PARTIE II : ALGÈBRES DE LIE
SÉANCES DU 16 ET 17 OCTOBRE

3. Racines d'une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple

Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie **semi-simple**, de dimension finie, et soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan. On note $\mathrm{K} = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$.

Comme $\mathfrak{g}$ ne contient pas d'idéal résoluble, alors $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = (0)$ et donc la représentation adjointe

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g})$$

est injective. Donc, lorsque nécessaire, on pourra considérer toute sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, en particulier $\mathfrak{h}$, comme une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$.

3.1. Racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. — Notons $\mathrm{R} = \mathrm{R}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ l'ensemble des poids non nuls de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, pour l'action adjointe. D'après la proposition 2.23 et le théorème 2.15, on a

$$(1) \qquad \mathfrak{g}_{(0)} = \mathfrak{h} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \bigoplus \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

De plus, d'après 2.9 et 2.10, on a

$$(1'). \qquad [\mathfrak{g}_{(\alpha)}, \mathfrak{g}_{(\beta)}] \subseteq \mathfrak{g}_{(\alpha+\beta)}, \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathrm{R}.$$

Lemme 3.1. — *L'invariance de* K *est équivalente au fait que*

$$\mathrm{K} : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \textit{est un } \mathfrak{g}\textit{-morphisme},$$

où $\mathbb{C}$ *est considéré comme* $\mathfrak{g}$*-module trivial. Par conséquent, d'après la proposition* 2.9*, pour tout* $\lambda, \mu \in \mathrm{R} \cup \{0\}$*, on a*

$$(2) \qquad \mathrm{K}(\mathfrak{g}_{(\lambda)}, \mathfrak{g}_{(\mu)}) \subseteq \mathbb{C}_{(\lambda+\mu)} = 0 \quad \textit{si} \enspace \lambda + \mu \neq 0.$$

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

---
[0] version du 18/10/06

Corollaire 3.2. — *La restriction de* K *à* $\mathfrak{h}$ *est non dégénérée et* K *induit, pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$, *une dualité parfaite entre* $\mathfrak{g}_{(\alpha)}$ *et* $\mathfrak{g}_{(-\alpha)}$.

En particulier, $\alpha \in \mathrm{R}$ *implique* $-\alpha \in \mathrm{R}$ *et* $\dim \mathfrak{g}_{(-\alpha)} = \mathfrak{g}_{(\alpha)}$.

Démonstration. — Ceci résulte du fait que K est non dégénérée et du lemme précédent. □

Corollaire 3.3. — $\mathfrak{h}$ *est abélienne, c.-à-d.,* $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$.

Démonstration. — Par hypothèse, $\mathfrak{h}$ est nilpotente, a fortiori résoluble. Donc, d'après le corollaire 2.4, pour tout $x \in \mathfrak{h}$ et $y \in \mathscr{D}(\mathfrak{h})$, on a

$$0 = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(y)) = \mathrm{K}(x, y).$$

Ceci montre que $\mathscr{D}(\mathfrak{h})$ est orthogonal à $\mathfrak{h}$, et donc à $\mathfrak{g}$ tout entier, d'après le lemme 3.1. Comme K est non dégénérée, ceci implique $\mathscr{D}(\mathfrak{h}) = 0$, donc $\mathfrak{h}$ est abélienne. □

Remarquons que, pour tout $\lambda \in \{0\} \cup \mathrm{R}$, tout $h \in \mathfrak{h}$ agit sur $\mathfrak{g}_{(\lambda)}$ comme une matrice triangulaire avec $\lambda(h)$ sur la diagonale. Il en résulte que :

$$\forall\, h,\, h' \in \mathfrak{h}, \qquad \mathrm{K}(h, h') = \sum_{\alpha \in \mathrm{R}} \dim \mathfrak{g}_{(\alpha)}\, \alpha(h)\alpha(h'). \tag{3}$$

Corollaire 3.4. — *On a* $\bigcap_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathrm{Ker}\,\alpha = (0)$ *et donc* R *engendre* $\mathfrak{h}^*$.

Démonstration. — Soit $h \in \mathfrak{h}$ tel que $\alpha(h) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$. Alors, d'après (3), h est orthogonal à $\mathfrak{h}$, d'où $h = 0$. Ceci prouve la première assertion, et la seconde en découle, d'après un résultat « bien connu » d'algèbre linéaire. □

Définition 3.5. — Notons $\mathrm{K}^{\#}$ l'isomorphisme $\mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^*$ induit par K, c.-à-d., $\mathrm{K}^{\#}(h)$ est la forme linéaire $h' \mapsto \mathrm{K}(h, h')$. Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, on note H_α l'unique élément de $\mathfrak{h}$ tel que $\mathrm{K}^{\#}(\mathrm{H}_\alpha) = \alpha$.

D'autre part, comme $\mathfrak{h}$ est abélienne, on voit facilement que, pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, l'espace propre associé :

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g}_{(\alpha)} \mid [h, x] = \alpha(h)x\}$$

est **non nul**. (Ceci se déduit aussi du théorème de Lie.) Soit e_α un vecteur non nul de $\mathfrak{g}_\alpha$.

Lemme 3.6. — *Pour tout* $f \in \mathfrak{g}_{(-\alpha)}$, *on a*

$$[e_\alpha, f] = \mathrm{K}(e_\alpha, f)\mathrm{H}_\alpha. \tag{4}$$

Démonstration. — Pour tout $h \in \mathfrak{h}$, l'on a

$$\mathrm{K}(h, [e_\alpha, f]) = \mathrm{K}([h, e_\alpha], f) = \alpha(h)\mathrm{K}(e_\alpha, f).$$

Comme la restriction de K à $\mathfrak{h}$ est non dégénérée, il en résulte que l'élément $[e_\alpha, f] - \mathrm{K}(e_\alpha, f)\mathrm{H}_\alpha$ de $\mathfrak{h}$ est nul. □

Définition 3.7. — On pose

$$\mathfrak{s}_\alpha = \mathbb{C}e_\alpha \bigoplus \mathbb{C}\mathrm{H}_\alpha \bigoplus \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathfrak{g}_{(-n\alpha)}.$$

Il résulte de $(1')$ et (4) que $\mathfrak{s}_\alpha$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.

Comme K induit une dualité parfaite entre $\mathfrak{g}_{(\alpha)}$ et $\mathfrak{g}_{(-\alpha)}$, il existe $f \in \mathfrak{g}_{(-\alpha)}$ tel que $\mathrm{K}(e_\alpha, f) = 1$ et donc, d'après (4), on a :

$$\mathrm{H}_\alpha = [e_\alpha, f] \in \mathscr{D}(\mathfrak{s}_\alpha).$$

Proposition 3.8. — *$\mathfrak{s}_\alpha$ n'est pas résoluble, et l'on a : $\alpha(\mathrm{H}_\alpha) \neq 0$.*

Démonstration. — On observe que $e_\alpha \in \mathscr{D}(\mathfrak{s}_\alpha)$ si et seulement si $\alpha(\mathrm{H}_\alpha) \neq 0$. Supposons $\alpha(\mathrm{H}_\alpha) = 0$. Alors, $\mathscr{D}(\mathfrak{s}_\alpha) \subseteq \mathbb{C}\mathrm{H}_\alpha \oplus \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathfrak{g}_{(-n\alpha)}$, puis

$$\mathscr{D}^2(\mathfrak{s}_\alpha) \subseteq \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathfrak{g}_{(-n\alpha)}$$

et donc $\mathscr{D}^2(\mathfrak{s}_\alpha)$ est nilpotente, et donc $\mathfrak{s}_\alpha$ résoluble.

Alors, il résulte du théorème de Lie que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ est nilpotent, pour tout $x \in \mathscr{D}(\mathfrak{s}_\alpha)$, en particulier pour $x = \mathrm{H}_\alpha$. Donc, toutes les valeurs propres de H_α sont nulles. Mais ceci est impossible, car

$$\bigcap_{\beta \in \mathrm{R}} \operatorname{Ker} \beta = (0),$$

donc il existe $\beta \in \mathrm{R}$ tel que $\beta(\mathrm{H}_\alpha) \neq 0$ et $[\mathrm{H}_\alpha, e_\beta] = \beta(\mathrm{H}_\alpha)e_\beta$.

Cette contradiction montre que $\mathfrak{s}_\alpha$ n'est pas résoluble, et donc $\alpha(\mathrm{H}_\alpha) \neq 0$. La proposition est démontrée. □

Considérons l'action adjointe de H_α sur $\mathfrak{s}_\alpha$. Comme H_α est un commutateur $[e_\alpha, f]$, avec $f \in \mathfrak{s}_\alpha$, on a

$$0 = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{s}_\alpha} \mathrm{ad}_{\mathfrak{s}_\alpha}(\mathrm{H}_\alpha) = \alpha(\mathrm{H}_\alpha)\left(1 - \sum_{n \geqslant 1} n \dim \mathfrak{g}_{(-n\alpha)}\right).$$

Comme $\alpha(\mathrm{H}_\alpha) \neq 0$ et $\mathfrak{g}_{-\alpha} \neq (0)$, on en déduit que :

$$\mathfrak{g}_{(-\alpha)} = \mathfrak{g}_{-\alpha} = \mathbb{C}e_{-\alpha} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{g}_{(-n\alpha)} = (0) \quad \text{pour } n > 1.$$

Remplaçant $-\alpha$ par α, on a donc obtenu la proposition suivante.

Proposition 3.9. — *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$, $\mathfrak{g}_{(\alpha)}$ *est de dimension* 1 *et égale* $\mathfrak{g}_\alpha$ *; de plus, on a, pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ *:*

$$n\alpha \in \mathrm{R} \Leftrightarrow n = \pm 1. \tag{5}$$

Définition 3.10. — Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, on pose

$$h_\alpha = \frac{2\mathrm{H}_\alpha}{\alpha(\mathrm{H}_\alpha)}, \qquad \text{d'où} \quad [h_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha.$$

Comme K induit une dualité parfaite entre $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, il existe un unique $f_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tel que

$$[e_\alpha, f_\alpha] = h_\alpha,$$

et l'on a de plus $[h_\alpha, f_\alpha] = -2f_\alpha$. Il en résulte que la sous-algèbre

$$\mathfrak{s}_\alpha = \mathbb{C}e_\alpha \bigoplus \mathbb{C}h_\alpha \bigoplus \mathbb{C}f_\alpha$$

est isomorphe à $\mathfrak{sl}_2$, via

$$e_\alpha \leftrightarrow e, \qquad h_\alpha \leftrightarrow h, \qquad f_\alpha \leftrightarrow f,$$

où

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

***Théorème 3.11* (Théorème d'intégralité)**. — *Pour tout* $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, *on a :*

$$\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z} \qquad \textit{et} \qquad \beta - \beta(h_\alpha) \in \mathrm{R}.$$

Pour démontrer le théorème, on a besoin de certains résultats sur les $\mathfrak{sl}_2$-modules, qui se démontrent au moyen de relations de commutation dans l'algèbre enveloppante de $\mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2)$. Ceci nous conduit à faire un intermède sur l'algèbre enveloppante d'une k-algèbre de Lie arbitraire.

3.2. Algèbre enveloppante d'une k-algèbre de Lie. — Dans ce paragraphe, soit k un corps commutatif arbitraire et soit L une k-algèbre de Lie de dimension finie.

Rappelons d'abord que, pour tout k-espace vectoriel V, son *algèbre tensorielle* est

$$\mathrm{T}(\mathrm{V}) = k \bigoplus \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathrm{V}^{\otimes n},$$

avec la multiplication

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) \cdot (v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_s) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_s.$$

On a une inclusion naturelle $\mathrm{V} \hookrightarrow \mathrm{T}(\mathrm{V})$, et $\mathrm{T}(\mathrm{L})$ est engendrée comme k-algèbre par L.

Définition 3.12. — L'**algèbre enveloppante** U(L) de L est le quotient de l'algèbre tensorielle T(L) par l'idéal bilatère I engendré par tous les éléments

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y], \qquad \text{pour} \quad x, y \in \mathrm{L}.$$

Soit π la projection $\mathrm{T(L)} \to \mathrm{U(L)}$ et τ la composée de π avec l'inclusion $\mathrm{L} \hookrightarrow \mathrm{T(L)}$.

Notons que U(L) est engendrée comme k-algèbre par $\tau(\mathrm{L})$.

Théorème 3.13 **(Propriété universelle de U(L))**. — *Pour toute k-algèbre associative* A *et toute application k-linéaire $\rho : \mathrm{L} \to \mathrm{A}$ telle que*

$$(\dagger) \qquad \rho([x, y]) = \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x), \qquad \forall\, x, y \in \mathrm{L},$$

il existe un unique morphisme de k-algèbres associatives

$$\phi : \mathrm{U(L)} \longrightarrow \mathrm{A}, \qquad \textit{tel que} \ \ \phi(\tau(x)) = \rho(x), \quad \forall\, x \in \mathrm{L}.$$

Démonstration. — D'abord, comme U(L) est engendrée comme k-algèbre par $\tau(\mathrm{L})$, alors ϕ, s'il existe, est uniquement déterminé par la condition ci-dessus.

Montrons l'existence. D'après la propriété universelle de T(L), il existe un (unique) morphisme de k-algèbres

$$\psi : \mathrm{T(L)} \longrightarrow \mathrm{A} \qquad \text{tel que} \ \ \psi(x) = \rho(x), \quad \forall\, x \in \mathrm{L}.$$

Alors, la condition (†) implique précisément que ψ est nulle sur l'idéal bilatère I, donc ψ se factorise en un morphisme de k-algèbres

$$\phi : \mathrm{U(L)} \longrightarrow \mathrm{A}, \qquad \text{tel que} \ \ \phi(\tau(x)) = \rho(x), \quad \forall\, x \in \mathrm{L}.$$

Le théorème est démontré. □

Soit V un k-espace vectoriel. Appliquant le théorème à la k-algèbre $\mathrm{A} = \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.14. — *Se donner une représentation ρ de* L *dans* V *équivaut à se donner une structure de* U(L)*-module sur* V. *Par conséquent :*

« un L*-module est la même chose qu'un* U(L)*-module ».*

Ce qui précède est rendu particulièrement intéressant par le théorème suivant, qui montre que l'algèbre U(L), bien que non commutative (sauf si L est abélienne), est un objet assez maniable. (De façon informelle, on peut dire que c'est une « algèbre de polynômes non commutative ».)

Théorème 3.15 **(Poincaré-Birkhoff-Witt)**. — *Soit* $(x_1, \ldots, x_r)$ *une base de* L *sur* k. *Alors les monômes « ordonnés » :*

$$x_1^{\nu_1} \cdots x_r^{\nu_r} \quad \textit{(pris dans cet ordre)} \quad \textit{pour } (\nu_1, \ldots, \nu_r) \in \mathbb{N}^r,$$

forment une base de U(L) *sur* k. *En particulier, si l'on a des sous-algèbres de Lie* $\mathfrak{n}^+, \mathfrak{h}, \mathfrak{n}^-$ *de* L *telles que*

$$\mathrm{L} = \mathfrak{n}^- \bigoplus \mathfrak{h} \bigoplus \mathfrak{n}^+ \qquad \textit{comme espaces vectoriels,}$$

alors

$$\mathrm{U(L)} \cong \mathrm{U}(\mathfrak{n}^-) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{h}) \otimes \mathrm{U}(\mathfrak{n}^+) \qquad \textit{comme espaces vectoriels.}$$

Démonstration. — Pour la démonstration (qui n'est pas très intéressante), on renvoie à [**BL1**, § 2.7] ou [**Di74**, 2.1.11]. □

Notation 3.16. — En particulier, l'application $\tau : \mathrm{L} \to \mathrm{U(L)}$ est injective. Désormais, on ne mentionnera plus τ et l'on identifiera L à son image dans U(L).

Lemme 3.17. — *Soit* A *un anneau. Pour tout* $a \in \mathrm{A}$, *l'endomorphisme*

$$\operatorname{ad} a : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}, \qquad b \mapsto [a, b] = ab - ba,$$

est une dérivation de A, *c.-à-d., vérifie :*

$$(\operatorname{ad} a)(b_1 \cdots b_n) = \sum_{i=1}^{n} b_1 \cdots b_{i-1}[a, b_i]b_{i+1} \cdots b_n, \qquad \forall\, b_1, \ldots, b_n \in \mathrm{A}.$$

Démonstration. — Immédiat, par récurrence sur n. □

3.3. Représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. — Revenons au cas où le corps de base est $\mathbb{C}$, et notons simplement $\mathfrak{sl}_2 = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Soit (f, h, e) la base standard de $\mathfrak{sl}_2$ (cf. $(*)$ avant 3.11). Dans $\mathrm{U} = \mathrm{U}(\mathfrak{sl}_2)$, on a les relations de commutation suivantes :

$$[h, e^n] = \sum_{i=1}^{n} e^{i-1}[h, e]e^{n-i} = 2ne^n, \tag{1}$$

$$[h, f^n] = \sum_{i=1}^{n} f^{i-1}[h, f]f^{n-i} = -2nf^n, \tag{2}$$

$$[e, f^n] = \sum_{i=1}^{n} f^{i-1}hf^{n-i} = \sum_{i=1}^{n} f^{i-1}f^{n-i}(h - 2(n-i)) = nf^{n-1}(h - n + 1). \tag{3}$$

Remarque 3.18. — Posant $e^{(r)} = e^r/r!$, $f^{(s)} = f^s/s!$ et

$$\binom{h}{t} = \frac{h(h-1)\cdots(h-t+1)}{t!},$$

on peut montrer, plus généralement, que

$$e^{(r)}f^{(s)} = \sum_{i=0}^{\min(r,s)} f^{(s-i)}\binom{h - r - s + 2i}{i}e^{(r-i)},$$

voir par exemple [**Hu**, § 26].

Lemme 3.19. — *Soient* V *un* $\mathfrak{sl}_2$*-module de dimension finie,* $v \in \mathrm{V}$ *un vecteur non nul, et* $\lambda \in \mathbb{C}$*, tels que*

$$(*) \qquad hv = \lambda v \qquad \textit{et} \qquad ev = 0.$$

Alors λ *est un entier* $m \geqslant 0$ *et, pour* $i = 0, \dots, m$*, chaque* $f^i v$ *est non nul et de poids* $m - 2i$*, c.-à-d.,*

$$hf^i v = (m - 2i) f^i v, \qquad \forall\, i = 0, \dots, m.$$

Démonstration. — D'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, l'algèbre enveloppante U de $\mathfrak{sl}_2$ a pour base sur $\mathbb{C}$ les monômes

$$f^s h^t e^r, \qquad \text{pour } \ s, t, r \in \mathbb{N}.$$

Il résulte de $(*)$ que le sous-U-module de V engendré par v est engendré, comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel, par les

$$f^s v, \qquad \text{pour } \ s \in \mathbb{N}.$$

De plus, comme chaque $f^s v$ est vecteur propre de h de poids $\lambda - 2s$, les $f^s v$ non nuls sont linéairement indépendants.

Comme $\dim \mathrm{V} < \infty$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^m v \neq 0 = f^{m+1} v$. Alors,

$$0 = ef^{m+1} v = f^m (h - m) v = (\lambda - m) f^m v,$$

d'où $\lambda = m$. Bien sûr, $f^i v \neq 0$ pour $i = 0, \dots, m$, et on a déjà vu que chaque $f^i v$ est de poids $m - 2i$. Le lemme est démontré. □

3.4. Retour à la preuve du théorème d'intégralité. — On peut maintenant démontrer le théorème 3.11. Reprenons les notations du paragraphe 3.1.

Soit $\beta \in \mathrm{R}$. Si $\beta = \pm\alpha$ le théorème est vérifié ; donc, d'après 3.9 (5), on peut supposer que $\beta \notin \mathbb{Z}\alpha$. Pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$(\operatorname{ad} e_\alpha)^n (e_\beta) \subseteq \mathfrak{g}_{\beta + n\alpha}.$$

Soit n le plus petit entier $\geqslant 0$ tel que

$$(\operatorname{ad} e_\alpha)^{n+1} (e_\beta) = 0, \qquad \text{et posons } \ x = (\operatorname{ad} e_\alpha)^n (e_\beta).$$

Alors x est un vecteur de poids $\beta + n\alpha$, annulé par e_α. D'après le lemme 3.19, ceci entraîne que

$$(\beta + n\alpha)(h_\alpha) = \beta(h_\alpha) + 2n \ \text{ est un entier } \ m \geqslant 0,$$

d'où $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$. Alors, quitte à changer α en $-\alpha$, on peut supposer que $\beta(h_\alpha) = r \geqslant 0$. Alors, $m = r + 2n$ et, d'après le lemme 3.19, le sous-U($\mathfrak{s}_\alpha$)-module de $\mathfrak{g}$ engendré par x a pour base sur $\mathbb{C}$ les vecteurs :

$$f_\alpha^i x, \qquad \text{de poids } \beta + (n - i)\alpha, \ \text{ pour } i = 0, \dots, m.$$

Prenant $i = r + n$, on obtient que

$$\beta - r\alpha = \beta - \beta(h_\alpha)\alpha$$

est un poids de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Comme $\beta \notin \mathbb{Z}\alpha$, par hypothèse, ce poids est $\neq 0$, donc est un élément de R. Le théorème est démontré. □

Corollaire 3.20. — *Soient $\alpha \in \mathrm{R}$ et $t \in \mathbb{C}$ tels que $t\alpha \in \mathrm{R}$. Alors $t = \pm 1$.*

Démonstration. — Posons $\beta = t\alpha$. Alors $t \neq 0$ et $\alpha = (1/t)\beta$. D'après le théorème,

$$\beta(h_\alpha) = 2t \in \mathbb{Z}, \qquad \text{et} \qquad \alpha(h_\beta) = \frac{2}{t} \in \mathbb{Z}.$$

Alors $t = n/2$, avec $\pm n \in \{1, 2, 4\}$. Comme $\pm 2\alpha$ et $\pm 2\beta$ ne sont pas des racines, d'après 3.9 (5), alors $\pm n = 4$ et $\pm n = 1$ sont exclus. Donc $n = \pm 2$ et $t = \pm 1$. □

3.5. Passage à un $\mathbb{R}$-espace euclidien. — On a vu que R engendre $\mathfrak{h}^*$, par conséquent $\mathfrak{h}$ est engendré par les H_α, et donc aussi par les h_α, puisque chaque h_α est un multiple non nul de H_α. Posons $\ell = \dim \mathfrak{h}^* = \dim \mathfrak{h}$.

Définition 3.21. — On note $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ le sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathfrak{h}$ engendré par les h_α, pour $\alpha \in \mathrm{R}$. D'après ce qui précède, il est de dimension ℓ.

Alors, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel dual de $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ est

$$\mathfrak{h}_\mathbb{R}^* = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(\mathfrak{h}_\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}.\}$$

(Prendre une base (e_i) de $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$, c'est une $\mathbb{C}$-base de $\mathfrak{h}$ et la base duale (e_i^*) est une $\mathbb{R}$-base de $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$.)

Comme $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ contient R (puisque $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$), alors R engendre $\mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Notons $\mathrm{K}_\mathbb{R}$ la restriction de K à $\mathfrak{h}_\mathbb{R}$.

Proposition 3.22. — 1) *$\mathrm{K}_\mathbb{R}$ est à valeurs réelles et est définie positive.*

2) *$\mathrm{K}_\mathbb{R}$ induit un isomorphisme $\mathfrak{h}_\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}_\mathbb{R}^*$.*

3) *Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, on a $\mathrm{H}_\alpha \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$.*

Démonstration. — 1) Si $h \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$, alors $h = \sum_\alpha x_\alpha h_\alpha$, avec $x_\alpha \in \mathbb{R}$, d'où

$$\forall\, \beta \in \mathrm{R}, \qquad \beta(h) = \sum_\alpha x_\alpha \beta(h_\alpha) \in \mathbb{R}.$$

Donc, pour $h, h' \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$, on a, d'après (3) (avant 3.4) :

$$\mathrm{K}(h, h') = \sum_{\beta \in \mathrm{R}} \beta(h)\beta(h') \in \mathbb{R}.$$

De plus, d'après 3.4, on a $\mathrm{K}(h, h) > 0$ si $h \neq 0$. Ceci prouve 1), et 2) en découle.

On déduit 3) de 2), comme suit : $K_{\mathbb{R}}$ induit un isomorphisme

$$K_{\mathbb{R}}^{\#} : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{*},$$

qui est la restriction de $K^{\#} : \mathfrak{h} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^{*}$. Comme $\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{*}$, alors

$$H_{\alpha} = (K_{\mathbb{R}}^{\#})^{-1}(\alpha) \in \mathfrak{h}.$$

La proposition est démontrée. $\square$

3.6. Le système de racines $R \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{*}$**.** — On munit $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{*}$ du produit scalaire euclidien $(\ ,\ )$ obtenu via l'isomorphisme $K_{\mathbb{R}}^{\#} : \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{*}$. C.-à-d., si on pose $H_{\lambda} = (K_{\mathbb{R}}^{\#})^{-1}(\lambda)$ alors :

$$(\lambda, \mu) = K_{\mathbb{R}}(H_{\lambda}, H_{\mu}) = \lambda(H_{\mu}) = \mu(H_{\lambda}), \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{*}. \tag{1}$$

Pour tout $\alpha \in R$, la **réflexion orthogonale** associée, c.-à-d., la réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan $\mathscr{H}_{\alpha}$ orthogonal à α, est donnée par la formule

$$\lambda \mapsto \lambda - \frac{2(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\, \alpha;$$

en effet, si on note s_{α} l'endomorphisme défini par cette formule, on a $s_{\alpha}(\lambda) = \lambda$ pour $\lambda \in \mathscr{H}_{\alpha}$, et $s_{\alpha}(\alpha) = -\alpha$; donc s_{α} est bien la réflexion orthogonale par rapport à $\mathscr{H}_{\alpha}$. On a, bien sûr, $s_{\alpha}^{2} = \mathrm{id}$; en particulier s_{α} est bijectif.

Il est commode de poser $\alpha^{\vee} = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$; alors la formule ci-dessus se récrit :

$$s_{\alpha}(\lambda) = \lambda - (\lambda, \alpha^{\vee})\alpha. \tag{2}$$

Observons aussi que $\alpha^{\vee} = K_{\mathbb{R}}(h_{\alpha})$, c.-à-d.,

$$\forall\, \lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{*}, \qquad (\lambda, \alpha^{\vee}) = \lambda(h_{\alpha}). \tag{3}$$

En particulier, d'après le théorème d'intégralité 3.11, pour tout $\beta \in R$, on a

$$(\beta, \alpha^{\vee}) \in \mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad s_{\alpha}(\beta) = \beta - \beta(h_{\alpha})\alpha \in R. \tag{4}$$

Par conséquent, tenant compte du corollaire 3.20, on obtient que R vérifie les quatre propriétés de la définition ci-dessous ; par conséquent, R est un **système de racines** dans $V = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{*}$.

Définition 3.23. — Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire euclidien $(\ ,\ )$. On dit qu'un sous-ensemble fini R de V est un **système de racines** dans V s'il vérifie les quatres axiomes suivants :

(R1) R ne contient pas 0 et engendre V ;

(R2) Pour tout $\alpha \in R$, la réflexion orthogonale associée, définie par

$$s_{\alpha}(\lambda) = \lambda - (\lambda, \alpha^{\vee})\alpha, \qquad \text{où } \alpha^{\vee} = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)},$$

vérifie $s_{\alpha}(R) = R$;

(R3) Pour tout $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, on a $(\beta, \alpha^\vee) \in \mathbb{Z}$.

(R4) Soient $\alpha \in \mathrm{R}$ et $t \in \mathbb{R}$. Si $t\alpha \in \mathrm{R}$, alors $t = \pm 1$.

Notation 3.24. — Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, on appelle $\alpha^\vee$ la **coracine** associée à α.

Dans la section suivante, on va montrer que l'on peut classifier tous les systèmes de racines, d'une façon simple et élémentaire, et que le résultat obtenu (diagrammes de Dynkin, matrices de Cartan) est très joli. On terminera le cours en expliquant que la matrice de Cartan détermine la $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{g}$ dont on est parti.

TABLE DES MATIÈRES

Séance du 18/9 1
1. Groupes topologiques 1
2. Interlude sur les représentations de groupes finis 3
3. Mesure de Haar sur un groupe compact 5
3.1. Représentations régulières gauche et droite 5
3.2. Intégration invariante 6
3.3. Théorème du point fixe de Kakutani 6

Séance du 19/9 9
3. Mesure de Haar sur un groupe compact (suite) 9
3.4. Mesures de Radon 11
3.5. Mesure de Haar sur un groupe compact 12
4. Représentations unitaires et théorème de Peter-Weyl 16
4.1. Représentations continues 16
4.2. Représentations unitaires 17
4.3. Opérateurs compacts 18
4.4. Opérateurs à noyaux 19

Séance du 25/9 21
5. L'algèbre des « fonctions représentatives » 21
5.1. Coefficients matriciels 21
5.2. Fonctions représentatives 23
5.3. Cas des groupes compacts 24
5.4. Schur, Burnside et produits tensoriels 25
5.5. Résultats sur les modules semi-simples 26
5.6. Appendice : preuve du théorème de Burnside 28
4. Théorème de Peter-Weyl (suite) 29
4.4. Opérateurs à noyaux 29

Séance du 26/9 35
4.5. Une conséquence du théorème de Peter-Weyl 35
6. Sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$ 36
6.1. Algèbres de Lie 36
6.2. Propriétés de l'exponentielle 36
6.3. L'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$ 39
6.4. Composante connexe d'un groupe topologique 40
7. Groupes de Lie 42
7.1. Variétés différentiables 42

Séance du 2 octobre 45
7. Groupes de Lie (suite) 45
7.1. Variétés différentiables (suite) 45
7.2. « Rappels » de calcul différentiel 47
7.3. Espace tangent en un point à une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ 50
7.4. Sous-variétés définies par des équations de rang constant 52

Séance du 3 octobre 55
7. Groupes de Lie (suite) 55
7.5. Dérivations et champs de vecteurs 55
7.6. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie 63
7.7. Retour aux sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$ 65
7.8. Morphismes de groupes et d'algèbres de Lie 69
7.9. Représentations 73

Partie II : Algèbres de Lie
Séances du 9 et 10 octobre 75
1. Algèbres de Lie : définitions et premières propriétés 75
1.1. Algèbres de Lie, idéaux, modules 75
1.2. Algèbres de Lie résolubles ou nilpotentes 80
1.3. Formes invariantes et forme de Killing 82
1.4. Théorème d'Engel et applications 85
2. Théorème de Lie et critère de Cartan 87
2.1. Théorème de Lie et conséquences 87
2.2. Poids des algèbres de Lie nilpotentes 90
2.3. Sous-algèbres de Cartan 93
2.4. Critère de Cartan 97

Partie II : Algèbres de Lie
Séances du 16 et 17 octobre 99
3. Racines d'une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie semi-simple 99
3.1. Racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ 99
3.2. Algèbre enveloppante d'une k-algèbre de Lie 102

3.3. Représentations de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ 104
3.4. Retour à la preuve du théorème d'intégralité 105
3.5. Passage à un $\mathbb{R}$-espace euclidien 106
3.6. Le système de racines $\mathrm{R} \subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ 107
Bibliographie i

Bibliographie

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.

[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap.1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.

[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[GH] M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.

[He] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.