, e_s$ engendrent M_x sur $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}_x}$ et donc M_{K} sur K. Donc $s \geqslant r$.

Enfin, si $s = r$, alors $e_1, \dots, e_r$ sont linéairement indépendants sur K, donc forment une base de M_x. Il existe donc des $\beta_{ij} \in \mathrm{A}_{\mathfrak{m}_x}$ tels que $m_j = \sum_{i=1}^r \beta_{ij} e_i$, pour $j = 1, \dots, n$. Soit $g \in \mathrm{A} \setminus \mathfrak{m}_x$ un dénominateur commun des β_{ij}. Alors $x \in \mathrm{D}(g)$ et les β_{ij} sont dans A_g donc M_g est librement engendré par $e_1, \dots, e_r$, d'où $x \in \mathrm{D}(g) \subseteq \mathrm{U}$. Ceci montre que U est ouvert. La proposition est démontrée. □

Considérons maintenant un A-morphisme $\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ entre A-modules de type fini. Soient $m = \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{M}_{\mathrm{K}}$, $n = \dim_{\mathrm{K}} \mathrm{N}_{\mathrm{K}}$ et $r = \mathrm{rang}(\phi_{\mathrm{K}})$. Pour tout $x \in \mathrm{X}$, on pose $\overline{\mathrm{M}}_x = \mathrm{M}_x/\mathfrak{m}_x\mathrm{M}_x$ et $\overline{\mathrm{N}}_x = \mathrm{N}_x/\mathfrak{m}_x\mathrm{N}_x$ et on note $\overline{\phi}_x$ l'application induite $\overline{\mathrm{M}}_x \to \overline{\mathrm{N}}_x$.

Proposition 13.21. — (i) *Si ϕ_{K} est injective, l'ensemble* U *des $x \in \mathrm{X}$ tels que M_x et N_x soient libres et $\overline{\phi}_x$ injective est un ouvert non-vide.*

(ii) *S'il existe x tel que N_x soit libre et $\overline{\phi}_x$ injective, alors M_x est libre et ϕ_{K} injective.*

Démonstration. — Soient $\mathrm{P} = \mathrm{Ker}\,\phi$ et $\mathrm{C} = \mathrm{Coker}\,\phi$. Comme la localisation est un foncteur exact, on a $\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{C}_{\mathrm{K}} = n - r$, et pour tout $x \in \mathrm{X}$ on a une suite exacte :

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{P}_x \longrightarrow \mathrm{M}_x \xrightarrow{\phi_x} \mathrm{N}_x \longrightarrow \mathrm{C}_x \longrightarrow 0.$$

(i) Si ϕ_{K} est injective, alors $\dim_{\mathrm{K}} \mathrm{C}_{\mathrm{K}} = n - m$. D'après la proposition précédente, l'ensemble U′ des x tels que M_x et N_x soient libres (de rang m et n respectivement) est un ouvert non-vide. Soit $x \in \mathrm{U}'$. Si C_x est libre, alors la suite exacte $(*)$ est scindée, d'où $\mathrm{P}_x = 0$ et $\overline{\phi}_x$ injective.

D'autre part, comme $\mathrm{C}_x/\mathfrak{m}_x\mathrm{C}_x = \mathrm{Coker}\,\overline{\phi}_x$ ($\otimes$ est exact à droite), si $\overline{\phi}_x$ est injective alors $\dim_k(\mathrm{C}_x/\mathfrak{m}_x\mathrm{C}_x) = n - m$ et donc C_x est libre. Ceci montre que $\mathrm{U} = \{x \in \mathrm{U}' \mid \mathrm{C}_x \text{ libre}\}$; c'est un ouvert non-vide de X.

(ii) Supposons qu'il existe $x \in \mathrm{X}$ tel que N_x soit libre et $\overline{\phi}_x$ injective. Alors, on a une suite exacte $0 \to \overline{\mathrm{M}}_x \to \overline{\mathrm{N}}_x \to \overline{\mathrm{C}}_x \to 0$.

On a donc $n = \dim_k \overline{\mathrm{N}}_x = \dim_k \overline{\mathrm{M}}_x + \dim_k \overline{\mathrm{C}}_x \geqslant m + (n-r)$, et on en déduit que $\overline{\mathrm{M}}_x$ et $\overline{\mathrm{C}}_x$ sont libres et que $r = m$, et donc que ϕ_{K} est injective. □

Remarque 13.22. — On laisse au lecteur le soin de reformuler la proposition en termes de conditions équivalentes. Si ϕ vérifie ces conditions, on dit que ϕ est **génériquement injectif**.

On peut maintenant énoncer et démontrer complètement le théorème ci-dessous, qui avait été énoncé comme théorème 11.7, mais en renvoyant à [**Hu2**, § 5.2] ou [**Ku**, § VI.1] pour l'assertion cruciale que le minimum des $\dim_k \mathrm{T}_x\mathrm{X}$ égale $\dim \mathrm{X}$.

Théorème 13.23. — *Soit* X *une variété algébrique. L'ensemble* Rég(X) *des points lisses est un ouvert dense.*

Démonstration. — D'après la proposition 10.23 et le lemme 10.3, Rég(X) est contenu dans l'ouvert de X formé des points qui n'appartiennent qu'à une seule composante irréductible de X. Il suffit donc de montrer que si X est irréductible alors Rég(X) est un ouvert non-vide. En recouvrant X par des ouverts affines, on se ramène au cas où X est irréductible et affine.

Posons alors $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}]$, $\mathrm{K} = k(\mathrm{X})$ et $\mathrm{M} = \Omega_{\mathrm{X}}$. On sait, d'après 13.7 c), que $\mathrm{K} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M} = \Omega_{\mathrm{K}/k}$, et d'après 13.19,

$$\dim_{\mathrm{K}}(\mathrm{K} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}) = \dim_{\mathrm{K}} \Omega_{\mathrm{K}/k} = \deg \mathrm{tr}_k \mathrm{K} = \dim \mathrm{X}.$$

D'autre part, d'après la proposition 13.11, on a

$$\mathrm{Rég}(\mathrm{X}) = \{x \in \mathrm{X} \mid \dim_k(\mathrm{M}_x/\mathfrak{m}_x\mathrm{M}_x) = \dim \mathrm{X}\}.$$

La proposition 13.20 entraîne alors que Rég(X) est un ouvert dense de X. Le théorème est démontré. □

13.7. Séparabilité et différentielles. —

Théorème 13.24. — *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de variétés irréductibles. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est séparable.*

(ii) *Il existe* U *ouvert dense de* X *tel que :* $\forall\, x \in \mathrm{U}$, $\mathrm{d}_x f$ *est surjective.*

(iii) *Il existe un point lisse x tel que* $\mathrm{d}_x f$ *soit surjective.*

Démonstration. — On peut supposer X et Y affines. Comme Rég(X) est ouvert et dense dans X, alors (ii) ⇒ (iii). Montrons que (iii) ⇒ (i).

Posons $\mathrm{Z} = \overline{f(\mathrm{X})}$. C'est une sous-variété fermée irréductible de Y. On va montrer que Z = Y. Notons τ l'inclusion $\mathrm{Z} \hookrightarrow \mathrm{Y}$, et $\psi : \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$. Soit $y =$

$f(x) = \tau\psi(x)$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \Omega_{Y/k} \otimes_{k[Y]} k[X] & \xrightarrow{\tau^*} & \Omega_{Z/k} \otimes_{k[Z]} k[X] & \xrightarrow{\psi^*} & \Omega_{X/k} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathfrak{m}_{Y,y}/\mathfrak{m}^2_{Y,y} & \xrightarrow{{}^t(d_y\tau)} & \mathfrak{m}_{Z,y}/\mathfrak{m}^2_{Z,y} & \xrightarrow{{}^t(d_x\psi)} & \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}^2_x. \end{array}$$

On sait que ${}^t(\mathrm{d}_y\tau)$ est surjective. D'autre part, par hypothèse, ${}^t(\mathrm{d}_x f) = {}^t(\mathrm{d}_x\psi) \circ {}^t(\mathrm{d}_y\tau)$ est injective. Il en résulte que ${}^t(\mathrm{d}_y\tau)$ est un isomorphisme, et ${}^t(\mathrm{d}_x\psi)$ injective.

Appliquant la proposition 13.21.(ii) au morphisme τ^* de $M := \Omega_Z \otimes_{k[Z]} k[X]$ vers $N := \Omega_X$, on obtient que M_y est libre, donc de rang égal à

$$\dim_{k(X)} \Omega_{Z/k} \otimes_{k[Z]} k(X) = \dim_{k(Z)} \Omega_{Z/k} \otimes_{k[Z]} k(Z) = \dim Z.$$

Ceci est donc aussi la dimension de $\overline{M}_y = T^*_y Z$. Comme $\mathrm{d}_y\tau$ est un isomorphisme, on obtient

$$\dim Y \leqslant \dim_k T^*_y Y = \dim_k T_y Z = \dim Z.$$

Ceci entraîne que $Z = Y$, et donc f est dominant. D'autre part, il résulte aussi de 13.21.(ii) que $\Omega_Y \otimes_{k[Y]} k[X] \longrightarrow \Omega_X$ est injectif. Comme

$$\Omega_Y \otimes_{k[Y]} k[X] \otimes_{k[X]} k(X) \cong \Omega_Y \otimes_{k[Y]} k(Y) \otimes_{k(Y)} k(X) \cong \Omega_{k(Y)} \otimes_{k(Y)} k(X),$$

on obtient que $\Omega_{k(Y)} \otimes_{k(Y)} k(X) \to \Omega_{k(X)}$ est injective. Donc f est séparable. Ceci montre que (iii) $\Rightarrow$ (i).

Réciproquement, supposons f séparable. Alors f est dominant et, utilisant le raisonnement précédent en sens inverse, on obtient que $\Omega_{k(Y)} \otimes_{k(Y)} k(X) \to \Omega_{k(X)}$ est injectif, et donc le morphisme $\Omega_Y \otimes_{k[Y]} k[X] \to \Omega_X$ est génériquement injectif. Grâce à la proposition 13.21.(i), on obtient alors que (i) $\Rightarrow$ (ii). Le théorème est démontré. □

Remarque 13.25. — L'hypothèse de lissité dans (iii) est nécessaire : considérer $C \hookrightarrow k^2$, où C est une courbe singulière (par exemple $y^2 - x^3 = 0$).

13.8. Application aux espaces homogènes. —

Proposition 13.26. — *Soient* G *un groupe algébrique,* X, Y *deux* G*-variétés homogènes et* $\phi : X \to Y$ *un morphisme* G*-équivariant. Alors :*

a) *Si* $\mathrm{d}_x\phi$ *est surjective pour un* $x \in X$, *elle l'est pour tout* x. *Dans ce cas,* ϕ *est séparable.*

b) *Si* ϕ *est bijectif et séparable, c'est un isomorphisme.*

c) *Si* $\phi : G \to H$ *est un morphisme bijectif de groupes algébriques tel que* $\mathrm{d}_e\phi$ *soit surjective,* ϕ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — a) Notant $\lambda_{\mathrm{X}}(g)$ et $\lambda_{\mathrm{Y}}(g)$ les automorphismes de X et Y induits par $g \in \mathrm{G}$, on a $\phi \circ \lambda_{\mathrm{X}}(g) = \lambda_{\mathrm{Y}}(g) \circ \phi$. Donc $\mathrm{d}_{gx}\phi \circ \mathrm{d}_x\lambda_{\mathrm{X}}(g) = \mathrm{d}_{\phi(x)}\lambda_{\mathrm{Y}}(g) \circ \mathrm{d}_x\phi$. Comme $\mathrm{d}_x\lambda_{\mathrm{X}}(g)$ et $\mathrm{d}_{\phi(x)}\lambda_{\mathrm{Y}}(g)$ sont des isomorphismes, ceci entraîne la première assertion de a). La seconde résulte alors du théorème 13.24.

b) Supposons ϕ bijectif et séparable. Par G-équivariance, il résulte de 13.24 que $\mathrm{d}_x\phi$ est surjective pour tout $x \in \mathrm{X}$.

Soit Y_i une composante connexe de Y et soient $y_i \in \mathrm{Y}_i$ et $x_i = \phi^{-1}(y_i)$. D'après le lemme 10.17, on a $\mathrm{Y}_i = \mathrm{G}^0 y_i$ et, de même, $\mathrm{X}_i := \mathrm{G}^0 x_i$ est une composante connexe de X. Comme ϕ est bijectif, on a $\mathrm{X}_i = \phi^{-1}(\mathrm{Y}_i)$, et la restriction de ϕ à X_i est bijective, et séparable (car $\mathrm{d}_{x_i}\phi$ est surjective), donc birationnelle. D'après le lemme précédent, c'est donc un isomorphisme de $\mathrm{X}_i = \phi^{-1}(\mathrm{Y}_i)$ sur Y_i. Comme Y_i était arbitrairement choisie, ceci prouve b).

c) L'application inverse étant évidemment un morphisme de groupes, il suffit de montrer que ϕ est un isomorphisme de variétés. Or, H un G-espace homogène via $g \cdot h = \phi(g)h$, et ϕ est alors G-équivariant. Le résultat découle alors de a) et b). ☐

Proposition 13.27. — *Soient* X *une* G*-variété et* $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{X}$ *un morphisme* G*-équivariant. Soient* $x = \phi(e)$ *et* $\mathrm{G}_x = \{g \in \mathrm{G} \mid gx = x\}$ *son stabilisateur. Comme la restriction de* ϕ *à* G_x *est constant,* $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_x) \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}_e\phi$. *Réciproquement, notant* $\psi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}x$ *le morphisme orbite, on a :*

$$\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}_e\phi = \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_x) \Leftrightarrow \psi \text{ est séparable.}$$

Démonstration. — La première assertion est claire ; prouvons la seconde. D'après la proposition 13.26, ψ est séparable si et seulement si $\mathrm{d}_e\psi = \mathrm{d}_e\phi$ est surjective.

Comme les fibres de ψ sont toutes de dimension $\dim \mathrm{G}_x$ (ce sont les classes $g\mathrm{G}_x$), on a $\dim \mathrm{G}x = \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{G}_x$. Comme $\mathrm{G}x$ est lisse, on a donc

$$\dim \mathrm{T}_x\mathrm{G}x = \dim \mathrm{G}x = \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{G}_x = \dim \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) - \dim \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_x).$$

Comme $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_x) \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}_e\phi$, on en déduit que $\mathrm{d}_e\phi$ est surjective si, et seulement si, $\mathrm{Ker}\,\mathrm{d}\phi = \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_x)$. ☐

Corollaire 13.28. — *Soit* $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme bijectif de groupes algébriques. Si* $\mathrm{d}_e\phi$ *est* **injective**, *alors* ϕ *est un isomorphisme.*

14. Quotients G/H

14.1. Morphismes plats et théorème de platitude générique. —

Définition 14.1. — Soient A un anneau commutatif et M un A-module. On dit que M est **plat** si le foncteur $\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} -$, de la catégorie Mod(A) des A-modules vers elle-même, est exact.

Lemme 14.2. — *Soient* B *une* A*-algèbre et* M *un* A*-module plat. Alors le* B*-module* $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ *est plat.*

Démonstration. — En effet, pour tout B-module N, on a un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}, \mathrm{N}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

Par conséquent, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}, -)$ est la restriction à Mod(B) du foncteur exact $\mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}, -)$. Ceci prouve que $\mathrm{B} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ est un B-module plat. □

Proposition 14.3. — *Soit* M *un* A*-module. Alors* M *est plat si, et seulement si, pour tout* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(\mathrm{A})$*, le localisé* $\mathrm{M}_{\mathfrak{m}}$ *est un* $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$*-module plat.*

Démonstration. — Voir [**AM**, Prop. 3.10]. □

Définition et proposition 14.4. — *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de variétés.*

1) *On dit que* f *est* **plat** *si, pour tout* $x \in \mathrm{X}$*, l'anneau local* $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *est un* $\mathscr{O}_{\mathrm{Y},f(x)}$*-module plat.*

2) f *est plat si, et seulement si, la condition suivante est vérifiée : pour tout* $x \in \mathrm{X}$*, soit* V *un ouvert affine de* Y *contenant* $f(x)$ *et* U *un ouvert affine de* $f^{-1}(\mathrm{V})$ *contenant* x *; alors* $k[\mathrm{U}]$ *est un* $k[\mathrm{V}]$*-module plat.*

3) *Supposons* f *plat. Alors, pour toute variété* Z*, le morphisme* $f \times \mathrm{id}_{\mathrm{Z}} : \mathrm{X} \times \mathrm{Z} \to \mathrm{Y} \times \mathrm{Z}$ *est plat.*

Démonstration. — L'équivalence dans 2) résulte de la proposition précédente et est laissée au lecteur. L'assertion 3) en découle. En effet, supposons f plat et soit $(x, z) \in \mathrm{X} \times \mathrm{Z}$. Soit V, resp. W, un voisinage ouvert affine de $y := f(x)$, resp. z, et soit U un voisinage ouvert affine de x contenu dans $f^{-1}(\mathrm{V})$. Par hypothèse, $k[\mathrm{U}]$ est un $k[\mathrm{V}]$-module plat.

Alors $\mathrm{V} \times \mathrm{W}$ est un voisinage ouvert affine de (y, z), et $k[\mathrm{U} \times \mathrm{W}] \cong k[\mathrm{U}] \otimes k[\mathrm{W}]$ est plat sur $k[\mathrm{V}] \otimes k[\mathrm{W}]$, d'après le lemme 14.2. Ceci prouve que $f \times \mathrm{id}_{\mathrm{Z}}$ est plat. □

***Théorème 14.5* (plat ⇒ universellement ouvert)**. — *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme plat de variétés algébriques. Alors* f *est ouvert, et universellement ouvert (c.-à-d.,* $f \times \mathrm{id}_{\mathrm{Z}}$ *est ouvert, pour toute variété* Z*).*

Démonstration. — Comme $f \times \mathrm{id}_{\mathrm{Z}}$ est plat, il suffit de montrer l'assertion concernant la platitude. Elle découle de [**Ma1**], (5.D) Thm. 4 et (6.I) Thm. 8. □

***Proposition 14.6* (Théorème de platitude générique).** — *Soit* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme dominant entre variétés irréductibles. Il existe un ouvert non-vide* U *de* Y *tel que* $\phi : \phi^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$ *soit plat.*

Démonstration. — Ceci résulte de [**Ma1**, § 22, Thm. 52], combiné avec l'équivalence 2) dans 14.4 ci-dessus. □

Corollaire 14.7. — *Soient* G *un groupe algébrique,* X, Y *deux* G*-variétés homogènes, et* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme* G*-équivariant. Alors* ϕ *est universellement ouvert.*

Démonstration. — Grâce au lemme 10.17, on se ramène au cas où G est connexe, et X, Y irréductibles. D'après ce qui précède (14.6 et 14.5), il existe un ouvert non-vide U de Y tel que $\phi : \phi^{-1}(\mathrm{U}) \to \mathrm{U}$ soit universellement ouvert. Comme ϕ est G-équivariant, chaque translaté $g\mathrm{U}$ a la même propriété. Comme ils recouvrent X, on en déduit le corollaire. □

Pour une autre approche des morphismes universellement ouverts, voir [**Sp**, 5.1.6–5.1.7], où est démontré le théorème suivant.

***Théorème 14.8* ([Sp], 5.1.6–7).** — *Soient* X, Y *irréductibles,* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme dominant, et* $r = \dim \mathrm{X} - \dim \mathrm{Y}$. *Il existe un ouvert dense* U *de* X *tel que*

a) $\phi_{|\mathrm{U}}$ *soit universellement ouvert.*

b) *Si* F *est une sous-variété fermée de* Y *et* Z *une composante irréductible de* $\phi^{-1}(\mathrm{F})$ *rencontrant* U*, alors* $\dim \mathrm{Z} = \dim \mathrm{F} + r$.

On en déduit le corollaire suivant, qui généralise le théorème 9.5

Corollaire 14.9. — *Soient* G *un groupe algébrique,* X, Y *deux* G*-variétés homogènes,* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme* G*-équivariant, et* $r = \dim \mathrm{X} - \dim \mathrm{Y}$.

a) *Pour toute variété* W*, le morphisme* $\phi \times \mathrm{id}_{\mathrm{W}} : \mathrm{X} \times \mathrm{W} \to \mathrm{Y} \times \mathrm{W}$ *est ouvert.*

b) *Si* F *est une sous-variété fermée de* Y *et* Z *une composante irréductible de* $\phi^{-1}(\mathrm{F})$*, alors* $\dim \mathrm{Z} = \dim \mathrm{F} + r$.

Démonstration. — Grâce au lemme 10.17, on se ramène au cas où G est connexe, et X, Y irréductibles. Soit alors U comme dans le théorème 14.8. Utilisant l'équivariance de ϕ, on vérifie que tout translaté $g\mathrm{U}$ a les mêmes propriétés. Comme ils recouvrent X, on en déduit le corollaire. □

14.2. Espace projectif d'un G-module. — Soit V un k-espace vectoriel de dimension $n+1$. Notons π le morphisme $\mathrm{V}\setminus\{0\}\to\mathbb{P}(\mathrm{V})$. On rappelle que $\mathbb{P}(\mathrm{V})\cong\mathbb{P}^n$ est une variété algébrique (voir [**Sp**, § 1.7]). D'abord, on munit $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ de la topologie quotient, c.-à-d., $\mathrm{U}\subset\mathbb{P}(\mathrm{V})$ est un ouvert si, et seulement si, $\pi^{-1}(\mathrm{U})$ est un ouvert de Zariski de $\mathrm{V}\setminus\{0\}$. Alors, $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ est recouvert par les ouverts $\mathrm{D}(f):=\{[x]\in\mathbb{P}(\mathrm{V})\mid f(x)\neq 0\}$, pour $f\in\mathrm{V}^*$. On pose $\mathscr{O}(\mathrm{D}(f))=\mathrm{S}[\mathrm{V}^*/kf]\cong k[\operatorname{Ker} f]$; on peut vérifier que ceci définit un faisceau de fonctions $\mathscr{O}$ sur $\mathbb{P}(\mathrm{V})$. Plus concrètement, si $\{e_0,\dots,e_n\}$ est une base de V, et $\{e_0^*,\dots,e_n^*\}$ la base duale, alors $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ est recouvert par les ouverts affines $\mathrm{D}_i:=\{e_i^*\neq 0\}$, et $\mathscr{O}(\mathrm{D}_i)=k[\mathrm{X}_0,\dots,\widehat{\mathrm{X}_i},\dots,\mathrm{X}_n]$, où $\mathrm{X}_j=e_j^*/e_i^*$.

Lemme 14.10. — *Soit $v\in\mathrm{V}\setminus\{0\}$. Alors $\operatorname{Ker}(\mathrm{d}\pi_v)=kv$ et*

$$\mathrm{T}_{[v]}\mathbb{P}(\mathrm{V})\cong\operatorname{Hom}_k(kv,\mathrm{V}/kv).$$

Démonstration. — On peut supposer $v=e_0$. Alors π envoie l'ouvert $\{e_0^*\neq 0\}$ de $\mathrm{V}\setminus\{0\}$ dans D_0, via $(x_0,\dots,x_n)\mapsto(x_1/x_0,\dots,x_n/x_0)$. Alors $\pi(v)=0$ et le comorphisme $\pi^{\#}:k[\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n]\to k[\mathrm{T}_0^{\pm},\mathrm{T}_1\dots,\mathrm{T}_n]$ est donné par $\mathrm{X}_j\mapsto\mathrm{T}_j\mathrm{T}_0^{-1}$. Les images de $\mathrm{T}_0-1,\mathrm{T}_1,\dots,\mathrm{T}_n$ forment une base de $\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2$, et l'on a un isomorphisme $\mathrm{V}\cong(\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2)^*$, induit par l'évaluation $\langle e_i,\mathrm{T}_j\rangle=\delta_{ij}$. De plus, les images des X_i forment une base de $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$, et l'on a $\pi^{\#}(\mathrm{X}_j)=\mathrm{T}_j$ dans $\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2$ (car $\mathrm{T}_0-1\in\mathfrak{m}_v$). Donc, pour $i=0,\dots,n$ et $j=1,\dots,n$, on a $\mathrm{d}\pi_v(e_i)(\mathrm{X}_j)=\langle e_i,\pi^{\#}(\mathrm{X}_j)\rangle=\langle e_i,\mathrm{T}_j\rangle=\delta_{ij}$. Le lemme en résulte. □

Proposition 14.11. — *Soit* V *un* G*-module rationnel de dimension finie. Alors* G *agit morphiquement dans* $\mathbb{P}(\mathrm{V})$.

Démonstration. — On peut supposer $\mathrm{G}=\mathrm{GL}(\mathrm{V})$. Notons θ l'application $\mathrm{G}\times\mathbb{P}(\mathrm{V})\to\mathbb{P}(\mathrm{V})$, $(g,[x])\mapsto[gx]$. Il suffit de vérifier que, pour $\ell=0,\dots,n$, $\mathrm{U}_\ell:=\theta^{-1}(\mathrm{D}_\ell)$ est un ouvert de $\mathrm{G}\times\mathbb{P}(\mathrm{V})$, et que $\theta_\ell:\mathrm{U}_\ell\to\mathrm{D}_\ell$ est un morphisme. Or $\mathrm{U}_\ell=\{(g,[x_0,\dots,x_n])\mid\sum_{j=0}^n g_{\ell j}x_j\neq 0\}$, et on vérifie que chaque $\mathrm{U}_{\ell,i}:=\mathrm{U}_\ell\cap(\mathrm{G}\times\mathrm{D}_i)$ est un ouvert de $\mathrm{G}\times\mathrm{D}_i$. De plus, pour $m=0,\dots,n$, $m\neq\ell$, on a

$$\mathrm{X}_m(gx)=\frac{\sum_j g_{mj}x_j}{\sum_j g_{\ell j}x_j},$$

et ceci est une fonction régulière sur U_ℓ ; en effet, sur chaque $\mathrm{U}_{\ell,i}$ on a $\mathrm{X}_m(gx)=\big(\sum_j g_{mj}x_j/x_i\big)/\big(\sum_j g_{\ell j}x_j/x_i\big)$. La proposition est démontrée. □

14.3. Le théorème des semi-invariants de Chevalley. — Soient G un groupe algébrique affine, et H un sous-groupe fermé. Posons $\mathfrak{g}=\operatorname{Lie}(\mathrm{G})$ et $\mathfrak{h}=\operatorname{Lie}(\mathrm{H})$. On note $\mathrm{X}(\mathrm{H})$ le groupe des caractères de H (c.-à-d., des morphismes de groupes algébriques $\mathrm{H}\to k^\times$).

***Théorème 14.12* (Chevalley)**. — *Il existe un* G*-module rationnel* V *de dimension finie et un sous-espace* V_1 *de dimension* 1*, tels que* $\mathrm{Stab}_G(V_1) = H$ *et* $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(V_1) = \mathfrak{h}$.

Si de plus $X(H) = \{1\}$*, alors, pour tout* $v_1 \in V_1$ *non nul, on a* $\mathrm{Stab}_G(v_1) = H$ *et* $\mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(v_1) = \mathfrak{h}$.

Démonstration. — Soient I l'idéal de H dans $k[G]$. On considère la représentation rationnelle ρ de G sur $k[G]$ définie par $(\rho(g)\phi)(g') = \phi(g'g)$, pour $\phi \in k[G]$, $g, g' \in G$. On a déjà vu que l'action dérivée $d\rho$ de $\mathfrak{g}$ coïncide avec l'action induite par l'identification $\mathfrak{g} = \mathrm{Dér}(k[G])^G$ (dérivations invariantes). Soient $x_1, \ldots, x_s$ des générateurs de l'idéal I, W le sous-$\rho(G)$-module qu'ils engendrent, et $E = W \cap I$. Alors E est stable par $\rho(H)$, et contient les x_i.

Lemme 14.13. — *On a* $H = \mathrm{Stab}_G(E)$*, et* $\mathfrak{h} = \mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(E)$.

Démonstration. — D'après le lemme 12.20, on a $H = \mathrm{Stab}_G(I)$ et $\mathfrak{h} = \mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(I)$. Comme W est stable par G et $\mathfrak{g}$, on voit que si $g \in G$ ou $X \in \mathfrak{g}$ stabilise I, il stabilise aussi $I \cap W = E$. Donc $\mathrm{Stab}_G(I) \subseteq \mathrm{Stab}_G(E)$, et $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(I) \subseteq \mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(E)$. Les inclusions réciproques sont claires, puisque E engendre I et que G agit par automorphismes d'algèbres, et $\mathfrak{g}$ par dérivations. Le lemme est démontré. □

Lemme 14.14. — *Soient* W *un* k*-espace vectoriel de dimension finie,* E *un sous-espace de dimension* d*, et* $D = \Lambda^d E \subseteq \Lambda^d W$*. Soient* $g \in GL(W)$ *et* $X \in \mathfrak{gl}(W)$*. Considérons les actions induites sur* $\Lambda^d(W)$*. Alors* $gD = D \Leftrightarrow gE = E$ *et* $XD \subseteq D \Leftrightarrow XE \subseteq E$.

Démonstration. — Voir par exemple [**Bo**, Lemma 5.1] ou [**Sp**, Lemma 5.5.2] ou [**Hu2**, Lemma 11.1]. □

Revenons à la preuve du théorème. On a ainsi obtenu un G-module rationnel W de dimension finie, et un sous-espace E tels que $H = \mathrm{Stab}_G(E)$, et $\mathfrak{h} = \mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(E)$. La première assertion du théorème en découle, en prenant $V = \Lambda^d W$ et $V_1 = \Lambda^d E$. Observons qu'alors H agit sur V_1 par un caractère χ. Soit $v_1 \in V_1 \setminus \{0\}$. Si $X(H) = \{1\}$, alors H agit trivialement sur V_1, et $\mathfrak{h}$ aussi (car l'application $h \mapsto hv_1$ est constante, donc sa dérivée nulle) et l'on a donc $H \subseteq \mathrm{Stab}_G(v_1) \subseteq \mathrm{Stab}_G(V_1) = H$ et $\mathfrak{h} \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathfrak{g}}(v_1) \subseteq \mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(V_1) = \mathfrak{h}$, d'où les égalités annoncées. Le théorème est démontré. □

On a de plus la proposition ci-dessous. Soient $v \in V_1 \setminus \{0\}$ et $x = [v] \in \mathbb{P}(V)$.

Proposition 14.15. — *On a* $\mathrm{Stab}_G(x) = H$*,* $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{g}}(x) = \mathfrak{h}$*, et le morphisme* $\phi : G \to Gx$*,* $g \mapsto gx$ *est séparable.*

Si de plus $X(H) = \{1\}$*, soit le morphisme* $\alpha : G \to Gv$*,* $g \mapsto gv$ *est séparable.*

Démonstration. — Il résulte de la proposition 12.16.b) que, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on a $d\alpha(X) = Xv$. Or $\phi = \pi \circ \alpha$ et donc $d\phi(X) = d_v\pi(d\alpha(X)) = d_v\pi(Xv)$. D'après le lemme 14.2, il vient $\operatorname{Ker} d\phi = \{X \in \mathfrak{g} \mid Xv \subseteq V_1\} = \mathfrak{h}$. Donc $\operatorname{Ker} d\phi = \operatorname{Lie}(G_x)$, et ϕ est séparable d'après le corollaire 13.27.

De plus, si $X(H) = 1$ alors $H = G_v$ et $\mathfrak{h} = \operatorname{Ann}_{\mathfrak{g}}(v) = \operatorname{Ker} d\alpha$, donc α est séparable dans ce cas. $\square$

14.4. Unicité de G/H. — Supposons donnés une G-variété homogène G/H et un morphisme G-équivariant séparable $\pi : G \to G/H$, tels que H soit le stabilisateur de $\pi(1)$.

***Théorème 14.16* (Le quotient** G/H). — a) $\pi : G \to G/H$ *est séparable et plat. Pour tout ouvert* U *de* G/H, $\pi^*(k[U])$ *égale*

$$k[\pi^{-1}(U)]^H := \{\phi \in k[\pi^{-1}(U)] \mid \phi \textit{ est constante sur les classes } gH\}.$$

Donc, $k[U] = \{\psi : U \to k \mid \psi \circ \pi \in k[\pi^{-1}(U)]\}$.

b) G/H *vérifie la propriété universelle* (*de quotient par* H) *suivante : pour tout morphisme de variétés* $\alpha : G \to Z$ *constant sur les classes* gH, *il existe un unique morphisme* $\beta : G/H \to Z$ *tel que* $\alpha = \beta \circ \pi$. *Par conséquent,* G/H *est unique à isomorphisme près.*

c) *De plus, si* G *est connexe,* π *induit un isomorphisme* $k(G/H) \cong k(G)^H$.

Corollaire 14.17. — *La variété* G/H *est toujours quasi-projective, et lorsque* $X(H) = \{1\}$ *elle est quasi-affine.*

Démonstration. — Par hypothèse, π est séparable ; il est ouvert d'après le théorème 14.5. Soit U un ouvert de G/H. Comme π est surjectif, son comorphisme induit une injection $k[U] \subseteq k[\pi^{-1}(U)]^H$. On veut montrer que cette inclusion est une égalité.

D'abord, on se ramène au cas où U est irréductible. Soient $X_1, \ldots, X_r$ les composantes connexes de G/H. Alors U est la réunion disjointe des $U_i = U \cap X_i$ qui sont non vides, et chaque tel U_i est irréductible, puisque X_i l'est. Quitte à renuméroter les X_i, on peut supposer que

$$U = U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_s.$$

Alors $\pi^{-1}(U)$ est la réunion disjointe des $\pi^{-1}(U_i)$, d'où

$$k[\pi^{-1}(U)] = k[\pi^{-1}(U_1)] \oplus \cdots \oplus k[\pi^{-1}(U_s)],$$

et π^* envoie chaque $k[U_i]$ dans $k[\pi^{-1}(U_i)]^H$. Donc, en remplaçant U par l'un des U_i, il suffit de montrer l'assertion a) lorsque U est irréductible.

Dans ce cas, soient $f \in k[V]^H$ et $W \subset V \times k$ son graphe. Considérons le morphisme $\phi = (\pi, \mathrm{id}) : V \times k \to U \times k$. Comme π est universellement ouvert (14.5) et W est un fermé tel que $W = \pi^{-1}\pi(W)$, alors $\phi(W) := W'$ est une sous-variété fermée de $U \times k$. Soit p la restriction à W' de la projection pr_U.

Alors $p \circ \phi = \pi$ et, comme f est constante sur les classes $g\mathrm{H}$, p est injectif et donc bijectif. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{V} & \xrightarrow{\phi=(\pi,f)} & \mathrm{W}' \subset \mathrm{U} \times k \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathrm{U} & = & \mathrm{U} \end{array}.$$

De plus, pour tout $v \in \mathrm{V}$, on a $\mathrm{d}_v\pi = \mathrm{d}_{\phi(v)}p \circ \mathrm{d}_v\phi$, et comme $\mathrm{d}_v\pi$ est surjective, $\mathrm{d}_{\phi(v)}p$ l'est aussi.

Soit W'_1 une composante irréductible de W. Alors la restriction de p à W_1 est séparable et injective, donc birationnelle, donc induit un isomorphisme d'un ouvert dense W^0_1 de W'_1 sur un ouvert U_1 de U. Ceci entraîne que W' est irréductible. En effet, si W'_2 est une seconde composante irréductible, et si W^0_2 et U_2 sont définis de façon analogue, alors $\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$ est un ouvert non vide (car U est irréductible), donc $p^{-1}(\mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2)$ est dense dans W'_1 et W'_2, d'où $\mathrm{W}'_1 = \mathrm{W}'_2$.

Donc W' est irréductible, et $p : \mathrm{W}' \to \mathrm{U}$ est bijectif et séparable, donc birationnel d'après le corollaire 10.14. D'après le théorème principal de Zariski 10.29, on a $k[\mathrm{W}'] = p^*k[\mathrm{U}]$. D'autre part, on a $pr_2 \in k[\mathrm{W}']$ et donc $f = \phi^*(pr_2) \in \phi^*p^*k[\mathrm{U}] = \pi^*k[\mathrm{U}]$. Ceci prouve l'assertion a).

Prouvons b). Soit $\alpha : \mathrm{G} \to \mathrm{Z}$ un morphisme constant sur les classes $g\mathrm{H}$. Alors l'application $\beta : \mathrm{G}/\mathrm{H} \to \mathrm{Z}$ définie par $\beta(g\mathrm{H}) = \alpha(g)$ est un morphisme. En effet, soient U' un ouvert de Z, V l'ouvert $\alpha^{-1}(\mathrm{U}')$ de G, et $\mathrm{U} = \beta^{-1}(\mathrm{U}')$. Alors $\mathrm{V} = \pi^{-1}(\mathrm{U})$ et $\mathrm{U} = \pi(\mathrm{V})$. Comme π est ouvert, U est un ouvert de G/H. De plus, si $f \in k[\mathrm{U}]$ alors $f \circ \alpha = (f \circ \beta) \circ \pi$ appartient à $k[\mathrm{V}]^{\mathrm{H}}$. Donc, d'après a), $f \circ \beta \in k[\mathrm{U}]$. Ceci montre que β est un morphisme, et b) est démontré.

Prouvons c). D'abord, H opère sur $k(\mathrm{G})$ de la façon suivante : si $h \in \mathrm{H}$ et $\phi \in k(\mathrm{G})$, alors $\phi \in k[\mathrm{U}]$ pour un ouvert (affine) non-vide de X, et $h\phi$ est l'image dans $k(\mathrm{G})$ de la fonction régulière sur l'ouvert $\mathrm{U}h^{-1}$ définie par

$$(h\phi)(x) = \phi(xh), \quad \forall\, x \in \mathrm{U}h^{-1}.$$

L'inclusion $k(\mathrm{G}/\mathrm{H}) \subseteq k(\mathrm{G})^{\mathrm{H}}$ est facile. En effet, si $\phi \in k(\mathrm{G}/\mathrm{H})$, il existe un ouvert affine non vide U de G/H tel que $\phi \in k[\mathrm{U}]$. Alors $\pi^*(\phi)$ appartient à $k[\pi^{-1}(\mathrm{U})] \subseteq k(\mathrm{G})$ et est H-invariante, donc appartient à $k(\mathrm{G})^{\mathrm{H}}$.

Réciproquement, soit $\phi \in k(\mathrm{G})^{\mathrm{H}}$. Il existe un ouvert affine non vide V de G tel que $\phi \in k[\mathrm{V}]$. Alors, ϕ se prolonge en une fonction régulière ψ sur l'ouvert

$$\mathrm{VH} := \bigcup_{h \in \mathrm{H}} \mathrm{V}h,$$

définie par $\psi(xh) = \phi(x)$ pour tout $x \in \mathrm{V}$, $h \in \mathrm{H}$. Ceci est bien défini, car si $xh = yh'$ avec $x, y \in \mathrm{V}$ et $h, h' \in \mathrm{H}$, alors $x = yh'h^{-1}$ d'où

$$\phi(x) = (h'h^{-1}\phi)(y) = \phi(y)$$

puisque $h'h^{-1}\phi = \phi$. Posant $\mathrm{U} = \pi(\mathrm{VH})$, on a $\mathrm{VH} = \pi^{-1}(\mathrm{U})$ et donc $\psi \in k[\pi^{-1}(\mathrm{U})]$. D'après b), il existe $f \in k[\mathrm{U}]$ tel que $\psi = \pi^*(f)$. Comme ψ et ϕ ont même image dans $k(\mathrm{G})$, ceci montre que $\phi \in k(\mathrm{G/H})$. Ceci prouve c). Le théorème est démontré. □

Remarque 14.18 **(Unicité sans le théorème principal de Zariski)**
Si on veut éviter d'avoir recours au théorème principal de Zariski, on peut montrer l'unicité de G/H comme G-variété homogène, en montrant qu'il vérifie la propriété universelle suivante (plus faible que celle établie dans le théorème précédent) :

Pour tout morphisme G-équivariant d'espaces homogènes $\alpha : \mathrm{G} \to \mathrm{Y}$ tel que $\alpha(h) = \alpha(1)$, pour tout $h \in \mathrm{H}$, il existe un unique morphisme (G-équivariant) $\beta : \mathrm{G/H} \to \mathrm{Y}$ tel que $\alpha = \beta \circ \pi$.

Démonstration de la propriété universelle ci-dessus. — Soit $\alpha : \mathrm{G} \to \mathrm{Y}$ un morphisme G-équivariant tel que $\alpha(h) = \alpha(1)$, pour tout $h \in \mathrm{H}$. Montrons l'existence d'un morphisme $\beta : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ tel que $\alpha = \beta \circ \pi$ (nécessairement unique, puisque π est surjectif). Considérons le morphisme $\theta = \pi \times \alpha : \mathrm{G} \to \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$. Comme θ est G-équivariant, alors $\mathrm{W} := \theta(\mathrm{G})$ est ouvert dans son adhérence (cf. 9.8), et est donc une sous-variété localement fermée de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$. Considérons le diagramme de morphismes G-équivariants

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "\theta=(\pi,\alpha)"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{W} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \arrow[r, "pr_{\mathrm{Y}}"] \arrow[d, "pr_{\mathrm{X}}"] & \mathrm{Y} \\ \mathrm{X} \arrow[r, equal] & \mathrm{X} \arrow[r, equal] & \mathrm{X} & \end{tikzcd}$$

où p est la restriction à W de pr_{X}, et τ l'immersion naturelle. Comme $p \circ \theta = \pi$, alors p est surjectif. Il est aussi injectif : si $\pi(g) = \pi(g')$ alors $g' \in g\mathrm{H}$ et donc $\alpha(g') = \alpha(g)$ (par G-équivariance). Donc p est bijectif. De plus, π est séparable, donc $\mathrm{d}_e\pi$ surjective. Mais $\mathrm{d}_e\pi = \mathrm{d}_{\theta(e)}p \circ d_e\theta$, et donc $\mathrm{d}_{\theta(e)}p$ est surjective. Par conséquent, $p : \mathrm{W} \to \mathrm{X}$ est un morphisme G-équivariant, bijectif et séparable, entre G-variétés homogènes. C'est donc un isomorphisme, d'après la proposition 13.26. Alors, comme $\alpha = pr_{\mathrm{Y}} \circ \tau \circ \theta$, le morphisme $\beta := pr_{\mathrm{Y}} \circ \tau \circ p^{-1}$ vérifie $\beta \circ \pi = \alpha$. □

14.5. Caractères, lemme de Dedekind. —

Définition 14.19 **(Caractères)**. — Soit G un groupe algébrique affine. Un **caractère** de G est un morphisme de groupes algébriques $\mathrm{G} \to \mathbb{G}_m$. On note

X(G) l'ensemble des caractères. C'est un groupe abélien, la multiplication étant définie par $(\chi\chi')(g) = \chi(g)\chi'(g)$.

***Définition 14.20* (Espaces de poids).** — Si V est un G-module de dimension 1, alors G agit dans V via un caractère $\chi : \mathrm{G} \to \mathrm{GL(V)} = \mathbb{G}_m$. Ce G-module de dimension 1 sera noté k_χ. Plus généralement, si V est un G-module, on note, pour tout $\chi \in \mathrm{X(G)}$,

$$\mathrm{V}_\chi = \{v \in \mathrm{V} \mid gv = \chi(g)v, \quad \forall\, g \in \mathrm{G}\}.$$

***Proposition 14.21* (Lemme de Dedekind).** — *Soit* G *un groupe quelconque.*

a) $\Theta(\mathrm{G}) := \mathrm{Hom}_{gpes}(\mathrm{G}, k^*)$ *est une partie libre de* k^{G} (= *fonctions* $\mathrm{G} \to k$).

b) *pour tout* G*-module* V*, la somme* $\sum_{\chi \in \Theta(\mathrm{G})} \mathrm{V}_\chi$ *est directe.*

Démonstration. — a) Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe une relation de dépendance linéaire $0 = a_1\chi_1 + \cdots + a_n\chi_n$, avec n minimal et donc les a_i tous non nuls (et $n \geqslant 2$). Soient $g, h \in \mathrm{G}$. Alors

$$\sum_i a_i\chi_i(g)\chi_i(h) = \sum_i a_i\chi_i(gh) = 0 = \chi_1(g)\sum_i a_i\chi_i(h).$$

Soustrayant le dernier terme du premier, on obtient une relation de dépendance ayant au plus $n-1$ termes : $\sum_{i=2}^n a_i(\chi_i(g) - \chi_1(g))\chi_i = 0$. De plus, comme $\chi_1 \neq \chi_2$, il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $\chi_1(g) \neq \chi_2(g)$ et donc cette relation est non triviale. Ceci contredit la minimalité de n.

b) Sinon, il existerait une relation de dépendance non triviale $0 = v_{\chi_1} + \cdots + v_{\chi_n}$ avec n minimal et chaque v_{χ_i} dans $\mathrm{V}_{\chi_i} \setminus \{0\}$. Alors, pour tout g,

$$\sum_i \chi_i(g)v_{\chi_i} = g(\sum_i v_{\chi_i}) = 0 = \chi_1(g)(\sum_i v_{\chi_i}).$$

Soit g tel que $\chi_1(g) \neq \chi_2(g)$. On obtient une relation non triviale $0 = \sum_{i=2}^n(\chi_i(g) - \chi_1(g))v_{\chi_i}$, ce qui contredit la minimalité de n. La proposition est démontrée. □

***Corollaire 14.22*.** — X(G) *est une partie libre de* k[G].

Le lemme suivant sera utile plus tard. Soit H un second groupe algébrique affine.

***Lemme 14.23*.** — a) *On a un isomorphisme de groupes :*

$$\mathrm{X(G \times H)} \cong \mathrm{X(G)} \times \mathrm{X(H)}, \qquad \chi \mapsto (\chi_{|\mathrm{G}}, \chi_{|\mathrm{H}}).$$

b) *Si* G *est connexe, alors* X(G) *est sans torsion.*

Démonstration. — a) Un inverse est donné par $(\chi_1, \chi_2) \mapsto \chi_1\chi_2$ (le vérifier).

b) Si $\chi^n = 1$ alors $\chi(\mathrm{G})$ est contenu dans le groupe μ_n des racines n-ièmes de l'unité. Or μ_n est fini, et comme G est supposé connexe ceci entraîne $\chi(\mathrm{G}) = \{1\}$, d'où $\chi = 1$. □

14.6. Quotient par un sous-groupe fermé normal. —

Théorème 14.24. — *Soit* H *un sous-groupe fermé normal de* G. *Alors la variété* G/H *est un groupe algébrique affine.*

Démonstration. — On va construire un morphisme de groupes algébriques affines $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ tel que $\operatorname{Ker}\phi = \mathrm{H}$ et $\operatorname{Ker} \mathrm{d}\phi = \mathfrak{h}$.

Ceci prouvera le théorème, car on aura $\mathrm{G/H} \cong \phi(\mathrm{G})$ comme groupes abstraits, $\phi(\mathrm{G})$ sera un sous-groupe fermé de G', et ϕ induira un isomorphisme de variétés $\mathrm{G/H} \cong \phi(\mathrm{G})$, d'après le théorème 14.16.

Soient V, V_1 comme dans le théorème 14.12. Alors H agit sur V_1 par un caractère $\chi_1 \in \mathrm{X(H)}$. Soit $g \in \mathrm{G}$. Comme H est normal dans G, alors

$$h \mapsto \chi_1(ghg^{-1}) \quad \text{est un caractère de H, noté } g\chi_1,$$

et pour tout $v \in \mathrm{V}_1$ et $h \in \mathrm{H}$, l'on a

$$h \cdot gv = g\,(g^{-1}hg)v = (g\chi_1)(h)\,gv.$$

Ceci montre que $g(\mathrm{V}_{\chi_1}) \subseteq \mathrm{V}_{g\chi_1}$, et l'on obtient de même que

$$g'(\mathrm{V}_{g\chi_1}) \subseteq \mathrm{V}_{g'g\chi_1}, \qquad \forall\, g, g' \in \mathrm{G}.$$

Par conséquent, la somme E des $\mathrm{V}_{g\chi_1}$ est G-stable. Or cette somme est directe, d'après la proposition 14.21, donc il existe $\chi_2, \dots, \chi_n \in \mathrm{X(H)}$ tels que $\mathrm{E} = \mathrm{V}_{\chi_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_{\chi_n}$. Notons $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL(E)}$ la représentation de G dans E. Alors $\psi := \mathrm{Ad}_{\mathrm{GL(E)}} \circ \rho$ est une représentation de G dans End(E), c.-à-d., pour $u \in \mathrm{End(E)}$, $g \in \mathrm{G}$, on a

$$\psi(g)u = \rho(g) \circ u \circ \rho(g^{-1}).$$

Soit $\mathrm{A} = \bigoplus_i \mathrm{End}(\mathrm{V}_{\chi_i})$ la sous-algèbre de End(E) formée des endomorphismes qui préservent chaque V_{χ_i}. Comme $\rho(\mathrm{G})$ permute les V_{χ_i}, alors A est stable par $\psi(\mathrm{G})$, et l'on obtient donc une représentation $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{GL(A)}$. Montrons que $\operatorname{Ker}\phi = \mathrm{H}$ et $\operatorname{Ker}\mathrm{d}\phi = \mathfrak{h}$.

Si $h \in \mathrm{H}$, alors $\rho(h)$ agit scalairement sur chaque V_{χ_i} et commute donc à A, d'où $\phi(h) = 1$. Donc $\mathrm{H} \subseteq \operatorname{Ker}\phi$ et par suite $\mathfrak{h} \subseteq \operatorname{Ker}\mathrm{d}\phi$. Réciproquement, soit $g \in \operatorname{Ker}\phi$. Alors $\rho(g)$ est central dans A et donc agit scalairement sur chaque V_{χ_i}. En particulier $\rho(g)$ laisse V_1 stable, d'où $g \in \mathrm{H}$.

Enfin, comme ϕ est la restriction à A de $\mathrm{Ad}_{\mathrm{GL(E)}} \circ \rho$ on a, pour $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$, $u \in \mathrm{A}$,

$$\mathrm{d}\phi(\mathrm{X})(u) = \mathrm{d}\rho(\mathrm{X})\,u - u\,\mathrm{d}\rho(\mathrm{X}).$$

Par conséquent, si $X \in \operatorname{Ker} d\phi$ alors $d\rho(X)$ est central dans A et on obtient comme plus haut que $d\rho(X)(V_1) \subseteq V_1$, d'où $X \in \mathfrak{h}$. Le théorème est démontré. $\square$

Exercice 14.25. — Soient $H \subseteq K$ des sous-groupes fermés de G, avec H normal dans G. Alors, on a (cf. [**Bo**, II.6.10]) :

$$(G/H)\big/(K/H) \cong G/K.$$

TABLE DES MATIÈRES

Séance du 18/9 1
1. Groupes topologiques 1
2. Interlude sur les représentations de groupes finis 3
3. Mesure de Haar sur un groupe compact 5
3.1. Représentations régulières gauche et droite 5
3.2. Intégration invariante 6
3.3. Théorème du point fixe de Kakutani 6

Séance du 19/9 9
3. Mesure de Haar sur un groupe compact (suite) 9
3.4. Mesures de Radon 11
3.5. Mesure de Haar sur un groupe compact 12
4. Représentations unitaires et théorème de Peter-Weyl 16
4.1. Représentations continues 16
4.2. Représentations unitaires 17
4.3. Opérateurs compacts 18
4.4. Opérateurs à noyaux 19

Séance du 25/9 21
5. L'algèbre des « fonctions représentatives » 21
5.1. Coefficients matriciels 21
5.2. Fonctions représentatives 23
5.3. Cas des groupes compacts 24
5.4. Schur, Burnside et produits tensoriels 25
5.5. Résultats sur les modules semi-simples 26
5.6. Appendice : preuve du théorème de Burnside 28
4. Théorème de Peter-Weyl (suite) 29
4.4. Opérateurs à noyaux 29

Séance du 26/9 35
4.5. Une conséquence du théorème de Peter-Weyl 35
6. Sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 36
6.1. Algèbres de Lie 36
6.2. Propriétés de l'exponentielle 36
6.3. L'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 39
6.4. Composante connexe d'un groupe topologique 40
7. Groupes de Lie 42
7.1. Variétés différentiables 42

Séance du 2 octobre 45
7. Groupes de Lie (suite) 45
7.1. Variétés différentiables (suite) 45
7.2. « Rappels » de calcul différentiel 47
7.3. Espace tangent en un point à une sous-variété de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ 50
7.4. Sous-variétés définies par des équations de rang constant 52

Séance du 3 octobre 55
7. Groupes de Lie (suite) 55
7.5. Dérivations et champs de vecteurs 55
7.6. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie 63
7.7. Retour aux sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ 65
7.8. Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie 69
7.9. Représentations 73

Partie II : Algèbres de Lie
Séances du 9 et 10 octobre 75
1. Algèbres de Lie : définitions et premières propriétés 75
1.1. Algèbres de Lie, idéaux, modules 75
1.2. Algèbres de Lie résolubles ou nilpotentes 80
1.3. Formes invariantes et forme de Killing 82
1.4. Théorème d'Engel et applications 85
2. Théorème de Lie et critère de Cartan 87
2.1. Théorème de Lie et conséquences 87
2.2. Poids des algèbres de Lie nilpotentes 90
2.3. Sous-algèbres de Cartan 93
2.4. Critère de Cartan 97

Partie II : Algèbres de Lie
Séances du 16 et 17 octobre 99
3. Racines d'une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple 99
3.1. Racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ 99
3.2. Algèbre enveloppante d'une k-algèbre de Lie 102

3.3. Représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 104
3.4. Retour à la preuve du théorème d'intégralité 105
3.5. Passage à un $\mathbb{R}$-espace euclidien 106
3.6. Le système de racines $\mathrm{R} \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ 107

Partie II : Algèbres de Lie
Séances du 17 et 23 octobre 109
3. Racines d'une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple (suite) 109
3.7. Le cas de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 109
4. Systèmes de racines 109
4.1. Définitions 109
4.2. Systèmes de racines de rang 2 110
4.3. Bases d'un système de racines 113
4.4. Matrices de Cartan, graphes de Coxeter, diagrammes de Dynkin 115
5. Classification des graphes admissibles 116
5.1. Premières réductions 116
5.2. Fin de la classification des graphes admissibles 118
5.3. Classification des diagrammes de Dynkin connexes 121
6. Groupe de Weyl et classification des systèmes de racines 122

Partie II : Algèbres de Lie
Séance du 24 octobre 125
6. Groupe de Weyl et classification des systèmes de racines (suite) ... 125
6.1. Groupe de Weyl et conjugaison des bases 125
6.2. Isomorphismes de systèmes de racines 128
6.3. Fin de la classification des systèmes de racines 128
7. Classification des $\mathbb{C}$-algèbres de Lie semi-simples 129
7.1. Le système de racines de $\mathfrak{g}$ 129
7.2. Théorème d'existence et d'unicité 130
7.3. Type $\mathrm{A}_{n-1} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 131
7.4. Types B et D : groupes orthogonaux 132
7.5. Type C : groupes symplectiques 135

Partie FI : Groupes et algèbres de Lie
Séance du 6 novembre 1
1. Exponentielle et action adjointe 1
1.0. Un « rappel » sur espaces tangents et différentielles 1
1.1. Champs de vecteurs et flots 2
1.2. Exponentielle d'un groupe de Lie 4
1.3. Calcul différentiel sur G 8
1.4. G-variétés et représentations d'isotropie 9
1.5. Action adjointe 10
1.6. Le yoga des -zateurs 12

Partie FI : Groupes et algèbres de Lie
Séance du 7 novembre 17
2. Algèbres de Lie semi-simples compactes 17
2.1. G- et $\mathfrak{g}$-modules 17
2.2. Automorphismes et dérivations 18
2.3. $\mathbb{R}$-algèbres de Lie semi-simples 19
2.4. Revêtements universels 20
2.5. Groupes de Lie semi-simples 1-connexes 21
2.6. Groupes et algèbres de Lie semi-simples compacts 22

Partie FI :
$\mathbb{R}$-algèbres de Lie semi-simples
séance du 13/11 27
3. Extension et restriction des scalaires 27
3.1. Extension des scalaires 27
3.2. Restriction des scalaires 28
4. Formes réelles déployées ou bien compactes 31
4.1. Bases de Chevalley 31
4.2. Formes déployées 34
4.3. Formes compactes 36

Partie FI :
$\mathbb{R}$-algèbres de Lie semi-simples
(suite)séance du 14/11 39
4.4. Astuce unitaire de Weyl 39
5. Involutions et décompositions de Cartan 40
5.1. Conjugaison par rapport à une forme réelle 40
5.2. Existence d'une décomposition de Cartan 41
5.3. Conjugaison des formes compactes et décompositions de Cartan 44
5.4. Correspondance entre formes réelles et involutions de $\mathfrak{g}$ 45
5.5. $\mathbb{R}$-algèbres de Lie absolument simples 47
5.6. Aperçu de la classification 49

Partie FI :
Groupes algébriques affines
Séances 20-21 novembre 53
6. Variétés algébriques affines (rappels) 53
6.1. Sous-variétés algébriques de k^n et topologie de Zariski 53
6.2. Applications polynômiales $V \to W$ 56
6.3. Le théorème des zéros de Hilbert et une équivalence de catégories 58
6.4. k-algèbres réduites et variété algébriques affines abstraites 59
6.5. Morphismes : la bijection $\phi \mapsto \phi^\sharp$ 60
6.6. Variétés finies 62

6.7. Factorisation d'un morphisme et immersions fermées 63
6.8. Produits 65
7. Groupes algébriques affines et algèbres de Hopf 66
7.1. Groupes algébriques affines 66
7.2. Exemples de groupes algébriques affines 66
7.3. Algèbres de Hopf 68
7.4. Exemples du point de vue Hopf 71
7.5. Cogèbres et comodules 72
7.6. Représentations rationnelles des groupes algébriques affines 74
7.7. Linéarité des groupes algébriques affines 78
7.8. G-variété affines 79
8. Variétés algébriques, dimension, fibres 80
8.1. Espaces noethériens et composantes irréductibles 80
8.2. Dimension 82
8.3. Espaces annelés 83
8.4. Variétés affines commes espaces annelés 83
8.5. Prévariétés algébriques 85
8.6. Produit de prévariétés algébriques 87
8.7. Variétés algébriques 88
8.8. Corps des fonctions rationnelles et dimension 89
8.9. Image et fibres d'un morphisme, théorème de Chevalley 90
9. Groupes algébriques, morphismes et orbites 90
9.1. Composante neutre 90
9.2. Lemme des deux ouverts et sous-groupes 91
9.3. Morphismes de groupes algébriques 92
9.4. Action sur une variété, stabilisateurs et orbites 93

Partie FI :
Variétés homogènes G/H
Séance du 27 novembre 95
10. Propriétés locales d'une variété algébrique 96
10.1. Anneaux locaux et espaces tangents 96
10.2. Extensions de corps 97
10.3. Morphismes séparables et morphismes birationnels 98
10.4. Variétés homogènes : définition et premiers résultats 101
10.5. Points lisses et points normaux 102
10.6. Théorème principal de Zariski 103
11. Espaces tangents et différentielles 104
11.1. Dérivations 104
11.2. Espaces tangents et dérivations ponctuelles 105
11.3. Différentielle d'un morphisme 108
11.4. Distributions à support dans un point 110

12. Algèbre de Lie d'un groupe algébrique ... 111
12.1. Dérivations invariantes ... 111
12.2. L'algèbre des distributions à l'origine (cas affine) ... 113
12.3. L'algèbre des distributions à l'origine (cas général) ... 114
12.4. Équivalence des deux constructions et fonctorialité ... 116
12.5. Exemples de GL_n et SL_n ... 117
12.6. Action dérivée de Dist(G) sur une représentation de G ... 118
12.7. Actions adjointes ... 121
13. Différentielles, lissité et séparabilité ... 123
13.1. Module des différentielles ... 123
13.2. Lemme de Yoneda ... 124
13.3. Retour aux différentielles ... 125
13.4. Application géométrique : différentielles et espaces cotangents 130
13.5. Critères de séparabilité ... 131
13.6. Localisation de modules et de morphismes ... 134
13.7. Séparabilité et différentielles ... 136
13.8. Application aux espaces homogènes ... 137
14. Quotients G/H ... 138
14.1. Morphismes plats et théorème de platitude générique ... 138
14.2. Espace projectif d'un G-module ... 141
14.3. Le théorème des semi-invariants de Chevalley ... 141
14.4. Unicité de G/H ... 143
14.5. Caractères, lemme de Dedekind ... 145
14.6. Quotient par un sous-groupe fermé normal ... 147
Bibliographie ... vii

Bibliographie

[Abe] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge Univ. Press, 1977.

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.

[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.

[AM] M. Atiyah, I. G. Macdonald, Commutative algebra, Addison Wesley, 1969.

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[Bo] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Springer Verlag, 1991.

[BA1-3] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 1 à 3, 1981.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BL7-8] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 7-8, 1975.

[BI7-8] N. Bourbaki, Intégration, Chap. 7-8, 1963.

[BrM] J. Briançon, Ph. Maisonobe, Éléments d'algèbre commutative, niveau M1, Ellipses, 2004.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.

[Ca2] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, 1961, nouveau tirage, 1978.

[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.

[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.

[Do88] D. Z. Doković, An elementary proof of the structure theorem for connected solvable affine algebraic groups, Enseign. Math. (2) 34 (1988), 269-273.

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Eis] D. Eisenbud, Commutative algebra with a view towards algebraic geometry, Springer, 1995.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[GH] M.J. Greenberg, J.R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1977.

[Hel] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press 1978, ninth printing Amer. Math. Soc. 2001.

[Her] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.

[Ho81] G. P. Hochschild, Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, Springer-Verlag, 1981.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Hu2] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, 1975, corrected 2nd printing 1981.

[Iit] S. Iitaka, Algebraic geometry, Springer, 1982.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Jac80] N. Jacobson, Basic Algebra II, Freeman & Co., 1980.

[KSS] H. Kraft, P. Slodowy, T. A. Springer (Ed.), Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie - Algebraic Transformation Groupes and Invariant Theory, Birkäuser, 1989.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Ke] G. R. Kempf, Algebraic varieties, Cambridge Univ. Press, 1993.

[Kna] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser, 1996, 2nd edition, 2002.

[Ku] E. Kunz, Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkhäuser, 1985.

[Laf74] J.-P. Lafon, Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative, Hermann, 1974.

[Laf77] J.-P. Lafon, Algèbre commutative (Langages géométrique et algébrique), Hermann, 1977.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[Lu99] Retour sur un théorème de Chevalley, Enseign. Math. (2) 45 (1999), 317-320.

[Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.

[Ma1] H. Matsumura, Commutative algebra (2nd edition), Benjamin, 1980.

[Ma2] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 1986, paperback edition with corrections, 1989.

[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Pe] D. Perrin, Géométrie algébrique - Une introduction, Inter Éditions/-CNRS Éditions, 1995.

[Po] P. Polo, Algèbre et théorie de Galois, cours de M1 2005/06 à l'Université Paris 6, www.math.jussieu.fr/~polo

[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Sp] T. A. Springer, Linear algebraic groups, Birkäuser, 1981, 2nd edition 1998.

[Sw] M. E. Sweedler, Hopf Algebras, Benjamin, 1969.

[Ti] J. Tits, Liesche Gruppen und Algebren, Springer-Verlag, 1983.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.