(28 NOV.) : GROUPES DIAGONALISABLES, UNIPOTENTS, RÉSOLUBLES

15. Décomposition de Jordan

15.1. Décomposition de Jordan dans End(V) **et** GL(V)**.** — Commençons par rappeler quelques notions et résultats d'algèbre linéaire. On rappelle que k est algébriquement clos. Soient V un k-espace vectoriel, et $a \in \mathrm{End}(\mathrm{V})$.

Définition 15.1. — On dit que a est :
1) **localement fini** si, pour tout $v \in \mathrm{V}$, le sous-espace engendré par les $a^i v$, $i \geqslant 0$, est de dimension finie.
2) **semi-simple** si V admet une base formée de vecteurs propres de a. Si $\dim_k \mathrm{V} < \infty$, ceci équivaut à : a est racine d'un polynôme $\mathrm{P} \in k[\mathrm{T}]$ sans racines multiples.
3) **nilpotent**, resp. **localement nilpotent**, s'il existe $n > 0$ tel que $a^n = 0$, resp. si pour tout $v \in \mathrm{V}$ il existe $n > 0$ tel que $a^n v = 0$.
4) **unipotent**, resp. **localement unipotent**, s'il existe $n > 0$ tel que $(a-1)^n = 0$, resp. si pour tout $v \in \mathrm{V}$ il existe $n > 0$ tel que $(a-1)^n v = 0$.

Lemme 15.2. — *Supposons que* $a, b \in \mathrm{End}(\mathrm{V})$ *commutent.*
1) *Si* a, b *sont semi-simples, alors* $a + b$ *et* ab *le sont aussi.*
2) *Si* a, b *sont nilpotents, alors* $a + b$ *et* ab *le sont aussi.*
3) *Si* a, b *sont unipotents, alors* ab *l'est aussi.*

Démonstration. — 1) On voit facilement que b laisse stables les espaces propres de a, et donc V admet une base formée de vecteurs propres communs à a et b. L'assertion en découle.

2) Il existe n tel que $a^n = 0 = b^n$. Alors $(ab)^n = 0 = (a + b)^{2n}$.

3) Il existe n tel que $(a - 1)^n = 0 = (b - 1)^n$. Alors, comme $ab - 1 = (a - 1)b + b - 1$, on a $(ab - 1)^{2n} = 0$. □

[(0)] version du 6/12/06

Proposition 15.3 **(Décomposition de Jordan additive)**. — *On suppose* $\dim_k \mathrm{V} < \infty$. *Soit* $a \in \mathrm{End}(\mathrm{V})$.

(1) *Il existe* a_s *semi-simple et* a_n *nilpotent, tels que* $a_s a_n = a_n a_s$ *et* $a = a_s + a_n$. *Ces propriétés déterminent uniquement* a_s *et* a_n. *L'écriture* $a = a_s + a_n$ *s'appelle la décomposition de Jordan (additive) de* a.

(2) *Il existe des polynômes* P, Q *sans termes constants tels que* $a_s = \mathrm{P}(a)$ *et* $a_n = \mathrm{Q}(a)$.

(3) *Si* $b \in \mathrm{End}(\mathrm{V})$ *commute à* a *il commute aussi à* a_s *et* a_n.

(4) *Soient* E *un sous-espace de* V *stable par* a, *et* $\mathrm{W} = \mathrm{V}/\mathrm{E}$. *Alors* E *est stable par* a_s *et* a_n, *et* $a_{|\mathrm{E}} = a_{s|\mathrm{E}} + a_{n|\mathrm{E}}$ *et* $a_{|\mathrm{W}} = a_{s|\mathrm{W}} + a_{n|\mathrm{W}}$ *sont les décompositions de Jordan de* $a_{|\mathrm{E}}$ *et* $a_{|\mathrm{W}}$.

Démonstration. — L'existence de a_s et a_n, donnés par des polynômes P et Q est bien connue, et (3) ainsi que la première assertion de (4) en découlent aussitôt. On obtient aussi l'unicité : si a'_s, a'_n vérifient les même conditions alors ils commutent à a et donc à a_s, a_n et par conséquent $a_s - a'_s = a'_n - a_n$ est à la fois semi-simple et nilpotent, donc nul.

Enfin, si E est a-stable et si $\mathrm{W} = \mathrm{V}/\mathrm{E}$, il est clair que $a_{n|\mathrm{E}}$ et $a_{n|\mathrm{W}}$ sont nilpotents, et $a_{s|\mathrm{E}}$ et $a_{s|\mathrm{W}}$ sont semi-simples car annulés par le polynôme minimal de a, qui est sans racines multiples. Évidemment, $a_{s|\mathrm{E}}$ et $a_{n|\mathrm{E}}$ commutent, de même que $a_{s|\mathrm{W}}$ et $a_{n|\mathrm{W}}$. Donc, par unicité, $a_{|\mathrm{E}} = a_{s|\mathrm{E}} + a_{n|\mathrm{E}}$ et $a_{|\mathrm{W}} = a_{s|\mathrm{W}} + a_{n|\mathrm{W}}$ sont les décompositions de Jordan de $a_{|\mathrm{E}}$ et $a_{|\mathrm{W}}$. □

Corollaire 15.4 **(Décomposition de Jordan multiplicative)**

On suppose $\dim_k \mathrm{V}$ *finie. Soit* $a \in \mathrm{GL}(\mathrm{V})$.

(1′) *Il existe* a_s *semi-simple et* a_u *unipotent, tels que* $a = a_s a_u = a_u a_s$. *Ces propriétés déterminent uniquement* a_s *et* a_u ; a_s *est la partie semi-simple de* a *définie plus haut, et* $a_u = \mathrm{id} + a_s^{-1} a_n$. *L'écriture* $a = a_s a_u$ *s'appelle la décomposition de Jordan multiplicative de* a.

(3′) *Si* $b \in \mathrm{End}(\mathrm{V})$ *commute à* a *il commute aussi à* a_s *et* a_u.

(4′) *Soient* E *un sous-espace de* V *stable par* a *et* $\mathrm{W} = \mathrm{V}/\mathrm{E}$. *Alors* E *est stable par* a_s *et* a_u, *et* $a_{|\mathrm{E}} = a_{s|\mathrm{E}} a_{u|\mathrm{E}}$ *et* $a_{|\mathrm{W}} = a_{s|\mathrm{W}} a_{u|\mathrm{W}}$ *sont les décompositions de Jordan de* $a_{|\mathrm{E}}$ *et* $a_{|\mathrm{W}}$.

Démonstration. — Soient $a \in \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ et $a = a_s + a_n$ sa décomposition de Jordan additive dans End(V). Comme a_s et a ont les mêmes valeurs propres, alors $a_s \in \mathrm{GL}(\mathrm{V})$. On pose alors $a_u = \mathrm{id} + a_s^{-1} a_n$. Le reste de la démonstration est analogue à celle de la proposition. □

Proposition 15.5 **(Décompositions pour un endomorphisme localement fini)**

Soient V *un* k*-espace vectoriel arbitraire et* a *un endomorphisme localement fini de* V.

(1) *Il existe* a_s *semi-simple et* a_n *localement nilpotent tels que* $a_s a_n = a_n a_s$ *et* $a = a_s + a_n$*, et ces propriétés déterminent uniquement* a_s *et* a_n*. L'écriture* $a = a_s + a_n$ *s'appelle la décomposition de Jordan* (*additive*) *de* a.

(3) *Si* $b \in \mathrm{End}(\mathrm{V})$ *commute à* a *il commute aussi à* a_s *et* a_n.

(4) *Soient* E *un sous-espace de* V *stable par* a *et* $\mathrm{W} = \mathrm{V}/\mathrm{E}$*. Alors* E *est stable par* a_s *et* a_n*, et* $a_{|\mathrm{E}} = a_{s|\mathrm{E}} + a_{n|\mathrm{E}}$ *et* $a_{|\mathrm{W}} = a_{s|\mathrm{W}} + a_{n|\mathrm{W}}$ *sont les décompositions de Jordan de* $a_{|\mathrm{E}}$ *et* $a_{|\mathrm{W}}$.

De plus, si a *est* **inversible***, on a aussi* $(1')$, $(3')$, *et* $(4')$.

Démonstration. — Cela se déduit facilement du cas de la dimension finie. □

15.2. Décomposition de Jordan pour les groupes algébriques affines. — Soient G un groupe algébrique affine et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. On note ρ la structure de G-module rationnel sur $k[\mathrm{G}]$ définie par $(\rho(g)\phi)(h) = \phi(hg)$, et $\mathrm{d}\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(k[\mathrm{G}])$ sa dérivée.

Lemme 15.6. — *Les représentations* ρ *et* $\mathrm{d}\rho$ *sont fidèles.*

Démonstration. — Soit $g \in \mathrm{G}$, $g \neq e$. Les idéaux maximaux $\mathfrak{m}_e$ et $\mathfrak{m}_g$ sont distincts, et donc il existe $\phi \in \mathfrak{m}_g$ telle que $\phi(e) \neq 0$. Comme $(\rho(g)\phi)(e) = \phi(g) = 0$, alors $\rho(g)\phi \neq \phi$. Ceci montre que $\rho(g) \neq \mathrm{id}$.

D'autre part, on a vu dans la remarque 12.19 que $\mathrm{d}\rho$ est fidèle. □

Théorème 15.7 **(Décomposition de Jordan dans** G **et** $\mathfrak{g}$**).** —

a) *Pour tout* $g \in \mathrm{G}$*, il existe un couple unique* $(g_s, g_u) \in \mathrm{G}\times\mathrm{G}$ *vérifiant :* $g = g_s g_u = g_u g_s$ *et* $\rho(g) = \rho(g_s)\rho(g_u)$ *est la décomposition de Jordan multiplicative de* $\rho(g)$.

a$'$) *Pour tout* $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$*, il existe un couple unique* $(\mathrm{X}_s, \mathrm{X}_n) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ *tel que :* $\mathrm{X} = \mathrm{X}_s + \mathrm{X}_n$, $[\mathrm{X}_s, \mathrm{X}_n] = 0$*, et* $\mathrm{d}\rho(\mathrm{X}) = \mathrm{d}\rho(\mathrm{X}_s) + \mathrm{d}\rho(\mathrm{X}_n)$ *est la décomposition de Jordan de* $\mathrm{d}\rho(\mathrm{X})$.

b) *Si* $\mathrm{G} = \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ *et donc* $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(\mathrm{V})$*, alors les décompositions précédentes coïncident avec les décompositions usuelles.*

c) *Si* $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *est un morphisme de groupes algébriques, alors* π *et* $\mathrm{d}\pi$ *préservent les décompositions de* a) *et* a$'$).

c$'$) *Si* π *est une représentation rationnelle arbitraire de* G*, alors* π *et* $\mathrm{d}\pi$ *préservent les décompositions de* a) *et* a$'$).

Pour la démonstration, commençons par remarquer que, comme ρ et $\mathrm{d}\rho$ sont fidèles, l'unicité de la décomposition de Jordan pour $\rho(g)$ ou $\mathrm{d}\rho(\mathrm{X})$, entraîne l'unicité de (g_s, g_u) et de $(\mathrm{X}_s, \mathrm{X}_n)$.

La suite de la démonstration nécessite plusieurs résultats intermédiaires. Dans la suite, on écrira parfois unipotent ou nilpotent au lieu de : localement unipotent ou nilpotent.

15.2.1. Démonstration de a), a′) et b) pour GL(V). — Le lemme suivant est laissé au lecteur. Soient V un k-espace vectoriel de dimension finie, $r \geqslant 1$ et $\mathrm{E} = \mathrm{V} \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}$ (r copies).

Lemme 15.8. — *Soient $g \in \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ et $\mathrm{X} \in \mathfrak{gl}(\mathrm{V})$. Si g ou X est semi-simple, il en est de même de l'application induite sur* E, *puis sur chaque* $\mathrm{T}^n(\mathrm{E})$ *et donc sur chaque* $\mathrm{S}^n(\mathrm{E})$. *On a un énoncé analogue si g est unipotent ou* X *nilpotent.*

Proposition 15.9. — *Soient $g \in \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ et $\mathrm{X} \in \mathfrak{gl}(\mathrm{V})$.*

1) *Si g est semi-simple, resp. unipotent, il en est de même de $\rho(g)$.*

2) *Si* X *est semi-simple, resp. nilpotent, il en est de même de* $\mathrm{d}\rho(\mathrm{X})$.

Par conséquent, si $g = g_s g_u$, resp. $\mathrm{X} = \mathrm{X}_s + \mathrm{X}_n$, est la décomposition de Jordan de g dans GL(V), *resp. de* X *dans* $\mathfrak{gl}(\mathrm{V})$, *alors $\rho(g_s) = \rho(g_s)\rho(g_u)$ est la décomposition de Jordan de $\rho(g)$, et $\mathrm{d}\rho(\mathrm{X}) = \mathrm{d}\rho(\mathrm{X}_s) + \mathrm{d}\rho(\mathrm{X}_n)$ celle de* $\mathrm{d}\rho(\mathrm{X})$.

Démonstration. — Posons G = GL(V). Alors $\mathrm{End}(\mathrm{V}) \cong \mathrm{V} \otimes \mathrm{V}^*$, comme $(\mathrm{G} \times \mathrm{G})$-module, et donc

$$k[\mathrm{End}(\mathrm{V})] \cong k[\mathrm{V} \otimes \mathrm{V}^*] \cong \mathrm{S}(\mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V}).$$

On en déduit que, comme $\rho(\mathrm{G})$-module, $k[\mathrm{End}(\mathrm{V})] \cong \mathrm{S}(\mathrm{E})$, où E est la somme directe de $\dim_k \mathrm{V}$ copies de V.

On a $k[\mathrm{G}] = k[\mathrm{End}(\mathrm{V})]_{\mathrm{D}}$, où D est le déterminant. De $\mathrm{D}(hg) = \mathrm{D}(h)\mathrm{D}(g)$, on déduit évidemment que $\rho(g)\mathrm{D} = \mathrm{D}(g)\mathrm{D}$, mais aussi que $\Delta(\mathrm{D}) = \mathrm{D} \otimes \mathrm{D}$. On a vu en 12.15 que $\mathrm{X}(\mathrm{D}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{X})$, pour $\mathrm{X} \in \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. Il en résulte que $\mathrm{d}\rho(\mathrm{X})(\mathrm{D}) = (1 \otimes \mathrm{X})\Delta(\mathrm{D}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{X})\mathrm{D}$. Comme, d'après la remarque 12.19, $\mathrm{d}\rho(\mathrm{X})$ est une dérivation de $k[\mathrm{G}]$, on en déduit que $\mathrm{d}\rho(\mathrm{X})(\mathrm{D}^n) = n\,\mathrm{Tr}(\mathrm{X})\mathrm{D}^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Supposons g ou X semi-simple. Alors, d'après le lemme, l'application induite sur $k[\mathrm{End}(\mathrm{V})]$ l'est aussi. De plus, si ϕ est un vecteur propre pour g ou X, de valeur propre $\xi \in k$, alors

$$\rho(g)(\phi\mathrm{D}^{-n}) = \xi\mathrm{D}(g)^{-n}\phi\mathrm{D}^{-n}, \qquad \mathrm{d}\rho(\mathrm{X})(\phi\mathrm{D}^{-n}) = (\xi - n\,\mathrm{Tr}(\mathrm{X}))\phi\mathrm{D}^{-n}.$$

Dans les deux cas, $\phi\mathrm{D}^{-n}$ est un vecteur propre. On en déduit que $\rho(g)$, resp. $\mathrm{d}\rho(\mathrm{X})$, est semi-simple.

Si g est unipotent et X nilpotent, alors $\mathrm{D}(g) = 1$ et $\mathrm{Tr}(\mathrm{X}) = 0$ et donc $(\rho(g) - \mathrm{id})(\phi\mathrm{D}^{-n}) = (\rho(g) - \mathrm{id})(\phi)\mathrm{D}^{-n}$ et $\mathrm{d}\rho(\mathrm{X})(\phi\mathrm{D}^{-n}) = \mathrm{d}\rho(\mathrm{X})(\phi)\mathrm{D}^{-n}$. On en déduit que $\rho(g)$, resp. $\mathrm{d}\rho(\mathrm{X})$, est localement unipotent, resp. nilpotent.

Ceci prouve les assertions 1) et 2), et la dernière assertion en découle par unicité de la décomposition de Jordan de $\rho(g)$ et $\mathrm{d}\rho(\mathrm{X})$. □

15.2.2. Fin de la démonstration du théorème 15.7. — Soient G un groupe algébrique affine et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. D'après le théorème 7.24, G est un sous-groupe fermé d'un certain GL(V), d'où aussi $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$. Posons $A = k[\mathrm{GL}(V)]$ et $B = k[G] = A/I$, où I est l'idéal de G dans A.

Soient $g \in G$, $X \in \mathfrak{g}$ et soient $g = g_s g_u$ la décomposition de Jordan de g dans GL(V), et $X = X_s + X_n$ celle de X dans $\mathfrak{gl}(V)$. D'après le lemme 12.20 et la remarque 12.19, $\rho(g)$ et $\mathrm{d}\rho(X)$ préservent I. Donc, d'après la proposition 15.5 (4), I est stable par $\rho(g_s), \rho(g_u)$ et $\mathrm{d}\rho(X_s), \mathrm{d}\rho(X_n)$. D'après le lemme 12.20, à nouveau, ceci entraîne que g_s, g_u appartiennent à G, et X_s, X_n à $\mathfrak{g}$. De plus, d'après 15.5 (4),

$$\rho(g)_{|B} = \rho(g_s)_{|B}\rho(g_u)_{|B}, \qquad \mathrm{d}\rho(X)_{|B} = \mathrm{d}\rho(X_s)_{|B} + \mathrm{d}\rho(X_s)_{|B}$$

sont les décompositions de Jordan de $\rho(g)_{|B}$ et $\mathrm{d}\rho(X)_{|B}$. Les assertions a), a′) et b) du théorème 15.7 en découlent. Reste à voir c) et c′).

Si $\pi : G \to H$ est une immersion fermée, l'assertion découle de la construction qui précède, en plongeant H dans un GL(V). Reste donc à voir le cas où π est surjectif. Dans ce cas, le comorphisme $\pi^{\#}$ identifie $k[H]$ à une sous-algèbre de $k[G]$, et c'est un sous-$\rho(G)$-module : pour tout $\phi \in k[H]$, $g \in G$ et $h \in H$, on a :

$$(\rho(g)\phi)(h) = \phi(h\pi(g)); \tag{1}$$

de façon équivalente, la structure de $k[G]$-comodule sur $k[H]$ est donnée par

$$\Delta_{k[H]} = (\mathrm{id} \otimes \pi^{\#})\Delta_H, \tag{2}$$

où Δ_H est la comultiplication de $k[H]$. Avec des notations évidentes, (1) montre que la restriction $\rho(g)|_{k[H]}$ coïncide avec $\rho_H(\pi(g))$, pour tout $g \in G$.

De plus, pour $\xi \in \mathrm{Lie}(G)$, on a $\xi \circ \pi^{\#} = d\pi(\xi)$ et donc (2) montre que la restriction de $\mathrm{d}\rho(\xi)$ à $k[H]$ est $\mathrm{d}\rho_H(\mathrm{d}\pi(\xi))$.

Appliquant ce qui précède à g, g_s, g_u et X, X_s, X_n, on déduit de la proposition 15.5 (4) que

$$\begin{cases} \rho_H(\pi(g)) \;=\; \rho_H(\pi(g_s))\rho_H(\pi(g_u)), \\ \mathrm{d}\rho_H(\mathrm{d}\pi(X)) = \mathrm{d}\rho_H(\mathrm{d}\pi(X_s)) + \mathrm{d}\rho_H(\mathrm{d}\pi(X_n)) \end{cases}$$

sont les décompositions de Jordan de $\rho_H(\pi(g))$ et de $\mathrm{d}\rho_H(\mathrm{d}\pi(X))$. Par conséquent, $\pi(g_s) = \pi(g)_s$, $\pi(g_u) = \pi(g)_u$, etc. Ceci prouve l'assertion c). Enfin, comme toute représentation rationnelle est réunion de représentations de dimension finie, l'assertion c′) en découle aussitôt, en utilisant encore 15.5 (4).

15.3. Groupes unipotents ou diagonalisables. —

Définition 15.10 **(Éléments semi-simples, unipotents, nilpotents)**
Soit $g \in \mathrm{G}$. On dit que g est **semi-simple**, resp. **unipotent**, si $g = g_s$, resp. $g = g_u$. On note G_s et G_u l'ensemble des éléments semi-simples, resp. unipotents. On définit de façon analogue les éléments **semi-simples** ou **nilpotents** dans $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, et les ensembles $\mathfrak{g}_s$ et $\mathfrak{g}_n$.

Remarque 15.11. — Il résulte des définitions que si $g \in \mathrm{G}$ est à la fois semi-simple et unipotent, alors $g = e$. De même, si $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}$ est à la fois semi-simple et nilpotent, alors $\mathrm{X} = 0$.

Proposition 15.12. — G_u*, resp.* $\mathfrak{g}_n$*, est une sous-variété fermée de* G*, resp.* $\mathfrak{g}$*.*

Démonstration. — Plongeant G dans un GL(V), on se ramène au cas où $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n$. Alors

$$\{g \in \mathrm{GL}_n \mid g \text{ est unipotent}\} = \{g \in \mathrm{GL}_n \mid (g-1)^n = 0\},$$

$$\{\mathrm{X} \in \mathfrak{gl}_n \mid \mathrm{X} \text{ est nilpotent}\} = \{\mathrm{X} \in \mathfrak{gl}_n \mid \mathrm{X}^n = 0\},$$

et la proposition en découle. □

Définition 15.13. — Soit G un groupe algébrique affine. On dit que :

1) G est **unipotent** si tous ses éléments le sont.

2) G est **diagonalisable** s'il admet une représentation fidèle V de dimension finie n, ayant une base de vecteurs propres communs aux éléments de G. Ceci équivaut à dire que G est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbb{G}_m)^n$. De plus, d'après le lemme ci-dessous, ceci équivaut à dire que G est commutatif et que tous ses éléments sont semi-simples.

15.4. Groupes algébriques affines commutatifs. —

Lemme 15.14. — *Soient* V *un espace vectoriel de dimension finie,* $\mathscr{C}$ *une famille commutative d'endomorphismes de* V*. Alors*

a) $\mathscr{C}$ *est trigonalisable.*

b) *Soit* $\mathscr{D}$ *une sous-famille formée d'éléments semi-simples. Alors il existe une base de* V *où* $\mathscr{D}$ *est diagonale et* $\mathscr{C}$ *triangulaire.*

Démonstration. — On procède par récurrence sur $\dim_k \mathrm{V}$. Si $\mathscr{C}$ est formé d'homothéties, les assertions sont vérifiées. On peut donc supposer qu'il existe $f \in \mathscr{C}$ et $a \in k$ tels que $\mathrm{W} := \mathrm{Ker}(f - a\ \mathrm{id})$ soit non-nul et distinct de V. Alors W est stable par $\mathscr{C}$. Par hypothèse de récurrence, il existe $e_1 \in \mathrm{W}$, vecteur propre pour $\mathscr{C}$, et une base triangulaire pour $\mathscr{C}$ dans V/ke_1. En relevant cette base dans V, on obtient une base triangulaire pour $\mathscr{C}$, d'où a).

Voyons b). Si $\mathscr{D}$ est formée d'homothéties, le résultat découle de a). Sinon, soit $f \in \mathscr{D}$ n'étant pas une homothétie. Alors $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \oplus \cdots \mathrm{V}_r$ (espaces propres de f), et les V_i sont $\mathscr{C}$-stables, distincts de V, et on conclut par récurrence. □

***Théorème 15.15* (Structure des groupes commutatifs).** — *Soit* G *un groupe algébrique* **commutatif** *et soit* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. *Alors :*

1) G_s *et* G_u *sont des sous-groupes fermés, connexes si* G *l'est.*

2) *L'application* $\phi : \mathrm{G}_s \times \mathrm{G}_u \to \mathrm{G}$, $(g, h) \mapsto gh$, *est un isomorphisme, dont l'inverse est donné par la décomposition de Jordan.*

3) *De plus,* $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_s) = \mathfrak{g}_s$, $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_u) = \mathfrak{g}_n$, *et* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_s \oplus \mathfrak{g}_n$.

Démonstration. — Comme G est commutatif, alors G_s et G_u sont des sous-groupes. De plus, d'après le théorème 12.22, $\mathfrak{g}$ est commutative, et on en déduit que $\mathfrak{g}_s$ et $\mathfrak{g}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{g}$. D'après la remarque 15.11, on a $\mathrm{G}_s \cap \mathrm{G}_u = \{e\}$ et $\mathfrak{g}_s \cap \mathfrak{g}_n = \{0\}$.

D'après le lemme précédent, on peut plonger G dans le groupe $\mathrm{B}_n(k)$ des matrices triangulaires, de sorte que G_s soit contenu dans le sous-groupe fermé $\mathrm{D}_n(k)$ des matrices diagonales. Alors on a $\mathrm{G}_s = \mathrm{D}_n(k) \cap \mathrm{G}$, car tout $g \in \mathrm{D}_n(k) \cap \mathrm{G}$ est semi-simple dans GL_n et donc dans G. Ceci montre que G_s est un sous-groupe fermé. Alors, il est clair que ϕ est un morphisme de variétés, et l'unicité de la décomposition de Jordan montre que ϕ est un isomorphisme de groupes.

Montrons que l'application $\mathrm{G} \to \mathrm{G}_s$, $g \mapsto g_s$ est un morphisme. Soient $g \in \mathrm{G} \subseteq \mathrm{B}_n(k)$ et $g = g_s g_u$ sa décomposition de Jordan. Comme g_s est diagonale et g_u triangulaire unipotente, alors g_s est la partie diagonale de g. Donc l'application $g \mapsto g_s$ n'est autre que la restriction à G de la projection $\mathrm{B}_n(k) \to \mathrm{D}_n(k)$, qui est clairement un morphisme de groupes. Comme $g_u = g_s^{-1} g$, on en déduit que l'application $g \mapsto (g_s, g_u)$ est un morphisme, inverse de ϕ. En particulier, G_s et G_u sont connexes si G l'est.

Enfin, soient $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(\mathrm{D}_n) = \{\text{matrices diagonales}\}$ et $\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}(\mathrm{U}_n) = \{\text{matrices triangulaires strictes}\}$. Alors les éléments de $\mathfrak{h}$ sont semi-simples, et ceux de $\mathfrak{n}$ nilpotents. Comme $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_s) \subseteq \mathfrak{h}$ et $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_u) \subseteq \mathfrak{n}$, il en résulte que $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_s) \subseteq \mathfrak{g}_s$ et $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_u) \subseteq \mathfrak{g}_n$. Comme $\dim \mathrm{G}_s + \dim \mathrm{G}_u = \dim \mathrm{G}$ (puisque $\mathrm{G}_s \times \mathrm{G}_u \cong \mathrm{G}$) et $\mathfrak{g}_s \cap \mathfrak{g}_n = \{0\}$, on en déduit que les deux inclusions sont des égalités et que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_s \oplus \mathfrak{g}_n$. $\square$

16. Groupes diagonalisables

16.1. Groupes diagonalisables et d-groupes. — Rappelons la définition suivante (déjà introduite en 14.19).

***Définition 16.1* (Caractères).** — Soit G un groupe algébrique affine. Un **caractère** de G est un morphisme de groupes algébriques $\mathrm{G} \to \mathbb{G}_m$. On note $\mathrm{X}(\mathrm{G})$ l'ensemble des caractères. C'est un groupe abélien, la multiplication étant définie par $(\chi\chi')(g) = \chi(g)\chi'(g)$.

Définition 16.2. — Uun groupe algébrique isomorphe à $(\mathbb{G}_m)^n$ est appelé un **tore** de dimension n. Pour tout $n \geqslant 1$, on note D_n le sous-groupe de GL_n formé des matrices diagonales ; c'est un tore de dimension n.

Proposition 16.3. — *Pour tout* $n \geqslant 1$, $\mathrm{X}(\mathrm{D}_n)$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}^n$ *et forme une base de* $k[\mathrm{D}_n]$.

Démonstration. — Voyons d'abord le cas $n = 1$. Soit χ un caractère de k^*. Alors son comorphisme, $\chi^\#$, est un endomorphisme de l'algèbre $k[\mathbb{G}_m] = k[\mathrm{T}, \mathrm{T}^{-1}]$, et pour tout $t \in k^*$ on a $\chi(t) = \varphi(t)$, où $\varphi = \chi^\#(\mathrm{T})$. Comme T est inversible, il en est de même de φ. Donc φ ne s'annule pas sur k^* et on en déduit que $\varphi = a\mathrm{T}^i$, avec $a \in k \setminus \{0\}$, $i \in \mathbb{Z}$. Puis, $\chi(st) = \chi(s)\chi(t)$ donne $a = 1$. On en déduit que $\mathrm{X}(k^*)$ est formé des T^i, $i \in \mathbb{Z}$. Il est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$ et forme une base de $k[\mathbb{G}_m]$.

Pour n arbitraire, on choisit un isomorphisme $\mathrm{D}_n \cong (k^*)^n$, d'où un isomorphisme $k[\mathrm{D}_n] \cong k[\mathrm{T}_1^{\pm}, \dots, \mathrm{T}_n^{\pm}]$. Alors, il résulte du lemme 14.23.a) et de ce qui précède que $\mathrm{X}(\mathrm{D}_n)$ est formé des fonctions $\{\mathrm{T}_1^{i_1} \cdots \mathrm{T}_n^{i_n} \mid (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n\}$. Il est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$ et forme une base de $k[\mathrm{D}_n]$. $\square$

Définition 16.4. — Soit G un groupe algébrique affine. On dira (provisoirement) que G est un d-**groupe** si X(G) engendre k[G] (et donc en forme une base, d'après le lemme de Dedekind 14.21).

D'après ce qui précède, D_n est un d-groupe.

Proposition 16.5. — *Soit* G *un d-groupe.*

a) X(G) *est de type fini et* G *est diagonalisable.*

b) *Soit* H *un sous-groupe fermé de* G . *Alors* H *est un d-groupe, et l'application de restriction* $\mathrm{X}(\mathrm{G}) \to \mathrm{X}(\mathrm{H})$ *est surjective. De plus,* H *est égal à l'intersection des* $\operatorname{Ker}\chi$, *pour les* $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{G})$ *tels que* $\chi_{|\mathrm{H}} = 1$.

Démonstration. — a) Soient $x_1, \dots, x_r$ des générateurs de l'algèbre k[G]. Ils s'écrivent comme combinaisons linéaires d'un nombre fini de caractères $\chi_1, \dots, \chi_n$. Alors les χ_i engendrent k[G] comme algèbre, d'où $k[\mathrm{G}] = \bigoplus_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n} k\chi_1^{i_1} \dots \chi_n^{i_n}$. Le lemme de Dedekind entraîne alors que tout $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{G})$ est une somme à coefficients dans $\mathbb{N}$ des χ_i, d'où la 1ère assertion de a).

Enfin, l'application $\phi : \mathrm{G} \to (k^*)^n$, $g \mapsto (\chi_1(g), \dots, \chi_n(g))$ est clairement un morphisme de groupes algébriques. C'est une immersion fermée car son comorphisme $\phi^\# : k[\mathrm{T}_1^{\pm}, \dots, \mathrm{T}_n^{\pm}] \to k[\mathrm{G}]$ est surjectif, puisque $\phi^\#(\mathrm{T}_i) = \chi_i$.

b) Comme l'application de restriction $k[\mathrm{G}] \to k[\mathrm{H}]$ est surjective, et k[G] engendré par X(G), alors k[H] est engendré par les $\chi_{|\mathrm{H}}$, pour $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{G})$. Or les $\chi_{|\mathrm{H}}$ sont des caractères de H, et ceci montre que H est un d-groupe. En particulier, si $\theta \in \mathrm{X(H)}$ alors θ est la restriction d'un élément $\sum_i a_i\chi_i$ de $k[\mathrm{G}]$, et donc dans X(H) on a l'égalité $\theta = \sum_i a_i\chi_{i|\mathrm{H}}$. D'après le lemme de Dedekind 14.21, ceci entraîne $\theta = \chi_{i|\mathrm{H}}$, pour un i.

Enfin, soit I l'idéal de H dans $k[\mathrm{G}]$. Il faut montrer que I est engendré par les éléments $\chi - 1$, pour $\chi \in \mathrm{X(G)}$ tel que $\chi_{|\mathrm{H}} = 1$. Soit $f \in \mathrm{I}$. Ecrivons $f = \sum_{i=1}^n a_i\chi_i$. D'après le lemme de Dedekind, à nouveau, on se ramène au cas où les χ_i ont tous la même restriction à H. Alors chaque $\chi_i\chi_1^{-1}$ est trivial sur H et, comme $\sum_i a_i = f(e) = 0$, on obtient que $f = \sum_{i=1}^n a_i\chi_1(\chi_i\chi_1^{-1} - 1)$, d'où l'assertion cherchée. □

Remarque 16.6. — Avec d'autres méthodes, on peut montrer que X(G) est de type fini pour tout groupe algébrique G. Ceci découle de la Prop. 1.3, p. 79, dans [**KSS**].

***Théorème 16.7* (Caractérisation des groupes diagonalisables)**

Soit G *un groupe algébrique affine. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) G *est commutatif et* $\mathrm{G} = \mathrm{G}_s$

b) G *est diagonalisable*

c) $k[\mathrm{G}] = k\mathrm{X(G)}$

d) *Tout* G*-module rationnel* V *est somme directe de modules* k_χ*,* $\chi \in \mathrm{X(G)}$.

Démonstration. — On a déjà vu que a) ⇔ b), et l'équivalence b) ⇔ c) résulte des propositions 16.3 et 16.5. D'autre part, il est clair que d) ⇒ b).

Prouvons que a) ⇒ d). Soit V un G-module rationnel. D'après la proposition 14.21, les V_χ, $\chi \in \mathrm{X(G)}$, sont en somme directe. Montrons que $\mathrm{V} = \sum_{\chi\in\mathrm{X(G)}} \mathrm{V}_\chi$. Il suffit de voir cela quand V est de dimension finie. Dans ce cas, d'après le lemme 15.14, V admet une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ où G agit sur chaque e_i par un caractère χ_i. Le théorème est démontré. □

16.2. Tores. — Soient G un groupe diagonalisable et $\chi_1, \ldots, \chi_r \in \mathrm{X(G)}$. On considère le morphisme $\phi : \mathrm{G} \to (k^*)^r$, $g \mapsto (\chi_1(g), \ldots, \chi_r(g))$.

Proposition 16.8. — a) *ϕ est une immersion fermée ⇔ les χ_i engendrent* X(G).

b) *ϕ est surjectif ⇔ les χ_i sont linéairement indépendants.*

Démonstration. — Supposons que les χ_i engendrent X(G). Comme $k[\mathrm{G}] = k\mathrm{X(G)}$, alors $k[\mathrm{G}]$ est engendré comme algèbre par les $\chi_i^{\pm}$. Il en résulte que le comorphisme $\phi^{\#}$ est surjectif, puisque $\phi^{\#}(\mathrm{T}_i^{\pm}) = \chi_i^{\pm}$. Donc ϕ est une immersion fermée. Réciproquement, si ϕ est une immersion fermée alors, d'après la proposition 16.5.b, $\phi^{\#}$ induit une surjection $\mathrm{X}((k^*)^r) \to \mathrm{X(G)}$. Comme les T_i engendrent $\mathrm{X}((k^*)^r)$, alors les $\phi^{\#}(\mathrm{T}_i) = \chi_i$ engendrent X(G).

Prouvons b). Si $\phi(\mathrm{G})$ est un sous-groupe propre, il est contenu, d'après la dernière assertion de 16.5.b, dans le noyau d'un caractère non trivial

$T_1^{a_1}\cdots T_r^{a_r}$. Alors on la relation $\sum_i a_i\chi_i = 0$. Réciproquement, si ϕ est surjectif alors $\phi^\#$ induit une injection $X((k^*)^r) \hookrightarrow X(G)$, $T_i \mapsto \chi_i$. Il en résulte que les χ_i sont linéairement indépendants dans $X(G)$, puisque les T_i le sont dans $X((k^*)^r)$. □

Corollaire 16.9. — *Soit* G *diagonalisable. Les conditions suivantes sont équivalentes : a)* G *est connexe, b)* X(G) *est sans-torsion, c)* G *est un tore.*

Démonstration. — c) ⇒ a) est clair, et on a vu que a) ⇒ b) dans le lemme 14.23.b). Enfin, b) ⇒ c) résulte de la proposition précédente. En effet, X(G) est de type fini et sans torsion donc libre, et il suffit de prendre pour $\chi_1,\dots,\chi_r$ une base de X(G). □

Le corollaire admet la généralisation suivante.

Théorème 16.10. — *Soit* G *un groupe diagonalisable. Alors* G^0 *est un tore et* $G \cong F \times G^0$, *où* $F \cong G/G^0$, *et* $\mathrm{car}(k)$ *ne divise pas l'ordre de* F.

Démonstration. — On plonge G dans un D_n. Alors l'application de restriction $\pi : X(D_n) \to X(G^0)$ est surjective. Comme $X(G^0)$ est libre, π est scindée. Donc il existe une base $\{\chi_1,\dots,\chi_n\}$ de $X(D_n)$ et $r \leqslant n$ tels que $\{\chi_{1|G^0},\dots,\chi_{r|G^0}\}$ soit une base de $X(G^0)$, et $\chi_{i|G^0} = 1$ pour $i > r$. D'après la proposition 16.8, le morphisme $g \mapsto (\chi_1(g),\dots,\chi_n(g))$ induit un automorphisme de D_n, qui envoie G^0 sur $(k^*)^r \times \{1\}^{n-r}$.

On en déduit que $G = G^0 \times F$, où $F = G \cap \big(\{1\}^r \times (k^*)^{n-r}\big)$. Alors $F \cong G/G^0$. De plus, si $\mathrm{car}(k) = p$ alors F est sans p-torsion car si $(t_1^p,\dots,t_{n-r}^p) = (1,\dots,1)$ alors $t_i = 1$ pour tout i. □

16.3. Rigidité des groupes diagonalisables. —

Proposition 16.11. — *Soient* V *une variété connexe,* H, H' *des groupes algébriques, et* $\alpha : V \times H \to H'$ *un morphisme de variétés tel que*

$$\alpha(v, gh) = \alpha(v, g)\alpha(v, h), \qquad \forall\, v \in V,\ g, h \in H.$$

On suppose que les éléments d'ordre fini sont denses dans H, *et que, pour tout* n, *l'ensemble des éléments d'ordre* n *dans* H′ *est fini. Alors* $\alpha(x, h) = \alpha(y, h)$, *pour tout* $x, y \in V$, $h \in H$.

Démonstration. — Pour $h \in H$, notons β_h le morphisme $V \to H'$, $v \mapsto \alpha(v, h)$. Supposons $h^n = 1$. Alors $\beta_h(v)^n = 1$, car $\beta_h(v)^n = \alpha(v, h)^n = \alpha(v, h^n)$. Comme l'ensemble $\{x \in H' \mid x^n = 1\}$ est fini, et V connexe, on en déduit que β_h est constant. Par conséquent, pour x, y fixés dans V, le morphisme $\theta_{x,y} : h \mapsto \alpha(x, h)\alpha(y, h)^{-1} = \beta_h(x)\beta_h(y)^{-1}$ prend la valeur e sur l'ensemble dense des éléments de H d'ordre fini, et est donc constant. La proposition est démontrée. □

Lemme 16.12. — *Soient* X, Y *deux variétés et* $D \subseteq X$*,* $E \subseteq Y$ *des parties denses. Alors* $D \times E$ *est dense dans* $X \times Y$.

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

Définition 16.13. — Soit G un groupe algébrique. Si H est un sous-groupe fermé, on définit son **centralisateur** et son **normalisateur** :

$$C_G(H) = \{g \in G \mid gh = hg, \quad \forall\, h \in H\}$$
$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

Ce sont des sous-groupes fermés de G et, d'après le lemme 9.7 l'on a

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} \subseteq H\}.$$

Soit H un groupe diagonalisable. D'après le théorème 16.10, on a $H \cong (k^*)^r \times F$, où F est un groupe fini. On voit aussitôt que, pour tout n, l'ensemble des éléments d'ordre n est fini. D'autre part, dans k^* les éléments d'ordre fini sont denses (car en nombre infini) et on en déduit qu'il en est de même dans H, grâce au lemme ci-dessus. On en déduit le théorème suivant.

***Théorème 16.14* (Rigidité des groupes diagonalisables)**. — *Soient* G *un groupe algébrique et* H *un sous-groupe fermé diagonalisable. Alors* $N_G(H)^0 = C_G(H)^0$. *Par conséquent,*

$$W_G(H) := N_G(H)/C_G(H)$$

est un groupe fini.

Démonstration. — Appliquant la proposition au triplet $(N_G(H)^0, H, H)$, avec $\alpha(g,h) = ghg^{-1}$, on obtient que $N_G(H)^0$ est contenu dans $C_G(H)$, d'où l'égalité $C_G(H)^0 = N_G(H)^0$.

Montrons la 2ème assertion. D'abord, $C_G(H)$ est normal dans $N_G(H)$. En effet, si $g \in N_G(H)$, $x \in C_G(H)$ et $h \in H$, alors

$$(gxg^{-1})\, h = g\, x\, (g^{-1}hg)\, g^{-1} = g\, (g^{-1}hg)\, x\, g^{-1} = h\, (gxg^{-1}).$$

Enfin, le quotient $N_G(H)/C_G(H)$ est fini car $C_G(H)$ contient $N_G(H)^0$. Ceci prouve le théorème. □

Le lemme suivant sera utile plus loin.

***Lemme 16.15* (Centralisateurs de tores)**. — *Soit* T *un tore de* G*. Il existe* $t \in T$ *tel que* $C_G(t) = C_G(T)$ *et* $\mathfrak{g}^t = \mathfrak{g}^T$.

Démonstration. — Plongeant G dans un GL(V), on se ramène au cas où $G = GL(V)$ (car $C_G(T) = G \cap C_{GL(V)}(T)$, etc.). On a $V = V_{\chi_1} \oplus \cdots \oplus V_{\chi_r}$ pour certains $\chi_i \in X(T)$, deux à deux distincts, et, pour $i \neq j$, $\operatorname{Ker}(\chi_i\chi_j^{-1})$ est un sous-groupe propre, donc de dimension $< \dim T$ (car T connexe). Donc la réunion des $\mathrm{Ker}(\chi_i\chi_j^{-1})$ est une sous-variété fermée propre, et il existe $t \in \mathrm{T}$ tel que $\chi_i(t) \neq \chi_j(t)$ pour $i \neq j$. On a alors

$$\mathrm{C_G}(t) = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{GL}(\mathrm{V}_{\chi_i}) \subseteq \mathrm{C_G}(\mathrm{T}) \subseteq \mathrm{C_G}(t),$$

$$\mathfrak{gl}(\mathrm{V})^t = \prod_{i=1}^{r} \mathfrak{gl}(\mathrm{V}_{\chi_i}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathrm{V})^{\mathrm{T}} \subseteq \mathfrak{gl}(\mathrm{V})^t,$$

d'où les égalités voulues. □

Remarque 16.16. — L'énoncé est en défaut si T n'est pas connexe ; par exemple si $\mathrm{T} = \{\pm 1\}^3 \subseteq \mathrm{GL}(3)$.

16.4. Le couplage $\mathrm{X}(\mathrm{T}) \times \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}) \to \mathbb{Z}$**.** — Soit T un tore de dimension r.

***Définition 16.17* (Groupe des cocaractères)**. — On note $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$ l'ensemble des morphismes de groupes algébriques de $\mathbb{G}_m$ vers T. Il est muni d'une structure de groupe abélien : si $\gamma, \gamma' \in \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$, on définit $\gamma+\gamma'$ par $(\gamma+\gamma')(t) = \gamma(t)\gamma'(t)$, pour $t \in \mathbb{G}_m$.

Ce qui suit est repris d'un problème donné en 1997-1998, qui apporte des compléments sur le couplage $\mathrm{X}(\mathrm{T}) \times \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}) \to \mathbb{Z}$ et sur les isomorphismes

$$\mathrm{X}(\mathrm{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} k \cong \mathrm{Lie}(\mathrm{T})^*, \qquad \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} k \cong \mathrm{Lie}(\mathrm{T}).$$

Pour tout sous-groupe M de X(T), on pose $\mathrm{Ker}(\mathrm{M}) = \bigcap_{\chi \in \mathrm{M}} \mathrm{Ker}\,\chi$.

1.1) Montrer que $\gamma + \gamma'$ est bien un élément de $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$.

1.2) Montrer que $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$ et X(T) sont isomorphes à $\mathbb{Z}^r$. Pour cela, identifier T à $(k^*)^r$, et montrer qu'alors tout élément de $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$ (resp. X(T)) est donné par $t \mapsto (t^{n_1}, \dots, t^{n_r})$, (resp. $(t_1, \dots, t_n) \mapsto t_1^{m_1} \cdots t_r^{m_r}$), avec les n_i et m_i dans $\mathbb{Z}$, et que ceci fournit les isomorphismes voulus.

1.3) Soient $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$ et $\gamma \in \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$. Alors $\chi \circ \gamma$ est un endomorphisme de $\mathbb{G}_m = k^*$. En déduire qu'il existe un entier n tel que $(\chi \circ \gamma)(t) = t^n$, quel que soit $t \in k^*$. On notera $\langle \chi, \gamma \rangle$ cet entier. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle : \mathrm{X}(\mathrm{T}) \times \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}) \to \mathbb{Z}$ est bilinéaire.

1.4) Montrer que le couplage $\langle\ ,\ \rangle : \mathrm{X}(\mathrm{T}) \times \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}) \to \mathbb{Z}$ est *parfait*, c.à.d. que les applications induites $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{X}(\mathrm{T}), \mathbb{Z})$ et $\mathrm{X}(\mathrm{T}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{X}(\mathrm{T})^\vee, \mathbb{Z})$ sont des isomorphismes. (Utiliser la question 1.2).

1.5) Soit $\{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$ une base du $\mathbb{Z}$-module X(T). Montrer qu'il existe une base $\{y_1, \dots, y_r\}$ de $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$ telle que l'application $\phi : (k^*)^r \to \mathrm{T}$, $(t_1, \dots, t_r) \mapsto \prod_{i=1}^{r} y_i(t_i)$ soit un isomorphisme et vérifie $\gamma_i \circ \phi = pr_i$ pour tout i.

1.6) Soit M un sous-groupe de X(T). On veut montrer que Ker(M) est fini si et seulement si M est d'indice fini dans X(T). Soit s le rang de M. D'après le théorème de structure des $\mathbb{Z}$-modules de type fini, il existe une base $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ de X(T) et des entiers $m_1, \ldots, m_s \geqslant 1$ tels que $\{m_1\gamma_1, \ldots, m_s\gamma_s\}$ soit une base de M. (On ne demande pas de redémontrer ce résultat).

Déduire alors de la question précédente qu'il existe un isomorphisme ψ : $\mathrm{T} \xrightarrow{\sim} (k^*)^r$ tel que

$$\psi(\mathrm{Ker(M)}) = (k^*)^{r-s} \times \{(t_1, \ldots, t_s) \in (k^*)^s \mid t_i^{m_i} = 1, \text{ pour } i = 1, \ldots, s\}.$$

En tirer l'équivalence cherchée.

Lien avec Lie(T)**.**

2.1) Si y est un élément de $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$, alors $\mathrm{d}y$ est une application linéaire $k \to \mathrm{Lie(T)}$, et à y on peut donc associer l'élément $\mathrm{d}y(1)$ de Lie(T), qu'on notera $\delta(y)$. Montrer que $\delta(y + y') = \delta(y) + \delta(y')$, pour $y, y' \in \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$, puis que δ induit une application k-linéaire $\delta_k : \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} k \to \mathrm{Lie(T)}$.

medskip2.2) On choisit une identification $\mathrm{T} \cong (k^*)^r$, d'où aussi une identification $\mathrm{Lie(T)} \cong k^r$. Pour $i = 1, \ldots, r$, soit y_i l'élément de $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$ défini par $y_i(t) = (1, \ldots, t, \ldots, 1)$ (c.-à-d., t à la i-ème place). Montrer que $\mathrm{d}y_i(1) = e_i$, le i-ème vecteur de la base canonique de k^r. En déduire que δ_k est un isomorphisme.

2.3) D'autre part, si χ est un élément de X(T), alors sa différentielle $\mathrm{d}\chi$ est une application linéaire $\mathrm{Lie(T)} \to k$, c.-à-d., un élément de $\mathrm{Lie(T)}^*$. Montrer que $\mathrm{d}(\chi\chi') = \mathrm{d}\chi + \mathrm{d}\chi'$, pour $\chi, \chi' \in \mathrm{X(T)}$, c.-à-d., puis que d induit une application k-linéaire $\mathrm{X(T)} \otimes_{\mathbb{Z}} k \to \mathrm{Lie(T)}^*$, qu'on notera ϕ.

2.4) Soient $\chi \in \mathrm{X(T)}$ et $y \in \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$. Montrer que $\mathrm{d}\chi(\mathrm{d}y(1)) = \langle \chi, y \rangle$. En déduire que ϕ est un isomorphisme et, plus précisément, que ϕ est la transposée de δ_k^{-1}.

2.5) On suppose k de caractéristique nulle. Un sous-groupe L d'un k-espace vectoriel V de dimension finie est appelé un *réseau* s'il est engendré par une base de V. Montrer que δ et d sont injectives et identifient $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$, resp. X(T), à un réseau de Lie(T), resp. $\mathrm{Lie(T)}^*$.

2.6) On suppose $\mathrm{car}(k) = 0$. On rappelle que, dans ce cas, le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans k est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour tout $n \geqslant 1$. (Pourquoi ?) Soit Q un sous-groupe d'indice fini dans X(T). Déduire de la question 1.6 que Ker(Q) est isomorphe à X(T)/Q.

Une application.

Les questions suivantes pourront être traitées après avoir vu la structure des groupes linéaires résolubles connexes (voir plus loin). On suppose $\mathrm{car}(k) = 0$.

3.1) Soient B un groupe algébrique affine résoluble connexe, et $\mathfrak{b} = \mathrm{Lie}(\mathrm{B})$. Montrer que $\mathfrak{b}$ admet une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ telle que les valeurs propres de chaque $\mathrm{ad}\, e_i$ soient des entiers. (Utiliser les décompositions $\mathrm{B} = \mathrm{TU}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u}$, et ce qui précède).

3.2) Donner un exemple d'une algèbre de Lie résoluble qui n'est pas l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique affine résoluble. On pourra utiliser la question précédente et chercher un exemple de dimension 3.

17. Résolubilité et nilpotence

17.1. Sous-groupe engendré par des parties irréductibles. — La proposition suivante est d'une grande utilité. On note ι le morphisme $g \mapsto g^{-1}$.

Proposition 17.1. — *Soient* G *un groupe algébrique, et* $(f_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *une famille de morphismes* $f_i : \mathrm{X}_i \to \mathrm{G}$, *avec* X_i *une variété irréductible. On suppose que chaque* $\mathrm{Y}_i := f_i(\mathrm{X}_i)$ *contient* e. *Alors le sous-groupe engendré par les* Y_i *est fermé, irréductible, et égal à un produit fini* $\mathrm{Y}_{i_1}^{\pm} \cdots \mathrm{Y}_{i_m}^{\pm}$, *où* $\mathrm{Y}_i^{+} = \mathrm{Y}_i$ *et* $\mathrm{Y}_i^{-} = \iota(\mathrm{Y}_i)$.

Corollaire 17.2. — *Soient* $(\mathrm{H}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *des sous-groupes fermés connexes de* G. *Le sous-groupe qu'ils engendrent est fermé et connexe.*

Démonstration. — Quitte à agrandir I, on peut supposer que les morphismes $\iota \circ f_i$ font partie de la famille $(f_i)_{i\in\mathrm{I}}$. Alors la famille $(\mathrm{Y}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est stable par ι. Notons H le sous-groupe qu'elle engendre.

Pour toute suite finie $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_n)$, on pose $\mathrm{Y}_{\mathbf{i}} = \mathrm{Y}_{i_1} \cdots \mathrm{Y}_{i_n}$. Alors $\overline{\mathrm{Y}_{\mathbf{i}}}$ est une sous-variété fermée irréductible de G. Soit $\mathbf{j}$ tel que $\overline{\mathrm{Y}_{\mathbf{j}}} := \mathrm{Y}$ soit de dimension maximale. Pour tout $i \in \mathrm{I}$, on a $\mathrm{Y}_{\mathbf{j}} \subseteq \mathrm{Y}_i\mathrm{Y}_{\mathbf{j}}$ (car $e \in \mathrm{Y}_i$) et donc, par maximalité, $\mathrm{Y} = \overline{\mathrm{Y}_{\mathbf{j}}} = \overline{\mathrm{Y}_i\mathrm{Y}_{\mathbf{j}}} \supseteq \mathrm{Y}_i\mathrm{Y}_{\mathbf{j}} = \mathrm{Y}_i\mathrm{Y}$.

Il en résulte que $\overline{\mathrm{Y}_{\mathbf{i}}}\,\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{Y}$, pour tout $\mathbf{i}$. On en déduit que Y est un sous-groupe fermé de G, contenant H. Comme $\mathrm{Y}_{\mathbf{j}}$ contient un ouvert dense de Y, d'après le corollaire 8.45, il résulte du lemme 9.3 que $\mathrm{Y} = \mathrm{Y}_{\mathbf{j}}\mathrm{Y}_{\mathbf{j}}$. Ceci montre que $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{H}$, d'où $\mathrm{Y} = \mathrm{H}$. □

17.2. Groupes résolubles et nilpotents. —

Définition 17.3. — Soit G un groupe arbitraire.

1) Si A, B sont deux sous-groupes de G, on note (A, B) le sous-groupe engendré par les commutateurs $(a, b) := aba^{-1}b^{-1}$. On a $(\mathrm{A},\mathrm{B}) = (\mathrm{B},\mathrm{A})$ puisque $(b, a) = (a, b)^{-1}$.

2) On note $\mathscr{D}(G) = (G, G)$, le sous-groupe dérivé de G. On définit la **série dérivée** $\mathscr{D}^i(G)$ et la **série centrale descendante** $\mathscr{C}^i(G)$ par $\mathscr{D}^1(G) = \mathscr{D}(G) = \mathscr{C}^1(G)$ et

$$\mathscr{D}^{i+1}(G) = (\mathscr{D}^i(G), \mathscr{D}^i(G)), \qquad \mathscr{C}^{i+1}(G) = (G, \mathscr{C}^i(G)).$$

Il est clair que les $\mathscr{D}^i(G)$ et $\mathscr{C}^i(G)$ sont des sous-groupes normaux ; ils sont même *caractéristiques*, c.à.d. stables par tout automorphisme de G.

3) On dit que G est **résoluble**, resp. **nilpotent**, s'il existe $n \geqslant 1$ tel que $\mathscr{D}^n(G) = \{e\}$, resp. $\mathscr{C}^n(G) = \{e\}$. Comme $\mathscr{D}^i(G) \subseteq \mathscr{C}^i(G)$ pour tout i, on voit que tout groupe nilpotent est résoluble.

Lemme 17.4. — *Considérons une suite exacte* $1 \to K \to G \to H \to 1$ *de groupes. Si* G *est résoluble ou nilpotent,* K *et* H *le sont. De plus, si* H, K *sont résolubles, alors* G *l'est aussi.*

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

Proposition 17.5. — *Soient* G *un groupe algébrique affine, et* A, B *deux sous-groupes fermés.*

a) *Si* A *est connexe, alors* (A, B) *est fermé et connexe.*

b) *Si* A *et* B *sont normaux, alors* (A, B) *est fermé et normal.*

Par conséquent, les sous-groupes $\mathscr{D}^i(G)$ *et* $\mathscr{C}^i(G)$ *sont fermés.*

Démonstration. — a) Pour tout $b \in B$, considérons le morphisme $f_b : A \to G$, $a \mapsto aba^{-1}b^{-1}$. Alors (A, B) est le sous-groupe engendré par les $f_b(A)$, et l'assertion découle de la proposition 17.1.

b) Soient A^0 et B^0 les composantes connexes de A et B. D'après a), les sous-groupes (A^0, B) et (A, B^0) sont fermés et connexes, et il en est de même du sous-groupe C qu'ils engendrent, d'après la proposition 17.1 à nouveau. Or on peut montrer (voir [**Hu2**, 17.2]) que C est d'indice fini dans (A, B). Par conséquent, (A, B) est réunion d'un nombre fini de translatés de C et est donc un sous-groupe fermé. □

Définition 17.6. — Les suites $(\mathscr{D}^i(G))_{i\geqslant 1}$ et $(\mathscr{C}^i(G))_{i\geqslant 1}$ sont des suites décroissantes de fermés ; elles sont donc stationnaires. On pose $\mathscr{D}^\infty(G) = \bigcap_i \mathscr{D}^i(G)$ et $\mathscr{C}^\infty(G) = \bigcap_i \mathscr{C}^i(G)$.

Lemme 17.7. — *Soient* G *un groupe algébrique,* H *un sous-groupe fermé normal, et* $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ *leurs algèbres de Lie. Alors* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathrm{Lie}\big((G, H)\big)$.

Démonstration. — Posons $H' = (G, H)$ et $\mathfrak{h}' = \mathrm{Lie}(H')$. Soient $X \in \mathfrak{g}$ et $Y \in \mathfrak{h}$. On note θ_Y le morphisme $G \to \mathfrak{g}$, $g \mapsto \mathrm{Ad}(g)(Y)$. Alors $d\theta_Y(X) = [X, Y]$, d'après la preuve de la proposition 12.7.b). Or, pour tout $g \in G$, on a

$\mathrm{Int}(g)(\mathrm{H}) = \mathrm{H}$, et donc $\mathrm{Ad}(g)(\mathrm{Y}) \in \mathfrak{h}$. Il en résulte que $d\theta_{\mathrm{Y}}$ applique $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$, d'où le lemme. □

Corollaire 17.8. — *Soit* G *un groupe algébrique. Si* G *est commutatif, nilpotent, ou résoluble, il en est de même de* $\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. *Plus précisément, si* $\mathscr{D}^r(\mathrm{G}) = \{1\}$, *resp.* $\mathscr{C}^r(\mathrm{G}) = \{1\}$, *alors* $\mathscr{D}^r(\mathfrak{g}) = \{0\}$, *resp.* $\mathscr{C}^r(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Démonstration. — Ceci découle du lemme précédent. □

17.3. Exemple fondamental : les matrices triangulaires. — On note B_n le groupe des matrices triangulaires, U_n le sous-groupe des matrices triangulaires unipotentes, et $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{u}_n$ leurs algèbres de Lie. On voit facilement que $\mathscr{D}(\mathrm{B}_n) \subseteq \mathrm{U}_n$ et $\mathscr{D}(\mathfrak{b}_n) \subseteq \mathfrak{u}_n$; en particulier U_n est normal dans B_n et $\mathfrak{u}_n$ est un idéal de $\mathfrak{b}_n$.

Proposition 17.9. — a) U_n *et* B_n *sont connexes.*

b) U_n *est nilpotent et* B_n *résoluble, et de même pour* $\mathfrak{u}_n$ *et* $\mathfrak{b}_n$.

Démonstration. — Comme variétés, U_n est isomorphe à $k^{n(n-1)/2}$, et B_n à $\mathrm{U}_n \times (k^*)^n$, d'où a).

Montrons que U_n est nilpotent. Soit A la sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(k)$ formée des matrices triangulaires. On note V_i le sous-espace engendré par $v_1, \dots, v_i$, où $\{v_1, \dots, v_n\}$ est la base standard de k^n. Pour $r = 0, 1, \dots, n-1$, soit $\mathrm{I}_r = \{a \in \mathrm{A} \mid a\mathrm{V}_i \subseteq \mathrm{V}_{i-r},\ \forall\, i = 1, \dots, n\}$. Alors chaque I_r est un idéal de A, et l'on a $\mathrm{I}_r\mathrm{I}_s \subseteq \mathrm{I}_{r+s}$ et $\mathrm{I}_n = 0$. Il en résulte, au passage, que $\mathfrak{u}_n$ est nilpotente puisque $\mathscr{C}^r(\mathfrak{u}_n) \subseteq \mathrm{I}_{r+1}$ pour tout r.

D'après le lemme suivant, U_n est nilpotent. Comme $\mathscr{D}(\mathrm{B}_n) \subseteq \mathrm{U}_n$ et $\mathscr{D}(\mathfrak{b}_n) \subseteq \mathfrak{u}_n$, on conclut que B_n et $\mathfrak{b}_n$ sont résolubles. La proposition est démontrée, modulo le lemme qui suit. □

Posons $\mathrm{H}_r = \{g \in \mathrm{GL}_n \mid g - 1 \in \mathrm{I}_{r+1}\}$. Alors $\mathrm{H}_0 = \mathrm{U}_n$, $\mathrm{H}_{n-1} = \{1\}$, et donc la nilpotence de U_n résulte du lemme ci-dessous.

Lemme 17.10. — *On a* $\mathscr{C}^r(\mathrm{U}_n) \subseteq \mathrm{H}_r$, *pour* $r = 0, 1, \dots, n-1$.

Démonstration. — Récurrence sur r, vrai pour $r = 0$. Soit $r \geqslant 1$ et supposons avoir montré $\mathscr{C}^{r-1}(\mathrm{U}_n) \subseteq \mathrm{H}_{r-1}$, et soient $g \in \mathrm{U}_n$, $h \in \mathscr{C}^{r-1}(\mathrm{U}_n)$. Posons $\mathrm{X} = g - 1$ et $\mathrm{Y} = h - 1$. Alors $\mathrm{X} \in \mathrm{I}_1$ et $\mathrm{Y} \in \mathrm{I}_r$. Puisque X est nilpotent, alors l'inverse de g est donné par la formule $g^{-1} = 1 - \mathrm{X} + u$, où $u = \sum_{i=2}^n (-\mathrm{X})^i$. De même, $h^{-1} = 1 - \mathrm{Y} + v$, où $v = \sum_{i=2}^n (-\mathrm{Y})^i$. Notons que $u \in \mathrm{I}_2$ et $v \in \mathrm{I}_{2r} \subseteq \mathrm{I}_{r+1}$. Un calcul facile montre alors que

$$ghg^{-1}h^{-1} - 1 = (1 + \mathrm{X})(1 + \mathrm{Y})(1 - \mathrm{X} + u)(1 - \mathrm{Y} + v) - 1$$

appartient à I_{r+1}. Ceci prouve le lemme. □

18. Théorèmes de Lie-Kolchin

18.1. Théorème de Burnside et Wedderburn. — On rappelle que k est supposé algébriquement clos.

***Lemme 18.1* (Lemme de Schur).** — *Soient* A *une k-algèbre et* V *un* A*-module simple de dimension finie sur k. Alors tout* A*-endomorphisme de* V *est scalaire, c.-à-d.,* $\mathrm{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{V}) = k$.

Démonstration. — Posons $\mathrm{D} = \mathrm{End}_{\mathrm{A}}(\mathrm{V})$. C'est un corps (éventuellement non-commutatif). En effet, soit $\phi \in \mathrm{D} \setminus \{0\}$. Comme V est un A-module simple, on a nécessairement $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$ et $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{V}$, donc ϕ est un isomorphisme.

De plus, $\dim_k \mathrm{D} < \infty$, puisque D est une sous-k-algèbre de $\mathrm{End}_k(\mathrm{V})$. Maintenant, soit $\alpha \in \mathrm{D}$ et soit $f : k[\mathrm{X}] \to \mathrm{D}$ le morphisme de k-algèbres défini par $f(\mathrm{X}) = \alpha$; son image est la sous-algèbre $k[\alpha]$ de D engendrée par α, qui est intègre. Par conséquent $\mathrm{Ker}(f)$ est un idéal premier de $k[\mathrm{X}]$, non nul puisque $\dim_k k[\alpha] < \infty$. Donc $\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{P})$, où P est un polynôme irréductible unitaire. Comme k est algébriquement clos, P est de degré 1 et donc $\alpha \in k$. Ceci montre que $\mathrm{D} = k$. Le lemme est démontré. □

***Théorème 18.2* (Burnside-Wedderburn).** — *Soient* V *un k-espace vectoriel de dimension finie et* A *une sous-algèbre de* $\mathrm{End}_k(\mathrm{V})$*. Si* V *est un* A*-module simple, alors* $\mathrm{A} = \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$.

Démonstration. — Commençons par démontrer le lemme suivant.

Lemme 18.3. — *Soit* W *un sous-espace de* V *et* $v \in \mathrm{V} \setminus \mathrm{W}$*. Alors il existe* $a \in \mathrm{A}$ *tel que* $a\mathrm{W} = 0$ *et* $av \neq 0$.

Démonstration. — Par récurrence sur $\dim_k \mathrm{W}$. Si $\mathrm{W} = 0$, on peut prendre $a = 1$. Donc on peut supposer $\dim_k \mathrm{W} = m \geqslant 1$ et le lemme démontré pour $m - 1$. Écrivons $\mathrm{W} = \mathrm{W}' \oplus kw$ et soient $\mathrm{I} = \mathrm{Ann}_{\mathrm{A}}(\mathrm{W}')$ et $\mathrm{J} = \mathrm{Ann}_{\mathrm{A}}(\mathrm{W})$; ce sont des idéaux à gauche de A. On veut montrer que $\mathrm{J}w \neq 0$ pour tout $v \in \mathrm{V} \setminus \mathrm{W}$. Supposons au contraire qu'il existe $v \in \mathrm{V} \setminus \mathrm{W}$ tel que $\mathrm{J}v = 0$ et montrons que l'on aboutit à une contradiction.

Par hypothèse de récurrence, $\mathrm{I}w$ est un sous-module non nul de V, donc égale V puisque V est simple. Donc tout $x \in \mathrm{V}$ s'écrit $x = aw$, avec $a \in \mathrm{I}$ (non nécessairement unique). On pose alors

$$\phi(x) = av.$$

Ceci est bien défini, car si $x = a'w$ pour un autre $a' \in \mathrm{I}$, alors $a' - a$ appartient à I et annule w, donc appartient à J, donc annule v par hypothèse. Ceci montre que ϕ est bien défini. C'est un A-endomorphisme de V car si $b \in \mathrm{A}$ et $x = aw$, $x' = a'w$, avec $a, a' \in \mathrm{I}$, alors $ba + a' \in \mathrm{I}$, d'où

$$\phi(bx + x') = \phi((ba + a')w) = (ba + a')v = b\phi(x) + \phi(x').$$

Donc, d'après le lemme de Schur, il existe $\lambda \in k$ tel que $\phi = \lambda\,\mathrm{id}_{\mathrm{V}}$. Mais alors, pour tout $a \in \mathrm{I}$, on a :

$$0 = \phi(aw) - \lambda aw = a(v - \lambda w).$$

Par conséquent, d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à W' et $\mathrm{I} = \mathrm{Ann}_{\mathrm{A}}(\mathrm{W}')$, on a $v - \lambda w \in \mathrm{W}'$, d'où $v \in \mathrm{W}$, une contradiction. Ceci prouve le lemme. □

Démontrons maintenant le théorème. Choisissant une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V, on identifie $\mathrm{End}_k(\mathrm{V})$ à $\mathrm{M}_n(k)$. Il suffit donc de montrer que chaque matrice élémentaire $\mathrm{E}_{\ell j}$ appartient à A.

Fixons j et notons V^j le sous-espace de V engendré par les e_i, pour $i \neq j$. D'après le lemme précédent appliqué à $\mathrm{W} = \mathrm{V}^j$ et $v = e_j$, il existe $a \in \mathrm{A}$ tel que $ae_i = 0$ pour $i \neq j$ et $ae_j \neq 0$. Alors, comme V est un A-simple, $\mathrm{A}ae_j = \mathrm{V}$, et donc il existe $b \in \mathrm{A}$ tel que $bae_j = e_\ell$, et de plus $bae_i = 0$ pour $i \neq j$. Donc $ba = \mathrm{E}_{\ell j}$. Ceci prouve le théorème. □

18.2. Groupes unipotents. — Le premier théorème est un résultat d'algèbre abstraite.

Théorème 18.4 **(Lie-Kolchin pour les groupes de matrices unipotentes)**
Soient $\mathrm{V} = k^n$ *et* G *un sous-groupe de* $\mathrm{GL}(\mathrm{V})$ *formé de matrices unipotentes. Alors il existe une base de* V *dans laquelle* G *est triangulaire.*

Démonstration. — Procédant par récurrence sur $\dim \mathrm{V}$, il suffit de montrer l'existence d'un vecteur non-nul fixé par G. Pour cela, on peut supposer que V est un G-module simple. Alors, d'après le théorème de Burnside-Wedderburn, appliqué à la sous-algèbre $k\mathrm{G}$, on obtient $k\mathrm{G} = \mathrm{End}(\mathrm{V})$.

Comme tout élément de G est unipotent, alors, pour $g, h \in \mathrm{G}$, on a $\mathrm{Tr}(g) = \dim(\mathrm{V}) = \mathrm{Tr}(gh)$, et donc $\mathrm{Tr}((g-1)h) = 0$. Comme $k\mathrm{G} = \mathrm{End}(\mathrm{V})$, il vient $\mathrm{Tr}((g-1)\mathrm{Y}) = 0$, pour tout $\mathrm{Y} \in \mathrm{End}(\mathrm{V})$. Or, on a $\mathrm{Tr}((g-1)\mathrm{E}_{ij}) = (g-1)_{ji}$. Il en résulte que $g = 1$, pour tout $g \in \mathrm{G}$. Donc V est de dimension 1, avec action triviale de G, et le théorème est démontré. □

Corollaire 18.5 **(Lie-Kolchin pour les groupes unipotents)**
Soient G *un groupe algébrique affine unipotent et* $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}_n$ *une représentation. Alors* $\rho(\mathrm{G})$ *est conjugué à un sous-groupe de* U_n. *Par conséquent,* G *est nilpotent, ainsi que* $\mathrm{Lie}(\mathrm{G})$.

Démonstration. — La décomposition de Jordan et le théorème entraînent la première assertion. La seconde en découle, d'après le théorème 7.24, la proposition 17.9, et le lemme 17.4. □

18.3. Groupes résolubles connexes. — Pour les groupes algébriques résolubles *connexes*, on a le théorème suivant.

Théorème 18.6 **(Lie-Kolchin pour les groupes résolubles connexes)**
Soit G *un groupe algébrique affine résoluble connexe, et* $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}_n$ *une représentation. Alors* $\rho(\mathrm{G})$ *est conjugué à un sous-groupe de* B_n.

Démonstration. — On procède par récurrence sur $\dim \mathrm{V} + \dim \mathrm{G}$. Il suffit de montrer l'existence d'une droite stable par G. Pour cela, on peut supposer que V est un G-module simple. Comme $\mathrm{H} := \mathscr{D}(\mathrm{G})$ est résoluble, connexe, et de dimension $< \dim \mathrm{G}$, il stabilise une droite de V, i.e. il existe $\chi_0 \in \mathrm{X}(\mathrm{H})$ tel que V_{χ_0} soit non-nul.

Observons que G agit morphiquement dans $k[\mathrm{H}]$ et $\mathrm{X}(\mathrm{H})$. En effet, considérons le morphisme $\mathrm{G} \times \mathrm{H} \to \mathrm{H}$, $(g, h) \mapsto g^{-1}hg$. Son comorphisme $k[\mathrm{H}] \to k[\mathrm{H}] \otimes k[\mathrm{G}]$ fait de $k[\mathrm{H}]$ un G-module rationnel, où l'action est donnée par $(g\phi)(h) = \phi(ghg^{-1})$, pour $\phi \in k[\mathrm{H}]$, $g \in \mathrm{G}$, $h \in \mathrm{H}$, et le sous-espace $k\mathrm{X}(\mathrm{H}) \subseteq k[\mathrm{H}]$ est clairement stable. On a donc une représentation rationnelle de G dans $k[\mathrm{H}]$ et dans $k\mathrm{X}(\mathrm{H})$. En particulier, pour tout $\phi \in k[\mathrm{H}]$, le stabilisateur G_ϕ est un sous-groupe fermé.

D'autre part, d'après la proposition 14.21, les sous-espaces $\mathrm{V}_{g\chi_0}$ sont en somme directe. Comme V est de dimension finie, ceci entraîne que l'orbite $\mathrm{G}\chi_0$ est finie. Il en résulte que G_{χ_0} est fermé, d'indice fini, et donc égal à G puisque G est connexe. Alors, pour $v \in \mathrm{V}_{\chi_0}$, $g \in \mathrm{G}$ et $h \in \mathrm{H}$, on a

$$hgv = g\, g^{-1}hgv = \chi_0(g^{-1}hg)gv = (g\chi_0)(h)gv = \chi_0(h)gv.$$

Ceci montre que V_{χ_0} est un sous-G-module. Puisque V est simple, il vient $\mathrm{V} = \mathrm{V}_{\chi_0}$. Donc tout $h \in \mathrm{H}$ agit sur V par une homothétie $\rho(h)$ de rapport $\chi_0(h)$. Or, comme h est un commutateur, on a $\mathrm{dét}(\rho(h)) = 1$. Donc $\chi_0(\mathrm{H})$ est contenu dans le groupe des racines n-ièmes de l'unité, où $n = \dim \mathrm{V}$, et comme H est connexe il vient $\mathrm{H} \subseteq \operatorname{Ker} \rho$. Par conséquent, $\rho(\mathrm{G})$ est un sous-groupe commutatif de GL(V) ; d'après le lemme 15.14 il stabilise donc une droite de V (d'où $\dim \mathrm{V} = 1$ puisque V est simple). Le théorème est démontré. □

On déduit du théorème le corollaire suivant. (On obtiendra plus loin des résultats plus précis sur la structure des groupes résolubles connexes.)

Corollaire 18.7. — *Soit* G *résoluble connexe. Alors :*

a) $\mathscr{D}(\mathrm{G})$ *est connexe et unipotent.*

b) G_u *est un sous-groupe fermé normal.*

Démonstration. — D'après le théorème, on peut plonger G dans un B_n. Alors $\mathscr{D}(\mathrm{G}) \subseteq \mathscr{D}(\mathrm{B}_n) \subseteq \mathrm{U}_n$, et donc $\mathscr{D}(\mathrm{G})$ est unipotent. D'autre part, on a $\mathrm{G}_u = \mathrm{G} \cap \mathrm{U}_n$ et donc G_u est un sous-groupe fermé normal, puisque U_n est normal dans B_n. Enfin, on a $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_u) \subseteq \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) \cap \mathfrak{u}_n \subseteq \mathfrak{g}_n$. □

Remarque 18.8. — L'hypothèse de connexité dans le théorème est essentielle. Par exemple, soit N le normalisateur de D_2 dans GL_2. Montrer que N est résoluble, mais pas conjugué à un sous-groupe de B_2.

19. Structure des groupes résolubles connexes

19.1. Le théorème de structure. — On va démontrer le théorème suivant. [1]

***Théorème 19.1* (Structure des groupes résolubles connexes)**
Soient G *résoluble connexe, et* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$.

1) G_u *est connexe.*

2) *Si* T *est un tore maximal de* G*, l'application* $T \times G_u \to G$, $(t, u) \mapsto tu$ *est un isomorphisme de variétés. En particulier,* $T \cong G/G_u$*. De plus, on a* $\mathrm{Lie}(G_u) = \mathfrak{g}_n$*, et* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(T) \oplus \mathfrak{g}_n$.

3) *Tous les tores maximaux de* G *sont conjugués par* $\mathscr{C}^\infty(G)$*. De plus, tout sous-groupe formé d'éléments semi-simples est contenu dans un tore de* G.

4) *Pour toute famille* S *d'éléments semi-simples qui commutent, on a* $N_G(S) = C_G(S) = C_G(S)^0$.

Démonstration. — Voyons 1). Soit $G' = G/\mathscr{D}(G)$. Alors G' est commutatif, donc $G' \cong G'_s \times G'_u$. Comme G est connexe, G' et G'_u le sont aussi. Soit π le morphisme $G \to G'$. Montrons que $G_u = \pi^{-1}(G'_u)$. L'inclusion $\subseteq$ est claire. Réciproquement, soient $g \in \pi^{-1}(G'_u)$ et $g = g_s g_u$ sa décomposition de Jordan. Alors $\pi(g_s)\pi(g_u)$ est la décomposition de Jordan de $\pi(g) \in G_u$, d'où $\pi(g_s) = 1$. Donc $g_s \in \mathscr{D}(G)$, et comme $\mathscr{D}(G) \subseteq G_u$ il vient $g_s = 1$. Donc $G_u = \pi^{-1}(G'_u)$. D'après le lemme 10.17.b), on en déduit que G_u est connexe. Ceci prouve le point 1).

Le reste de la démonstration se fait en plusieurs étapes. On a suivi la démonstration, assez élémentaire, de [**Do88**]. Pour d'autres démonstrations, voir [**Bo**], [**Hu2**] ou [**Sp**].

On aura besoin du lemme suivant, qui résulte des propriétés de la décomposition de Jordan.

Lemme 19.2. — *Si* T *est diagonalisable alors* $\mathrm{Lie}(T) = \mathrm{Lie}(T)_s$*. Si* U *est unipotent, alors* $\mathrm{Lie}(U) = \mathrm{Lie}(U)_n$.

---

[1] Ce théorème a simplement été énoncé en cours. La lecteur peut tranquillement sauter la démonstration, qui occupe toute la section.

Démonstration. — T se plonge dans un D_n ; alors $\mathrm{Lie}(\mathrm{T}) \subseteq \mathrm{Lie}(\mathrm{D}_n)$ est formé d'éléments semi-simples. D'après le théorème de Lie-Kolchin 18.4, U se plonge dans un U_n ; alors $\mathrm{Lie}(\mathrm{T}) \subseteq \mathrm{Lie}(\mathrm{U}_n)$ est formé d'éléments nilpotents. □

19.2. Groupes nilpotents connexes. — La proposition ci-dessous est une étape dans la démonstration du théorème 19.1.

Proposition 19.3. — *Soient* G *résoluble connexe,* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$*. Alors :* G *est nilpotent* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{G}_s \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{G})$*. Dans ce cas,* G_s *est un sous-groupe fermé connexe central et la multiplication induit un isomorphisme* $\mathrm{G}_s \times \mathrm{G}_u \cong \mathrm{G}$*, dont l'inverse est donné par la décomposition de Jordan. De plus,* $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_s) = \mathfrak{g}_s$*,* $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_u) = \mathfrak{g}_n$*, et* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_s \oplus \mathfrak{g}_n$*.*

Démonstration. — Supposons G nilpotent et montrons par récurrence sur $\dim \mathrm{G}$ que $\mathrm{G}_s \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{G})$. C'est vrai si G est abélien. Sinon, soient $\mathrm{N} = \mathscr{C}^n(\mathrm{G})$ (avec $n \geqslant 1$ et $\mathscr{C}^{n+1}(\mathrm{G}) = \{1\}$) et $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{N} := \mathrm{G}'$. Soient $s \in \mathrm{G}_s$ et $g \in \mathrm{G}$. Par hypothèse de récurrence, $\pi(s) \in \mathrm{Z}(\mathrm{G}')$ et donc $z := gsg^{-1}s^{-1} \in \mathrm{N}$. Or $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{G})$ (car $(\mathrm{G}, \mathrm{N}) = \{1\}$) et donc $sz = zs = gsg^{-1}$, avec s et gsg^{-1} semi-simples, et z unipotent (car $\mathrm{N} \subseteq \mathscr{D}(\mathrm{G})$). On en déduit que $z = 1$. Ceci prouve que s est central.

Supposons $\mathrm{G}_s \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{G})$. Alors G_s est un sous-groupe. Plongeons G dans un $\mathrm{GL}(\mathrm{V}) = \mathrm{GL}_n$. D'après le lemme 15.14, on peut supposer que $\mathrm{G}_s \subseteq \mathrm{G} \cap \mathrm{D}_n$. Alors, d'une part, on a $\mathrm{G}_s = \mathrm{G} \cap \mathrm{D}_n$ et donc G_s est fermé. D'autre part, on a $\mathrm{V} = \mathrm{V}_{\chi_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_{\chi_r}$ pour certains $\chi_i \in \mathrm{X}(\mathrm{G}_s)$, et chaque V_{χ_i} est G-stable (car G_s est central). D'après le théorème de Lie-Kolchin 18.4, chaque V_{χ_i} admet une base où G_u est triangulaire unipotent ; dans cette base tout $g \in \mathrm{G}$ est représenté par une matrice triangulaire dont chaque terme diagonal est $\chi_i(g) = \chi_i(g_s)$.

On conclut alors, comme dans la démonstration du théorème 15.15, que le morphisme $\mathrm{G}_s \times \mathrm{G}_u \to \mathrm{G}$ est un isomorphisme, dont l'inverse est donné par la décomposition de Jordan. Par conséquent, G_s est connexe, et G est nilpotent (car G_s et G_u le sont). De plus, on a $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_s) \oplus \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_u)$. Or, $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_s) \subseteq \mathfrak{g}_s$ et $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_u) \subseteq \mathfrak{g}_n$, d'après le lemme 19.2. La dernière assertion en découle, puisque $\mathfrak{g}_s \cap \mathfrak{g}_n = \{0\}$. La proposition est démontrée. □

Au passage, consignons ici la propriété suivante des groupes nilpotents connexes :

Lemme 19.4. — *Soit* G *nilpotent connexe* $\neq \{1\}$*. Alors* $\mathrm{Z}(\mathrm{G})^0$ *est non-trivial.*

Démonstration. — C'est clair si G est abélien. Sinon, soit $n \geqslant 1$ tel que $\mathscr{C}^n(\mathrm{G}) \neq \{1\}$ et $\mathscr{C}^{n+1}(\mathrm{G}) = \{1\}$. Alors $\mathscr{C}^n(\mathrm{G})$ est fermé, connexe, central et non trivial. □

19.3. Un lemme-clé. — On aura besoin du

Lemme 19.5. — *Soit* N *un sous-groupe commutatif de* G_u*, fermé, connexe, et normal dans* G*, et soit* $s \in \mathrm{G}_s$*. Alors l'application* $f : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$*,* $x \mapsto sxs^{-1}x^{-1}$ *est un morphisme de groupes algébriques, et donc* $f(\mathrm{N}) := \mathrm{M}$ *est un sous-groupe fermé connexe de* N*. De plus, le morphisme* $\mathrm{C_N}(s) \times \mathrm{M} \to \mathrm{N}$*,* $(v, u) \mapsto vu$ *est bijectif, et* $\mathrm{C_N}(s) = \operatorname{Ker} f$ *est connexe.*

Démonstration. — f est évidemment un morphisme de variétés ; montrons que c'est un morphisme de groupes. Soient $x, y \in \mathrm{N}$. Alors

$$f(xy) = s\,x\,y\,s^{-1}\,y^{-1}\,x^{-1} = (sxs^{-1})\ (sys^{-1})\ y^{-1}\ x^{-1}.$$

Mais sxs^{-1}, $sys^{-1} \in \mathrm{N}$, puisque N est normal dans G, et comme N est abélien il vient $f(xy) = f(x)f(y)$, d'où la 1ère assertion. Il est clair que $\operatorname{Ker} f = \mathrm{C_N}(s)$, d'où $\dim \mathrm{N} = \dim \mathrm{M} + \dim \mathrm{C_N}(s)$. Montrons que $\mathrm{C_N}(s) \cap \mathrm{M} = \{1\}$. Soit $x \in \mathrm{N}$ tel que $g := f(x) \in \mathrm{C_N}(s)$. Alors

$$xs^{-1}x^{-1} = s^{-1}g = gs^{-1}$$

et ceci est la décomposition de Jordan de $xs^{-1}x^{-1}$, puisque $g \in \mathrm{N} \subseteq \mathrm{G}_u$ est unipotent. Mais $xs^{-1}x^{-1}$ est semi-simple, car s^{-1} l'est, et donc $g = 1$.

Il en résulte que le morphisme $\mu : \mathrm{C_N}(s) \times \mathrm{M} \to \mathrm{N}$, $(x, y) \mapsto xy$ est injectif. Son image est donc un sous-groupe fermé de N, de dimension $\dim \mathrm{C_N}(s) + \dim \mathrm{M} = \dim \mathrm{N}$. Comme N est connexe, on conclut que μ est bijectif. On en déduit que $\mathrm{C_N}(s) := \mathrm{C}$ est connexe. En effet, écrivons $\mathrm{C} = \mathrm{C}^0 g_1 \sqcup \cdots \sqcup \mathrm{C}^0 g_n$ (avec $g_1 = 1$). Comme μ est bijectif, alors $\mathrm{N} = \mathrm{CM}$ est réunion disjointe des $\mathrm{C}^0 g_i \mathrm{M}$. L'une au moins de ces orbites sous $\mathrm{C}^0 \times \mathrm{M}$ est fermée ; or $\mathrm{C}^0 g_i \mathrm{M} = g_i \mathrm{C}^0 \mathrm{M}$ donc ces orbites sont toutes fermées et ouvertes. Comme N est connexe, il vient $n = 1$, et donc C est connexe. □

Corollaire 19.6. — *Soient* G *résoluble connexe,* $s \in \mathrm{G}_s$*. Alors* $\mathrm{C_G}(s)$ *est connexe, et on a* $\mathrm{G} = \mathrm{C_G}(s)\mathrm{G}_u$*.*

Démonstration. — On procède par récurrence sur $\dim \mathrm{G}$. Les assertions sont vraies si s est central, donc en particulier si G est abélien. Sinon, soit $n \geqslant 1$ tel que $\mathscr{D}^n(\mathrm{G}) \neq \{1\}$ et $\mathscr{D}^{n+1}(\mathrm{G}) = \{1\}$. Posons $\mathrm{N} = \mathscr{D}^n(\mathrm{G})$. Alors N est abélien, fermé, connexe, normal et unipotent (car $\mathrm{N} \subseteq \mathscr{D}(\mathrm{G}) \subseteq \mathrm{G}_u$). Soient $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{N}$ et $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$. On a $\dim \mathrm{G}' = \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{N} < \dim \mathrm{G}$.

Montrons que $\pi(\mathrm{C_G}(s)) = \mathrm{C_{G'}}(\pi(s))$. L'inclusion $\subseteq$ est claire. Soit $z \in \mathrm{G}$ tel que $\pi(z) \in \mathrm{C_{G'}}(\pi(s))$. Alors $szs^{-1}z^{-1} \in \mathrm{N}$ et donc, d'après le lemme, il existe $u \in \mathrm{N}$ et $v \in \mathrm{C_N}(s)$ tels que $szs^{-1}z^{-1} = vf(u) = vsus^{-1}u^{-1}$. Or, v commute à s, et à u (car N est abélien), donc aussi à $us^{-1}u^{-1}$. Donc, on a

$$zs^{-1}z^{-1} = v\ us^{-1}u^{-1} = us^{-1}u^{-1}\ v.$$

Comme v est unipotent et $us^{-1}u^{-1}$ semi-simple, ceci est la décomposition de Jordan de $zs^{-1}z^{-1}$. Or ce dernier est semi-simple, d'où $v = 1$ et $zs^{-1}z^{-1} = us^{-1}u^{-1}$. Donc $u^{-1}z \in \mathrm{C_G}(s)$, et $\pi(u^{-1}z) = \pi(z)$ (car $u \in \mathrm{N}$). Ceci prouve que $\pi(\mathrm{C_G}(s)) = \mathrm{C_{G'}}(\pi(s))$. On en déduit que $\mathrm{C_G}(s)$ est connexe. En effet, comme $\mathrm{C_G}(s) \cap \mathrm{N} = \mathrm{C_N}(s)$, on a une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathrm{C_N}(s) \longrightarrow \mathrm{C_G}(s) \longrightarrow \mathrm{C_{G'}}(\pi(s)) \longrightarrow 1.$$

Or $\mathrm{C_N}(s)$ est connexe, d'après le lemme, et $\mathrm{C_{G'}}(\pi(s))$ l'est, par hypothèse de récurrence. Donc $\mathrm{C_G}(s)$ l'est aussi, d'après le lemme 10.17.b).

Enfin, par hypothèse de récurrence, on a $\mathrm{G'} = \mathrm{C_{G'}}(\pi(s))\mathrm{G}'_u$, et comme $\mathrm{C_{G'}}(\pi(s)) = \pi(\mathrm{C_G}(s))$ il vient $\mathrm{G} = \mathrm{C_G}(s)\pi^{-1}(\mathrm{G}'_u)$. Or $\pi^{-1}(\mathrm{G}'_u) \subseteq \mathrm{G}_u$. En effet, si $\pi(g) \in \mathrm{G}'_u$ alors $\pi(g_s) = 1$ et donc $g_s \in \operatorname{Ker}\pi = \mathrm{N}$, d'où $g_s = 1$ puisque $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{G}_u$. Le corollaire est démontré. □

19.4. Sections de $\mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{G}_u$. — On déduit des paragraphes précédents le corollaire suivant.

Corollaire 19.7. — *Soit* G *résoluble connexe. Il existe un tore* T *tel que la multiplication induise un isomorphisme* $\mathrm{T} \times \mathrm{G}_u \cong \mathrm{G}$. *Alors,* $\mathrm{T} \cong \mathrm{G}/\mathrm{G}_u$. *De plus, on a* $\mathrm{Lie(G)} = \mathrm{Lie(T)} \oplus \mathrm{Lie(G}_u)$, *et* $\mathrm{Lie(G}_u) = \mathrm{Lie(G)}_n$.

Démonstration. — On procède par récurrence sur $\dim \mathrm{G}$. D'après la proposition 19.3 , les assertions sont vraies si G est nilpotent. Sinon, il existe $s \in \mathrm{G}_s$ non central, et $\mathrm{C_G}(s)$ est un sous-groupe propre, donc de dimension $< \dim \mathrm{G}$. D'après le corollaire 19.6, $\mathrm{C_G}(s)$ est connexe. Donc, par hypothèse de récurrence, il existe un tore T tel que $\mathrm{C_G}(s) = \mathrm{TC_G}(s)_u$. D'après le corollaire 19.6, à nouveau, il vient $\mathrm{G} = \mathrm{C_G}(s)\mathrm{G}_u = \mathrm{TG}_u$.

Par conséquent, G est un espace homogène sous $\mathrm{T} \times \mathrm{G}_u$. Le morphisme $\phi : \mathrm{T} \times \mathrm{G}_u \to \mathrm{G}$, $(t, u) \mapsto tu$ est surjectif d'après ce qui précède, injectif car $\mathrm{T} \cap \mathrm{G}_u = \{1\}$. Il est de plus séparable. En effet, $\mathrm{d}\phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mathrm{X} + \mathrm{Y}$, et comme $\mathrm{Lie(T)} \cap \mathrm{Lie(G}_u) = \{0\}$, d'après le lemme 19.2, on en déduit que $\mathrm{d}\phi$ est injective, et donc surjective puisque $\dim(\mathrm{T} \times \mathrm{G}_u) = \dim \mathrm{G}$.

Donc ϕ est un isomorphisme, d'après la proposition 13.26, et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie(T)} \oplus \mathrm{Lie(G}_u)$. Ceci entraîne que $\mathfrak{g}_n = \mathrm{Lie(G}_u)$. Enfin, soient $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{G}_u$ et $\varphi = \pi_{|\mathrm{T}}$. Alors φ est T-équivariant et bijectif. De plus, $\mathrm{d}\varphi$ est injective (car $\operatorname{Ker} \mathrm{d}\pi = \mathrm{Lie(G}_u)$ et $\mathrm{Lie(T)} \cap \mathrm{Lie(G}_u) = \{0\}$), donc bijective puisque $\dim \mathrm{T} = \dim \mathrm{G}/\mathrm{G}_u$. Donc φ est un isomorphisme $\mathrm{T} \cong \mathrm{G}/\mathrm{G}_u$. □

19.5. Conjugaison des tores maximaux. —

Proposition 19.8. — *Soient* G *résoluble connexe,* T *un tore tel que* $\mathrm{G} = \mathrm{TG}_u$, *et* $s \in \mathrm{G}_s$. *Alors il existe* $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{G})$ *tel que* $gsg^{-1} \in \mathrm{T}$.

Démonstration. — A nouveau, on procède par récurrence sur $\dim \mathrm{G}$. Si G est nilpotent, l'hypothèse $\mathrm{G} = \mathrm{TG}_u$ entraîne, par décomposition de Jordan, que $\mathrm{T} = \mathrm{G}_s$. L'assertion est donc vraie dans ce cas. Supposons G non nilpotent. Alors $\mathrm{H} := \mathscr{C}^\infty(\mathrm{G})$ est fermé, connexe, non-trivial et nilpotent (car inclus dans $\mathscr{C}(\mathrm{G}) \subseteq \mathrm{G}_u$). Soit $n \geqslant 0$ tel que $\mathscr{C}^n(\mathrm{H}) \neq \{1\}$ et $\mathscr{C}^{n+1}(\mathrm{H}) = \{1\}$, et soient $\mathrm{N} = \mathscr{C}^n(\mathrm{H})$ et $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{N} := \mathrm{G}'$. Alors $\mathrm{G}' = \pi(\mathrm{T})\mathrm{G}'_u$ et, par hypothèse de récurrence, il existe $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{G})$ tel que $\pi(g)\pi(s)\pi(g^{-1}) \in \pi(\mathrm{T})$. (Ici, on a utilisé le lemme suivant, qui se voit facilement par récurrence sur m).

Lemme 19.9. — *Soit $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ un morphisme surjectif de groupes. Alors, pour tout $m \geqslant 0$, $\mathscr{C}^m(\mathrm{G}') = \pi(\mathscr{C}^m(\mathrm{G}))$. De même, $\mathscr{D}^m(\mathrm{G}') = \pi(\mathscr{D}^m(\mathrm{G}))$.*

Donc, on a $gsg^{-1} \in \pi^{-1}(\mathrm{T}) = \mathrm{TN}$. Écrivons $gsg^{-1} = tv$, avec $t \in \mathrm{T}, v \in \mathrm{N}$. Or N est un sous-groupe commutatif de G_u, fermé, connexe, et normal dans G (car G normalise H et donc aussi N). D'après le lemme 19.5, il existe $u \in \mathrm{N}$ et $z \in \mathrm{C}_\mathrm{N}(t)$ tels que $v = t^{-1}\, u\, t\, u^{-1}\, z$. Or z commute à t, et aussi à u (car N est abélien), donc

$$gsg^{-1} = tv = u\,t\,u^{-1}\,z = z\,u\,t\,u^{-1}.$$

Comme gsg^{-1} et utu^{-1} sont semi-simples, et z unipotent (car $z \in \mathrm{N}$), il vient $z = 1$ et $(u^{-1}g)\, s\, (u^{-1}g)^{-1} = t \in \mathrm{T}$. Or $u^{-1}g \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{G})$, puisque $g, u \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{G})$. La proposition est démontrée. □

***Théorème 19.10* (Connexité des centralisateurs et conjugaison des tores maximaux)**

Soient T *un tore tel que* $\mathrm{G} = \mathrm{TG}_u$, *et* S *un sous-groupe, non nécessairement fermé, formé d'éléments semi-simples. Alors* S *est commutatif et*

a) $\mathrm{C}_\mathrm{G}(\mathrm{S})$ *est connexe et il existe* $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{G})$ *tel que* $g\mathrm{S}g^{-1} \subseteq \mathrm{T}$. *En particulier, tous les tores maximaux de* G *sont conjugués par* $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{G})$.

b) *De plus,* $\mathrm{C}_\mathrm{G}(\mathrm{S}) = \mathrm{N}_\mathrm{G}(\mathrm{S})$.

Démonstration. — On observe d'abord que S est commutatif, car G/G_u l'est (par exemple car $\mathscr{D}(\mathrm{G}) \subseteq \mathrm{G}_u$) et la restriction à S du morphisme $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{G}_u$ est injective. En effet, si $\pi(s) = \pi(t)$ alors $st^{-1} \in \mathrm{G}_u$, d'où $s = t$ d'après la décomposition de Jordan.

On procède par récurrence sur $\dim \mathrm{G}$. Si S est central, alors $\mathrm{C}_\mathrm{G}(\mathrm{S}) = \mathrm{G}$ est connexe, et le sous-groupe H de G engendré par S et T est formé d'éléments semi-simples. Donc, à nouveau, $\pi_{|\mathrm{H}}$ est injective. Mais comme $\mathrm{G}/\mathrm{G}_u = \pi(\mathrm{T})$, par hypothèse, il vient $\mathrm{H} = \mathrm{T}$ d'où $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{T}$.

Sinon, il existe $s \in \mathrm{S}$ non central. D'après la proposition 19.8, quitte à remplacer S par un conjugué sous $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{G})$, on peut supposer $s \in \mathrm{T}$. Alors $\mathrm{C}_\mathrm{G}(s)$ contient T et S (car S est abélien), et est un sous-groupe propre, connexe d'après le corollaire 19.6. Par hypothèse de récurrence, $\mathrm{C}_{\mathrm{C}_\mathrm{G}(s)}(\mathrm{S})$ est connexe, et il existe $g \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{C_G}(s))$ tel que $g\mathrm{S}g^{-1} \subseteq \mathrm{T}$. Or $\mathrm{C}_{\mathrm{C_G}(s)}(\mathrm{S}) = \mathrm{C_G}(\mathrm{S})$ et $\mathscr{C}^\infty(\mathrm{C_G}(s)) \subseteq \mathscr{C}^\infty(\mathrm{G})$. Ceci prouve a).

Enfin, soient $g \in \mathrm{N_G}(\mathrm{S})$ et $s \in \mathrm{S}$. Comme G/G_u est abélien, alors $\pi(gsg^{-1}s^{-1}) = 1$. Donc $(gsg^{-1})\ s^{-1} \in \mathrm{G}_u \cap \mathrm{S}$, d'où $gs = sg$ et $g \in \mathrm{C_G}(\mathrm{S})$. $\square$

En combinant le théorème précédent et le corollaire 19.7, on obtient le théorème 19.1. $\square$

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[Abe] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge Univ. Press, 1977.

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.

[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.

[AM] M. Atiyah, I. G. Macdonald, Commutative algebra, Addison Wesley, 1969.

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[Bo] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Springer Verlag, 1991.

[BA1-3] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 1 à 3, 1981.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BL7-8] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 7-8, 1975.

[BI7-8] N. Bourbaki, Intégration, Chap. 7-8, 1963.

[BrM] J. Briançon, Ph. Maisonobe, Éléments d'algèbre commutative, niveau M1, Ellipses, 2004.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.

[Ca2] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, 1961, nouveau tirage, 1978.

[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.

[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.

[Do88] D. Z. Doković, An elementary proof of the structure theorem for connected solvable affine algebraic groups, Enseign. Math. (2) 34 (1988), 269-273.

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Eis] D. Eisenbud, Commutative algebra with a view towards algebraic geometry, Springer, 1995.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[GH] M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1977.

[Hel] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press 1978, ninth printing Amer. Math. Soc. 2001.

[Her] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.

[Ho81] G. P. Hochschild, Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, Springer-Verlag, 1981.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Hu2] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, 1975, corrected 2nd printing 1981.

[Iit] S. Iitaka, Algebraic geometry, Springer, 1982.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Jac80] N. Jacobson, Basic Algebra II, Freeman & Co., 1980.

[KSS] H. Kraft, P. Slodowy, T. A. Springer (Ed.), Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie - Algebraic Transformation Groupes and Invariant Theory, Birkäuser, 1989.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Ke] G. R. Kempf, Algebraic varieties, Cambridge Univ. Press, 1993.

[Kna] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser, 1996, 2nd edition, 2002.

[Ku] E. Kunz, Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkhäuser, 1985.

[Laf74] J.-P. Lafon, Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative, Hermann, 1974.

[Laf77] J.-P. Lafon, Algèbre commutative (Langages géométrique et algébrique), Hermann, 1977.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[Lu99] Retour sur un théorème de Chevalley, Enseign. Math. (2) 45 (1999), 317-320.

[Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.

[Ma1] H. Matsumura, Commutative algebra (2nd edition), Benjamin, 1980.

[Ma2] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 1986, paperback edition with corrections, 1989.

[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Pe] D. Perrin, Géométrie algébrique - Une introduction, Inter Éditions/-CNRS Éditions, 1995.

[Po] P. Polo, Algèbre et théorie de Galois, cours de M1 2005/06 à l'Université Paris 6, www.math.jussieu.fr/~polo

[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Sp] T. A. Springer, Linear algebraic groups, Birkäuser, 1981, 2nd edition 1998.

[Sw] M. E. Sweedler, Hopf Algebras, Benjamin, 1969.

[Ti] J. Tits, Liesche Gruppen und Algebren, Springer-Verlag, 1983.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.