PARTIE II : ALGÈBRES DE LIE
SÉANCES DU 9 ET 10 OCTOBRE

1. Algèbres de Lie : définitions et premières propriétés

Dans cette section, soit k un corps arbitraire.

1.1. Algèbres de Lie, idéaux, modules. —

Définition 1.1. — Une **k-algèbre de Lie** est un k-espace vectoriel L muni d'un crochet de Lie $[-,-]$, c.-à-d., une application k-bilinéaire

$$[-,-] : \mathrm{L}\times\mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{L}, \qquad (x,y)\mapsto [x,y],$$

telle que :

(i) $[-,-]$ est *alterné*, c.-à-d., $[x,x]=0$ pour tout $x\in\mathrm{V}$. Ceci entraîne que $[y,x]=-[x,y]$, c.-à-d., $[-,-]$ est *antisymétrique.* (Bien sûr, les deux propriétés sont équivalentes si $\mathrm{car}(k)\neq 2$.)

(ii) $[-,-]$ vérifie l'identité de Jacobi :

$$[[a,b],c]+[[b,c],a]+[[c,a],b]=0. \tag{J}$$

Une **sous-algèbre de Lie** de L est un sous-espace vectoriel E qui est stable par le crochet, c.-à-d., $[\mathrm{E},\mathrm{E}]\subseteq\mathrm{E}$, c.-à-d., $[x,y]\in\mathrm{E}$ pour tout $x,y\in\mathrm{E}$.

Un **idéal** de L est un sous-espace vectoriel I tel que $[\mathrm{L},\mathrm{I}]\subseteq\mathrm{I}$, c.-à-d., $[x,y]\in\mathrm{I}$ pour tout $y\in\mathrm{I}$ et $x\in\mathrm{L}$. Dans ce cas, l'espace vectoriel quotient $\mathfrak{g}/\mathrm{I}$ est muni d'une structure d'algèbre de Lie, définie par

$$[x+\mathrm{I},y+\mathrm{I}]=[x,y]+\mathrm{I}.$$

Exemples 1.2. — 1) Soit A une k-algèbre associative. Alors A est une algèbre de Lie pour le crochet $[a,b]=ab-ba$. Si I est un idéal de l'algèbre associative A, c'est a fortiori un *idéal de Lie*, c.-à-d., un idéal de A comme algèbre de Lie.

[(0)]version corrigée du 23/10/06

2) En particulier, $\mathrm{M}_n(k)$ est une algèbre de Lie ; on la note $\mathfrak{gl}_n(k)$. On note

$$\mathfrak{sl}_n(k) = \{\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(k) \mid \mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 0\}.$$

Ce n'est pas un idéal de $\mathrm{M}_n(k)$ comme algèbre associative, mais c'est un idéal de Lie de $\mathfrak{gl}_n(k)$. En effet, pour tout $\mathrm{B}, \mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(k)$, on a

$$\mathrm{tr}([\mathrm{B}, \mathrm{A}]) = \mathrm{tr}(\mathrm{BA} - \mathrm{BA}) = 0, \quad \text{donc} \quad [\mathrm{B}, \mathrm{A}] \in \mathfrak{sl}_n(k).$$

Ceci montre que $[\mathfrak{gl}_n(k), \mathfrak{gl}_n(k)] \subseteq \mathfrak{sl}_n(k)$, donc a fortiori $\mathfrak{sl}_n(k)$ est un idéal de $\mathfrak{gl}_n(k)$. Cet exemple conduit à introduire la notation et définition suivantes.

Notation 1.3. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et soient U, V deux sous-espaces de $\mathfrak{g}$. On note $[\mathrm{U}, \mathrm{V}]$ le sous-espace vectoriel engendré par les crochets $[u, v]$, pour $u \in \mathrm{U}$ et $v \in \mathrm{V}$. C'est donc l'ensemble des sommes finies $[u_1, v_1] + \cdots + [u_n, v_n]$.

Définition 1.4. — On pose $\mathscr{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. C'est clairement un idéal de $\mathfrak{g}$. On l'appelle l'idéal dérivé (ou la **sous-algèbre dérivée**) de $\mathfrak{g}$.

Exemple 1.5. — L'exemple précédent montre que $\mathscr{D}(\mathfrak{gl}_n(k)) \subseteq \mathfrak{sl}_n(k)$. Réciproquement, on voit que les matrices

$$(*) \qquad \mathrm{E}_{i,j}, \text{ pour } i \neq j, \quad \text{et} \quad \mathrm{E}_{i,i} - \mathrm{E}_{i+1,i+1}, \text{ pour } i = 1, \ldots, n-1,$$

forment une base de $\mathfrak{sl}_n(k)$, et l'on a, pour $i \neq j$,

$$(**) \qquad \mathrm{E}_{i,j} = [\mathrm{E}_{i,i}, \mathrm{E}_{i,j}], \qquad \mathrm{E}_{i,i} - \mathrm{E}_{j,j} = [\mathrm{E}_{i,j}, \mathrm{E}_{j,i}].$$

Donc, tous les éléments de la base $(*)$ sont des crochets. Ceci montre que $\mathfrak{sl}_n(k) = \mathscr{D}(\mathfrak{gl}_n(k))$.

Définition 1.6. — Soient $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ deux k-algèbres de Lie. Un **morphisme** d'algèbres de Lie est une application k-linéaire $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ qui préserve le crochet, c.-à-d., telle que

$$\phi([\mathrm{X}, \mathrm{Y}]) = [\phi(\mathrm{X}), \phi(\mathrm{Y})].$$

Il est clair, alors, que $\mathrm{Ker}\,\phi$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. D'autre part, $\mathrm{Im}(\phi) = \phi(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}'$, et l'on a un isomorphisme d'algèbres de Lie :

$$\frac{\mathfrak{g}}{\mathrm{Ker}\,\phi} \xrightarrow{\sim} \phi(\mathfrak{g}).$$

Définition 1.7. — Une **représentation** de $\mathfrak{g}$ dans un k-espace vectoriel V est la donnée d'un morphisme d'algèbres de Lie

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}_k(\mathrm{V}).$$

D'après la définition du crochet de Lie sur $\mathrm{End}_k(\mathrm{V})$, ceci équivaut à dire que ρ est une application k-linéaire $\mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$ telle que

$$\rho([x, y]) = \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x).$$

Ceci conduit à la définition de la notion équivalente de **$\mathfrak{g}$-module** : on dit que V est un **$\mathfrak{g}$-module** si l'on s'est donné une application k-bilinéaire $\mathfrak{g} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}$, $(x, v) \mapsto x \cdot v$, vérifiant

$$[x, y] \cdot v = x \cdot y \cdot v - y \cdot x \cdot v, \qquad \forall\, x, y \in \mathfrak{g},\ v \in \mathrm{V}.$$

On a une notion évidente de **sous-module** et de **module quotient** : si E est un sous-$\mathfrak{g}$-module de V, alors l'espace vectoriel quotient V/E est muni d'une structure de $\mathfrak{g}$-module, définie par $x \cdot (v + \mathrm{E}) = (x \cdot v) + \mathrm{E}$.

Définition 1.8. — Soient V, V' des $\mathfrak{g}$-modules. Une application linéaire $\phi : \mathrm{V} \to \mathrm{V}'$ est un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules, ou simplement un **$\mathfrak{g}$-morphisme**, si pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $v \in \mathrm{V}$, l'on a

$$x \cdot \phi(v) = \phi(x \cdot v).$$

On note $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{V}, \mathrm{V}')$ l'ensemble de ces morphismes.

***Proposition 1.9* (Représentation adjointe)**. — *On note* ad *l'application linéaire* $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *définie par*

$$(\mathrm{ad}\, x)(y) = [x, y], \qquad \forall\, x, y \in \mathfrak{g}.$$

C'est un morphisme d'algèbres de Lie, de sorte qu'on obtient une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$, appelée la représentation adjointe. Un sous-$\mathfrak{g}$-module de $\mathfrak{g}$ n'est autre qu'un idéal de $\mathfrak{g}$.

Le noyau de ad *est le* **centre de $\mathfrak{g}$**, *noté $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$:*

$$\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \forall\, y \in \mathfrak{g},\ [x, y] = 0\} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}),$$

et l'on a un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{ad}\,\mathfrak{g},$$

où $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ *est la sous-algèbre de* $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *image de* ad.

Démonstration. — Montrons que ad est bien une représentation, c.-à-d., que

$$\mathrm{ad}[x, y] = \mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y) - \mathrm{ad}(y) \circ \mathrm{ad}(x).$$

Ceci résulte résulte de l'identité de Jacobi (et lui est en fait équivalent), car pour tout $z \in \mathfrak{g}$ on a :

$$\begin{aligned}&(\mathrm{ad}[x, y] - \mathrm{ad}(x) \circ \mathrm{ad}(y) + \mathrm{ad}(y) \circ \mathrm{ad}(x))\,(z) = \\ &\qquad [[x, y], z] - [x, [y, z]] + [y, [x, z]] = [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0.\end{aligned}$$

Le reste de la proposition est clair. □

***Définition 1.10* (Dérivations et idéaux caractéristiques)**. — Une **dérivation** de $\mathfrak{g}$ est un endomorphisme k-linéaire $\mathrm{D} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ tel que

$$\mathrm{D}([x, y]) = [\mathrm{D}(x), y] + [x, \mathrm{D}(y)], \qquad \forall\, x, y \in \mathfrak{g}.$$

D'après l'identité de Jacobi, chaque endomorphisme $\mathrm{ad}(z)$ est une dérivation de $\mathfrak{g}$.

Un **idéal caractéristique** de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace stable par toute dérivation de $\mathfrak{g}$. Par exemple, l'idéal dérivé $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$ et le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ sont des idéaux caractéristiques de $\mathfrak{g}$.

***Définition 1.11* (Sous-module des invariants).** — Soit M un $\mathfrak{g}$-module. On pose

$$\mathrm{M}^{\mathfrak{g}} = \{m \in \mathrm{M} \mid \forall\, x \in \mathfrak{g},\ xm = 0\}.$$

C'est le plus grand sous-module de M sur lequel $\mathfrak{g}$ agit trivialement ; on l'appelle le sous-module des invariants.

***Exemple 1.12*.** — $\mathfrak{g}^{\mathfrak{g}}$ est le **centre** de $\mathfrak{g}$, noté $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. On a déjà vu que $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$.

***Définition 1.13* (Restriction des scalaires).** — Soit $\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ un morphisme d'algèbres de Lie et soit V un $\mathfrak{g}$-module. Alors V est, par « restriction à $\mathfrak{h}$ », un $\mathfrak{h}$-module via ϕ :

$$x \cdot v = \phi(x) \cdot v, \qquad \forall\, x \in \mathfrak{h},\ v \in \mathrm{V}.$$

Si l'on introduit $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$, alors la structure de $\mathfrak{h}$-module correspond à $\rho \circ \phi$.

***Remarque 1.14*.** — Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Alors, par restriction, $\mathfrak{g}$ est un $\mathfrak{h}$-module, et $\mathfrak{h}$ en est un sous-module. Par conséquent, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est un $\mathfrak{h}$-module.

***Définition 1.15*.** — Soient $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}'$ deux k-algèbres de Lie. Alors l'espace vectoriel $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$ est une algèbre de Lie, pour le crochet défini par

$$\big[(x, x'), (y, y')\big] = \big([x, x'], [y, y']\big).$$

La vérification, facile, est laissée au lecteur. Si ϕ et ϕ' sont des représentations de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ dans des espaces V et V$'$, alors $\mathrm{V} \otimes \mathrm{V}'$ est un $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$-module pour l'action donnée par :

$$(*) \qquad (x, x') \cdot v \otimes v' = x \cdot v \otimes v' + v \otimes x' \cdot v'.$$

Tenant compte de l'inclusion $\mathrm{End}_k(\mathrm{V}) \otimes \mathrm{End}_k(\mathrm{V}') \subseteq \mathrm{End}_k(\mathrm{V} \otimes \mathrm{V}')$, ceci signifie que le morphisme d'algèbres de Lie correspondant à $(*)$ est

$$(**) \qquad \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}' \longrightarrow \mathrm{End}_k(\mathrm{V} \otimes \mathrm{V}'), \qquad (x, x') \mapsto \phi(x) \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \phi'(x').$$

***Remarque 1.16*.** — Une « explication » des formules $(*)$ et $(**)$ est la suivante. Soient G et G$'$ deux groupes de Lie et

$$\rho : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{V}), \quad \text{resp.} \quad \rho' : \mathrm{G}' \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{V}'),$$

deux représentations C^∞ (on suppose V et V′ de dimension finie). Alors,

$$\rho \otimes \rho' : G \times G' \longrightarrow \mathrm{End}_k(V \otimes V'), \qquad (g, g') \mapsto \rho(g) \otimes \rho'(g')$$

est une représentation C^∞ de $G \times G'$. Si $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ et si $\phi = d\rho$ est la représentation dérivée de ρ, et de même pour $\mathfrak{g}'$ et ϕ', alors $\mathrm{Lie}(G \times G') = \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}'$, et la représentation dérivée de $\rho \otimes \rho'$ est :

$$d(\rho \otimes \rho') = d\rho \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes d\rho' = \phi \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \phi'.$$

Ceci explique « pourquoi » les formules $(*)$ et $(**)$ sont les bonnes.

Définition 1.17 **(Module dual)**. — Soit V un $\mathfrak{g}$-module. L'espace dual V^* est un $\mathfrak{g}$-module, pour l'action définie comme suit. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, $\phi \in V^*$, $v \in V$,

$$(x \cdot \phi) = -\phi(x \cdot v),$$

c.-à-d., si on note ρ la représentation dans V, alors la représentation ρ^* dans V^* est définie par

$$\rho^*(x) = -{}^t\rho(x),$$

où ^{t} désigne la transposée. On a bien

$$\begin{aligned} \rho^*([x, y]) &= -{}^t(\rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x)) \\ &= -({}^t\rho(y){}^t\rho(x) - {}^t\rho(x){}^t\rho(y)) \\ &= [\rho^*(x), \rho^*(y)]. \end{aligned}$$

Définition 1.18 **(Application diagonale)**. — L'application diagonale

$$\delta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}, \qquad x \mapsto (x, x)$$

est un morphisme d'algèbres de Lie. Par conséquent, si V, W sont des $\mathfrak{g}$-modules, alors le $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$-module $V \otimes W$ est, par restriction, un $\mathfrak{g}$-module via δ. Ainsi, $V \otimes W$ est un $\mathfrak{g}$-module pour l'action :

$$x \cdot (v \otimes w) = x \cdot v \otimes w + v \otimes x \cdot w.$$

Définition 1.19 **(Modules de k-homomorphismes)**. — Soient V, V′ des $\mathfrak{g}$-modules. Alors, $\mathrm{Hom}_k(V, W)$, l'espace des applications k-linéaires $V \to W$, est un $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$-module pour l'action :

$$((x, x') \cdot \phi)(v) = x \cdot \phi(v) - \phi(x' \cdot v).$$

En particulier, c'est un $\mathfrak{g}$-module pour l'action :

$$(x \cdot \phi)(v) = x \cdot \phi(v) - \phi(x \cdot v).$$

On voit ainsi que :

$$\mathrm{Hom}_k(V, V')^{\mathfrak{g}} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V'),$$

c.-à-d., les k-morphismes $\mathfrak{g}$-invariants sont précisément les $\mathfrak{g}$-morphismes.

***Définition 1.20* (Modules semi-simples).** — Un $\mathfrak{g}$-module M est dit **simple** (ou **irréductible**) s'il est non nul et ne possède pas de sous-module autre que (0) et M. On dit que M est **semi-simple** s'il est somme directe de sous-modules simples.

***Définition 1.21* (Algèbres de Lie simples).** — Une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite **simple** si elle est **non abélienne** et simple comme $\mathfrak{g}$-module. Ceci équivaut à dire que $\mathfrak{g}$ n'a pas d'idéaux autres que (0) et $\mathfrak{g}$, et est de dimension > 1 (c.-à-d., l'algèbre de Lie abélienne de dimension 1 ne fait pas partie des algèbres de Lie simples).

En particulier, si $\mathfrak{g}$ est simple, alors $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = (0)$ et $\mathfrak{g} = \mathscr{D}(\mathfrak{g})$. Plus précisément, pour tout $x \neq 0$, on a $[\mathfrak{g}, x] \neq 0$, puisque x n'est pas central, et donc l'idéal engendré par $[\mathfrak{g}, x]$ égale $\mathfrak{g}$.

***Remarque 1.22*.** — Si $\operatorname{car}(k) = 0$, une algèbre de Lie *semi-simple* est une somme directe d'algèbres de Lie simples. La suite du cours est dirigée vers la classification, en caractéristique nulle, des algèbres de Lie simples.

Sur un corps de caractéristique arbitraire, la définition des algèbres de Lie semi-simples n'est pas celle donnée ci-dessus, mais les deux notions coïncident lorsque $\operatorname{car}(k) = 0$, voir plus loin.

Avant de nous placer, à partir de la section suivante, sur un corps k de caractéristique nulle (et algébriquement clos), introduisons encore quelques notions valables pour k arbitraire.

1.2. Algèbres de Lie résolubles ou nilpotentes. —

***Définition 1.23* (Algèbres de Lie résolubles).** — On dit que $\mathfrak{g}$ est **résoluble** s'il existe une suite finie de sous-algèbres

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_n \supset \mathfrak{g}_{n+1} = 0$$

telle que $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i+1}$, pour $i = 0, \ldots, n$. (Ceci équivaut à dire que $\mathfrak{g}_{i+1}$ est un idéal de $\mathfrak{g}_i$ et que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ est abélienne.)

***Définition 1.24* (Série dérivée).** — On définit la **série dérivée** de $\mathfrak{g}$ par : $\mathscr{D}^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, $\mathscr{D}^1(\mathfrak{g}) = \mathscr{D}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et, pour tout $i \geqslant 1$,

$$\mathscr{D}^{i+1}(\mathfrak{g}) = [\mathscr{D}^i(\mathfrak{g}), \mathscr{D}^i(\mathfrak{g})].$$

On voit facilement, par récurrence sur i, que chaque $\mathscr{D}^i(\mathfrak{g})$ est un idéal caractéristique de $\mathfrak{g}$, et que l'algèbre de Lie $\mathscr{D}^i(\mathfrak{g})/\mathscr{D}^{i+1}(\mathfrak{g})$ est abélienne.

***Proposition 1.25*.** — $\mathfrak{g}$ *est résoluble si et seulement si* $\mathscr{D}^{n+1}(\mathfrak{g}) = (0)$ *pour un certain* n.

Démonstration. — Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}_{n+1} = 0$ est une suite comme dans la définition 1.23, on voit par récurrence sur i que $\mathscr{D}^i(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}_i$, pour tout i, d'où $\mathscr{D}^{n+1}(\mathfrak{g}) = (0)$. La réciproque est évidente, en prenant $\mathfrak{g}_i = \mathscr{D}^i(\mathfrak{g})$. □

Proposition 1.26. — 1) *Si* $\mathfrak{g}$ *est résoluble, alors toute sous-algèbre et toute algèbre quotient de* $\mathfrak{g}$ *est résoluble.*

2) *Réciproquement, soit* $\mathfrak{h}$ *un idéal de* $\mathfrak{g}$. *Si* $\mathfrak{h}$ *et* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *sont résolubles, alors* $\mathfrak{g}$ *est résoluble.*

Démonstration. — Laissée au lecteur. □

Définition 1.27 **(Série centrale descendante)**. — On définit la **série centrale descendante** de $\mathfrak{g}$ par : $\mathscr{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, $\mathscr{C}^2(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et, pour tout $i \geqslant 2$,

$$\mathscr{C}^{i+1}(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathscr{C}^i(\mathfrak{g})].$$

On voit facilement, par récurrence sur i, que chaque $\mathscr{C}^i(\mathfrak{g})$ est un idéal caractéristique de $\mathfrak{g}$, et que $\mathscr{C}^i(\mathfrak{g})/\mathscr{C}^{i+1}(\mathfrak{g})$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}/\mathscr{C}^{i+1}(\mathfrak{g})$.

Remarque 1.28. — La notation $\mathscr{C}^1(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, $\mathscr{C}^2(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, etc. est choisie de façon à ce que l'on ait, pour tout $i, j \geqslant 1$:

$$\big[\mathscr{C}^i(\mathfrak{g}), \mathscr{C}^j(\mathfrak{g})\big] \subseteq \mathscr{C}^{i+j}(\mathfrak{g}).$$

Définition 1.29 **(Algèbres de Lie nilpotentes)**. — On dit que $\mathfrak{g}$ est **nilpotente** s'il existe n tel que $\mathscr{C}^n(\mathfrak{g}) = (0)$.

Il est clair que : abélienne $\Rightarrow$ nilpotente $\Rightarrow$ résoluble.

Les implications réciproques sont, bien entendu, fausses, comme le montrent les exemples suivants.

Exemples 1.30. — 1) L'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{g}_3$ est l'algèbre de Lie de dimension 3 de base (x, y, z), avec $[x, y] = z$ et z central. On peut la réaliser comme la sous-algèbre de Lie de $\mathrm{M}_3(k)$ de base $\mathrm{E}_{1,2}$, $\mathrm{E}_{2,3}$ et $\mathrm{E}_{1,3}$. Elle est nilpotente, non abélienne.

2) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension 2 non abélienne. Alors $\mathfrak{g}$ admet une base (x, y) telle que $[x, y] = y$, et $\mathscr{D}(\mathfrak{g}) = ky = \mathscr{C}^2(\mathfrak{g})$. On a

$$\mathscr{D}^2(\mathfrak{g}) = [ky, ky] = 0, \quad \text{mais} \quad \mathscr{C}^3(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, ky] = ky,$$

et donc $\mathscr{C}^n(\mathfrak{g}) = ky$ pour tout $n \geqslant 2$. Donc $\mathfrak{g}$ est résoluble mais pas nilpotente.

1.3. Formes invariantes et forme de Killing. —

***Définition 1.31* (Formes invariantes).** — Soit $\phi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$ une forme bilinéaire symétrique. On dit que ϕ est **$\mathfrak{g}$-invariante** si elle vérifie la propriété suivante :

$$\phi([x,y],z) + \phi(y,[x,z]) = 0, \qquad \forall\, x,y,z \in \mathfrak{g}.$$

Dans ce cas,

$$\operatorname{Ker}\phi := \{x \in \mathfrak{g} \mid \phi(x,y) = 0, \quad \forall\, y \in \mathfrak{g}\}$$

est un **idéal** de $\mathfrak{g}$. En effet, si $x \in \operatorname{Ker}\phi$ et $y \in \mathfrak{g}$, alors pour tout $z \in \mathfrak{g}$ on a

$$\phi([y,x],z) = -\phi(x,[y,z]) = 0, \qquad \text{d'où } [y,x] \in \operatorname{Ker}\phi.$$

***Notation 1.32*.** — Pour la suite, on convient que « forme invariante » signifie « forme bilinéaire symétrique invariante ».

***Proposition 1.33*.** — *Soit ϕ une forme invariante sur $\mathfrak{g}$ et soit I un idéal de $\mathfrak{g}$.*

1) *L'orthogonal $\mathrm{I}^\perp$ de I relativement à ϕ est un idéal de $\mathfrak{g}$.*
2) *Si ϕ est non dégénérée, alors $\mathrm{I} \cap \mathrm{I}^\perp$ est un idéal abélien.*

Démonstration. — 1) Soient $y \in \mathrm{I}^\perp$ et $z \in \mathfrak{g}$. Puisque ϕ est invariante et que I est un idéal, on a, pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$\phi([y,z],x) = \phi(y,[z,x]) = 0.$$

Donc $[y,z] \in \mathrm{I}^\perp$. Ceci montre que $\mathrm{I}^\perp$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

2) Posons $\mathfrak{a} = \mathrm{I} \cap \mathrm{I}^\perp$, et soient $x,y \in \mathfrak{a}$. Pour tout $z \in \mathfrak{g}$, on a

$$\phi([x,y],z) = \phi(x,[y,z]) = 0, \quad \text{car} \quad x \in \mathrm{I},\ [y,z] \in \mathrm{I}^\perp.$$

Ceci montre que $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}] \subseteq \operatorname{Ker}\phi$. En particulier, si ϕ est non dégénérée, $\mathfrak{a}$ est abélien. □

***Définition 1.34* (Forme invariante associée à une représentation)**

Soit $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathrm{V})$ une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$. On lui associe la forme bilinéaire symétrique K_ρ définie par

$$\mathrm{K}_\rho(x,y) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{V}}(\rho(x)\rho(y)) = \mathrm{K}_\rho(y,x).$$

Elle est invariante, car

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_\rho([x,y],z) &= \mathrm{Tr}_{\mathrm{V}}(\rho([x,y])\rho(z)) \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathrm{V}}(\rho(x)\rho(y)\rho(z)) - \mathrm{Tr}_{\mathrm{V}}(\rho(y)\rho(x)\rho(z)) \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathrm{V}}(\rho(y)\rho(z)\rho(x)) - \mathrm{Tr}_{\mathrm{V}}(\rho(y)\rho(x)\rho(z)) \\
&= \mathrm{Tr}_{\mathrm{V}}(\rho(y)\rho([z,x]) = -\mathrm{K}_\rho(y,[x,z]).
\end{aligned}$$

Désormais, on suppose que $\mathfrak{g}$ est de dimension finie.

Définition 1.35 **(Forme de Killing)**. — La forme de Killing, notée $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ ou simplement K, est la forme invariante associée à la représentation adjointe, c.-à-d.,

$$\mathrm{K}(x,y) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)).$$

Elle joue un rôle fondamental dans la théorie des algèbres de Lie. Pour commencer, on a la proposition suivante.

Proposition 1.36. — *Soit* I *un idéal de* $\mathfrak{g}$.

1) *Soit* K_{I} *la forme de Killing de* I. *Alors* K_{I} *est la restriction à* $\mathrm{I}\times\mathrm{I}$ *de* $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$.
2) *Si* I *est abélien, alors* $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$.
3) *Si* $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ *est non dégénérée,* $\mathfrak{g}$ *ne contient pas d'idéal résoluble* $\neq 0$.

Démonstration. — Soit V un sous-espace supplémentaire de I dans $\mathfrak{g}$, et soit $\mathscr{B}$ une base de $\mathfrak{g}$ adaptée à la décomposition $\mathfrak{g} = \mathrm{I} \oplus \mathrm{V}$. Comme I est un idéal, alors pour tout $x \in \mathrm{I}$, resp. $y \in \mathfrak{g}$, la matrice dans $\mathscr{B}$ de $\mathrm{ad}(x)$, resp. $\mathrm{ad}(y)$, est de la forme suivante

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \begin{pmatrix} \mathrm{B} & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

où A, resp. B, est la matrice de la restriction $\mathrm{ad}(x)|_{\mathrm{I}}$, resp. $\mathrm{ad}(y)|_{\mathrm{I}}$. Alors,

$$\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y) = \begin{pmatrix} \mathrm{AB} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(x,y) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{I}}(\mathrm{ad}(x)|_{\mathrm{I}}\ \mathrm{ad}(y)|_{\mathrm{I}}).$$

En particulier, si $x, y \in \mathrm{I}$ alors $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(x,y) = \mathrm{K}_{\mathrm{I}}(x,y)$. De plus, si I est abélien alors $\mathrm{A} = \mathrm{ad}(x)|_{\mathrm{I}} = 0$, d'où $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(x,y) = 0$ pour tout $y \in \mathfrak{g}$, et donc $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{Ker}\,\phi$. Ceci prouve les points 1) et 2).

Supposons ϕ non dégénérée. Alors, d'après ce qui précède, $\mathfrak{g}$ ne contient pas d'idéal abélien non nul. Supposons que $\mathfrak{g}$ contienne un idéal résoluble $\mathfrak{h} \neq 0$. Soit $\mathfrak{a} = \mathscr{D}^r(\mathfrak{h})$ le dernier terme non nul de la série dérivée de $\mathfrak{h}$; c'est un idéal abélien et caractéristique de $\mathfrak{h}$. En particulier, il est stable par toutes les dérivations $\mathrm{ad}(y)|_{\mathfrak{h}}$, pour $y \in \mathfrak{g}$. C'est donc un idéal de $\mathfrak{g}$, non nul et abélien, une contradiction. Cette contradiction montre que $\mathfrak{g}$ ne contient pas d'idéal résoluble non nul. La proposition est démontrée. □

Corollaire 1.37. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* k*-algèbre de Lie de dimension finie. On suppose* $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ *non-dégénérée. Alors* $\mathfrak{g}$ *est somme directe d'algèbres de Lie simples.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente, $\mathfrak{g}$ ne contient pas d'idéal abélien non nul. Soit I un idéal non nul de $\mathfrak{g}$, de dimension minimale. D'après la proposition 1.33, $\mathrm{I}\cap\mathrm{I}^{\perp}$ est un idéal abélien, donc nul. On a donc une somme directe orthogonale

$$(*)\qquad \mathfrak{g} = \mathrm{I} \overset{\perp}{\bigoplus} \mathrm{I}^{\perp}, \quad \text{et} \quad [\mathrm{I}, \mathrm{I}^{\perp}] = 0.$$

Il en résulte que tout sous-espace de I stable par ad(I) est un idéal de $\mathfrak{g}$. La minimalité de I entraîne donc que I est une algèbre de Lie simple.

D'autre part, la forme de Killing de $\mathrm{I}^{\perp}$ est la restriction de $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ à $\mathrm{I}^{\perp}$, et il résulte de $(*)$ que celle-ci est non dégénérée. En procédant par récurrence sur la dimension, on en conclut que $\mathrm{I}^{\perp}$ est somme directe d'algèbres de Lie simples. Le corollaire est démontré. □

Lemme 1.38. — *Supposons que $\mathfrak{g}$ soit somme directe d'idéaux simples non abéliens :*

$$(*)\qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathfrak{g}_n.$$

Alors, tout idéal de $\mathfrak{g}$ est la somme des $\mathfrak{g}_i$ qu'il contient. En particulier, $\mathfrak{g}$ ne contient pas d'idéal résoluble non nul.

Démonstration. — Supposons que $(*)$ ait lieu. Alors $[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0$ pour $i \neq j$, et chaque $\mathfrak{g}_i$ est une algèbre de Lie simple. Donc, pour tout $x_i \in \mathfrak{g}_i$ non nul, on a $[\mathfrak{g}_i, x_i] \neq 0$, puisque x_i n'est pas central, et donc l'idéal engendré par $[\mathfrak{g}_i, x_i]$ égale $\mathfrak{g}_i$.

Soit $\mathfrak{h}$ un idéal non nul de $\mathfrak{g}$. Notons π_i les projections $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_i$ et soit

$$\mathrm{I} = \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \pi_i(\mathfrak{h}) \neq 0\}.$$

Soit $i \in \mathrm{I}$. Il existe $x \in \mathfrak{h}$ tel que

$$x = x_1 + \cdots + x_n, \qquad \text{avec } x_j \in \mathfrak{g}_j, \text{ et } x_i \neq 0.$$

Alors $\mathfrak{h}$ contient l'idéal engendré par $[\mathfrak{g}_i, x] = [\mathfrak{g}_i, x_i]$, qui égale $\mathfrak{g}_i$. Il en résulte que

$$\mathfrak{h} = \bigoplus_{i\in\mathrm{I}} \mathfrak{g}_i.$$

En particulier, $\mathfrak{h} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ et donc $\mathfrak{h}$ n'est pas résoluble. □

Par conséquent, on a obtenu le théorème suivant.

Théorème 1.39. — *Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie. Considérons les conditions suivantes :*

a) $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ *est non dégénérée.*

b) $\mathfrak{g}$ *est somme directe d'idéaux simples.*

c) $\mathfrak{g}$ *ne contient pas d'idéal résoluble non nul.*

Alors, a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c).

Le critère de Cartan, qu'on verra plus loin, établit que c) $\Rightarrow$ a) si $\mathrm{car}(k) = 0$.

Remarque 1.40. — Supposons $\mathrm{car}(k) = p \geqslant 3$. Alors, $\mathfrak{gl}_p(k)/k\,\mathrm{id}$ ne contient pas d'idéal résoluble non nul, mais n'est pas somme directe d'idéaux simples. D'autre part, on peut trouver une k-algèbre de Lie simple (de dimension p) dont la forme de Killing est nulle (cf. [**BL1**, § 1, Ex.21].

1.4. Théorème d'Engel et applications. — Soit V un k-espace vectoriel non nul de dimension finie.

***Définition 1.41* (Drapeaux)**. — Un **drapeau** de V est une suite de sous-espaces vectoriels emboités :

$$0 = \mathrm{V}_0 \subset \mathrm{V}_1 \subset \cdots \subset \mathrm{V}_d = \mathrm{V},$$

tels que $\dim_k \mathrm{V}_i = i$ pour tout i. On dit qu'une base $(e_1, \ldots, e_d)$ est **adaptée** à ce drapeau si, pour tout i, les vecteurs $e_1, \ldots, e_i$ forment une base de V_i.

Lemme 1.42. — *Soit* $x \in \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$ *un endomorphisme nilpotent. Alors* $\mathrm{ad}(x)$ *est nilpotent.*

Démonstration. — Dans $\mathrm{End}_k(\mathrm{V})$, considérons les translations à gauche et à droite, $\lambda(x)$ et $\rho(x)$, définies par

$$\lambda(x)(y) = xy, \qquad \rho(x)(y) = yx.$$

Elles commutent (c.-à-d., $\lambda(x) \circ \rho(x) = \rho(x) \circ \lambda(x)$), et l'on a $\mathrm{ad}(x) = \lambda(x) - \rho(x)$. Donc, d'après la formule du binôme, l'on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$(\mathrm{ad}\, x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i \lambda(x)^{n-i} \rho(x)^i.$$

Par conséquent, si $x^m = 0$, on a $(\mathrm{ad}\, x)^{2m} = 0$. □

***Théorème 1.43* (Engel)**. — *Soit* $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$ *une représentation de* $\mathfrak{g}$ *telle que* $\rho(x)$ *soit nilpotent, pour tout* $x \in \mathfrak{g}$. *Alors :*

1) V *contient un vecteur* $\mathfrak{g}$*-invariant non nul.*

2) *Il existe un drapeau* (V_i) *de* V *tel que* $\rho(\mathfrak{g})\mathrm{V}_i \subseteq \mathrm{V}_{i-1}$, *pour tout* i. *De façon équivalente, il existe une base* $\mathscr{B}$ *de* V *dans laquelle tous les éléments de* $\rho(\mathfrak{g})$ *sont triangulaires, avec des* 0 *sur la diagonale.*

3) $\rho(\mathfrak{g})$ *est nilpotente.*

Démonstration. — Supposons 1) vérifiée, et montrons 2) par récurrence sur $\dim \mathrm{V}$. Par hypothèse, V possède un vecteur invariant $v_1 \neq 0$. Alors $\mathrm{V}_1 = kv_1$ est un sous-module de V, et la représentation $\overline{\rho}$ dans V/V_1 vérifie l'hypothèse du théorème (car si $\rho(x)^n = 0$ alors *a fortiori* $\overline{\rho}(x)^n = 0$). Donc, par hypothèse de récurrence, il existe un drapeau $(\mathrm{V}_i)_{i \geqslant 2}$ de sous-espaces contenant V_1, tel que $\rho(\mathfrak{g})\mathrm{V}_i \subseteq \mathrm{V}_{i-1}$, pour tout i, et le point 2) en découle.

Pour montrer les points 1) et 3), remplaçant $\mathfrak{g}$ par son image $\rho(\mathfrak{g})$, on se ramène au cas où $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$. Procédons alors par récurrence sur $\dim_k \mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g} = kx$, avec x nilpotent, alors $\mathrm{Ker}\, x \neq 0$. Donc on peut supposer $\dim \mathfrak{g} > 1$ et le théorème démontré pour toute sous-algèbre $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$.

Soit alors $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre propre de $\mathfrak{g}$, de dimension maximale. Tout $x \in \mathfrak{h}$ est un endomorphisme nilpotent de V, donc, d'après le lemme 1.42, $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent. En particulier, pour tout $x \in \mathfrak{h}$, l'action de $\mathrm{ad}(x)$ sur $\mathrm{U} := \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est nilpotente.

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence appliquée au couple $(\mathfrak{h}, \mathrm{U})$, il existe un vecteur non nul de U annulé par $\mathfrak{h}$, c.-à-d., il existe $x \in \mathfrak{g}$ tel que

$$(*) \qquad x \notin \mathfrak{h} \quad \text{et} \quad [\mathfrak{h}, x] \subseteq \mathfrak{h}.$$

Alors, $\mathfrak{h}+kx$ est une sous-algèbre, et la maximalité de $\mathfrak{h}$ entraîne que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}+kx$, et alors $(*)$ montre que $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$.

Revenons à V. Par hypothèse de récurrence, à nouveau, le sous-espace

$$\mathrm{W} = \mathrm{V}^{\mathfrak{h}} = \{w \in \mathrm{V} \mid \forall\, y \in \mathfrak{h}, \quad yw = 0\}$$

est non nul. Il est stable par x, car pour $w \in \mathrm{W}$ et $y \in \mathfrak{h}$, on a

$$yxw = [y, x]w + xyw = 0,$$

ce qui montre que $xw \in \mathrm{W}$. Alors $x|_{\mathrm{W}}$ est un endomorphisme nilpotent, donc annule un vecteur $w_0 \neq 0$. Comme w_0 est annulé par $\mathfrak{h}$, il est annulé par $\mathfrak{g}$. Ceci achève la preuve du point 1), et donc du point 2).

Le point 3) en découle. En effet, s'étant ramené comme précédemment au cas où $\mathfrak{g} \subset \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$, il résulte du lemme 1.42, que chaque $\mathrm{ad}(x)$ est nilpotent. Donc d'après le point 2) appliqué à la représentation adjointe, il existe une suite d'idéaux

$$0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_d = \mathfrak{g}$$

telle que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_{i-1}$ pour tout i. Ceci entraîne que $\mathfrak{g}$ est nilpotente. En effet, on voit par récurrence sur i que

$$\mathscr{C}^i(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{g}_{d+1-i},$$

d'où $\mathscr{C}^{d+1}(\mathfrak{g}) = 0$. Le théorème est démontré. De plus, au cours de la démonstration du point 3), on a établi le corollaire ci-dessous. $\square$

***Corollaire 1.44* (Théorème d'Engel).** — *Soit $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie telle que $\mathrm{ad}(x)$ soit nilpotent, pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{g}$ est nilpotente.*

Remarque 1.45. — Soit $\mathfrak{n}$ une k-algèbre de Lie nilpotente. **Attention**, il ne faut pas croire que $\mathfrak{n}$ agit de façon nilpotente dans toute représentation !

1) Déjà, si $\mathfrak{n} = kx$ est de dimension 1, un $\mathfrak{n}$-module est un k-espace vectoriel muni d'un endomorphisme $u = \rho(x)$, c.-à-d., c'est un $k[\mathrm{X}]$-module. En particulier, les kx-modules irréductibles sont les $k[\mathrm{X}]/\mathfrak{m}$, pour $\mathfrak{m}$ idéal maximal de

$k[X]$. En particulier, on trouve déjà tous les modules

$$k_\lambda := k[X]/(X-\lambda), \qquad \text{pour} \quad \lambda \in k.$$

Si k est algébriquement clos, ce sont les seuls ; sinon il y a tous les $k[X]/(P)$ pour P polynôme irréductible unitaire.

2) Supposons k **algébriquement clos**. Si $\operatorname{car}(k) = 0$, on verra plus loin que tout $\mathfrak{n}$-module irréductible de dimension finie est de dimension 1 (théorème de Lie), mais cela n'est pas vrai si $\operatorname{car}(k) = p > 0$. Voici un exemple. On se place dans $M_p(k)$ et, pour $i = 1, \dots, p-1$, on note

$$X_i = E_{i,i+1}, \qquad Y_i = E_{i+1,i}, \qquad H_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}.$$

Alors $[X_i, Y_i] = H_i$ et $[X_i, Y_j] = 0$ si $i \neq j$. D'autre part, la matrice identité égale :

$$\mathrm{id} = H_1 + 2H_2 + \cdots + (p-1)H_{p-1}.$$

Posons $X = \sum_{i=1}^{p-1} iX_i$ et $Y = \sum_{i=1}^{p-1} iY_i$, c.-à-d., X est la matrice ci-dessous

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & p-1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et Y est sa transposée. On a $[X, Y] = \mathrm{id}$, et donc (X, Y, id) forment une base d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$ de dimension 3, isomorphe à l'algèbre de Heisenberg. Montrons que $V = k^p$ est un $\mathfrak{n}$-module irréductible. Notons $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de k^p.

Soit E un sous-espace non nul de V stable par $\mathfrak{n}$. Comme $\operatorname{Ker}(X) \cap \operatorname{Ker}(Y) = (0)$, alors E ne peut être annulé à la fois par X et Y. On peut donc supposer $XE \neq 0$. Alors E contient e_1, et les $Y^i(e_1)$ pour $i = 1, \dots, p-1$, d'où $E = V$. Ceci montre que V est un $\mathfrak{n}$-module simple, de dimension p.

2. Théorème de Lie et critère de Cartan

Désormais, on suppose k algébriquement clos et de caractéristique nulle, par exemple, $k = \mathbb{C}$.

2.1. Théorème de Lie et conséquences. — Commençons par le lemme suivant.

Lemme 2.1. — ($\mathrm{car}(k) = 0$) *Soient* $\mathfrak{g}$ *une* k*-algèbre de Lie,* $\mathfrak{h}$ *un idéal,* V *un* $\mathfrak{g}$*-module de dimension finie. On suppose qu'il existe* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$*, et* $v \in \mathrm{V}$*,* $v \neq 0$*, tels que* $yv = \lambda(y)v$ *pour tout* $y \in \mathfrak{h}$*. Alors on a :*

$$\lambda([\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]) = 0.$$

Démonstration. — Soit $x \in \mathfrak{g}$ et soit n le plus petit entier tels que les vecteurs $v, xv, \ldots, x^n v$ soient liés. On pose $\mathrm{W}_{-1} = 0$ et, pour $i = 0, \ldots, n-1$,

$$\mathrm{W}_i = \mathrm{Vect}\{v, \ldots, x^i v\}.$$

Montrons par récurrence sur i que :

$$(\dagger) \qquad \forall\, y \in \mathfrak{h}, \qquad yx^i v \in \lambda(y)x^i v + \mathrm{W}_{i-1}.$$

C'est vrai pour $i = 0$. Supposant le résultat démontré au cran i, on a

$$yx^{i+1}v = yxx^i v = [y, x]x^i v + xyx^i v.$$

Par hypothèse de récurrence, $[y, x]x^i v \in \mathrm{W}_i$ et

$$xyx^i v \in x\left(\lambda(y)x^i v + \mathrm{W}_{i-1}\right) \subseteq \lambda(y)x^{i+1}v + \mathrm{W}_i.$$

Ceci prouve l'assertion ($\dagger$). Par conséquent, $\mathrm{W} = \mathrm{W}_{n-1}$ est stable par la sous-algèbre $\mathfrak{h} + kx$, et pour tout $z \in \mathfrak{h}$ l'on a :

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{W}}(z) = n\,\lambda(z).$$

Si $z = [x, y]$, alors $z|_{\mathrm{W}}$ est le commutateur de $x|_{\mathrm{W}}$ et de $y|_{\mathrm{W}}$, donc est de trace nulle. Comme $n \neq 0$, puisque $\mathrm{car}(k) = 0$, on en déduit que

$$\forall\, y \in \mathfrak{h}, \qquad \lambda([x, y]) = 0.$$

Ceci prouve le lemme. $\square$

***Théorème 2.2* (Lie)**. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie résoluble, et* V *un* $\mathfrak{g}$*-module de dimension finie. Alors :*

1) V *possède un sous-*$\mathfrak{g}$*-module de dimension* 1*, c.-à-d., il existe* $v \in \mathrm{V}$ *non nul et* $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ *tels que :*

$$\forall\, x \in \mathfrak{g}, \qquad xv = \lambda(x)v.$$

(*D'où, nécessairement,* $\lambda([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$.)

2) *Il existe un drapeau* (V_i) *de* V **stable par** $\mathfrak{g}$*, c.-à-d., tel que* $\rho(\mathfrak{g})\mathrm{V}_i \subseteq \mathrm{V}_i$*, pour tout* i*. De façon équivalente, il existe une base* $\mathscr{B}$ *de* V *dans laquelle tous les éléments de* $\rho(\mathfrak{g})$ *sont triangulaires.*

Démonstration. — Comme dans la démonstration du théorème d'Engel, le point 2) résulte du point 1), par récurrence sur $\dim \mathrm{V}$. Démontrons le point 1) par récurrence sur $\dim \mathfrak{g}$.

Si $\mathfrak{g} = kx$, c'est OK car x est trigonalisable, puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. On peut donc supposer $\dim \mathfrak{g} > 1$ et le théorème démontré pour toute sous-algèbre $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$.

Comme $\mathfrak{g}$ est résoluble, $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$ est une sous-algèbre propre, et tout sous-espace contenant $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Soient donc $\mathfrak{h}$ un idéal de codimension 1, et $x \notin \mathfrak{h}$, de sorte que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \bigoplus kx.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe $\mu \in \mathfrak{h}^*$ tel que

$$\mathrm{W} := \{w \in \mathrm{V} \mid \forall\, y \in \mathfrak{h}, \quad yw = \mu(y)w\}$$

soit non nul. Montrons que W est stable par x. Soit $w \in \mathrm{W}$; pour tout $y \in \mathfrak{h}$ on a :

$$yxw = [y,x]w + xyw = \mu(y)xw,$$

car $[y,x] \in \mathfrak{h}$ et $\mu([y,x]) = 0$ d'après le lemme précédent. Ceci montre que x stabilise W, donc il existe $w_0 \in \mathrm{W}$, non nul, et $t_0 \in \mathbb{C}$, tels que $xw_0 = t_0 w_0$. Soit λ la forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ définie par $\lambda|_{\mathfrak{h}} = \mu$ et $\lambda(x) = t_0$, alors pour tout $z \in \mathfrak{g}$ on a $zw_0 = \lambda(z)w_0$. Ceci prouve le point 1), et le théorème est démontré. □

Corollaire 2.3 **(Théorème de Lie)**. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie résoluble, et* V *un* $\mathfrak{g}$*-module irréductible de dimension finie. Alors* $\dim \mathrm{V} = 1$.

Corollaire 2.4. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie résoluble, et* $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_k(\mathrm{V})$ *une représentation de dimension finie. Alors, on a*

$$\mathrm{K}_\rho(\mathfrak{g}, \mathscr{D}(\mathfrak{g})) = 0, \qquad \textit{c.-à-d.,}\quad \mathrm{Tr}_{\mathrm{V}}(\rho(x)\rho(y)) = 0, \quad \forall\, x \in \mathfrak{g},\ y \in \mathscr{D}(\mathfrak{g}).$$

Démonstration. — D'après le théorème de Lie 2.2, il existe une base $\mathscr{B}$ de V dans laquelle tout $\rho(x)$ est triangulaire supérieur. Alors, pour tout $y \in \mathscr{D}(\mathfrak{g})$, $\rho(y)$ est triangulaire avec des 0 sur la diagonale, et il en est de même du produit $\rho(x)\rho(y)$. Par conséquent,

$$\mathrm{K}_\rho(x,y) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{V}}(\rho(x)\rho(y)) = 0.$$

□

Remarque 2.5. — Le critère de résolubilité de Cartan, qu'on verra plus bas, est une réciproque au corollaire précédent.

Proposition 2.6. — 1) *Notons* $\mathfrak{n}_n(k)$ *l'algèbre de Lie des matrices triangulaires avec des* 0 *sur la diagonale. Alors* $\mathfrak{n}_n(k)$ *est nilpotente ; plus précisément, on a* $\mathscr{C}^n(\mathfrak{n}_n(k)) = 0$.

2) *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie résoluble de dimension finie. Alors* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ *est nilpotente.*

Démonstration. — 1) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base standard de k^n et soit (V_i) le drapeau associé. Pour tout $x \in \mathfrak{n}_n$, on a $x\mathrm{V}_i \subseteq \mathrm{V}_{i-1}$, pour tout i. On en déduit, par récurrence sur r, que

$$\mathscr{C}^r(\mathfrak{n}_n)\mathrm{V}_i \subseteq \mathrm{V}_{i-r}, \quad \text{pour tout } i$$

(avec la convention $\mathrm{V}_j = 0$ si $j \leqslant 0$). Il en résulte que $\mathscr{C}^n(\mathfrak{n}_n) = (0)$.

2) D'après le théorème de Lie appliqué à la représentation adjointe, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathfrak{g}$ dans laquelle tout $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ est triangulaire supérieur. Alors, pour tout $y \in \mathscr{D}(\mathfrak{g})$, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(y)$ est triangulaire avec des 0 sur la diagonale. Posant $\mathfrak{h} = \mathscr{D}(\mathfrak{g})$ et notant $\mathrm{V}_i = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$, on en déduit que

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})(\mathrm{V}_i) \subseteq \mathrm{V}_{i-1}, \qquad \forall\, i,$$

puis, par récurrence sur r, que

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})^r(\mathrm{V}_i) \subseteq \mathrm{V}_{i-r},$$

ce qui signifie :

$$\forall\, y_1, \dots, y_r \in \mathfrak{h},\ \forall\, x \in \mathrm{V}_i, \quad [y_r, \cdots [y_2, [y_1, x]] \cdots] \in \mathrm{V}_{i-r}.$$

Il en résulte que $\mathfrak{h}$ est nilpotente. □

Remarque 2.7. — Concernant le point 1), n est le plus petit entier r tel que $\mathscr{C}^r(\mathfrak{n}_n) = 0$, car on a :

$$[\cdots[[\mathrm{E}_{1,2}, \mathrm{E}_{2,3}], \mathrm{E}_{3,4}], \cdots \mathrm{E}_{n-1,n}] = \mathrm{E}_{1,n}.$$

2.2. Poids des algèbres de Lie nilpotentes. — Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Le point de départ du théorème de Lie est que, pour tout $x \in \mathrm{End}(\mathrm{V})$, V est la somme directe des espaces propres généralisés (on dit aussi « espaces caractéristiques ») de x :

$$\mathrm{V}_{(\lambda)}(x) = \{v \in \mathrm{V} \mid (x - \lambda)^n\, v = 0 \ \text{ pour } n \text{ assez grand}\},$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}$. On va voir que ceci se généralise au cas d'une représentation d'une algèbre de Lie **nilpotente** dans V. Commençons par quelques notations et résultats généraux.

Notation 2.8. — Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie et soit $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ une application *arbitraire*, c.-à-d., pas nécessairement linéaire. Soit $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathrm{V})$ une représentation de dimension finie. Pour tout sous-ensemble S de $\mathfrak{g}$, on pose

$$\mathrm{V}_{(\lambda)}(\mathrm{S}) = \{v \in \mathrm{V} \mid \forall\, x \in \mathrm{S},\ \exists\, n \text{ tel que } (\rho(x) - \lambda(x))^n\, v = 0\}.$$

On a, bien sûr, $\mathrm{V}_{(\lambda)}(\mathrm{S}) = \bigcap_{x \in \mathrm{S}} \mathrm{V}_{(\lambda)}(x)$. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité, on notera simplement $\mathrm{V}_{(\lambda)}$ au lieu de $\mathrm{V}_{(\lambda)}(\mathfrak{g})$; on dit que c'est l'espace propre généralisé associé à λ.

Si $\mathrm{V}_{(\lambda)} \neq (0)$, on dit que λ est un **poids** de $\mathfrak{g}$ dans V.

Il est immédiat que si $f : \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ est un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules, alors

$$f(\mathrm{V}_{(\lambda)}) \subseteq \mathrm{W}_{(\lambda)}. \tag{†}$$

Proposition 2.9. — *Soient* U, V *des* $\mathfrak{g}$*-modules, et* λ, μ *des applications* $\mathfrak{g} \to \mathbb{C}$. *Alors*

$$\mathrm{U}_{(\lambda)} \otimes \mathrm{V}_{(\mu)} \subseteq (\mathrm{U} \otimes \mathrm{V})_{(\lambda+\mu)}. \tag{1}$$

Par conséquent, si $f : \mathrm{U} \otimes \mathrm{V} \to \mathrm{W}$ *est un morphisme de* $\mathfrak{g}$*-modules, alors*

$$f(\mathrm{U}_{(\lambda)} \otimes \mathrm{V}_{(\mu)}) \subseteq \mathrm{W}_{(\lambda+\mu)}. \tag{1'}$$

Démonstration. — Bien entendu, il suffit de montrer la première assertion. Notons ρ, σ et δ les représentations de $\mathfrak{g}$ dans U, V et $\mathrm{U} \otimes \mathrm{V}$. Soit $x \in \mathfrak{g}$; on a

$$\delta(x) = \rho(x) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma(x),$$

et donc

$$\delta(x) - (\lambda + \mu)(x) 1 \otimes 1 = (\rho(x) - \lambda(x)1) \otimes 1 + 1 \otimes (\sigma(x) - \mu(x)).$$

Par conséquent, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$(\delta(x) - (\lambda + \mu)(x) 1 \otimes 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\rho(x) - \lambda(x)1)^k \otimes 1 + 1 \otimes (\sigma(x) - \mu(x))^{n-k},$$

et (1) en découle. □

Lemme 2.10. — *Soit* V *un* $\mathfrak{g}$*-module. Alors l'application*

$$\phi : \mathfrak{g} \otimes \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}, \qquad x \otimes v \mapsto xv$$

est un morphisme de $\mathfrak{g}$*-modules (où* $\mathfrak{g}$ *agit sur* $\mathfrak{g}$ *par la représentation adjointe).*

Démonstration. — Soient $x, y \in \mathfrak{g}$ et $v \in \mathrm{V}$. Alors

$$x \cdot (y \otimes v) = [x, y] \otimes v + y \otimes xv$$

et donc

$$\phi(x \cdot (y \otimes v)) = [x, y]v + yxv = xyv = x\phi(y \otimes v).$$

Ceci prouve le lemme. □

Proposition 2.11. — 1) *Soit* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$ *telle que* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(x)$ *soit* **nilpotent***, pour tout* $x \in \mathfrak{h}$. *Soient* V *un* $\mathfrak{g}$*-module et* λ *une application* $\mathfrak{h} \to \mathbb{C}$. *Alors, on a*

$$\mathfrak{g} \cdot \mathrm{V}_{(\lambda)}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathrm{V}_{(\lambda)}(\mathfrak{h}),$$

c.-à-d., $\mathrm{V}_{(\lambda)}(\mathfrak{h})$ *est un sous-*$\mathfrak{g}$*-module de* V.

2) *En particulier, si* $\mathfrak{g}$ *est* **nilpotente***, alors* $\mathrm{V}_{(\lambda)}$ *est un sous-*$\mathfrak{g}$*-module de* V*, pour tout* $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$.

Démonstration. — 1) L'hypothèse signifie que, comme $\mathfrak{h}$-module, on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$. Par conséquent, 1) résulte du lemme 2.10 et de la proposition 2.9, et évidemment 2) en est un cas particulier. □

Tout ce qui précède est valable sur un corps de base arbitraire k. On va maintenant voir que si $\mathrm{car}(k) = 0$, alors tout poids de V est une **forme linéaire** sur $\mathfrak{g}$, nulle sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

***Théorème 2.12* (Poids et espaces propres).** — *On suppose* $\mathrm{car}(k) = 0$ *et* $\mathfrak{g}$ *nilpotente. Si* $\mathrm{V}_{(\lambda)} \neq 0$*, alors :*

1) $\lambda : \mathfrak{g} \to k$ *est linéaire, et nulle sur* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

2) *De plus, le* **sous-espace propre**

$$\mathrm{V}_\lambda = \{v \in \mathrm{V} \mid \forall\, x \in \mathfrak{g}, \quad xv = \lambda(x)v\}$$

est non nul.

Démonstration. — 1) Soit $d = \dim \mathrm{V}_{(\lambda)} > 0$. D'après le théorème précédent, $\mathrm{V}_{(\lambda)}$ est un sous-$\mathfrak{g}$-module de V. Donc, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on peut considérer la restriction de $\rho(x)$ à $\mathrm{V}_{(\lambda)}$, notée $\rho_\lambda(x)$.

Alors $\rho_\lambda(x) - \lambda(x)\,\mathrm{id}$ est nilpotent, donc $\rho_\lambda(x)$ est trigonalisable, avec des $\lambda(x)$ sur la diagonale. Par conséquent, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on a

$$\mathrm{Tr}\,\rho_\lambda(x) = d\lambda(x), \quad \text{d'où} \quad \lambda(x) = (1/d)\,\mathrm{Tr}\,\rho_\lambda(x).$$

Ceci montre que λ est linéaire. De plus, pour $x, y \in \mathfrak{g}$ on a

$$0 = \mathrm{Tr}[\rho_\lambda(x), \rho_\lambda(y)] = \mathrm{Tr}\,\rho_\lambda([x, y]) = d\lambda([x, y]),$$

d'où $\lambda([x, y]) = 0$. Ceci prouve le point 1).

2) Comme λ est linéaire et nulle sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, on vérifie que l'application

$$\phi_\lambda : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathrm{V}_{(\lambda)}), \qquad x \mapsto \rho_\lambda(x) - \lambda(x),$$

est une **représentation** de $\mathfrak{g}$ dans $\mathrm{V}_{(\lambda)}$, par des endomorphismes nilpotents. Donc, d'après le théorème d'Engel, $\mathrm{V}_{(\lambda)}$ contient un vecteur non nul v_0 annulé par $\phi_\lambda(\mathfrak{g})$, c.-à-d., tel que

$$\forall\, x \in \mathfrak{g}, \qquad \rho_\lambda(x)v = \lambda(x)v.$$

Ceci prouve que $\mathrm{V}_\lambda \neq (0)$. Le théorème est démontré. □

***Lemme 2.13*.** — (k *infini*). *Soit* V *un* $\mathfrak{g}$*-module de dimension finie. Les sous-espaces* $\mathrm{V}_{(\lambda)}$*, pour* $\lambda \in \mathfrak{g}^*$*, sont en somme directe.*

Démonstration. — Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathfrak{g}^*$ deux à deux distincts et supposons

$$v_1 + \cdots + v_n = 0, \qquad \text{avec } v_i \in \mathrm{V}_{(\lambda_i)}, \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

Comme k est infini, $\mathfrak{g}$ n'est pas réunion de ses sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(\lambda_i - \lambda_j)$, pour $i \neq j$, donc il existe $x \in \mathfrak{g}$ tel que $\lambda_i(x) \neq \lambda_j(x)$, pour $i \neq j$. Comme les espaces caractéristiques de x sont en somme directe, il en résulte que $v_i = 0$ pour $i = 1, \dots n$. Le lemme est démontré. □

Notation 2.14. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, alors $\mathfrak{g}^*$ est un $\mathfrak{g}$-module, dont le sous-espace des invariants est :

$$(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}} = \{\phi \in \mathfrak{g}^* \mid \forall\, x \in \mathfrak{g},\ \ x \cdot \phi = 0\} = \{\phi \in \mathfrak{g}^* \mid \forall\, x, y \in \mathfrak{g},\ \ \phi([x, y]) = 0\}.$$

Donc, $(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ est le sous-espace des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$ nulles sur $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$; on le notera $\mathscr{X}(\mathfrak{g})$.

Théorème 2.15. — *Soit* $\mathfrak{n}$ *une* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie nilpotente et* V *un* $\mathfrak{n}$*-module de dimension finie. Alors*

$$\mathrm{V} = \bigoplus_{\lambda \in (\mathfrak{n}^*)^{\mathfrak{n}}} \mathrm{V}_{(\lambda)}.$$

Démonstration. — On a déjà vu que tout poids de $\mathfrak{n}$ dans V est un élément de $(\mathfrak{n}^*)^{\mathfrak{n}}$, et que la somme des $\mathrm{V}_{(\lambda)}$ est directe. On va montrer qu'elle égale V par récurrence sur $\dim \mathrm{V}$. C'est OK si $\dim \mathrm{V} = 1$, donc on peut supposer $\dim \mathrm{V} > 1$ et le théorème établi pour tout $\mathfrak{n}$-module de dimension $< \dim \mathrm{V}$. Notons ρ la représentation $\mathfrak{n} \to \mathrm{End}(\mathrm{V})$.

Distinguons deux cas. Si pour tout $x \in \mathfrak{n}$, $\rho(x)$ n'a qu'une seule valeur propre $\lambda(x)$, alors $\mathrm{V} = \mathrm{V}_{(\lambda)}$ et le théorème est vérifié.

Sinon, il existe $x_0 \in \mathfrak{n}$ tel que $\rho(x_0)$ ait plusieurs valeurs propres $t_1, \dots, t_r$, avec $r \geqslant 2$. Alors

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_{t_1}(x) \bigoplus \cdots \bigoplus \mathrm{V}_{t_r}(x),$$

et $\dim \mathrm{V}_{t_j}(x) < \dim \mathrm{V}$ pour tout j. Or, d'après la proposition 2.11, chaque $\mathrm{V}_j = \mathrm{V}_{t_j}(x)$ est un sous-$\mathfrak{g}$-module de V, et le théorème découle de l'hypothèse de récurrence appliquée à chaque V_j. □

2.3. Sous-algèbres de Cartan. — Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie de dimension finie.

Définition 2.16. — Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre, son **normalisateur**, noté $\mathrm{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ ou simplement $\mathrm{N}(\mathfrak{h})$, est :

$$\mathrm{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}.$$

C'est une **sous-algèbre** de $\mathfrak{g}$, car si $x, y \in \mathrm{N}(\mathfrak{h})$ et $z \in \mathfrak{h}$, alors

$$[[x, y], z] = [[x, z], y] + [x, [y, z]] \in \mathfrak{h}.$$

De plus, il est clair que $\mathfrak{h}$ est un **idéal** de $\mathrm{N}(\mathfrak{h})$.

Définition 2.17. — Une **sous-algèbre de Cartan** est une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ telle que :

1) $\mathfrak{h}$ est nilpotente,

2) $\mathfrak{h} = \mathrm{N}(\mathfrak{h})$.

On va montrer qu'il existe des sous-algèbres de Cartan. (Et de plus, qu'elles sont toutes « conjuguées ».)

Définition 2.18. — Soit $d = \dim \mathfrak{g}$. Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on considère le polynôme en T suivant, égal à $(-1)^d$ fois le polynôme caractéristique de $\mathrm{ad}(x)$:

$$\mathrm{P}(x, \mathrm{T}) = \mathrm{dét}(\mathrm{T} - \mathrm{ad}\, x).$$

Développant ce polynôme, on peut écrire :

$$\mathrm{P}(x, \mathrm{T}) = \mathrm{T}^d + a_{d-1}(x)\mathrm{T}^{d-1} + \cdots + a_1(x)\mathrm{T} + a_0(x),$$

où chaque a_i est un polynôme homogène sur $\mathfrak{g}$, de degré $d - i$.

Le **rang** de $\mathfrak{g}$ est le plus petit entier ℓ tel que le polynôme a_ℓ soit non identiquement nul. On le note $\mathrm{rang}(\mathfrak{g})$.

Comme $[x, x] = 0$, alors 0 est valeur propre de $\mathrm{ad}(x)$; si $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sont les valeurs propres non nulles, alors $\mathfrak{g}$ est somme directe des espaces caractéristiques correspondants :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(0)}(x) \oplus \bigoplus_{i=1}^{s} \mathfrak{g}_{(\lambda_i)}(x).$$

Si l'on désigne par $n_0(x), \ldots, n_s(x)$ les dimensions de ces espaces, on a donc

$$\mathrm{P}(x, \mathrm{T}) = \mathrm{T}^{n_0(x)} \prod_{i=1}^{s} (\mathrm{T} - \lambda_i)^{n_i(x)},$$

d'où $a_i(x) = 0$ pour $i < n_0(x)$ et

$$a_{n_0}(x) = \prod_{i=1}^{s} \lambda_i^{n_i(x)} \neq 0.$$

On voit donc que le rang de $\mathfrak{g}$ est le minimum des $n_0(x) = \dim \mathfrak{g}_{(0)}(x)$, pour $x \in \mathfrak{g}$.

Définition 2.19. — On dit que $x \in \mathfrak{g}$ est un **élément régulier** si son nilespace $\mathfrak{g}_{(0)}(x)$ est de dimension minimale, c.-à-d., de dimension $\ell = \mathrm{rang}(\mathfrak{g})$. Ceci équivaut à :

$$a_\ell(x) \neq 0.$$

On note $\mathfrak{g}_{\mathrm{rég}}$ l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{g}$.

Proposition 2.20. — *Si $a : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ est une application polynomiale non identiquement nulle alors le complémentaire du fermé*

$$\mathscr{V}(a) = \{x \in \mathfrak{g} \mid a(x) = 0\}$$

est un ouvert dense et connexe de l'espace vectoriel $\mathfrak{g} = \mathbb{C}^d$. En particulier, c'est le cas de $\mathfrak{g}_{\mathrm{rég}}$.

Démonstration. — L'hypersurface
$$\mathscr{V}(a) = \{x \in \mathfrak{g} \mid a(x) = 0\}$$
est un fermé d'intérieur vide (car si le polynôme a s'annulait sur un ouvert non-vide de $\mathbb{C}^d$, il serait identiquement nul). Donc son complémentaire U est un ouvert dense de $\mathfrak{g}$.

Montrons qu'il est connexe par arcs. Soient $x, y \in \mathrm{U}$ et soit D la droite complexe joignant x et y, c.-à-d.,
$$\mathrm{D} = \{(1 - z)x + zy \mid z \in \mathbb{C}\}.$$
Alors le polynôme $\mathrm{Q}(z) = a_\ell((1-z)x + zy)$ est non identiquement nul, puisque $\mathrm{Q}(0) = a(x)$ et $\mathrm{Q}(1) = a(y)$ sont $\neq 0$. Donc $\mathrm{Q}(z)$ a un nombre fini de zéros $z_1, \ldots, z_r$, tous $\neq 0, 1$ et on peut tracer dans $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ un chemin polygonal $t \mapsto c(t)$, $t \in [0, 1]$, joignant 0 à 1 et évitant les z_i. Alors le chemin continu
$$t \mapsto (1 - c(t))x + c(t)y$$
est contenu dans U et relie x à y. □

Lemme 2.21. — *Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, le nilespace $\mathfrak{g}_{(0)}(x)$ est une sous-algèbre de Lie.*

Démonstration. — Écrivons $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathfrak{g}_{(\lambda)}$. Comme le crochet
$$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \qquad y \otimes z \mapsto [y, z]$$
est un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules, a fortiori de kx-modules, le lemme découle de la proposition 2.9. □

Théorème 2.22. — *Soit $x \in \mathfrak{g}_{rég}$. Alors la sous-algèbre $\mathfrak{g}_{(0)}(x)$ est une sous-algèbre de Cartan.*

Démonstration. — Posons $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(x)$. Montrons d'abord que $\mathfrak{h}$ est nilpotente. On a $\dim \mathfrak{h} = \ell = \mathrm{rang}(\mathfrak{g})$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_d)$ une base de $\mathfrak{g}$ telle que $(e_1, \ldots, e_\ell)$ soit une base de $\mathfrak{h}$. Alors les images de $e_{\ell+1}, \ldots, e_d$ forment une base de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Pour tout $y \in \mathfrak{h}$, $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(y)$ induit des endomorphismes de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, notés $\mathrm{ad}_\mathfrak{h}(y)$ et $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(y)$, et la matrice de $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}(y)$ dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme
$$(*) \qquad \mathrm{ad}_\mathfrak{g}(y) = \begin{pmatrix} \mathrm{ad}_\mathfrak{h}(y) & * \\ 0 & \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(y) \end{pmatrix}.$$
Alors, $\mathrm{Q}(y) = \mathrm{dét}\big(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(y)\big)$ est un polynôme en y, non identiquement nul puisque $\mathrm{Q}(x) \neq 0$. Donc, d'après la proposition 2.20,
$$\mathrm{V} = \{y \in \mathfrak{h} \mid \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(y) \text{ inversible }\}$$
est un ouvert dense de $\mathfrak{h}$. D'autre part, on peut écrire
$$\mathrm{dét}(\mathrm{T} - \mathrm{ad}_\mathfrak{h}(y)) = \mathrm{T}^\ell + b_{\ell-1}(y)\mathrm{T}^{\ell-1} + \cdots + b_0(y),$$

où chaque b_j est un polynôme sur $\mathfrak{h}$, homogène de degré $\ell - j$. Alors,

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(y) \text{ est nilpotent } \Leftrightarrow b_{\ell-1}(y) = 0 = \cdots = b_0(y).$$

Par conséquent,

$$\mathrm{U} = \{y \in \mathfrak{h} \mid \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(y) \text{ n'est } \textbf{pas} \text{ nilpotent}\}$$

est un ouvert de $\mathfrak{h}$. Supposons qu'il existe $y \in \mathrm{U} \cap \mathrm{V}$. Alors le nilespace de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(y)$ est de dimension $< \ell$, et $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(y)$ est inversible. Or, il résulte de $(*)$ que

$$\text{dét}(\mathrm{T} - \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(y)) = \text{dét}(\mathrm{T} - \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(y)) \cdot \text{dét}(\mathrm{T} - \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(y)),$$

et donc la multiplicité de 0 dans $\mathrm{P}(y, \mathrm{T})$ serait $< \ell$, contredisant la minimalité de ℓ. Ceci montre que $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \varnothing$. Comme V est un ouvert dense, et U un ouvert, ceci entraîne $\mathrm{U} = \varnothing$.

On a donc montré que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}(y)$ est nilpotent, pour tout $y \in \mathfrak{h}$. Donc, d'après le théorème d'Engel, $\mathfrak{h}$ est nilpotente.

Montrons maintenant que $\mathfrak{h} = \mathrm{N}(\mathfrak{h})$. Soit $z \in \mathrm{N}(\mathfrak{h})$. Alors $[\mathfrak{h}, z] \subseteq \mathfrak{h}$ donc, en particulier,

$$[z, x] \in \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(x).$$

Par conséquent, il existe $n \geqslant 1$ tel que

$$0 = (\mathrm{ad}\, x)^n([x, z]) = (\mathrm{ad}\, x)^{n+1}(z),$$

et donc $z \in \mathfrak{g}_{(0)}(x) = \mathfrak{h}$. Ceci prouve que $\mathrm{N}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. Le théorème est démontré. □

Pour un (éventuel) usage ultérieur, signalons le résultat ci-dessous.

Proposition 2.23. — *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{g}$. Alors $\mathrm{N}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$ et l'on a :*

$$\mathfrak{h} \textit{ est un sous-algèbre de Cartan } \Leftrightarrow \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}).$$

Démonstration. — Soit $z \in \mathrm{N}(\mathfrak{h})$ et soit $x \in \mathfrak{h}$. Alors $[x, z] \in \mathfrak{h}$ et comme $\mathfrak{h}$ est nilpotente il existe $n \geqslant 1$ tel que

$$0 = (\mathrm{ad}\, x)^n([x, z]) = (\mathrm{ad}\, x)^{n+1}(z),$$

d'où $z \in \mathfrak{g}_{(0)}(x)$. Comme $\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}) = \bigcap_{x \in \mathfrak{h}} \mathfrak{g}_{(0)}(x)$, ceci montre que

$$\mathfrak{h} \subseteq \mathrm{N}(\mathfrak{h}) \subseteq \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h}).$$

Donc, si $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$ on a, bien sûr, $\mathfrak{h} = \mathrm{N}(\mathfrak{h})$.

Réciproquement, supposons $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})$. Alors, $\mathfrak{h}$ agit de façon nilpotente sur le module non nul $\mathfrak{g}_{(0)}(\mathfrak{h})/\mathfrak{h}$ et, d'après le théorème d'Engel, ce module contient un vecteur invariant non nul. Il existe donc $x \notin \mathfrak{h}$ tel que $[\mathfrak{h}, x] \subseteq \mathfrak{h}$, d'où $\mathrm{N}(\mathfrak{h}) \neq \mathfrak{h}$. La proposition est démontrée. □

Définition 2.24. — Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit L un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit $(a, b) \mapsto ab$, c.-à-d., une application $\mathbb{K}$-linéaire

$$\mu : \mathrm{L} \otimes \mathrm{L} \longrightarrow \mathrm{L}, \qquad a \otimes b \mapsto ab$$

On dit qu'un $\mathbb{K}$-endomorphisme D de L est une **dérivation** de μ si l'on a :

$$\forall\, a, b \in \mathrm{L}, \qquad \mathrm{D}(ab) = \mathrm{D}(a)b + a\mathrm{D}(b).$$

Dans ce cas, on montre par récurrence que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\mathrm{D}^n(ab) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \mathrm{D}^j(a)\mathrm{D}^{n-j}(b),$$

avec la convention $\mathrm{D}^0 = \mathrm{id}_\mathrm{L}$. D'autre part, on peut considérer l'élément de $\mathrm{GL}(\mathrm{L})$ suivant :

$$\exp(\mathrm{D}) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\mathrm{D}^n}{n!}.$$

Alors, pour tout $a, b \in \mathrm{L}$, on a :

$$\exp(\mathrm{D})(ab) = \sum_{n\geqslant 0}\sum_{j=0}^{n} \frac{\mathrm{D}^j(a)}{j!}\,\frac{\mathrm{D}^{n-j}(b)}{(n-j)!} = \exp(\mathrm{D})(a) \cdot \exp(\mathrm{D})(b),$$

c.-à-d., $\exp(\mathrm{D})$ est un **automorphisme** de l'algèbre L munie du produit μ.

Définition 2.25. — Le sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(\mathrm{L})$ engendré par les $\exp(\mathrm{D})$, pour D une dérivation de μ, est un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}(\mathrm{L})$, appelé le groupe des **automorphismes intérieurs** de L.

***Théorème 2.26* (Conjugaison des sous-algèbres de Cartan)**

Soit $\mathfrak{g}$ une $\mathbb{C}$-algèbre de Lie de dimension finie.

1) *Toute sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ est de la forme $\mathfrak{g}_{(0)}(x)$, pour x un élément régulier de $\mathfrak{g}$.*

2) *Toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$ sont conjuguées par le groupe des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. — Pour le moment, on renvoie au livre de Serre : [**Se**, Chap. III, § 4]. □

2.4. Critère de Cartan. —

***Théorème 2.27* (Critère de résolubilité de Cartan)**. — *Soit* V *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $\mathfrak{g}$ *une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{gl}(\mathrm{V})$. *On suppose que :*

$$\forall\, x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \qquad \mathrm{Tr}_\mathrm{V}(x^2) = 0.$$

Alors $\mathfrak{g}$ est résoluble.

Démonstration. — Pour la démonstration donnée en cours, utilisant les sous-algèbres de Cartan, on renvoie, pour le moment, à [**Jac**, Chap. III, § 4].

Pour d'autres démonstrations, voir [**BL1**, § 5, no.4] ou [**Hu**, § 4.3] ou [**Ho**, XI, Th.1.6]. (En fait, ces auteurs démontrent un résultat apparemment plus faible, mais en fait équivalent, car si $\mathscr{D}(\mathfrak{g})$ est résoluble, alors $\mathfrak{g}$ l'est aussi.) □

***Corollaire 2.28* (Critère de Cartan).** — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie de dimension finie, soit* K *sa forme de Killing. Si l'on a, pour tout* $x \in \mathscr{D}(\mathfrak{g})$,

$$0 = \mathrm{K}(x, x) = \mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}(x)^2,$$

alors $\mathfrak{g}$ *est résoluble.*

Démonstration. — D'après le théorème précédent appliqué à $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, on obtient que $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$ est résoluble. Comme $\mathrm{Ker}\,\mathrm{ad} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est abélien, il résulte de la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \longrightarrow 0$$

que $\mathfrak{g}$ est résoluble (d'après la proposition 1.26). □

On peut maintenir introduire la « définition officielle » des algèbres de Lie semi-simples (c.-à-d., celle qui est valable en caractéristique arbitraire).

***Définition 2.29*.** — Soient k un corps arbitraire et $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie de dimension finie. On dit que $\mathfrak{g}$ est **semi-simple** si $\mathfrak{g}$ ne contient pas d'idéal résoluble non nul.

On déduit alors de ce qui précède le théorème suivant.

***Théorème 2.30* (Critère de semi-simplicité de Cartan).** — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une* $\mathbb{C}$*-algèbre de Lie de dimension finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *La forme de Killing* $\mathrm{K}_{\mathfrak{g}}$ *est non dégénérée.*

b) $\mathfrak{g}$ *est somme directe d'idéaux simples.*

c) $\mathfrak{g}$ *est semi-simple, c.-à-d., ne contient pas d'idéal résoluble* $\neq 0$.

Démonstration. — On a déjà vu que les implications a) ⇒ b) ⇒ c) sont vraies sur un corps arbitraire (théorème 1.39). Montrons que c) ⇒ a lorsque $k = \mathbb{C}$.

Supposons que $\mathfrak{g}$ est semi-simple, c.-à-d., ne contient pas d'idéal résoluble $\neq 0$. En particulier, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ et donc $\mathfrak{g}$ s'identifie à $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Notons $\mathfrak{h}$ le noyau de la forme de Killing ; c'est un idéal de $\mathfrak{g}$ (1.31) et l'on a

$$0 = \mathrm{K}_{\mathfrak{g}}(x, x) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}(x)^2),$$

pour tout $x \in \mathfrak{h}$, *a fortiori* pour tout $x \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$. Donc, il résulte du théorème 2.27 que $\mathfrak{h}$ est résoluble, d'où $\mathfrak{h} = 0$. Le théorème est démontré. □

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.

[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap.1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.

[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[GH] M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.

[He] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.