(5 DÉC.) : SOUS-GROUPES DE BOREL ET VARIÉTÉS DE DRAPEAUX

20. Théorème du point fixe et sous-groupes de Borel

20.1. Morphismes propres et variétés complètes. — [1]

Définition 20.1. — 1) Un morphisme de variétés algébriques $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est **propre** s'il est universellement fermé, c.-à-d., si pour toute variété Z, le morphisme $f \times \mathrm{id}_{\mathrm{Z}} : \mathrm{X} \times \mathrm{Z} \to \mathrm{Y} \times \mathrm{Z}$ est fermé.

2) On voit facilement que si $\mathrm{X} \xrightarrow{f} \mathrm{Y}$ et $\mathrm{Y} \xrightarrow{g} \mathrm{Z}$ sont propres, alors $g \circ f$ l'est aussi.

Définition 20.2. — Soit X une variété algébrique sur k. On dit que X est **propre** (ou encore, **complète**) si le morphisme $\mathrm{X} \to \mathrm{pt} = \mathrm{Max}(k)$ est propre, c.à.d. si, pour toute variété Z le morphisme $pr_{\mathrm{Z}} : \mathrm{X} \times \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}$ est fermé.

Remarque 20.3. — $\mathbb{A}^1 = k$ n'est pas propre car, par exemple, la projection sur k du fermé $\{(x, y) \in k \times k \mid xy = 1\}$ est k^*, qui n'est pas fermé dans k.

Théorème 20.4. — *$\mathbb{P}^n$ est propre, pour tout n.*

Démonstration. — Voir, par exemple, [**Die**, § 3.3, Th. 1] ou [**Sp**, Th. 6.1.3]. □

Proposition 20.5. — *Soit X une variété propre.*

1) *Toute sous-variété fermée Y de X est propre.*

2) *Si Y est propre alors $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ l'est aussi.*

3) *Si $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un morphisme surjectif, alors Y est propre.*

4) *Soit $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme. Alors $\phi(\mathrm{X})$ est une sous-variété fermée et propre.*

5) *Si X est connexe, alors $k[\mathrm{X}] = k$.*

---

[0] version du 7/12/06

[1] On n'a traité en cours que les paragraphes 20.1 à 20.3.

6) *Si* X *est de plus affine, alors* X *est un ensemble fini. Plus généralement, si* X *est connexe, tout morphisme de* X *vers une variété affine est constant.*

Démonstration. — Soit Z une variété arbitraire. 1) $\mathrm{Y} \times \mathrm{Z}$ est fermé dans $\mathrm{X} \times \mathrm{Z}$ donc si F est fermé dans $\mathrm{Y} \times \mathrm{Z}$ il l'est aussi dans $\mathrm{X} \times \mathrm{Z}$ et donc $pr_{\mathrm{Z}}(\mathrm{F})$ est fermé.

2) Notons $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} \times \mathrm{Z} \xrightarrow{p} \mathrm{Y} \times \mathrm{Z} \xrightarrow{q} \mathrm{Z}$. Alors $pr_{\mathrm{Z}} = q \circ p$. Si F est un fermé de $\mathrm{X} \times \mathrm{Y} \times \mathrm{Z}$ alors $p(\mathrm{F})$ est un fermé de $\mathrm{Y} \times \mathrm{Z}$, car X est propre, et $pr_{\mathrm{Z}}(\mathrm{F}) = q(p(\mathrm{F}))$ est un fermé de Z, car Y est propre.

3) Soit F une sous-variété fermée de $\mathrm{Y} \times \mathrm{Z}$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X} \times \mathrm{Z} \arrow[r, "\pi=(\phi,\mathrm{id}_{\mathrm{Z}})"] \arrow[d, "pr_{\mathrm{Z}}^{\mathrm{X}}"'] & \mathrm{Y} \times \mathrm{Z} \supseteq \mathrm{F} \arrow[d, "pr_{\mathrm{Z}}^{\mathrm{Y}}"] \\ \mathrm{Z} \arrow[r, equal] & \mathrm{Z} \end{tikzcd}$$

Comme ϕ est surjectif, π l'est aussi et donc $pr_{\mathrm{Z}}^{\mathrm{Y}}(\mathrm{F}) = pr_{\mathrm{Z}}^{\mathrm{X}}(\pi^{-1}(\mathrm{F}))$. Par conséquent, $pr_{\mathrm{Z}}^{\mathrm{Y}}(\mathrm{F})$ est fermé. Ceci montre que Y est propre.

Pour démontrer 4), on a besoin du lemme suivant.

Lemme 20.6. — *Soit* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de variétés. Alors son graphe* $\Gamma_\phi := \{(x, \phi(x)),\ x \in \mathrm{X}\}$ *est une sous-variété fermée de* $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$*, isomorphe à* X.

Démonstration. — Considérons le morphisme $\theta = (\phi, \mathrm{id}_{\mathrm{Y}}) : \mathrm{X} \times \mathrm{Y} \longrightarrow \mathrm{Y} \times \mathrm{Y}$, $(x, y) \mapsto (\phi(x), y)$. Alors $\Gamma_\phi = \theta^{-1}(\Delta_{\mathrm{Y}})$, où Δ_{Y} est la diagonale dans $\mathrm{Y} \times \mathrm{Y}$, qui est une sous-variété fermée. Donc Γ_ϕ est une sous-variété fermée. De plus, si p désigne la restriction à Γ_ϕ de la projection pr_{X}, alors p et $(\mathrm{id}_{\mathrm{X}}, \phi)$ sont des morphismes inverses l'un de l'autre. □

Revenons à la preuve de 4). On a $\phi(\mathrm{X}) = pr_{\mathrm{Y}}\Gamma_\phi$, donc $\phi(\mathrm{X})$ est une sous-variété fermée de Y. Elle est propre, d'après 3).

5) Soit $f \in k[\mathrm{X}]$. Alors $f(\mathrm{X})$ est une sous-variété fermée connexe et propre de k. Comme k n'est pas complet, alors $f(\mathrm{X})$ est un point, i.e. f est constante.

6) Soient $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_r$ les composantes irréductibles de X. Alors chaque X_i est propre et connexe, donc $k[\mathrm{X}_i] = k$. Comme X_i est affine, ceci entraîne que X_i est un point, et donc X est fini.

Soit $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme, avec Y affine. Alors $\phi(\mathrm{X})$ est une sous-variété fermée, donc propre et aussi affine. Donc $\phi(\mathrm{X})$ est fini, et égal à un point si X est connexe. □

Corollaire 20.7. — a) *Toute variété projective est propre.*

b) *Toute variété quasi-projective propre est projective.*

Démonstration. — a) résulte du théorème et de 1) ; b) résulte de 4). □

Lemme 20.8. — *Soient* G *un groupe algébrique,* X, Y *des* G*-variétés homogènes, et* $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme bijectif* G*-équivariant. Si* Y *est complète,* X *l'est aussi.*

Démonstration. — Soient Z une variété et $\theta = (\phi, \mathrm{id}_\mathrm{Z}) : \mathrm{X} \times \mathrm{Z} \to \mathrm{Y} \times \mathrm{Z}$. Alors θ est un morphisme bijectif ; il est ouvert, d'après le corollaire 14.7, c'est donc un homéomorphisme. Donc, si F est un fermé de X × Z, $\theta(\mathrm{F})$ est un fermé de Y × Z. Or, $pr^{\mathrm{X}}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{F}) = pr^{\mathrm{Y}}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{F}) \circ \theta$, donc si Y complète alors $pr^{\mathrm{X}}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{F})$ est un fermé de Z. Ceci prouve le lemme. □

Remarque 20.9. — On peut en fait montrer que tout morphisme bijectif entre variétés normales est propre, cf. la sous-section suivante.

20.2. Théorème du point fixe de Borel. —

Lemme 20.10. — *Soient* H *un groupe algébrique et* Z *une* H*-variété. Alors*

$$\mathrm{Z}^{\mathrm{H}} := \{z \in \mathrm{Z} \mid hz = z, \ \forall\, h \in \mathrm{H}\}$$

est une sous-variété fermée de Z*.*

Démonstration. — En effet, $\mathrm{Z}^{\mathrm{H}} = \bigcap_{h \in \mathrm{H}} \mathrm{Z}^h$, et $\mathrm{Z}^h = \phi_h^{-1}(\Delta_\mathrm{Z})$, où Δ_Z est la diagonale de Z × Z et ϕ_h le morphisme $\mathrm{Z} \to \mathrm{Z} \times \mathrm{Z}$, $z \mapsto (z, hz)$. □

Théorème 20.11* (Théorème du point fixe de Borel)**. — *Soit* G *un groupe résoluble* **connexe, et* X *une* G*-variété complète non vide. Alors* G *a un point fixe dans* X*.*

Démonstration. — Démontrons le théorème par récurrence sur $d = \dim \mathrm{G}$. C'est vrai si $d = 0$, car alors $\mathrm{G} = \{1\}$. Si $\mathrm{G} \neq \{1\}$ alors $\mathrm{D(G)} := \mathrm{N}$ est un sous-groupe fermé connexe propre, donc de dimension $< d$. Par hypothèse de récurrence, $\mathrm{X}^{\mathrm{N}} := \mathrm{Y}$ est non-vide. D'après le lemme, c'est une sous-variété fermée, et donc complète, de X. Puisque N est normal dans G, alors Y est G-stable ; en effet, si $y \in \mathrm{Y}$, $g \in \mathrm{G}, h \in \mathrm{N}$ alors $hgy = g\,(g^{-1}hg)y = gy$.

Soit $y \in \mathrm{Y}$ tel que l'orbite $\mathrm{G}y$ soit de dimension minimale, et donc fermée. Comme G_y contient D(G), c'est un sous-groupe fermé normal et donc la variété G/G_y est affine et connexe.

D'autre part, le morphisme $\phi : \mathrm{G}/\mathrm{G}_y \to \mathrm{G}y$ est équivariant et bijectif, et $\mathrm{G}y$ est complète. Donc, d'après le lemme 20.8, G/G_y est complète.

On a donc obtenu que G/G_y est complète, connexe et affine. Elle est donc réduite à un point, et il en est de même de $\mathrm{G}y$; par conséquent y est un point fixe. Le théorème est démontré. □

On déduit du théorème du point fixe une autre démonstration du théorème de Lie-Kolchin pour les groupes résolubles connexes :

Corollaire 20.12 **(Théorème de Lie-Kolchin, cas résoluble connexe)**
Soient G *un groupe résoluble connexe et* V *un* G*-module rationnel de dimension finie. Alors* G *a un point fixe dans la variété des drapeaux* $\mathscr{F}(\mathrm{V})$*, c.-à-d.,* G *stabilise un drapeau de* V*.*

Démonstration. — La variété des drapeaux $\mathscr{F}(\mathrm{V})$ de V est une sous-variété fermée de la variété projective $\prod_{i=1}^{n-1} \mathrm{Gr}_i(\mathrm{V}) \subseteq \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(\Lambda^i \mathrm{V})$ (où $n = \dim \mathrm{V}$), et G y agit morphiquement. Par conséquent, G y a un point fixe. □

20.3. Sous-groupes et paires de Borel. — Soit G un groupe algébrique affine.

Définition 20.13. — On appelle sous-groupe de Borel de G tout sous-groupe fermé résoluble connexe maximal.

Théorème 20.14 **(Sous-groupes de Borel)**. — *Soit* G *un groupe algébrique affine connexe. Tous les sous-groupes de Borel de* G *sont conjugués, et si* B *est l'un d'eux la variété* G/B *est projective.*

Démonstration. — Soit S un sous-groupe de Borel de dimension maximale. D'après le théorème de Chevalley, il existe un G-module rationnel de dimension finie V et une droite $\mathrm{V}_1 \subseteq \mathrm{V}$ tels que $\mathrm{S} = \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}_1)$; de plus on peut supposer que V est fidèle, quitte à remplacer V par $\mathrm{V} \oplus \mathrm{E}$, où E est un G-module rationnel fidèle de dimension finie.

Observons que S stabilise un drapeau $\mathscr{F}_0 = (\mathrm{V}_1 \subseteq \mathrm{V}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{V}_n = \mathrm{V})$ dont le premier terme est V_1. En effet, S agit dans V/V_1, et on peut appliquer le théorème de Lie-Kolchin dans V/V_1 (S étant résoluble connexe). Alors $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathscr{F}_0)$, mais l'on a aussi $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathscr{F}_0) \subseteq \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}_1) = \mathrm{S}$ et donc $\mathrm{S} = \mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathscr{F}_0)$. Par conséquent, on a un morphisme bijectif

$$(*) \qquad \mathrm{G}/\mathrm{S} \xrightarrow{\text{bijectif}} \mathrm{G}\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}(\mathrm{V}).$$

Montrons que l'orbite $\mathrm{G}\mathscr{F}_0$ est fermée. Soit $\mathscr{F} \in \mathscr{F}(\mathrm{V})$ un drapeau arbitraire. Alors $\mathrm{G}_{\mathscr{F}}$ est résoluble, puisque $\mathrm{G}_{\mathscr{F}}$ est triangulaire dans toute base adaptée à $\mathscr{F}$. Donc, par l'hypothèse de maximalité faite sur $\dim \mathrm{S}$, on a $\dim \mathrm{G}_{\mathscr{F}} \leqslant \dim \mathrm{S}$ (car $\dim \mathrm{G}_{\mathscr{F}} = \dim \mathrm{G}^0_{\mathscr{F}}$), et donc $\dim \mathrm{G}\mathscr{F} \geqslant \dim \mathrm{G}\mathscr{F}_0$. Donc $\mathrm{G}\mathscr{F}_0$ est une orbite de dimension minimale, elle est donc fermée, et complète. Donc, d'après le lemme 20.8 et $(*)$, G/S est complète.

Enfin, soit B un sous-groupe de Borel arbitraire. Il agit par translation à gauche sur G/S, et y possède donc un point fixe $g\mathrm{S}$. Alors $\mathrm{B}g \subseteq g\mathrm{S}$, d'où $\mathrm{B} \subseteq g^{-1}\mathrm{S}g$. Mais $g^{-1}\mathrm{S}g$ est fermé résoluble connexe, et donc la maximalité de B entraîne $\mathrm{B} = g^{-1}\mathrm{S}g$, d'où la première assertion du théorème. De plus, clairement, $\mathrm{Int}(g)$ induit un isomorphisme de variétés $\mathrm{G}/\mathrm{S} \cong \mathrm{G}/\mathrm{B}$ et donc G/B est complète. Le théorème est démontré. □

Définition 20.15. — On appelle **paire de Borel** de G tout couple (T, B) où B est un sous-groupe de Borel de G et T un tore maximal de G contenu dans B.

***Corollaire 20.16* (Conjugaison des paires de Borel)**. — a) *Tout tore maximal est contenu dans un sous-groupe de Borel, et toutes les paires de Borel sont conjuguées.*

b) *Les sous-groupes fermés connexes unipotents maximaux de* G *sont tous conjugués, et chacun est de la forme* B_u*, pour* B *un sous-groupe de Borel.*

Démonstration. — a) Soit T un tore maximal. Comme T est fermé, connexe et résoluble (car abélien), il est contenu dans un Borel B. Par maximalité, c'est un tore maximal de B.

Soit $(\mathrm{T}', \mathrm{B}')$ une autre paire de Borel. D'après le théorème précédent, il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $g\mathrm{B}'g^{-1} = \mathrm{B}$. Alors, $g\mathrm{T}'g^{-1}$ est un tore maximal de B et, d'après le résultat établi dans le cas résoluble (théorèmes 19.1 ou 19.10), T et $g\mathrm{T}'g^{-1}$ sont conjugués par un élément $b \in \mathscr{C}^\infty(\mathrm{B})$. Le point a) en découle.

Pour b), la démonstration est analogue et laissée au lecteur. □

Définition 20.17. — Soient G un groupe algébrique affine connexe et P un sous-groupe fermé. On dit que P est un sous-groupe **parabolique** si la variété G/P est complète (et donc projective).

***Proposition 20.18* (Caractérisation des paraboliques)**. — P *est parabolique* $\Leftrightarrow$ P *contient un Borel. Par conséquent,* B *est un Borel* $\Leftrightarrow$ B *est parabolique, résoluble et connexe.*

Démonstration. — $\Rightarrow$ Supposons G/P complet et soit B un Borel. Alors B a un point fixe $g\mathrm{P}$ dans G/P et donc $\mathrm{B}g \subseteq g\mathrm{P}$, d'où $g^{-1}\mathrm{B}g \subseteq \mathrm{P}$.

$\Leftarrow$ Le morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{P}$ se factorise à travers G/B. On a donc un morphisme surjectif $\mathrm{G}/\mathrm{B} \to \mathrm{G}/\mathrm{P}$, avec G/B complète. Donc G/P est complète, d'après la proposition 20.5.3).

La deuxième assertion s'obtient facilement. □

Théorème 20.19. — **(Tores et sous-groupes de Borel d'un groupe quotient)**

Soit $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un morphisme surjectif de groupes algébriques affines et soit* H *un sous-groupe fermé de* G *de l'un des types suivants : parabolique, Borel, tore maximal, unipotent connexe maximal. Alors* $\phi(\mathrm{H})$ *est du même type, et tout sous-groupe de* G' *de ce type est obtenu de cette manière.*

Démonstration. — On considère G' comme un G-espace homogène, via $gg' = \phi(g)g'$, pour $g \in \mathrm{G}$, $g' \in \mathrm{G}'$. Alors ϕ se factorise en un morphisme G-équivariant, et donc surjectif, $\mathrm{G}/\mathrm{H} \to \mathrm{G}'/\phi(\mathrm{H})$. Donc, d'après la proposition

20.5.3), si H est parabolique, $\phi(\mathrm{H})$ l'est aussi. Si H est un Borel, $\phi(\mathrm{H})$ est parabolique, résoluble et connexe, donc un Borel. Si H est unipotent connexe maximal, alors $\mathrm{H} = \mathrm{B}_u$ pour un Borel B, d'où $\phi(\mathrm{B}_u) = \phi(\mathrm{B})_u$ (car $\phi(b)_u = \phi(b_u)$). Comme $\phi(\mathrm{B})$ est un Borel de G′, il en résulte que $\phi(\mathrm{H})$ est unipotent connexe maximal. Si H est un tore maximal, contenu dans un Borel B, on a $\mathrm{B} = \mathrm{TB}_u$ et donc $\phi(\mathrm{B}) = \phi(\mathrm{T})\phi(\mathrm{B})_u$. On en déduit, d'après le théorème 19.10, que $\phi(\mathrm{T})$ est un tore maximal de $\phi(\mathrm{B})$, et donc de G′.

De plus, si H′ est un Borel, tore maximal, ou unipotent connexe maximal de G′, et si H est du même type, il existe $g' = \phi(g)$ tel que $\mathrm{H}' = g'\phi(\mathrm{H})g'^{-1} = \phi(g\mathrm{H}g^{-1})$. Enfin, si P′ est un parabolique de G′, il contient un Borel $\phi(\mathrm{B})$. Alors $\mathrm{P} := \phi^{-1}(\mathrm{P}')$ contient B et est donc parabolique ; et $\mathrm{P}' = \phi(\mathrm{P})$. □

20.4. Centralisateurs de tores, sous-groupes de Cartan. —

Lemme 20.20. — *Soit* G *connexe et* B *un Borel de* G*. Si f est un automorphisme de* G *tel que $f_{|\mathrm{B}} = \mathrm{id}$, alors $f = \mathrm{id}$. Par conséquent, si $g \in \mathrm{G}$ centralise* B *alors $g \in \mathrm{Z(G)}$. En particulier, $\mathrm{Z(B)} \subseteq \mathrm{Z(G)}$.*

Démonstration. — Soit $f \in \mathrm{Aut(G)}$ tel que $f_{|\mathrm{B}} = \mathrm{id}$. Considérons le morphisme $\psi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ défini par $\psi(g) = f(g)g^{-1}$. Alors ψ se factorise à travers $\psi' : \mathrm{G/B} \to \mathrm{G}$, i.e. $\psi(g) = \psi'(g\mathrm{B})$ pour tout g. Comme G/B est complète et G affine, il vient $\psi'(\mathrm{G/B}) = \psi'(e) = e$, d'où $f = \mathrm{id}$. La deuxième assertion en résulte en prenant $f = \mathrm{Int}(g)$. Donc $\mathrm{Z(B)} \subseteq \mathrm{Z(G)}$. □

Proposition 20.21. — *Soit* G *un groupe algébrique affine,* B *un sous-groupe de Borel. Si* B *est nilpotent, alors $\mathrm{G}^0 = \mathrm{B}$.*

Démonstration. — On peut supposer G connexe. On procède par récurrence sur $d = \dim \mathrm{G}$. Si $\mathrm{B} = \{1\}$ alors $\mathrm{G} = \mathrm{G/B}$ est affine, complète et connexe, donc égale à $\{1\}$. Sinon, B est nilpotent connexe non-trivial et donc $\mathrm{H} := \mathrm{Z(B)}^0 \neq \{1\}$. D'après le lemme précédent, H est central dans G. On peut donc former le groupe quotient G/H, qui est de dimension $< \dim \mathrm{G}$. De plus, d'après le théorème 20.19, B/H est un sous-groupe de Borel, nilpotent, de G/H. Par hypothèse de récurrence, il vient $\mathrm{G/H} = \mathrm{B/H}$, d'où $\mathrm{G} = \mathrm{B}$. □

Corollaire 20.22. — *Soit* G *connexe, de dimension $\leqslant 2$. Alors* G *est résoluble.*

Démonstration. — Soit B un sous-groupe de Borel de G. Montrons que G = B. On a $\mathrm{B} = \mathrm{TB}_u$, où T est un tore maximal de B. Si on avait $\dim \mathrm{B} \leqslant 1$, on aurait $\mathrm{B} = \mathrm{T}$ ou $\mathrm{B} = \mathrm{B}_u$, d'où B nilpotent, et G = B d'après la proposition précédente. On en déduit que $\dim \mathrm{B} = 2$, d'où B = G. □

Corollaire 20.23. — *Soit* G *un groupe algébrique affine connexe.*

1) *Si $\mathrm{G} = \mathrm{G}_s$ alors* G *est un tore.*
2) *Si G_u est un sous-groupe,* G *est résoluble.*

3) *Si* G_s *est un sous-groupe,* G *est nilpotent.*

Démonstration. — Soient B un Borel de G, et $B = TB_u$. Prouvons 1). Si $G = G_s$, alors $B = T$. Donc $B = Z(B) \subseteq Z(G)$, et donc B est normal. Alors G/B est affine, connexe, et complète, donc un point, d'où $G = B = T$.

2) G_u est un sous-groupe fermé normal, et donc $H = G/G_u$ est un groupe algébrique affine connexe. De plus, H est formé d'éléments semi-simples (car $H = \{\pi(g_s),\ g \in G\}$). Donc H est un tore, donc commutatif. Il en résulte que G est résoluble, puisque $1 \to G_u \to G \to T \to 1$.

3) Supposons que G_s soit un sous-groupe de G. Alors $B_s = B \cap G_s$ est un sous-groupe normal de B, commutatif d'après 19.10. Il est donc fermé car, d'après le lemme 15.14, on peut plonger B dans un GL_n de sorte que $B_s = B \cap D_n$. Donc B_s est un sous-groupe diagonalisable normal, et donc central dans B, d'après le théorème de rigidité. Donc B est nilpotent, et $G = B$ d'après la proposition précédente. □

Remarque 20.24. — On peut aussi montrer que si G_s est fermé alors G est nilpotent.

Proposition 20.25. — *Soient* T *un tore maximal, et* $C = C_G(T)^0$*. Alors* C *est nilpotent, et* $C = N_G(C)^0$*.*

Démonstration. — Soit B un sous-groupe de Borel de C. Alors T est un tore maximal de B. Comme T est central, B est nilpotent d'après la proposition 19.3, et donc $C = B$ d'après la proposition 20.21.

Par le théorème de rigidité, on a $C = N_G(T)^0$. Montrons que $N_G(C) \subseteq N_G(T)$, d'où résultera l'égalité voulue. Soit $x \in N_G(C)$. Alors $\mathrm{Int}(x)$ est un automorphisme de C, qui stabilise T car $T = C_s$. Donc $x \in N_G(T)$. La proposition est démontrée. □

Définition 20.26. — Si T est un tore maximal, $C = C_G(T)^0$ est appelé un **sous-groupe de Cartan**. En fait, on verra plus loin que $C_G(T)$ est connexe.

20.5. La réunion des sous-groupes de Borel. —

Lemme 20.27. — *Soient* G *connexe,* H *un sous-groupe fermé connexe, et* $X = \bigcup_{g\in G} gHg^{-1}$.

a) X *contient un ouvert dense de* $\overline{X}$.

b) *Si* G/H *est complète,* X *est fermé.*

c) *Si* $N_G(H)/H$ *est fini et s'il existe un élément de* G *qui n'est contenu que dans un nombre fini de conjugués de* H*, alors* $\overline{X} = G$.

Démonstration. — Soit $\mathrm{M} = \{(x,y) \in \mathrm{G} \times \mathrm{G} \mid y \in x\mathrm{H}x^{-1}\}$. C'est une sous-variété fermée irréductible de $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ car c'est l'image de $\mathrm{G} \times \mathrm{H}$ par l'isomorphisme $\mathrm{G} \times \mathrm{G} \cong \mathrm{G} \times \mathrm{G}$, $(x,z) \mapsto (x, xzx^{-1})$. Comme $\mathrm{X} = pr_2(\mathrm{M})$, on obtient a). Considérons le morphisme $\psi : \mathrm{G}\times\mathrm{G} \to (\mathrm{G}\times\mathrm{G})/(\mathrm{H}\times\{1\}) = \mathrm{G}/\mathrm{H}\times\mathrm{G}$; il est ouvert. On a $\mathrm{M} = \psi^{-1}\psi(\mathrm{M})$: en effet, si $(x,y) \in \mathrm{M}$ et $h \in \mathrm{H}$ alors $(xh, y) \in \mathrm{M}$. Donc $\mathrm{V} := \psi(\mathrm{M})$ est une sous-variété fermée de $\mathrm{G}/\mathrm{H}\times\mathrm{G}$. Comme $\mathrm{X} = pr_{\mathrm{G}}(\mathrm{V})$, on obtient b).

Notons q et π les restrictions à V de $pr_{\mathrm{G}/\mathrm{H}}$ et pr_{G}. Comme $\mathrm{V} = \{(x\mathrm{H}, y) \mid y \in x\mathrm{H}x^{-1}\}$, on voit que q est surjective et que $\dim q^{-1}(q(v)) = \dim \mathrm{H}$, pour tout v. On en déduit que $\dim \mathrm{V} = \dim \mathrm{G}$.

Supposons que $|\mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})/\mathrm{H}| < \infty$ et qu'il existe $y \in \mathrm{G}$ qui ne soit contenu que dans un nombre fini de conjugués de H, disons $g_1\mathrm{H}g_1^{-1}, \ldots, g_r\mathrm{H}g_r^{-1}$. Alors, $\pi^{-1}(y) = \{x\mathrm{H} \in \mathrm{G}/\mathrm{H} \mid y \in x\mathrm{H}x^{-1}\}$ est la réunion des classes $g_i\mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})/\mathrm{H}$ et est donc fini. L'égalité $0 = \dim \pi^{-1}(y) \geqslant \dim \mathrm{V} - \dim \overline{\mathrm{X}}$ entraîne alors $\dim \overline{\mathrm{X}} = \dim \mathrm{V} = \dim \mathrm{G}$. Le lemme est démontré. □

***Théorème 20.28* (Union des sous-groupes de Cartan ou Borel)**

Soit G *connexe.*

a) *La réunion des* $\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})^0$*, pour* T *un tore maximal, contient un ouvert dense.*

b) G *est la réunion de ses sous-groupes de Borel.*

c) *Tout élément semi-simple de* G *appartient à un tore maximal.*

d) *Tout élément unipotent de* G *appartient à un sous-groupe unipotent connexe maximal.*

Démonstration. — a) Soient T un tore maximal et $\mathrm{C} = \mathrm{C}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})^0$. D'après la proposition 20.25, $\mathrm{C} = \mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C})^0$ et donc $\mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C})/\mathrm{C}$ est fini. D'après le lemme 16.15, il existe $t \in \mathrm{T}$ tel que $\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{C}_{\mathrm{G}}(t)$. Soit $x \in \mathrm{G}$ tel que $t \in x\mathrm{C}x^{-1}$. Alors $x^{-1}tx \in \mathrm{C}$, d'où $x^{-1}tx \in \mathrm{T}$ puisque $\mathrm{T} = \mathrm{C}_s$. Alors, $\mathrm{C} \subseteq \mathrm{C}_{\mathrm{G}}(x^{-1}tx) = x^{-1}\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(t)x = x^{-1}\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})x$, et on en déduit que $\mathrm{C} = x^{-1}\mathrm{C}x$. Ceci montre que C est l'unique conjugué de C contenant t, et a) résulte alors de la proposition 20.27.

b) C est connexe et nilpotent donc contenu dans un Borel. Par conséquent, la réunion des sous-groupes de Borel est un fermé contenant un ouvert dense, d'où b).

c) Soit t semi-simple. D'après b), t est contenu dans un Borel B, puis t est contenu dans un tore maximal de B d'après le théorème 19.1. Enfin, soit u unipotent. Il est contenu dans un Borel B, et donc dans B_u. Le théorème est démontré. □

Corollaire 20.29. — *Soit* G *connexe contenant un sous-groupe de Borel* B **normal**. *Alors* $\mathrm{G} = \mathrm{B}$*, c.-à-d.,* G *est résoluble.*

Démonstration. — B est le seul sous-groupe de Borel de G, puisqu'ils sont tous conjugués. Comme, d'après le théorème précédent, leur réunion est G, on obtient $G = B$. □

Corollaire 20.30. — *Soit* G *connexe. Alors* $Z(G) = Z(B)$*, pour tout Borel* B.

Démonstration. — Soit $x \in Z(G)$. D'après le théorème, x est contenu dans un Borel, mais alors dans tous puisqu'ils sont conjugués. Donc $x \in Z(B)$, pour tout B. L'inclusion réciproque a été vue dans la proposition 20.20. □

20.6. Connexité des centralisateurs de tores. —

Lemme 20.31. — *Soient* G *connexe,* S *un sous-groupe résoluble connexe, et* $x \in G$ *commutant à* S*. Il existe un sous-groupe de Borel contenant* S *et* x.

Démonstration. — D'après le théorème 20.28, il existe un Borel B contenant x. Donc la sous-variété fermée $X = (G/B)^x = \{gB \mid xg \in gB\}$ est non-vide (elle contient eB). Si $gB \in X$ et $s \in S$, alors $x\,sgB = sxgB = sgB$. Donc X est stable par S. Comme S est résoluble connexe, et X complète et non-vide, S a un point fixe gB dans X. Alors le Borel gBg^{-1} contient x et S. □

Théorème 20.32. — **(Sous-groupes de Borel du centralisateur d'un tore)** *Soient* G *connexe,* S *un tore de* G.

a) $C_G(S)$ *est connexe.*

b) *Soit* B *un sous-groupe de Borel de* G *contenant* S*. Alors* $B \cap C_G(S)$ *est un sous-groupe de Borel de* $C_G(S)$.

c) *De plus, tout sous-groupe de Borel de* $C_G(S)$ *est obtenu de cette façon.*

Démonstration. — a) Soit $x \in C_G(S)$. D'après le lemme, x et S sont contenus dans un Borel B. Mais alors $x \in C_B(S)$, qui est connexe d'après le résultat établi dans le cas connexe (théorème 19.1). Donc $x \in C_G(S)^0$. Ceci montre que $C_G(S) = C_G(S)^0$.

b) Posons $C = C_G(S)$. Alors $B \cap C = C_B(S)$ est résoluble et connexe. Pour montrer que c'est un sous-groupe de Borel de C, il suffit de montrer que la variété $C/C{\cap}B$ est propre. Notons e_B le point B/B de G/B. Alors $\mathrm{Stab}_C(e_B) = C \cap B$ et donc on a un morphisme bijectif C-équivariant $C/C \cap B \longrightarrow Ce_B$. D'après le lemme 20.8, il suffit de montrer que Ce_B est complète, i.e. que l'orbite Ce_B est fermée. Donnons deux démonstrations de ce fait ; la seconde établira

Comme $\pi : G \to G/B$ est ouvert, il suffit de montrer que $Y := \pi^{-1}(Ce_B) = CB$ est fermé dans G. Comme Y est une orbite du groupe connexe $C \times B$, alors Y est irréductible, et il en est de même de son adhérence $\overline{Y}$.

Comme $S \subseteq B$, alors pour tout $y \in Y = C_G(S)B$, on a $y^{-1}Sy \subseteq B$ et, par continuité, ceci vaut aussi pour tout $y \in \overline{Y}$, c.-à-d.,

$$\forall\, y \in \overline{Y}, \qquad y^{-1}Sy \subseteq B \tag{1}$$

Soit T un tore maximal de B contenant S.

Soit π la projection B/B_u ; elle induit un isomorphisme de T sur B/B_u. Considérons le morphisme

$$\psi : \overline{Y} \times S \longrightarrow B/B_u, \quad (y, s) \mapsto \pi(y^{-1}sy).$$

D'après le théorème de rigidité 16.14, ψ est indépendant de la variable $y \in \overline{Y}$, c.-à-d., on a :

$$\forall\, y \in \overline{Y}, \qquad \pi(y^{-1}sy) = \pi(s). \tag{2}$$

Fixons $y \in \overline{Y}$. Alors $y^{-1}Sy$ est un tore de B, donc il existe $u \in B_u$ tel que

$$u^{-1}y^{-1}Syu \subseteq T.$$

Alors, d'après (2), pour tout $s \in S$ on a

$$\pi(u^{-1}y^{-1}syu) = \pi(y^{-1}sy) = \pi(s);$$

et comme la restriction de π à T est bijective, il vient $u^{-1}y^{-1}syu = s$ pour tout $s \in S$, et donc $c := yu$ appartient à $C_G(S) = C$. Donc $y = cu^{-1}$ appartient à Y. Ceci montre que Y est fermé. L'assertion b) est démontrée.

L'assertion c) en découle, par conjugaison des sous-groupes de Borel. En effet, si H est un sous-groupe de Borel de $C_G(S)$, il existe $g \in C_G(S)$ tel que

$$H = g(B \cap C_G(S))g^{-1} = gBg^{-1} \cap C_G(S),$$

et gBg^{-1} est un sous-groupe de Borel de G contenant $gSg^{-1} = S$. Le théorème est démontré. □

Corollaire 20.33. — *Soient* G *connexe,* T *un tore maximal,* $C = C_G(T)$.

a) C *est connexe, nilpotent, et égal à* $N_G(C)^0$.

b) *Tout Borel contenant* T *contient aussi* C.

Démonstration. — a) découle du théorème et de la proposition 20.25. Voyons b). Soit B un Borel contenant T. D'après le théorème, $B \cap C$ est un Borel de C, et comme C est nilpotent connexe il vient $B \cap C = C$, d'où $C \subseteq B$. □

20.7. Normalisateur d'un sous-groupe de Borel. —

***Théorème 20.34* (Chevalley)**. — *Soit* G *connexe.*

i) *Pour tout Borel* B, *on a* $N_G(B) = B$.

ii) *Pour tout parabolique* P, *on a* $N_G(P) = P = P^0$.

iii) *Pour tout Borel* B, *on a* $N_G(B_u) = B$.

Démonstration. — Prouvons i) par récurrence sur $\dim \mathrm{G}$. Si $\dim \mathrm{G} \leqslant 2$ alors G est résoluble, d'après 20.22, d'où $\mathrm{B} = \mathrm{G}$.

Posons $\mathrm{N} = \mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{B})$ et soit $n \in \mathrm{N}$. On va montrer que $n \in \mathrm{B}$. Soit T un tore maximal de B, alors $n\mathrm{T}n^{-1}$ en est un autre, donc il existe $b \in \mathrm{B}$ tel que $bn\mathrm{T}(bn)^{-1} = \mathrm{T}$. Donc, remplaçant n par bn, on peut supposer que n normalise T. Alors,

$$\psi : \mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{T}, \qquad t \mapsto ntn^{-1}t^{-1}$$

est un morphisme de groupes algébriques ; soit $\mathrm{S} = (\mathrm{Ker}\,\psi)^0$. Alors n appartient à $\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$, qui est un groupe connexe. Distinguons deux cas.

a) $\mathrm{S} \neq \{1\}$. Alors n normalise $\mathrm{B} \cap \mathrm{C}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$, qui est un sous-groupe de Borel du groupe connexe $\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$. Donc, si $\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S}) \neq \mathrm{G}$, il résulte de l'hypothèse de récurrence que $n \in \mathrm{B} \cap \mathrm{C}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$, d'où $n \in \mathrm{B}$.

Sinon, si $\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S}) = \mathrm{G}$, alors S est central et on peut passer au groupe quotient $\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{G}/\mathrm{S}$, qui est connexe et de dimension $< \dim \mathrm{G}$. Alors B/S est un Borel de $\overline{\mathrm{G}}$, normalisé par $\overline{n}$. Donc, par hypothèse de récurrence, $\overline{n} \in \mathrm{B}/\mathrm{S}$, d'où $n \in \mathrm{B}$. Ceci règle le premier cas.

b) Si $\mathrm{S} = \{1\}$, alors ψ est surjective (car son image est un sous-groupe fermé connexe de même dimension que T). D'après le théorème des semi-invariants de Chevalley, N est le stabilisateur d'une droite kv dans une représentation V de G. Donc N agit sur kv via un caractère χ, qui est trivial sur B_u mais aussi sur T, puisque tout élément de T est un commutateur dans N (car ψ est surjective).

Donc le morphisme $\phi_v : \mathrm{G} \to \mathrm{V}$, $g \mapsto gv$ se factorise à travers G/B. Comme G/B est propre et connexe, ceci entraîne que ϕ_v est constant, c.-à-d., v est fixé par G, d'où $\mathrm{G} = \mathrm{N}$. Mais alors B est normal dans G, d'où $\mathrm{G} = \mathrm{B}$ d'après le corollaire 20.29. L'assertion i) est démontrée.

Démontrons ii). Soit P un parabolique, contenant un Borel B. Alors $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{P}^0$, puisque B est connexe. Soit $x \in \mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{P})$. Alors $x\mathrm{B}x^{-1}$ est un Borel de P^0. Donc il existe $p \in \mathrm{P}^0$ tel que $x\mathrm{B}x^{-1} = p\mathrm{B}p^{-1}$, d'où $p^{-1}x \in \mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$, et $x \in p\mathrm{B} \subseteq \mathrm{P}^0$. Ceci montre que $\mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{P}) = \mathrm{P}^0$, d'où ii).

Démontrons iii). Posons $\mathrm{U} = \mathrm{B}_u$ et $\mathrm{N} = \mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U})$. D'abord, B normalise U, donc B est un Borel de N^0. Alors, d'après le Théorème 20.28, tout élément unipotent de N^0 appartient à un conjugué sous N^0 de U. Or U est normal dans N, et est donc égal à l'ensemble des éléments unipotents de N^0. On en déduit que N^0/U est un groupe affine connexe formé d'éléments semi-simples, donc un tore, d'après le corollaire 20.23. Il en résulte N^0 est résoluble et connexe. Comme $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{N}^0$, il vient $\mathrm{N}^0 = \mathrm{B}$, et $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$ (car N normalise N^0). Le théorème est démontré. □

Corollaire 20.35. — *Soient* G *connexe,* B *un Borel, et* P, Q *deux paraboliques contenant* B *et conjugués dans* G. *Alors* $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$.

Démonstration. — Si $\mathrm{Q} = x^{-1}\mathrm{P}x$, alors B et $x^{-1}\mathrm{B}x$ sont deux sous-groupes de Borel de Q. Donc il existe $q \in \mathrm{Q}$ tel que $q^{-1}\mathrm{B}q = x^{-1}\mathrm{B}x$, d'où $xq^{-1} \in \mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$, et $x \in \mathrm{B}q \subseteq \mathrm{Q}$. Alors $\mathrm{P} = x\mathrm{Q}x^{-1} = \mathrm{Q}$. □

21. Géométrie de la variété des drapeaux

21.1. Radical et radical unipotent. —

Définition et proposition 21.1. — *Soit* G *un groupe algébrique affine. On pose :*

a) $\mathscr{R}(\mathrm{G}) = \left(\bigcap_{\mathrm{B}\in\mathscr{B}} \mathrm{B}\right)^0$ *; c'est le plus grand sous-groupe fermé connexe résoluble normal de* G*, on l'appelle le* **radical de** G.

b) *On a* $\mathscr{R}(\mathrm{G})_u = \left(\bigcap_{\mathrm{B}\in\mathscr{B}} \mathrm{B}_u\right)^0$ *; c'est le plus grand sous-groupe fermé connexe unipotent normal de* G*, on l'appelle le* **radical unipotent de** G. *On le note aussi* $\mathscr{R}_u(\mathrm{G})$.

Démonstration. — a) Il est clair que $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ est un sous-groupe fermé connexe résoluble. De plus, tout automorphisme de G stabilise $\mathrm{H} := \left(\bigcap_{\mathrm{B}\in\mathscr{B}} \mathrm{B}\right)$ et donc aussi $\mathscr{R}(\mathrm{G})$. A fortiori, $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ est normal. Réciproquement, si S est un sous-groupe fermé connexe résoluble normal, il est contenu dans un sous-groupe de Borel et donc dans tous, d'où $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{H}$, et $\mathrm{S} \subseteq \mathscr{R}(\mathrm{G})$.

b) Puisque $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ est résoluble connexe, $\mathscr{R}(\mathrm{G})_u$ est un sous-groupe fermé unipotent connexe. Il est normal, et en fait caractéristique, car tout automorphisme de G stabilise $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ et donc $\mathscr{R}(\mathrm{G})_u$. Si U est un sous-groupe fermé connexe unipotent normal, il est contenu dans $\mathscr{R}(\mathrm{G})$, et donc dans $\mathscr{R}(\mathrm{G})_u$. Ceci prouve l'inclusion $\supseteq$. Mais $\mathscr{R}(\mathrm{G})_u$, étant fermé connexe unipotent et normal, est contenu dans un B_u et donc dans tous, d'où l'inclusion $\subseteq$. □

21.2. Groupes réductifs et semi-simples. —

Définition 21.2. — Soit G un groupe algébrique affine. On dit que G est **réductif**, resp **semi-simple**, si $\mathscr{R}_u(\mathrm{G}) = \{1\}$, resp. $\mathscr{R}(\mathrm{G}) = \{1\}$.

Lemme 21.3. — *Soit* $1 \to \mathrm{N} \to \mathrm{M} \xrightarrow{\phi} \mathrm{H} \to 1$ *une suite exacte de groupes algébriques. Si* N, K *sont unipotents,* M *l'est aussi.*

Démonstration. — Soit $g \in \mathrm{M}$ et soit $g = g_s g_u$ sa décomposition de Jordan. Alors $\phi(g_s)\phi(g_u)$ est la décomposition de Jordan de $\phi(g)$. Comme ce dernier est unipotent, par hypothèse, on a $\phi(g_s) = 1$, c.-à-d., $g_s \in \operatorname{Ker}\phi = \mathrm{N}$. Comme tout élément de N est unipotent, on obtient $g_s = 1$. Ceci montre que M est unipotent. □

Proposition 21.4. — a) $\mathrm{G}/\mathscr{R}(\mathrm{G})$ *est semi-simple.*
b) $\mathrm{G}/\mathscr{R}_u(\mathrm{G})$ *est réductif.*

Démonstration. — a) Soient $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathscr{R}(\mathrm{G})$ et H un sous-groupe fermé connexe résoluble normal de $\mathrm{G}/\mathscr{R}(\mathrm{G})$. Alors $\pi^{-1}(\mathrm{H})$ est un sous-groupe fermé normal, résoluble d'après le lemme 17.4, et connexe d'après le lemme 10.17.b). Donc $\pi^{-1}(\mathrm{H}) = \mathscr{R}(\mathrm{G})$, i.e. $\mathrm{H} = \{1\}$.

En utilisant le lemme précédent, on démontre b) de façon analogue. □

21.3. La variété des sous-groupes de Borel. —

Définition 21.5. — Soient G connexe et B un Borel de G. Tout Borel de G est de la forme $g\mathrm{B}g^{-1}$ et, comme $\mathrm{N_G(B) = B}$, alors : $g\mathrm{B}g^{-1} = h\mathrm{B}h^{-1} \Leftrightarrow h \in g\mathrm{B}$. Par conséquent, l'ensemble $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathrm{G})$ de tous les sous-groupes de Borel de G s'identifie à G/B. On munit ainsi $\mathscr{B}$ d'une structure de G-variété projective homogène. On l'appelle la **variété des drapeaux** de G, car pour $\mathrm{G} = \mathrm{GL(V)}$ elle s'identifie à la variété des drapeaux de V.

Remarque 21.6. — 1) La structure de variété de $\mathscr{B}$ ne dépend pas, à isomorphisme près, du choix de B. En effet, si $\mathrm{B}_0 = g_0\mathrm{B}g_0^{-1}$ est un autre Borel, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G/B} \arrow[r, "\mathrm{Int}(g_0)"] \arrow[d, "g\mathrm{B}\mapsto g\mathrm{B}g^{-1}"'] & \mathrm{G/B_0} \arrow[d, "h\mathrm{B_0}\mapsto h\mathrm{B_0}h^{-1}"] \\
\mathscr{B} \arrow[r, "\mathrm{Int}(g_0)"] & \mathscr{B}
\end{tikzcd}$$

2) Observons que, pour $\mathrm{B} \in \mathscr{B}$ et $g \in \mathrm{G}$, on a $g \cdot \mathrm{B} = g\mathrm{B}g^{-1}$.

Lemme 21.7. — *Si* S *est un sous-ensemble quelconque de* G*, on note* $\mathscr{B}^{\mathrm{S}} = \bigcap_{s\in \mathrm{S}} \mathscr{B}^s$ *l'ensemble des points fixes de* S *dans* $\mathscr{B}$ *; c'est une sous-variété fermée. De plus, on a* $\mathscr{B}^{\mathrm{S}} = \{\mathrm{B}$ *Borel de* G | B *contient* S$\}$.

Démonstration. — On a déjà vu que $\mathscr{B}^{\mathrm{S}}$ est fermée (éventuellement vide). De plus, s fixe $\mathrm{B} \Leftrightarrow s \in \mathrm{N_G(B) = B}$, d'où la 2ème assertion. □

21.4. Groupe de Weyl et points fixes de T dans $\mathscr{B}$. —

Définition et proposition 21.8. — *Soient* G *connexe,* T *un tore maximal. On pose* $\mathrm{W = W(T) = N_G(T)/C_G(T)}$*. Alors* W *est un groupe fini, qui ne dépend que de* G*. On l'appelle le* **groupe de Weyl** *de* G*.*

Démonstration. — On a déjà vu que W(T) est un groupe fini (théorème 16.14). Si T' est un autre tore maximal de G, il existe $g \in \mathrm{G}$ tel que $\mathrm{T}' = g\mathrm{T}g^{-1}$, et alors $\mathrm{Int}(g)$ induit un isomorphisme $\mathrm{W(T)} \cong \mathrm{W(T')}$. □

Théorème 21.9 **(Points fixes de T dans $\mathscr{B}$)**. — *Soient* G *connexe,* $\mathscr{B}$ *la variété des drapeaux de* G*, et* T *un tore maximal. Alors* W(T) *agit de façon simplement transitive sur* $\mathscr{B}^{\mathrm{T}}$*. Par conséquent,* $|\mathscr{B}^{\mathrm{T}}| = |\mathrm{W}| < \infty$*.*

Démonstration. — Si $n \in N_G(T)$ et $B \in \mathscr{B}^T$, alors $n \cdot B = nBn^{-1}$ contient $nTn^{-1} = T$, d'où $n \cdot B \in \mathscr{B}^T$. Donc $N_G(T)$ stabilise $\mathscr{B}^T$. D'autre part, si B est un Borel contenant T alors, d'après le théorème 20.32.b, il contient aussi $C_G(T)$, et est donc un point fixe de $C_G(T)$. Donc $C_G(T)$ agit trivialement $\mathscr{B}^T$, et l'action de $N_G(T)$ se factorise à travers $W(T)$.

Montrons que l'action est transitive. Soient B et $B' = gBg^{-1}$ dans $\mathscr{B}^T$. Alors T et $g^{-1}Tg$ sont deux tores maximaux de B, donc il existe $b \in B$ tel que $g^{-1}Tg = b^{-1}Tb$. Alors $gb^{-1} := n$ appartient à $N_G(T)$, et $g = nb$, d'où $B' = nBn^{-1} = n \cdot B$. Il reste à voir que le stabilisateur de B dans $N_G(T)$ est égal à $C_G(T)$. Si $nBn^{-1} = B$, alors $n \in B \cap N_G(T) = N_B(T)$. Or $N_B(T) = C_B(T)$, d'après le théorème 19.1. Rappelons l'argument : si $g \in N_B(T)$, alors, pour tout $t \in T$, on a $(gtg^{-1})\, t^{-1} \in T \cap \mathscr{D}(B) = \{1\}$, donc g centralise T. $\square$

Soient G, G' affines, $\pi : G \to G'$ un morphisme surjectif, et $\mathscr{B} = \mathscr{B}(G)$, $\mathscr{B}' = \mathscr{B}(G')$. D'après la proposition 20.19, pour tout $B \in \mathscr{B}$, on a $\pi(B) \in \mathscr{B}'$, et tout Borel de G' est obtenu de la sorte. Donc π induit une application surjective $\mathscr{B} \to \mathscr{B}'$, encore notée π. De plus, si $\operatorname{Ker} \pi$ est contenu dans un Borel, il est contenu dans tous (car normal), et donc l'on a $\pi^{-1}(\pi(B)) = B$ pour tout $B \in \mathscr{B}$. Donc dans ce cas ϕ est une bijection.

Proposition 21.10 **(Groupe de Weyl d'un groupe quotient)**

Soient $\pi : G \to G'$ *comme plus haut,* T *un tore maximal de* G*,* $B \in \mathscr{B}^T$ *et* $T' = \pi(T)$*,* $B' = \pi(B)$*.*

1) π *induit un morphisme de groupes* $\varphi : W_G(T) \to W_{G'}(T')$*.*

2) $\phi(\mathscr{B}^T) = \mathscr{B}'^{T'}$*, et l'on a un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} W_G(T) & \xrightarrow{\varphi} & W_{G'}(T') \\ {\scriptstyle w \mapsto w\cdot B}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle w' \mapsto w'\cdot B'} \\ \mathscr{B}^T & \xrightarrow{\pi} & \mathscr{B}'^{T'}. \end{array}$$

Par conséquent, φ *est surjectif.*

3) *Si* $\operatorname{Ker}\pi$ *est contenu dans un Borel, alors* φ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — D'abord, T' est un tore maximal de G', d'après la proposition 20.19. Il est clair que π envoie normalisateur et centralisateur de T dans leur analogues pour T', d'où 1). Voyons 2). Si $B \in \mathscr{B}^T$, alors $\pi(B)$ contient $\pi(T) = T'$. Donc $\phi(\mathscr{B}^T) \subseteq \mathscr{B}'^{T'}$. La commutativité du diagramme est immédiate. Montrons que $\mathscr{B}'^{T'} = \phi(\mathscr{B}^T)$. Soit $B' \in \mathscr{B}'^{T'}$. D'après la proposition 20.19, à nouveau, il existe $B_0 \in \mathscr{B}$ tel que $\pi(B_0) = B'$. Alors T est un tore maximal de $P := \pi^{-1}(B')$, donc est contenu dans un Borel B de P. Or B_0 est un Borel de G contenu dans P, donc aussi un Borel de P. Alors B et B_0 sont conjugués, donc B est aussi un Borel de G $(*)$. Alors, d'après la proposition

20.19, $\pi(\mathrm{B})$ est un Borel de G'. Comme $\pi(\mathrm{B}) \subseteq \mathrm{B}'$, il vient $\pi(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$. Ceci prouve 2). Enfin, 3) est immédiat. $\square$

Remarque 21.11. — Dans la démonstration précédente, on a montré : si P est un parabolique de G et B un Borel de P, alors B est un Borel de G.

21.5. Action d'un tore dans $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ et conséquences pour $\mathscr{B}$. —

Lemme 21.12. — *Soient* M *un* $\mathbb{Z}$*-module, et* $\mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_n$ *des sous-modules propres et tels que* M/M_i *soit sans torsion. Alors* $\mathrm{M} \neq \mathrm{M}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{M}_n$.

Démonstration. — Supposons $\mathrm{M} = \mathrm{M}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{M}_n$. On peut supposer que $\mathrm{M}_i \not\subseteq \bigcup_{j\neq i} \mathrm{M}_j$, pour tout i. Soit alors $m_i \in \mathrm{M}_i \setminus \bigcup_{j\neq i} \mathrm{M}_j$. Comme M/M_1 est sans torsion, alors pour tout k, $m_1 + km_2 \notin \mathrm{M}_1 \cup \mathrm{M}_2$. Donc il existe $k' > k$ tels que $m_1 + km_2$ et $m_1 + k'm_2$ appartiennent au même M_i, avec $i \geqslant 3$, d'où $(k' - k)m_2 \in \mathrm{M}_i$. Comme M/M_i est sans torsion, il vient $m_2 \in \mathrm{M}_i$, contradiction. $\square$

***Définition 21.13* (Le couplage $\mathrm{X}(\mathrm{T}) \times \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}) \to \mathbb{Z}$)**. — Soit T un tore. Un **cocaractère** de T est un morphisme de groupes algébriques $\mathbb{G}_m \to \mathrm{T}$. On note $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$ l'ensemble de ces cocaractères ; c'est un groupe abélien, la multiplication étant définie par $(\mu\mu')(z) = \mu(z)\mu'(z)$.

Soient $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$ et $\mu \in \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$. Alors $\chi \circ \mu$ est un morphisme de groupes algébriques $\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$, donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$(\chi \circ \mu)(z) = z^n, \qquad \forall\, z \in k^\times.$$

On pose $n = \langle \chi, \mu \rangle$. Ceci définit une application biadditive $\mathrm{X}(\mathrm{T}) \times \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}) \to \mathbb{Z}$.

***Proposition 21.14* (Dualité entre $\mathrm{X}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$)**. — *Soit* $\mathrm{T} \cong (\mathbb{G}_m)^r$ *un tore. Alors* $\mathrm{X}(\mathrm{T})$ *et* $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$ *sont des* $\mathbb{Z}$*-modules libres de rang* r*, et le couplage*

$$\mathrm{X}(\mathrm{T}) \times \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

est parfait, c.-à-d., il permet d'identifier $\mathrm{X}(\mathrm{T})$ *au dual de* $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$ *et réciproquement.*

Démonstration. — Identifions T à $\{(z_1, \ldots, z_r) \mid z_i \in k^\times\}$. On a déjà vu qu'on a un isomorphisme de groupes

$$\mathbb{Z}^r \xrightarrow{\sim} \mathrm{X}(\mathrm{T}), \qquad \nu \mapsto \mathrm{X}^\nu.$$

D'autre part, à tout $\nu \in \mathbb{Z}^r$ on associe le cocaractère

$$\mu_\nu : z \mapsto (z^{\nu_1}, \ldots, z^{\nu_r}).$$

On a $\mu_{\nu+\nu'} = \mu_\nu \mu_{\nu'}$. Si $\mu : \mathbb{G}_m \to \mathrm{T}$ est un cocaractère, alors en composant μ avec les projections sur chaque facteur $\mathbb{G}_m$, on voit que $\mu = \mu_\nu$ pour un ν uniquement déterminé. Ceci montre que $\nu \mapsto \mu_\nu$ est un isomorphisme de groupes.

Notons ε_i l'élément de $\mathbb{Z}^r$ dont toutes les coordonnées sont nulles, sauf la i-ème qui vaut 1, et posons $\mu_i = \mu_{\varepsilon_i}$. Alors $\mu_i(z) = (1, \dots, z, \dots, 1)$, où z est à la i-ème place, et on voit facilement que $(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_r)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_r)$ sont des bases de $\mathrm{X}(\mathrm{T})$ et $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$, duales l'une de l'autre. Ceci prouve la proposition. $\square$

Soient T un tore, et V un T-module rationnel de dimension finie. Alors T agit morphiquement dans $\mathbb{P}(\mathrm{V})$, cf. proposition 14.11.

Lemme 21.15. — *Il existe $\lambda \in \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$ tel que $\mathbb{P}(\mathrm{V})^{\mathrm{T}} = \mathbb{P}(\mathrm{V})^{\lambda(\mathbb{G}_m)}$ $(*)$. Plus précisément, il existe $\phi_1, \dots, \phi_s \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$ tels que $(*)$ ait lieu pour tout $\lambda \in \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$ vérifiant $\langle \phi_i, \lambda \rangle \neq 0$, pour $i = 1, \dots, s$.*

Démonstration. — Soient $\chi_1, \dots, \chi_r \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$ les poids de T dans V, i.e. $\mathrm{V} = \mathrm{V}_{\chi_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_{\chi_r}$. Pour $i \neq j$, chaque $\phi_{i,j} := \chi_i - \chi_j$ définit, via le couplage $\langle\ ,\ \rangle$, un élément non-nul de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}), \mathbb{Z})$. On déduit alors du lemme 21.12 que $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}) \neq \bigcup_{i \neq j} \mathrm{Ker}(\phi_{i,j})$. Donc il existe $\lambda \in \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$ tel que $\chi_i \circ \lambda \neq \chi_j \circ \lambda$, pour $i \neq j$. Alors, on voit sans peine qu'une droite de V est stable par $\lambda(\mathbb{G}_m)$ ssi elle est contenue dans un V_{χ_i}, c.à.d. ssi elle est stable par T. Le lemme en découle. $\square$

Lemme 21.16. — *Soit $v \in \mathrm{V} \setminus \{0\}$ et soit $[v]$ son image dans $\mathbb{P}(\mathrm{V})$. Alors, $[v]$ est un point fixe de $\mathbb{G}_m$ si, et seulement si, v est un vecteur propre de $\mathbb{G}_m$. Si ce n'est pas le cas, écrivons*

$$v = \sum_{r \leqslant i \leqslant s} v_i,$$

avec $v_i \in \mathrm{V}_i$ et $r < s$. Dans ce cas, le morphisme $\sigma : \mathbb{G}_m \to \mathbb{P}(\mathrm{V})$, $t \mapsto t \cdot [v]$, s'étend en un morphisme $\widetilde{\sigma} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}(\mathrm{V})$, tel que $\widetilde{\sigma}(0) = [v_r]$ et $\widetilde{\sigma}(\infty) = [v_s]$. On a

$$\widetilde{\sigma}(\mathbb{P}^1) = \overline{\mathbb{G}_m[v]} = \mathbb{G}_m[v] \cup [v_r] \cup [v_s],$$

et $[v_r]$, $[v_s]$ sont les seuls points fixes de $\mathbb{G}_m$ dans $\overline{\mathbb{G}_m[v]}$.

Démonstration. — La première assertion est claire. Pour démontrer la seconde, soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de V formée de vecteurs propres de $\mathbb{G}_m$, où chaque e_i est de poids m_i et où

$$m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_n.$$

Ecrivons $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$. Soit $\mathrm{J} = \{j \mid \alpha_j \neq 0\}$ et soient $j_1 = \min \mathrm{J}$, $j_2 = \max \mathrm{J}$. Posons $r = m_{j_1}$ et $s = m_{j_2}$. Par hypothèse, $r < s$. Posons

$$v_r = \sum_{m_j = r} \alpha_j e_j, \qquad v_s = \sum_{m_j = s} \alpha_j e_j.$$

Rappelons que $\mathbb{P}^1 = \mathrm{U} \cup \mathrm{U}'$, où $k[\mathrm{U}] = k[t]$ et $k[\mathrm{U}'] = k[t^{-1}]$. Posons $\mathrm{X} := \overline{\mathbb{G}_m[v]}$. Pour tout $t \in k^\times$, on a

$$\sigma(t) = t \cdot [v] = \left[v_r + \sum_{m_j > r} t^{m_j - r} \alpha_j e_j \right]. \tag{1}$$

Ceci montre que σ se prolonge en un morphisme, noté f, de U vers $\mathbb{P}(\mathrm{V})$, tel que $f(0) = [v_r]$. Alors $f^{-1}(\mathrm{X})$ est un fermé de U contenant $k^\times$, donc égal à U. Par conséquent, $[v_r] \in \mathrm{X}$.

De même, pour tout $t \in k^\times$, posons $g(t^{-1}) = \sigma(t)$. On a

$$g(t^{-1}) = \left[\sum_{m_j < s} (t^{-1})^{s - m_j} \alpha_j e_j + v_s \right]. \tag{2}$$

Comme précédemment, ceci entraîne que g se prolonge en un morphisme, encore noté g, de U' vers $\mathbb{P}(\mathrm{V})$, tel que $g(\infty) = [v_s]$, d'où $[v_s] \in \mathrm{X}$.

Alors f et g sont des morphismes de U et U' vers $\mathbb{P}(\mathrm{V})$, qui vérifient $f(t) = g(t^{-1})$ sur $\mathrm{U} \cap \mathrm{U}' = \mathbb{G}_m$, donc induisent un morphisme $\widetilde{\sigma} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}(\mathrm{V})$, tel que

$$\widetilde{\sigma}(0) = [v_r], \qquad \widetilde{\sigma}(\infty) = [v_s].$$

Ce sont deux points fixes distincts, puisque v_r et v_s sont des vecteurs propres de $\mathbb{G}_m$, de poids $r < s$.

D'autre part, comme $\mathbb{P}^1$ est une variété complète, $\widetilde{\sigma}(\mathbb{P}^1)$ est un fermé de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$. Il est de plus irréductible et de dimension 1. Il est donc égal à $\overline{\mathbb{G}_m[v]}$. Par conséquent, on obtient que

$$\overline{\mathbb{G}_m[v]} = \widetilde{\sigma}(\mathbb{P}^1) = \mathbb{G}_m[v] \cup [v_r] \cup [v_s].$$

Enfin, il est clair que l'orbite $\mathbb{G}_m[v]$ ne contient pas de point fixe de $\mathbb{G}_m$. Le lemme est démontré. □

***Lemme 21.17* (Sections hyperplanes).** — *Soient* H *un hyperplan de* $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ *et* X *une sous-variété fermée irréductible de* $\mathbb{P}(\mathrm{V})$*, de dimension* $d \geqslant 1$*, non contenue dans* H*. Alors,* $\mathrm{X} \cap \mathrm{H}$ *est non vide, et chacune de ses composantes irréductibles est de dimension* $d - 1$*.*

Démonstration. — Si on avait $\mathrm{X} \cap \mathrm{H} = \varnothing$, alors X serait une sous-variété fermée de l'espace affine $\mathbb{P}(\mathrm{V}) \setminus \mathrm{H}$. Alors X serait complète, irréductible, et affine, donc réduite à un point. Cette contradiction montre que $\mathrm{X} \cap \mathrm{H} \neq \varnothing$. Pour l'assertion concernant la dimension, voir [**Ku**, Chap.V, Prop.3.9], ou [**Die**], § 4.3, Cor.2 de la Prop.7, ou [**Bo**, Lemma 13.4]. □

Remarque 21.18. — Dans le lemme 21.12, l'hypothèse que M/M_i soit sans torsion est nécessaire. Considérer l'exemple où $\mathrm{M} = \mathbb{Z}^2$ et M_1, resp. M_3, est engendré par $2e_1$ et e_2, resp. e_1 et $2e_2$, tandis que $\mathrm{M}_2 = \{(x, y) \mid x + y \in 2\mathbb{Z}\}$.

Proposition 21.19. — *Soient* T *un tore,* V *un* T*-module rationnel de dimension finie, et* X *une sous-variété fermée irréductible* T*-stable de* $\mathbb{P}(\mathrm{V})$. *Alors*

$$\#\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \geqslant \dim(\mathrm{X}) + 1.$$

Démonstration. — D'après le lemme 21.15, il existe $\lambda \in \mathrm{X}^{\vee}(\mathrm{T})$ tel que $\mathbb{P}(\mathrm{V})^{\lambda(\mathbb{G}_m)} = \mathbb{P}(\mathrm{V})^{\mathrm{T}}$. Remplaçant T par $\lambda(\mathbb{G}_m)$, on peut donc se ramener au cas où $\mathrm{T} = \mathbb{G}_m$.

Soient $d = \dim(\mathrm{X})$ et $n = \dim \mathrm{V}$, et soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de V formée de vecteurs propres de $\mathbb{G}_m$, c.-à-d., où chaque e_i est de poids m_i. Quitte à renuméroter, on peut supposer que

$$m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_n.$$

Soient W l'hyperplan de V engendré par $e_2, \dots, e_n$, et $\mathrm{H} = \mathbb{P}(\mathrm{W})$; alors W et H sont T-stables. On procède par récurrence sur $d + n$. On peut supposer $d \geqslant 1$ et $\mathrm{X} \not\subseteq \mathrm{H}$. Alors, $\mathrm{X} \cap \mathrm{H}$ est T-stable et, d'après le lemme 21.17, toutes ses composantes sont de dimension $d - 1$. Comme $\mathbb{G}_m$ est connexe, il stabilise chaque composante de $\mathrm{X} \cap \mathrm{H}$. Donc, par hypothèse de récurrence, $\mathbb{G}_m$ possède au moins d points fixes dans $\mathrm{X} \cap \mathrm{H}$. De plus, comme $\mathrm{X} \not\subseteq \mathrm{H}$, alors X contient un élément de la forme

$$x = \Big[e_1 + \sum_{i \geqslant 2} \alpha_i e_i\Big].$$

D'après la démonstration du lemme 21.16, on obtient que $\overline{\mathbb{G}_m x}$ contient la limite en $t = 0$ de $t \cdot x$, c.-à-d., l'élément

$$\Big[e_1 + \sum_{m_i = m_1} \alpha_i e_i\Big].$$

C'est un élément de $\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \setminus \mathrm{H}$. Il en résulte que $\#\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \geqslant 1 + d$. La proposition est démontrée. □

Corollaire 21.20. — *Soient* G *connexe, et* T *un tore maximal.*

a) *Pour tout parabolique* P, *on a* $\#(\mathrm{G}/\mathrm{P})^{\mathrm{T}} \geqslant 1 + \dim \mathrm{G}/\mathrm{P}$.

b) $\mathrm{W} = \{1\} \Leftrightarrow \mathrm{G}$ *est résoluble.*

c) $\#\mathrm{W} = 2 \Leftrightarrow \dim \mathscr{B} = 1$ *; dans ce cas* $\mathscr{B} = \mathbb{P}^1$.

d) G *est engendré par les sous-groupes de Borel contenant* T.

Démonstration. — D'après le théorème de Chevalley 14.12, G/P est une sous-variété fermée d'un $\mathbb{P}(\mathrm{V})$, où V est un G-module rationnel de dimension finie. L'assertion a) découle donc de la proposition précédente.

Voyons b). Si G est résoluble, alors $N_G(T) = C_G(T)$ d'après le théorème 19.1.4), et donc $W = \{1\}$. Réciproquement, si $W = \{1\}$ et si B est un sous-groupe de Borel, la proposition 21.19 entraîne que G/B est un point, d'où $G = B$.

c) De même, si $\#W = 2$ alors $\dim \mathscr{B} = 1$. Réciproquement, supposons $\dim \mathscr{B} = 1$. D'après le lemme 21.15, il existe $\lambda \in X^\vee(T)$ tel que $\mathscr{B}^T = \mathscr{B}^{\lambda(\mathbb{G}_m)}$. Alors $\mathscr{B}^T \neq \mathscr{B}$ (car $\mathscr{B}^T$ est fini), et pour $x \in \mathscr{B} \setminus \mathscr{B}^T$ on a

$$(*) \qquad \overline{\lambda(\mathbb{G}_m)x} = \mathscr{B},$$

puisque $\dim \mathscr{B} = 1$. D'une part, ceci implique $\#\mathscr{B}^T = 2$, d'après le lemme 21.16 et la proposition 21.19. D'autre part, $(*)$ entraîne que le morphisme $\phi_x : \mathbb{G}_m \to \mathscr{B}$, $z \mapsto z \cdot x$ est dominant, donc induit une inclusion

$$k(\mathscr{B}) \subseteq k(\mathbb{G}_m) = k(t),$$

où t désigne une indéterminée. D'après le théorème de Luröth, on a donc $k(\mathscr{B}) \cong k(t)$, c.-à-d., $\mathscr{B}$ est une courbe lisse complète rationnelle. D'après la classification des courbes, ceci entraîne que $\mathscr{B} \cong \mathbb{P}^1$.

Prouvons d) par récurrence sur $d = \dim G$. C'est vrai si $d \leqslant 2$, car dans ce cas G est résoluble, d'après le corollaire 20.22. Soit P le sous-groupe engendré par les sous-groupes de Borel contenant T. Il est fermé, d'après la proposition 17.1 ; c'est donc un sous-groupe parabolique. Si $P \neq G$, alors $\dim G/P \geqslant 1$ et donc T a au moins deux points fixes dans G/P. Donc T est contenu dans un conjugué $Q = gPg^{-1}$, distinct de P. Par hypothèse de récurrence, Q est engendré par ses sous-groupes de Borel qui contiennent T. Mais, d'après la remarque 21.11 ceux-ci sont des sous-groupes de Borel de G contenant T, et sont donc contenus dans P, d'où $Q \subseteq P$, contradiction ! Le corollaire est démontré. □

22. Sous-groupes de Cartan d'un groupe réductif, d'après Luna

22.1. Théorème de Kostant-Rosenlicht. — Le théorème ci-dessous aurait pu être énoncé dans le chapitre sur les groupes unipotents.

***Théorème 22.1* (Kostant-Rosenlicht).** — *Soit* U *un groupe unipotent et* X *une* G*-variété* **affine**. *Alors toute orbite de* U *dans* X *est fermée.*

Démonstration. — Soit O une orbite de U ; elle est ouverte dans son adhérence Y. Soit I l'idéal dans $k[Y]$ du fermé U-stable $Z = Y \setminus O$. Alors I est un U-module rationnel donc, d'après le théorème de Lie-Kolchin (cas unipotent), I contient un élément $f \in k[Y]^U$ non nul. Mais comme O est dense dans Y, alors $k[Y]^U = k$, et donc I contient un scalaire non nul, d'où $I = k[Y]$ et $Z = \varnothing$. Ceci prouve que O est fermée. □

Remarque 22.2. — Le théorème s'étend au cas où X est quasi-affine, c.-à-d., un ouvert d'une variété affine ; voir [**Bo**, Prop. 4.10].

22.2. Sous-groupes de Cartan et radical unipotent. — Soient G un groupe réductif connexe et T un tore maximal de G. On désigne par I(T) la composante connexe de l'intersection des sous-groupes de Borel de G contenant T, c.-à-d.,

$$\mathrm{I(T)} = \Big(\bigcap_{\mathrm{B}\in\mathscr{B}^{\mathrm{T}}} \mathrm{B}\Big)^{0}.$$

C'est un groupe résoluble connexe. Par conséquent, l'ensemble $\mathrm{I(T)}_u$ de ses éléments unipotents est un sous-groupe fermé connexe, égal au radical unipotent $\mathrm{R}_u(\mathrm{I(T)})$. De plus, on voit facilement que

$$\mathrm{I(T)}_u = \Big(\bigcap_{\mathrm{B}\in\mathscr{B}^{\mathrm{T}}} \mathrm{B}_u\Big)^{0}.$$

D'autre part, T est un tore maximal de I(T), et donc I(T) est le produit semi-direct $\mathrm{TI(T)}_u$, d'après le théorème 19.1. Le but de cette section est de démontrer le théorème ci-dessous.

***Théorème 22.3* (Chevalley)**. — *On a* $\mathrm{I(T)}_u = \{1\}$ *et donc* $\mathrm{I(T)} = \mathrm{T}$.

Corollaire 22.4. — *Soit* G *réductif connexe.*

a) *Si* T *est un tore maximal,* $\mathrm{C_G(T)} = \mathrm{T}$.

b) Z(G) *est l'intersection des tores maximaux.*

b) *Si* S *est un tore de* G*, alors* $\mathrm{C_G(S)}$ *est réductif et connexe.*

Démonstration du corollaire. — Soit T un tore maximal. D'après le corollaire 20.33, $\mathrm{C_G(T)}$ est contenu dans I(T), d'où l'assertion a).

Il en résulte que Z(G) est contenu dans T et donc dans l'intersection de tous les tores maximaux. Or, cette intersection est un sous-groupe fermé diagonalisable normal, donc contenu dans Z(G) d'après le théorème de rigidité 16.14. Ceci prouve b).

Voyons c). On a déjà vu, dans le 20.32.a), que $\mathrm{C_G(S)}$ est connexe. D'autre part, comme $\mathrm{U} := \mathscr{R}_u(\mathrm{C_G(S)})$ est le radical unipotent de l'intersection de tous les sous-groupes de Borel de $\mathrm{C_G(S)}$, on déduit du théorème 20.32.b) que U est contenu dans $\mathrm{I(T)}_u$, donc trivial. le corollaire est démontré. □

Démontrons maintenant le théorème de Chevalley. Nous suivrons la démonstration donnée récemment par Luna [**Lu99**]. On pose $\mathrm{J} := \mathrm{I(T)}_u$ et $\mathrm{X} = \mathscr{B}$. Rappelons que, d'après le théorème 21.9, le groupe de Weyl W agit de façon simplement transitive sur X^{T} ; en particulier, X^{T} est fini.

22.3. La démonstration de Luna. —

Définition 22.5. — Pour tout $p \in \mathrm{X}^{\mathrm{T}}$, soit $\mathrm{X}(p) := \{x \in \mathrm{X} \mid p \in \overline{\mathrm{T}x}\}$.

***Théorème 22.6* (Luna)**. — *Les* $\mathrm{X}(p)$*, pour* $p \in \mathrm{X}^{\mathrm{T}}$*, sont des ouverts affines de* X*, stables par* J*.*

Démonstration. — Soit B un sous-groupe de Borel de G. D'après le théorème de Chevalley 14.12, il existe un G-module rationnel V de dimension finie, et une droite B-stable D de V, tels que

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{D}) = \mathrm{B}, \qquad \mathrm{Stab}_{\mathrm{Lie(G)}}(\mathrm{D}) = \mathrm{Lie(B)}.$$

On peut supposer V égal au sous-espace engendré par la G-orbite de D, quitte à remplacer V par ledit sous-espace (ceci ne change pas les stabilisateurs ci-dessus). Alors, sous cette hypothèse, $\mathrm{X} = \mathrm{G}/\mathrm{B}$ est une sous-variété fermée G-stable de $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ qui n'est contenue dans aucun sous-espace propre $\mathbb{P}(\mathrm{W})$ avec $\mathrm{W} \neq \mathrm{V}$.

D'après le lemme 21.15, il existe $\lambda \in \mathrm{X}^{\vee}(\mathrm{T})$ tel que les points fixes de $\lambda(\mathbb{G}_m)$ dans $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ et dans X soient les mêmes que ceux de T. Chaque $p \in \mathrm{X}^{\mathrm{T}}$ est l'image dans $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ d'un vecteur non-nul $v(p)$ qui est vecteur propre de $\lambda(\mathbb{G}_m)$; soit $m_\lambda(p) \in \mathbb{Z}$ le poids de v_p pour l'action de $\lambda(\mathbb{G}_m)$.

Observons que les $v(p)$ sont dans la même orbite sous $\mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, donc a fortiori sous G. Par conséquent, pour tout $p \in \mathrm{X}^{\mathrm{T}}$, l'orbite $\mathrm{G} \cdot v(p)$ engendre V.

Choisissons $p_0 \in \mathrm{X}^{\mathrm{T}}$ tel que $m_\lambda(p_0)$ soit *minimal* et notons e_0 le vecteur associé. Il fait partie d'une base $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ de V formée de vecteurs propres de $\mathbb{G}_m$, où chaque e_i est de poids m_i, où $m_0 = m_\lambda(p_0)$ et où l'on peut supposer

$$m_1 \leqslant \cdots \leqslant m_n.$$

Soit $(e_0^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de V^*.

Lemme 22.7. — *On a* $m_0 < m_1$*.*

Démonstration. — Comme X n'est contenu dans aucun sous-espace $\mathrm{W} \neq \mathrm{V}$, il existe $v \in \mathrm{V}$ tel que $e_i^*(v) \neq 0$ pour $i = 0, \dots, n$ et $[v] \in \mathrm{X}$. Alors X contient $\sigma_v(0)$, la limite en 0 de $\lambda(z) \cdot [v]$, qui est un point fixe de $\lambda(\mathbb{G}_m)$ et donc de T dans X.

Si on avait $m_1 < m_0$, alors $\sigma_v(0)$ serait de poids $m_1 < m_0$, contredisant la minimalité de m_0. Donc $m_1 \geqslant m_0$. Supposons $m_1 = m_0$. L'ensemble

$$\mathrm{Z} := \{z \in k \mid \exists\, v \in \mathrm{V} \text{ tel que } e_0^*(v) = 1,\ e_1^*(v) = z \text{ et } [v] \in \mathrm{X}\}$$

est infini, car sinon X serait contenu dans une réunion finie d'hyperplans d'équations $e_0^* = 0$ ou $e_1^* = z_i e_0^*$, donc dans l'un d'eux (puisque X est irréductible), une contradiction. Mais tout $z \in \mathrm{Z}$ donne lieu à un point fixe p_z de

$\lambda(\mathbb{G}_m)$ dans X vérifiant

$$e_0^*(p_z) \neq 0 \quad \text{et} \quad e_1^*(p_z) = z e_0^*(p_z).$$

En particulier, les p_z sont deux à deux distincts. Ceci contredit le fait que $\mathrm{X}^{\lambda(\mathbb{G}_m)} = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}$ est fini. Cette contradiction montre que $m_1 > m_0$. Le lemme est démontré. □

Proposition 22.8. — *Posons* $\mathrm{X}(\lambda, p_0) = \{x \in \mathrm{X} \mid e_0^*(x) \neq 0\}$. *C'est un ouvert affine,* T*-stable, de* X. *De plus, on a*

$$\mathrm{X}(\lambda, p_0) = \mathrm{X}(p_0),$$

et $\mathrm{X}(\lambda, p_0)$ *est stable par* J.

Démonstration. — Il est clair que $\mathrm{U} := \mathrm{X}(\lambda, p_0)$ est un ouvert affine, et il est T-stable car e_0^* est un vecteur de poids pour T.

Démontrons la deuxième assertion. Soit $x \in \mathrm{X}(\lambda, p_0)$. Comme $m_0 < m_i$ pour tout $i \geqslant 1$, alors $\lambda(\mathbb{G}_m)x$ contient $p_0 = [e_0]$ dans son adhérence (comme limite en 0). Ceci montre que

$$\mathrm{X}(\lambda, p_0) \subseteq \mathrm{X}(p_0).$$

D'autre part, soit $x \in \mathrm{X}(p_0)$. Alors $p_0 \in \overline{\mathrm{T}x}$ et donc l'orbite $\mathrm{T}x$ rencontre l'ouvert $\mathrm{X}(\lambda, p_0)$. Comme ce dernier est T-stable, on obtient qu'il contient x. Ceci montre que $\mathrm{X}(\lambda, p_0) = \mathrm{X}(p_0)$.

Montrons que $\mathrm{X}(\lambda, p_0)$ est stable par J. Désignons par $e_0^\perp$ l'hyperplan de V^* orthogonal à e_0. Le groupe G agit rationnellement dans V^* et $\mathbb{P}(\mathrm{V}^*)$.

Lemme 22.9. — 1) *Toute orbite de* G *dans* $\mathbb{P}(\mathrm{V}^*)$ *rencontre l'ouvert* $\mathbb{P}(\mathrm{V}^*) \setminus \mathbb{P}(e_0^\perp)$.

2) *Par conséquent, l'orbite* $\mathrm{G} \cdot [e_0]$ *est fermée dans* $\mathbb{P}(\mathrm{V}^*)$.

Démonstration. — Soit $\phi \in \mathrm{V}^* \setminus \{0\}$. Si on avait $\mathrm{G}\phi \subseteq e_0^\perp$ alors ϕ serait orthogonal à $\mathrm{G} \cdot e_0$, qui engendre V, et donc on aurait $\phi = 0$, contradiction. Ceci prouve la première assertion.

Montrons la seconde. Chaque e_i^* est de poids $-m_i$ pour $\lambda(\mathbb{G}_m)$, et comme

$$-m_n \leqslant \cdots \leqslant -m_1 < -m_0,$$

alors $[e_0^*]$ appartient à $\overline{\lambda(\mathbb{G}_m)x}$, pour tout $x \in \mathbb{P}(\mathrm{V}^*) \setminus \mathbb{P}(e_0^\perp)$, et donc à l'adhérence de toute G-orbite dans $\mathbb{P}(\mathrm{V}^*)$, d'après le point 1). Ceci montre que $\mathrm{G} \cdot [e_0]$ est une orbite de dimension minimale, donc fermée. Le lemme est démontré. □

Revenons à la démonstration de la proposition 22.8 et montrons que $\mathrm{X}(\lambda, p_0)$ est stable par J. Notons P le stabilisateur dans G de $[e_0^*]$. Puisque l'orbite $\mathrm{G}\cdot[e_0^*]$ est fermée, donc complète, P est un sous-groupe parabolique de G. D'autre part, e_0^* est vecteur propre de T, donc P contient T. On en déduit que P contient un sous-groupe de Borel de G contenant T. Par conséquent, J est contenu dans P donc stabilise la droite $[e_0^*]$ et donc l'ouvert

$$\mathrm{X}(\lambda, p_0) = \{x \in \mathrm{X} \mid e_0^*(x) \neq 0\}.$$

(En fait, comme J est unipotent, il fixe non seulement la droite $[e_0^*]$ mais aussi le vecteur e_0^*). La proposition est démontrée. □

On peut maintenant achever la preuve du théorème 22.6. On voit de voir que $\mathrm{X}(p_0) = \mathrm{X}(\lambda, p_0)$ est un ouvert affine de X, stable par T et par J. Soit $p \in \mathrm{X}^{\mathrm{T}}$ arbitraire. Il existe $n \in \mathrm{N_G(T)}$ tel que $p = n \cdot p_0$. Alors $\mathrm{X}(p)$ égale $n \cdot \mathrm{X}(p_0)$ donc est un ouvert affine de X stable par T et par $n\mathrm{J}n^{-1}$. Or, $\mathrm{N_G(T)}$ permute les sous-groupes de Borel contenant T et donc $n\mathrm{J}n^{-1} = \mathrm{J}$. Ceci termine la démonstration du théorème 22.6. □

Proposition 22.10 **(Luna)**. — J *agit trivialement sur* $\mathrm{X} = \mathrm{G/B}$.

Démonstration. — Comme T est résoluble connexe et X complète, les seules orbites fermées de T dans X sont les points fixes, et donc les $\mathrm{X}(p)$, pour $p \in \mathrm{X}^{\mathrm{T}}$ recouvrent X.

Soit $x \in \mathrm{X}$ arbitraire. Comme J est résoluble connexe, $\overline{\mathrm{J}x}$ contient un point y fixé par C. Soit $p \in \mathrm{X}^{\mathrm{T}}$ tel que $y \in \mathrm{X}(p)$. Alors $\mathrm{X} \setminus \mathrm{X}(p)$ est un fermé stable par J ; il ne peut rencontrer $\mathrm{J}x$ car sinon il contiendrait $\mathrm{J}x$ et son adhérence, donc y, ce qui n'est pas le cas. Donc on a

$$\mathrm{J}x \subseteq \mathrm{X}(p).$$

Comme J est unipotent et $\mathrm{X}(p)$ affine, l'orbite $\mathrm{J}x$ est fermée dans $\mathrm{X}(p)$, d'après le théorème de Kostant-Rosenlicht 22.1. Comme $y \in \mathrm{X}(p) \cap \overline{\mathrm{J}x}$, on obtient que $y \in \mathrm{J}x$, d'où $\mathrm{J}x = \mathrm{J}y = y$, puisque y est un point fixe de J ! Ceci montre que $x = y$ est fixé par J, et donc que J agit trivialement sur X. La proposition est démontrée. □

Corollaire 22.11 **(Théorème de Chevalley)**. — *On a* $\mathrm{J} = \{1\}$, *c.-à-d.,* $\mathrm{I(T)} = \mathrm{T}$.

Démonstration. — Comme J agit trivialement sur $\mathrm{X} = \mathscr{B}$ et est connexe et unipotent, on obtient que

$$\mathrm{J} \subseteq \Big(\bigcap_{\mathrm{B} \in \mathscr{B}} \mathrm{B}_u\Big)^0 = \mathrm{R}_u(\mathrm{G}).$$

Comme $\mathrm{R}_u(\mathrm{G}) = \{1\}$, puisque G est supposé réductif, on obtient $\mathrm{J} = \{1\}$. Ceci prouve le corollaire, et donc le théorème 22.3. □

Remarque 22.12. — L'hypothèse que G soit réductif n'est intervenue que dans l'étape finale ci-dessus. Pour G un groupe linéaire connexe quelconque et T un tore maximal de G, on peut définir J comme précédemment. Il est alors clair que $\mathrm{R}_u(\mathrm{G}) \subseteq \mathrm{J}$, et la démonstration précédente montre alors que $\mathrm{J} = \mathrm{R}_u(\mathrm{G})$.

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[Abe] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge Univ. Press, 1977.

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.

[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.

[AM] M. Atiyah, I. G. Macdonald, Commutative algebra, Addison Wesley, 1969.

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[Bo] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Springer Verlag, 1991.

[BA1-3] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 1 à 3, 1981.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BL7-8] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 7-8, 1975.

[BI7-8] N. Bourbaki, Intégration, Chap. 7-8, 1963.

[BrM] J. Briançon, Ph. Maisonobe, Éléments d'algèbre commutative, niveau M1, Ellipses, 2004.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.

[Ca2] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, 1961, nouveau tirage, 1978.

[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.

[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.

[Do88] D. Z. Doković, An elementary proof of the structure theorem for connected solvable affine algebraic groups, Enseign. Math. (2) 34 (1988), 269-273.

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Eis] D. Eisenbud, Commutative algebra with a view towards algebraic geometry, Springer, 1995.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[GH] M.J. Greenberg, J.R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1977.

[Hel] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press 1978, ninth printing Amer. Math. Soc. 2001.

[Her] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.

[Ho81] G. P. Hochschild, Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, Springer-Verlag, 1981.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Hu2] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, 1975, corrected 2nd printing 1981.

[Iit] S. Iitaka, Algebraic geometry, Springer, 1982.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Jac80] N. Jacobson, Basic Algebra II, Freeman & Co., 1980.

[KSS] H. Kraft, P. Slodowy, T. A. Springer (Ed.), Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie - Algebraic Transformation Groupes and Invariant Theory, Birkäuser, 1989.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Ke] G. R. Kempf, Algebraic varieties, Cambridge Univ. Press, 1993.

[Kna] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser, 1996, 2nd edition, 2002.

[Ku] E. Kunz, Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkhäuser, 1985.

[Laf74] J.-P. Lafon, Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative, Hermann, 1974.

[Laf77] J.-P. Lafon, Algèbre commutative (Langages géométrique et algébrique), Hermann, 1977.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[Lu99] Retour sur un théorème de Chevalley, Enseign. Math. (2) 45 (1999), 317-320.

[Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.

[Ma1] H. Matsumura, Commutative algebra (2nd edition), Benjamin, 1980.

[Ma2] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 1986, paperback edition with corrections, 1989.

[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Pe] D. Perrin, Géométrie algébrique - Une introduction, Inter Éditions/-CNRS Éditions, 1995.

[Po] P. Polo, Algèbre et théorie de Galois, cours de M1 2005/06 à l'Université Paris 6, www.math.jussieu.fr/~polo

[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Sp] T. A. Springer, Linear algebraic groups, Birkäuser, 1981, 2nd edition 1998.

[Sw] M. E. Sweedler, Hopf Algebras, Benjamin, 1969.

[Ti] J. Tits, Liesche Gruppen und Algebren, Springer-Verlag, 1983.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.