SUPPLÉMENT : GROUPES RÉDUCTIFS ET DONNÉES RADICIELLES

23. Groupes réductifs et semi-simples : un aperçu

23.1. Exemples de groupes réductifs. —

Lemme 23.1. — *Soient* V *un* k*-espace vectoriel de dimension finie et* G *un sous-groupe fermé de* GL(V)*. On suppose que* V *est un* G*-module simple. Alors* G *est réductif.*

Démonstration. — Soit $\mathrm{N} = \mathscr{R}_u(\mathrm{G})$. Comme N est normal, V^{N} est un sous-module de V, non nul d'après le théorème de Lie-Kolchin 18.4. Donc, puisque V est simple, $\mathrm{V}^{\mathrm{N}} = \mathrm{V}$. Puisque N est un sous-groupe de GL(V), il vient $\mathrm{N} = \{1\}$. □

Corollaire 23.2. — GL(V)*,* SL(V)*, le groupe spécial orthogonal* SO(V)*, et le groupe symplectique* SP(V) (*si* V *est de dimension paire*) *sont des groupes réductifs.*

Démonstration. — C'est clair pour GL(V) et SL(V), qui agissent transitivement sur $\mathrm{V} \setminus \{0\}$. Il en est de même pour SP(V), si dim(V) est pair. On sait aussi que SO(V) agit transitivement sur l'ensemble des vecteurs non-nuls de norme donnée, et on en déduit facilement la simplicité de V. □

23.2. Données radicielles. —

Définition 23.3. — Une **donnée radicielle** est un quadruplet $(\mathrm{M}, \mathrm{M}^\vee, \mathrm{R}, \mathrm{R}^\vee)$, où :

a) M et $\mathrm{M}^\vee$ sont deux $\mathbb{Z}$-modules libres de rang fini, en dualité par un couplage parfait $\langle\ ,\ \rangle$,

---

[0] version du 7/12/06

[1] Ce chapitre supplémentaire est un complément ; il n'a pas été traité en cours.

b) R et $\mathrm{R}^\vee$ sont des sous-ensembles de M et $\mathrm{M}^\vee$, en bijection par une application $\alpha \mapsto \alpha^\vee$, et vérifiant, pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ et

$$s_\alpha \mathrm{R} = \mathrm{R}, \qquad s_{\alpha^\vee} \mathrm{R}^\vee = \mathrm{R}^\vee,$$

où s_α et $s_{\alpha^\vee}$ sont les réflexions définies, pour $m \in \mathrm{M}$ et $m^\vee \in \mathrm{M}^\vee$, par :

$$s_\alpha(m) = m - \langle m, \alpha^\vee \rangle \alpha, \qquad s_{\alpha^\vee}(m^\vee) = m^\vee - \langle \alpha, m^\vee \rangle \alpha^\vee.$$

On dit que la donnée radicielle est **réduite** si elle vérifie de plus la condition suivante : si $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ sont telles que $\mathbb{Z}\alpha = \mathbb{Z}\beta$, alors $\beta = \pm\alpha$. Dans la suite, n'interviendront que des données radicielles réduites, et l'on parlera simplement de **données radicielles**.

Remarque 23.4. — 1) La condition $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ implique $\alpha \neq 0$, pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$.

2) Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathrm{M} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ engendré par R. Alors R est un système de racines dans V, et $\mathrm{R}^\vee$ s'identifie au système de racines dual dans V^*, cf. [**BL4-6**, § VI.1] ou [**Hu**, Chap. III].

***Définition 23.5* (Réseaux des racines et des poids)**. — Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, R un système de racines dans V, et $\mathrm{R}^\vee$ le système de racines dual dans V^*.

1) On note $\mathrm{Q}(\mathrm{R})$ le sous-groupe de V engendré par R ; c'est un réseau de V, appelé le **réseau des racines**. De même, $\mathrm{Q}(\mathrm{R}^\vee)$ est un réseau dans V^*, appelé le réseau des coracines.

2) On pose $\mathrm{P}(\mathrm{R}) := \{\lambda \in \mathrm{V} \mid \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z},\ \forall\, \alpha^\vee \in \mathrm{R}^\vee\}$. C'est un réseau de V, contenant $\mathrm{Q}(\mathrm{R})$, et appelé le **réseau des poids**.

Définition et proposition 23.6. — *Une donnée radicielle* $(\mathrm{M}, \mathrm{M}^\vee, \mathrm{R}, \mathrm{R}^\vee)$ *est dite* **semi-simple** *si* $\mathrm{Q}(\mathrm{R})$ *a même rang que* M. (*On peut montrer que ceci a lieu si, et seulement si* $\operatorname{rg} \mathrm{Q}(\mathrm{R}^\vee) = \operatorname{rg} \mathrm{M}^\vee$*, c.-à-d., la condition est symétrique en* R *et* $\mathrm{R}^\vee$.)

Dans ce cas, on a $\mathrm{Q}(\mathrm{R}) \subseteq \mathrm{M} \subseteq \mathrm{P}(\mathrm{R})$*, et* $\mathrm{M}^\vee$*, étant le réseau dual de* M*, est déterminé par*

$$\mathrm{M}^\vee = \{\eta \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{P}(\mathrm{R}), \mathbb{Z}) \mid \eta(\mathrm{M}) \subseteq \mathbb{Z}\}.$$

Par conséquent, $(\mathrm{M}, \mathrm{M}^\vee, \mathrm{R}, \mathrm{R}^\vee)$ *est déterminée par la donnée de* M *et* R *ou encore, de façon équivalente, par la donnée de* R *et d'un sous-groupe du groupe fini* $\mathrm{P}(\mathrm{R})/\mathrm{Q}(\mathrm{R})$.

Par abus de language, nous dirons qu'une **donnée radicielle semi-simple** *est une paire* (R, M)*, où* R *est un système de racines dans un* $\mathbb{Q}$*-espace vectoriel* V*, et où* M *est un réseau de* V *tel que* $\mathrm{Q}(\mathrm{R}) \subseteq \mathrm{M} \subseteq \mathrm{P}(\mathrm{R})$.

23.3. Exemple : données radicielles de GL_n, SL_n et PGL_n. —

23.3.1. GL_n. — Soient $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_n$ et T, resp. B, resp. U, le sous-groupe des matrices diagonales, resp. triangulaires supérieures, resp. triangulaires supérieures et unipotentes.

Alors B est résoluble et connexe (car isomorphe à $(k^*)^n \times k^{n(n-1)/2}$). De plus, G/B est isomorphe à la variété des drapeaux $\mathscr{F}(\mathrm{V})$, qui est projective. Donc B est un sous-groupe de Borel de G. On voit facilement que $\mathrm{B}_u = \mathrm{U}$ et que $\mathrm{B} = \mathrm{TU}$. Donc T est un tore maximal de G. On a

$$\mathrm{X(T)} = \mathbb{Z}\varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_n, \qquad \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}) = \mathbb{Z}\eta_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\eta_n, \tag{1}$$

où ε_i est la i-ème projection $\mathrm{T} \to k^*$, et où $\eta_i(t)$ est la matrice diagonale dont tous les termes valent 1 sauf le i-ème qui vaut t. On a

$$\langle \varepsilon_i, \eta_j \rangle = \delta_{i,j},$$

c.-à-d., $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ sont des bases duales l'une de l'autre.

On sait que le commutant d'une matrice diagonale à valeurs propres distinctes se réduit à T, et donc $\mathrm{T} = \mathrm{C_G(T)}$. D'autre part, on voit sans difficulté que $\mathrm{N_G(T)}$ est le groupe des matrices monômiales. Donc $\mathrm{W} := \mathrm{N_G(T)/T}$ est le groupe symétrique S_n ; il agit sur X(T) et $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$ en permutant les ε_i et les η_i.

Soient $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie(G)}$, $\mathfrak{b} = \mathrm{Lie(B)}$ et $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie(T)}$. Alors

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} k\mathrm{E}_{i,j}, \quad \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{1 \leqslant i < j \leqslant n} k\mathrm{E}_{i,j}$$

et, pour tout $t \in \mathrm{T}$, l'on a

$$\mathrm{Ad}(t)\mathrm{E}_{i,j} = (\varepsilon_i - \varepsilon_j)(t)\mathrm{E}_{i,j},$$

c.-à-d., $\mathrm{E}_{i,j}$ est un élément de $\mathfrak{g}$ de poids $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ pour l'action adjointe de T.

Posons

$$\begin{aligned} \mathrm{R} &= \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\} \\ \mathrm{R}^\vee &= \{\eta_i - \eta_j \mid 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\}. \end{aligned}$$

On vérifie que $(\mathrm{X(T)}, \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}), \mathrm{R}, \mathrm{R}^\vee)$ est une donnée radicielle : la réflexion associée à $\varepsilon_i - \varepsilon_j$ (resp. $\eta_i - \eta_j$) est la permutation qui échange ε_i et ε_j (resp. η_i et η_j).

Posons $\mathrm{V} = \mathrm{X(T)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$.

23.3.2. SL_n. — Soit $\mathrm{G}_1 = \mathrm{SL}_n$. On vérifie que $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B} \cap \mathrm{G}_1$ est un sous-groupe de Borel, et $\mathrm{T}_1 = \mathrm{T} \cap \mathrm{G}_1$ un tore maximal, de G_1, et l'on a $\mathrm{B}_1 = \mathrm{T}_1\mathrm{U}$. La restriction du déterminant au tore T de GL_n est le caractère $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$; on en déduit que

$$\begin{cases} \mathrm{X}(\mathrm{T}_1) = (\mathbb{Z}\varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\varepsilon_n)/\mathbb{Z}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n), \\ \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}_1) = \{a_1\eta_1 + \cdots + a_n\eta_n \mid a_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^n a_i = 0\}. \end{cases} \tag{2}$$

Notons $\overline{\varepsilon}_i$ la restriction de ε_i à T_1. Les $\overline{\varepsilon}_i - \overline{\varepsilon}_j$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ forment dans $\overline{\mathrm{V}} = \mathrm{V}/\mathbb{R}(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n)$ un système de racines de type A_{n-1}. Les $\eta_i - \eta_j$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ forment le système dual $\mathrm{R}^\vee$. Ici, $\mathrm{R}^\vee$ engendre $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}_1)$, tandis que $\mathrm{X}(\mathrm{T}_1) = \mathrm{P}(\mathrm{R})$ et $\mathrm{X}(\mathrm{T}_1)/\mathrm{Q}(\mathrm{R}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (le vérifier).

23.3.3. PGL_n. — Soit $\pi : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{PGL}_n =: \mathrm{G}_2$. Alors $\mathrm{B}_2 = \pi(\mathrm{B})$ est un sous-groupe de Borel, et $\mathrm{T}_2 = \pi(\mathrm{T})$ un tore maximal, de G_2. Via π^*, $\mathrm{X}(\mathrm{T}_2)$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{X}(\mathrm{T})$, et on a

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathrm{X}(\mathrm{T}_2) \cong \{a_1\varepsilon_1 + \cdots + a_n\varepsilon_n \mid a_i \in \mathbb{Z},\ \sum_{i=1}^n a_i = 0\}, \\ \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}_2) = (\mathbb{Z}\eta_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\eta_n)/\mathbb{Z}(\eta_1 + \cdots + \eta_n). \end{cases}$$

Posons $\overline{\eta}_i = \pi \circ \eta_i$. Les $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ forment un système de racines de type A_{n-1}, et les $\overline{\eta}_i - \overline{\eta}_j$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ forment le système dual $\mathrm{R}^\vee$. Ici, R engendrent $\mathrm{X}(\mathrm{T}_2)$, tandis que $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}_2) = \mathrm{P}(\mathrm{R}^\vee)$ et $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}_2)/\mathrm{Q}(\mathrm{R}^\vee) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (le vérifier).

23.4. Centralisateurs infinitésimaux d'éléments semi-simples. — Si G est un groupe réductif et T un tore maximal de G, un résultat important est que, pour l'action adjointe de T sur $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, l'espace de poids 0 :

$$\mathfrak{g}^{\mathrm{T}} := \{\mathrm{X} \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(t)(\mathrm{X}) = \mathrm{X}, \quad \forall\, t \in \mathrm{T}\}$$

égale $\mathrm{Lie}\,\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$. Ceci est une conséquence du théorème suivant (ou de son corollaire).

Théorème 23.7. — *Soient* K *un groupe algébrique affine,* G *un sous-groupe fermé connexe,* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, S *un sous-groupe abélien* (*non nécessairement fermé*) *de* K *formé d'éléments semi-simples et normalisant* G. *On note*

$$\begin{aligned} \mathrm{G}^{\mathrm{S}} &= \{g \in \mathrm{G} \mid sgs^{-1} = g, \forall\, s \in \mathrm{S}\}, \\ \mathfrak{g}^{\mathrm{S}} &= \{\mathrm{X} \in \mathfrak{g} \mid (\mathrm{Ad}\, s)\mathrm{X} = \mathrm{X}, \forall\, s \in \mathrm{S}\}. \end{aligned}$$

Alors $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}^{\mathrm{S}}) = \mathfrak{g}^{\mathrm{S}}$.

Corollaire 23.8. — *Soient* G *un groupe algébrique affine connexe,* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, *et* S *un sous-groupe fermé, diagonalisable, de* G. *Alors* $\mathfrak{g}^{\mathrm{S}} = \mathrm{Lie}(\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S}))$.

Bien que le corollaire soit le résultat en vue (et un cas particulier du théorème), l'énoncé du théorème se prête mieux à une démonstration par récurrence. Commençons par démontrer la

Proposition 23.9. — *Soient* $\mathrm{G} \subseteq \mathrm{K}$ *des groupes algébriques affines,* $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{k}$ *leurs algèbres de Lie, s un élément semi-simple de* K *normalisant* G. *Alors, avec les notations du théorème, on a* $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}^s) = \mathfrak{g}^s$.

Démonstration. — Plongeant K dans un GL(V), on se ramène au cas où $K = GL(V)$. On peut alors supposer que $s = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r)$, où chaque λ_i apparaît n_i fois. Alors, un calcul direct montre que

$$K^s = \prod_{i=1}^r GL_{n_i} \quad \text{et} \quad \operatorname{Lie}(K^s) = \prod_{i=1}^r \mathfrak{gl}_{n_i} = \mathfrak{k}^s.$$

D'autre part, $\operatorname{Ad} s$ est un automorphisme semi-simple de $\mathfrak{k}$, et l'on a $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}^s \oplus \mathfrak{m}$, où $\mathfrak{m}$ est la somme directe des espaces propres de $\operatorname{Ad} s$ pour les valeurs propres $\neq 1$. Notons $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}} s$ la restriction de $\operatorname{Ad} s$ à $\mathfrak{g}$.

Considérons le morphisme $\varphi : K \to K, h \mapsto hsh^{-1}s^{-1}$ et posons $M = \operatorname{Im} \varphi$. Alors M est le translaté par s^{-1} de la classe de conjugaison de s, c'est donc une sous-variété localement fermée, de dimension égale à $\dim(K/K^s)$.

D'autre part, φ est la composée des morphismes

$$K \xrightarrow{(\mathrm{id},\theta)} K \times K \xrightarrow{\ \mu\ } K,$$

où $\theta(h) = sh^{-1}s^{-1}$, et μ est la multiplication. Comme $\theta = (\operatorname{Ad} s) \circ i$, où $i(h) = h^{-1}$, on en déduit que $d\varphi = \mathrm{id} + d\theta = \mathrm{id} - \operatorname{Ad} s$. Donc $\operatorname{Ker} d\varphi = \mathfrak{k}^s = \operatorname{Lie}(K^s)$. Par conséquent, pour une raison de dimension, $d\varphi : \mathfrak{k} \to T_eM$ est surjective, et T_eM s'identifie à $\mathfrak{m}$.

Notons ψ la restriction de φ à G ; alors $d\psi = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}} - \operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}} s$. D'autre part, ψ est constante sur G^s et donc $\operatorname{Lie}(G^s) \subseteq \operatorname{Ker} d\psi = \mathfrak{g}^s$. Pour montrer l'égalité, il suffit de montrer que $\dim \mathfrak{g}^s \leqslant \dim G^s$.

Soit $M' = \operatorname{Im} \psi = \{gsg^{-1}s^{-1} \mid g \in G\}$. Comme précédemment, M' est une sous-variété localement fermée de dimension $\dim(G) - \dim(G^s)$. De plus, comme s normalise G alors $M' \subseteq G \cap M$, et donc $T_eM' \subseteq T_eG \cap T_eM = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}$. Par conséquent, $\dim(\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}) \geqslant \dim(M')$.

D'autre part, comme $\operatorname{Ad} s$ est semi-simple et comme $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}^s \oplus \mathfrak{m}$ est la décomposition en sous-espaces propres, on a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^s \oplus (\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m})$. Par conséquent,

$$\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^s = \dim(\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m}) \geqslant \dim M' = \dim(G/G^s) = \dim \mathfrak{g} - \dim G^s.$$

La proposition en résulte. □

On peut maintenant démontrer le théorème, par récurrence sur $\dim G$. Si $G^S = G$ alors $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}} s = \mathrm{id}$, pour tout $s \in S$, et donc $\mathfrak{g}^S = \mathfrak{g}$. Sinon, soit $s \in S$ tel que $G^s \neq G$. Posons $H = (G^s)^0$ et $\mathfrak{h} = \operatorname{Lie}(H)$. Comme S est abélien, on voit aussitôt que S normalise G^s, et donc H.

D'après la proposition, on a $\mathfrak{g}^s = \mathfrak{h}$, d'où $\mathfrak{g}^S = \mathfrak{h}^S$. D'autre part, par hypothèse de récurrence, on a $\mathfrak{h}^S = \operatorname{Lie}(H^S)$. Enfin, $\operatorname{Lie}(H^S) \subseteq \operatorname{Lie}(G^S)$, puisque $H^S \subseteq G^S$. On déduit de cela que $\mathfrak{g}^S = \operatorname{Lie}(G^S)$. Le théorème est démontré. □

Exercice 23.10. — Supposons $\operatorname{car}(k) = 2$. Soient $G = SL_2$, B un Borel, et $x \in B_u \setminus \{1\}$. Montrer que $G^x = B_u$, mais que $\operatorname{Lie}(G)^x = \operatorname{Lie}(B)$.

23.5. Un aperçu de la structure des groupes réductifs. — Soient G un groupe réductif connexe, T un tore maximal de G, et $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ leurs algèbres de Lie. D'après le théorème de Chevalley-Luna, on a $\mathrm{C}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$ (cf. Corollaire 22.4) ; combiné avec le corollaire 23.8, ceci entraîne $\mathfrak{g}^{\mathrm{T}} = \mathfrak{h}$. On peut donc écrire

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathfrak{g}_\alpha$$

où R est un sous-ensemble fini de $\mathrm{X}(\mathrm{T}) \setminus \{0\}$. Le but de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 23.11. — *Soient* G *un groupe réductif connexe,* T *un tore maximal,* $\mathrm{W}(\mathrm{G},\mathrm{T}) = \mathrm{N}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\mathrm{T}$ *le groupe de Weyl associé,* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$*,* $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(\mathrm{T})$*, et* R *l'ensemble des poids non-nuls de* T *dans* $\mathfrak{g}$*. Alors,* on sait déjà que $\mathfrak{g}^{\mathrm{T}} = \mathfrak{h}$, d'où

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\mathrm{T}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathfrak{g}_\alpha$$

et

(1) $(\mathrm{X}(\mathrm{T}), \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}), \mathrm{R}, \mathrm{R}^\vee)$ *est une donnée radicielle et* $\mathrm{W}(\mathrm{G},\mathrm{T})$ *s'identifie au groupe de Weyl de* R*.*

(2) *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$*, on a* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$*, et il existe un unique sous-groupe fermé unipotent connexe* U_α*, normalisé par* T*, et tel que* $\mathrm{Lie}(\mathrm{U}_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$*.*

(3) G *est engendré par* T *et les* U_α*,* $\alpha \in \mathrm{R}$*.*

(4) *Les sous-groupes de Borel contenant* T *sont en bijection avec* W *et avec les chambres de Weyl* (*et les bases*) *de* R*.*

La démonstration se fait en plusieurs étapes. Il faut d'abord traiter le cas des groupes réductifs de rang 1, au sens de la définition ci-dessous.

Définition 23.12 **(Rang et rang réductif ou semi-simple)**. — Soit G un groupe algébrique affine.

a) On appelle **rang** de G la dimension d'un tore maximal de G.

b) On appelle **rang réductif** de G le rang de $\mathrm{G}/\mathscr{R}_u(\mathrm{G})$, qu'on note $\mathrm{rg}_{\mathrm{réd}}(\mathrm{G})$.

c) On appelle **rang semi-simple** de G le rang de $\mathrm{G}/\mathscr{R}(\mathrm{G})$, qu'on note $\mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}(\mathrm{G})$.

Remarque 23.13. — Soit G connexe. Si $\mathrm{rg}(\mathrm{G}) = 0$, alors G est unipotent. En effet, soit B un sous-groupe de Borel de G. Alors B est unipotent donc nilpotent, et $\mathrm{G} = \mathrm{B}$ d'après la proposition 20.21.

23.6. Radical d'un groupe réductif connexe. —

Proposition 23.14. — *Soit* G *réductif connexe.*

a) $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ *est un tore, égal à* $\mathrm{Z}(\mathrm{G})^0$, *et* $\mathrm{rgss}(\mathrm{G}) = \mathrm{rg}(\mathrm{G}) - \dim \mathrm{Z}(\mathrm{G})^0$.

b) $\mathrm{Z}(\mathrm{G}) \cap \mathscr{D}(\mathrm{G})$ *est fini.*

c) $\mathscr{D}(\mathrm{G})$ *est semi-simple, et* $\mathrm{rg}\,\mathscr{D}(\mathrm{G}) \leqslant \mathrm{rgss}(\mathrm{G})$

Démonstration. — a) $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ est résoluble connexe, et $\mathscr{R}(\mathrm{G})_u = \{1\}$. Donc $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ est un tore. Il est normalisé par G, donc est central d'après le théorème de rigidité 16.14. Donc $\mathscr{R}(\mathrm{G}) \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{G})^0$, et l'inclusion réciproque est évidente. De plus, $\mathscr{R}(\mathrm{G}) = \mathrm{Z}(\mathrm{G})^0$ est contenu dans un tore maximal T, et $\mathrm{T}/\mathscr{R}(\mathrm{G})$ est un tore maximal de $\mathrm{G}/\mathscr{R}(\mathrm{G})$, d'après le théorème 20.19. La deuxième assertion de a) en découle.

Pour b), il suffit de montrer que $\mathrm{Z}(\mathrm{G})^0 \cap \mathscr{D}(\mathrm{G})$ est fini. Posons $\mathrm{Z}(\mathrm{G})^0 = \mathrm{S}$. On plonge G dans un GL(V). Alors il existe $\chi_1, \dots, \chi_r \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$ tels que $\mathrm{V} = \mathrm{V}_{\chi_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{V}_{\chi_r}$. Comme G commute à S, alors

$$\mathrm{G} \subseteq \prod_{i=1}^{r} \mathrm{GL}(\mathrm{V}_{\chi_i}), \quad \text{d'où} \quad \mathscr{D}(\mathrm{G}) \subseteq \prod_{i=1}^{r} \mathrm{SL}(\mathrm{V}_{\chi_i}).$$

L'assertion en découle. Voyons c). Soit R le radical de $\mathscr{D}(\mathrm{G})$. Il est stable par tout automorphisme de $\mathscr{D}(\mathrm{G})$ et est donc un sous-groupe normal de G. Il en résulte que $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{G})^0$; alors R est fini, donc trivial. Donc $\mathscr{D}(\mathrm{G})$ est semi-simple. De plus, si T' est un tore maximal de $\mathscr{D}(\mathrm{G})$, alors $\mathrm{T}'\mathrm{Z}(\mathrm{G})^0$ est un tore de G, de dimension $\dim \mathrm{T}' + \dim \mathrm{Z}(\mathrm{G})^0$. Donc $\mathrm{rg}\,\mathscr{D}(\mathrm{G}) \leqslant \mathrm{rg}_{\mathrm{ss}}(\mathrm{G})$. □

Remarque 23.15. — En fait, on a l'égalité dans l'assertion c) de la proposition, comme on le verra plus loin (28.3).

24. Fibrés vectoriels et applications

La lecture de cette section peut être omise : la notion de fibré vectoriel et les résultats s'y rapportant ne sont utilisés que pour les théorèmes 24.15 et 25.4 qui classifient les groupes connexes de dimension 1 ($\mathbb{G}_a$ ou $\mathbb{G}_m$) et les groupes connexes semi-simples de rang 1 (SL_2 ou PGL_2). Ces deux résultats de classification peuvent être admis.

24.1. Fibrés vectoriels algébriques. — Soit X une variété algébrique. Introduisons pour un instant la notion suivante.

Une **fibration vectorielle** (de rang r) sur X est la donnée d'une variété E et d'un morphisme surjectif $\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{X}$ tels que toute fibre de π soit munie d'une structure d'espace vectoriel de dimension r. L'exemple trivial est le cas où $\mathrm{E} = \mathrm{X} \times \mathrm{V}$, pour V un k-espace vectoriel de dimension r.

Un **morphisme de fibrations** $(\mathrm{E}, \pi) \to (\mathrm{E}', \pi')$ est un morphisme de variétés $\phi : \mathrm{E} \to \mathrm{E}'$ tel que $\pi' \circ \phi = \pi$ (i.e. ϕ préserve les fibres), et chaque restriction $\phi_x : \pi^{-1}(x) \to \pi'^{-1}(x)$ est linéaire.

Définition 24.1. — Un **fibré vectoriel algébrique** sur X est une fibration vectorielle (E, π) qui est localement triviale, c.-à-d., qui satisfait la condition de trivialité locale ci-dessous :

$$(*^{\mathrm{TL}}) \qquad \begin{cases} \text{il existe un recouvrement ouvert } \mathrm{X} = \mathrm{U}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{U}_n, \\ \text{et un isomorphisme de fibrations : } \mathrm{U}_i \times k^r \cong \pi^{-1}(\mathrm{U}_i). \end{cases}$$

Souvent on dira simplement que « E est un fibré (de rang r) sur X », et si $r = 1$ on dira que E est un **fibré en droites**.

***Définition 24.2* (Sections)**. — Si $\mathrm{E} = (\mathrm{E}, \pi)$ est un fibré sur X, une section (globale) de E est un morphisme $\sigma : \mathrm{X} \to \mathrm{E}$ tel que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathrm{X}}$. Plus généralement, pour tout ouvert U de X notons $\mathscr{S}_{\mathrm{E}}(\mathrm{U})$ l'ensemble des sections (locales) de E au-dessus de U, c.-à-d., des morphismes $\sigma : \mathrm{U} \to \pi^{-1}(\mathrm{U})$ tels que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathrm{U}}$.

Il résulte de la condition $(*^{\mathrm{TL}})$ que, si $s, s' \in \mathscr{S}_{\mathrm{E}}(\mathrm{U})$, et $f, g \in \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})$, alors l'application $fs + gs' : x \mapsto f(x)s(x) + g(x)s'(x) \in \pi^{-1}(x)$ est un morphisme, et donc un élément de $\mathscr{S}_{\mathrm{E}}(\mathrm{U})$. Donc $\mathscr{S}_{\mathrm{E}}(\mathrm{U})$ est un module sur $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})$. En particulier, c'est un k-espace vectoriel, il contient toujours la **section nulle**, notée s_0. On vérifie que $\mathscr{S}_{\mathrm{E}}$ est un faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules, appelé le **faisceau des sections** (locales) de E.

Si $\mathrm{E} = \mathrm{X} \times \mathrm{V}$ est un fibré trivial, on voit aussitôt que l'ensemble des sections globales est un $k[\mathrm{X}]$-module libre, isomorphe à $k[\mathrm{X}] \otimes \mathrm{V}$. Revenant au cas général, on en déduit que, pour chaque ouvert U au-dessus duquel E est trivial, on a $\mathscr{S}_{\mathrm{E}}|_{\mathrm{U}} \cong \mathscr{O}_{\mathrm{U}}^{\oplus r}$. On a donc obtenu la

Proposition 24.3. — *$\mathscr{S}_{\mathrm{E}}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module localement libre de rang r (c.-à-d., localement isomorphe à $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}^{\oplus r}$).*

On pose $\Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{E}) = \Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{S}_{\mathrm{E}}) = \mathscr{S}_{\mathrm{E}}(\mathrm{X})$. C'est un espace vectoriel, dont le zéro est la section nulle s_0. Observons au passage que $s_0(\mathrm{X})$ est une sous-variété fermée, isomorphe à X (vérification locale). On dit que E possède des sections non-triviales si $\Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{E}) \neq 0$.

***Définition 24.4* (Zéros d'une section)**. — 1) Si $s \in \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{E})$, on dit que $x \in \mathrm{X}$ est un **zéro de** s si $s(x)$ est l'élément nul de $\pi^{-1}(x)$.

2) Si E est un fibré en droites, on peut définir l'**ordre d'annulation de** s **en** x de la façon suivante. On choisit un isomorphisme $\varphi : \mathrm{U} \times k \cong \pi^{-1}(\mathrm{U})$, où U est un voisinage ouvert affine de x assez petit, et on note s_1 l'élément de $\mathscr{S}(\mathrm{U})$ correspondant par cet isomorphisme à la fonction constante 1. Alors

$\mathscr{S}(\mathrm{U}) = k[\mathrm{U}]s_1$ et donc il existe $\phi \in k[\mathrm{U}]$ tel que $s = \phi s_1$; alors l'ordre d'annulation de s en x est le plus grand n tel que $\phi \in \mathfrak{m}_x^n$, où $\mathfrak{m}_x$ est l'idéal maximal de $k[\mathrm{U}]$ correspondant à x. Si φ' est un autre isomorphisme, on obtient un autre générateur s_1' du $k[\mathrm{U}]$-module $\mathscr{S}(\mathrm{U})$, d'où $s_1 = \psi s_1'$ et $s = \phi\psi s_1'$, pour une fonction $\psi \in k[\mathrm{U}]$ inversible. Donc l'ordre d'annulation de s en x est bien défini ; on dira aussi que x est un **zéro de s d'ordre** n.

24.2. Le fibré associé à un module localement libre. — Soit X une variété algébrique affine irréductible, $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}]$, et M un A-module de type fini. Son algèbre tensorielle est par définition :

$$\mathrm{T_A(M)} = \mathrm{A} \oplus \mathrm{M} \oplus (\mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{M}) \oplus (\mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathrm{M}) \oplus \cdots$$

et son algèbre symétrique est $\mathrm{S_A(M)} = \mathrm{T_A(M)/I}$, où I désigne l'idéal engendré par les éléments $m_1 \otimes m_2 - m_2 \otimes m_1$, pour $m_1, m_2 \in \mathrm{M}$. Comme M est de type fini, on voit facilement que $\mathrm{S_A(M)}$ est une A-algèbre commutative de type fini, et donc aussi une k-algèbre commutative de type fini. De plus, comme I est engendré par des éléments homogènes (de degré 2), alors $\mathrm{S_A(M)}$ est graduée :

$$\mathrm{S_A(M)} = \mathrm{A} \oplus \mathrm{M} \oplus \mathrm{S_A^2(M)} \oplus \mathrm{S_A^3(M)} \oplus \cdots$$

De plus, $\mathrm{S_A(M)}$ a la propriété universelle suivante :

$$\mathrm{Hom_A(M, B)} = \mathrm{Hom_{A\text{-alg}}(S_A(M), B)},$$

pour toute A-algèbre commutative B. Introduisons aussi le A-module $\mathrm{M}^\vee = \mathrm{Hom_A(M, A)}$.

Lemme 24.5. — a) *L'inclusion* $\mathrm{M} \subset \mathrm{S_A(M)}$ *induit un isomorphisme de* A-*modules :*

$$\mathrm{Hom_{A\text{-alg.}}(S_A(M), A)} \cong \mathrm{M}^\vee := \mathrm{Hom_A(M, A)}.$$

b) *Si* V *est un k-espace vectoriel, la structure d'algèbre graduée de* S(V) *munit* Max S(V) *d'une structure d'espace vectoriel, isomorphe à* V^*.

Démonstration. — b) est évidemment un cas particulier de a) (prendre $\mathrm{A} = k$). Voyons a). La structure d'algèbre graduée de $\mathrm{S_A(M)}$ fournit l'inclusion $\mathrm{M} \subset \mathrm{S_A(M)}$. Alors la propriété universelle de $\mathrm{S_A(M)}$ fournit une identification canonique $\mathrm{Hom_{A\text{-alg.}}(S_A(M), A)} = \mathrm{Hom_A(M, A)}$. □

Supposons désormais que M soit localement libre de rang r, c.-à-d., que, pour tout $x \in \mathrm{X}$, $\mathrm{M}_x := \mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ soit un $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$-module libre de rang r (2).

(2) On peut montrer qu'alors M est projectif. Réciproquement, tout A-module projectif est localement libre de rang r, où $r = \dim_{k(\mathrm{X})}(\mathrm{M} \otimes_\mathrm{A} k(\mathrm{X}))$.

Alors, on peut montrer (voir [Bo, AG.16.3]) que $\mathrm{S_A(M)}$ est intègre, et localement isomorphe à une algèbre de polynômes $\mathrm{A[T_1, \ldots, T_r]}$, c.à.d., il existe $f_1, \ldots, f_s \in \mathrm{A}$ tels que

$$(*) \qquad \mathrm{X} = \bigcup_i \mathrm{D}(f_i) \quad \text{et} \quad \mathrm{S_A(M)}_{f_i} \cong \mathrm{A}_{f_i}[\mathrm{T_1, \ldots, T_r}].$$

Considérons la variété affine $\mathrm{E(M)} := \mathrm{Max\,S_A(M)}$. Alors $\mathrm{E(M)}$ est un fibré vectoriel de rang r sur X. En effet, le morphisme d'algèbres $\tau : \mathrm{A} \to \mathrm{S_A(M)}$ induit un morphisme $\pi : \mathrm{E(M)} \to \mathrm{X}$. Pour tout x, on a un isomorphisme naturel d'algèbres graduées $\mathrm{S_A(M)} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/\mathfrak{m}_x \cong \mathrm{S}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/\mathfrak{m}_x)$. Notant $\Theta(\mathrm{B}) = \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(\mathrm{B}, k)$ pour toute k-algèbre B, on obtient alors des isomorphismes naturels :

$$\pi^{-1}(x) \cong \Theta\big(\mathrm{S_A(M)} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/\mathfrak{m}_x\big) \cong \Theta\big(\mathrm{S}(\mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}/\mathfrak{m}_x)\big) \cong \big(\mathrm{M}/\mathfrak{m}_x\mathrm{M}\big)^*.$$

Donc $\pi^{-1}(x)$ est un espace vectoriel de dimension r, pour tout x. De plus, on déduit de $(*)$ que chaque $\pi^{-1}(\mathrm{D}(f_i))$ est isomorphe à $\mathrm{D}(f_i) \times k^n$, donc la condition de trivialité locale $(*^{\mathrm{TL}})$ est satisfaite. Observons aussi que, d'après le lemme, on a $\Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{E(M)}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{A\text{-}alg}}(\mathrm{S_A(M)}, \mathrm{A}) = \mathrm{M}^\vee$.

On a ainsi associé à tout A-module localement libre M un fibré vectoriel $\mathrm{E(M)}$ sur X, tel que $\Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{E(M)}) = \mathrm{M}^\vee$. On admettra que cette construction se faisceautise comme suit. Soit X une variété algébrique arbitraire. À tout $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-module localement libre $\mathscr{M}$ de rang r on peut associer un fibré vectoriel algébrique $\mathrm{E}(\mathscr{M})$. Introduisons aussi le faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules $\mathscr{M}^\vee$ défini par $\mathscr{M}^\vee(\mathrm{U}) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U})}(\mathscr{M}(\mathrm{U}), \mathscr{O}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U}))$, pour tout ouvert U. Alors $\mathscr{M}^\vee$ est localement libre de rang r, et l'on a $\mathscr{S}_{\mathrm{E}(\mathscr{M}^\vee)} \cong \mathscr{M}$. Réciproquement, pour tout fibré E on a $\mathrm{E}((\mathscr{S}_{\mathrm{E}})^\vee) \cong \mathrm{E}$. En résumé, on obtient la

Proposition 24.6. — *Soit* X *une variété algébrique. Pour tout* $r \geqslant 1$*, on a :*

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{fibrés vectoriels de rang } r \\ \textit{sur } \mathrm{X}, \textit{ à isomorphisme près} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mathscr{O}_{\mathrm{X}}\textit{-modules localement libres} \\ \textit{de rang } r, \textit{ à isomorphisme près} \end{array} \right\}.$$

24.3. Le fibré tangent à une variété lisse. — Soient X une variété affine lisse irréductible, de dimension n, et $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}]$. Il résulte de la démonstration du théorème 13.23 que le module des différentielles $\Omega_{\mathrm{A}/k} = \Omega_{\mathrm{X}/k}$ est un A-module localement libre de rang n. On obtient donc un fibré (TX, π) sur X, appelé le fibré tangent. C'est une variété lisse, de dimension $2n$ (car localement isomorphe à $\mathrm{X} \times k^n$). Pour tout $x \in \mathrm{X}$, rappelons que $\Omega_{\mathrm{X}/k} \otimes_{\mathrm{A}} k_x \cong \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$ (Proposition 13.11). On a donc des isomorphismes

$$\pi^{-1}(x) \cong (\Omega_{\mathrm{X}/k} \otimes_{\mathrm{A}} k_x)^* \cong (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^* = \mathrm{T}_x\mathrm{X}.$$

De plus, soient $\mathrm{Y} = \mathrm{Max(B)}$ une variété affine, et $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme. Le comorphisme $\phi^* : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ induit un morphisme de A-modules $\Omega_{\mathrm{B}/k} \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{A} \to$

$\Omega_{A/k}$, et donc un morphisme d'algèbres

$$\mathrm{S_A}(\Omega_{\mathrm{B}/k} \otimes_{\mathrm{B}} \mathrm{A}) \longrightarrow \mathrm{S_A}(\Omega_{\mathrm{A}/k}).$$

Or $\mathrm{S_A}(\Omega_{\mathrm{B}/k}\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{A})$ s'identifie à $\mathrm{S_B}(\Omega_{\mathrm{B}/k})\otimes_{\mathrm{B}}\mathrm{A}$ et contient donc $\mathrm{S_B}(\Omega_{\mathrm{B}/k})$ comme sous-algèbre. On obtient donc un morphisme de B-algèbres $\mathrm{S_B}(\Omega_{\mathrm{B}/k}) \to \mathrm{S_A}(\Omega_{\mathrm{A}/k})$, d'où un morphisme $\mathrm{TX} \to \mathrm{TY}$, noté $\mathrm{d}\phi$, tel que $\pi_{\mathrm{Y}} \circ \mathrm{d}\phi = \phi \circ \pi_{\mathrm{X}}$. De plus, on vérifie que pour tout $(x, v) \in \mathrm{TX}$, où $x \in \mathrm{X}$ et $v \in \mathrm{T}_x\mathrm{X}$, on a $\mathrm{d}\phi(x, v) = (\phi(x), \mathrm{d}_x\phi(v))$.

On peut montrer que ces propriétés se globalisent (cf. [Bo, AG.16.3]) :

Proposition 24.7. — *Soit* X *une variété algébrique lisse, de dimension n. Il existe un fibré vectoriel algébrique,* $\pi : \mathrm{TX} \to \mathrm{X}$, *tel que* $\pi^{-1}(x) \cong \mathrm{T}_x\mathrm{X}$ *pour tout* x.

De plus, tout morphisme de variétés $\phi : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *induit un morphisme* $\mathrm{d}\phi : \mathrm{TX} \to \mathrm{TY}$ *tel que* $\pi_{\mathrm{Y}} \circ \mathrm{d}\phi = \phi \circ \pi_{\mathrm{X}}$ *et dont la restriction à* $\pi^{-1}(x)$ *coïncide avec* $\mathrm{d}_x\phi$, *pour tout* $x \in \mathrm{X}$.

On peut aussi montrer que $\mathrm{T}(\mathrm{X}\times\mathrm{Y}) \cong \mathrm{TX}\times\mathrm{TY}$, quelques soient les variétés X, Y.

24.4. Champs de vecteurs et dérivations. — Si $\mathrm{E} = \mathrm{TX}$, une section globale de E est la donnée en chaque $x \in \mathrm{X}$ d'un vecteur tangent $v_x \in \mathrm{T}_x\mathrm{X}$, c.-à-d., la donnée d'un champ de vecteurs sur X.

Lemme 24.8. — *Soit* X *affine lisse. Alors on a un isomorphisme* $\Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{TX}) \cong \mathrm{D\acute{e}r}_k(k[\mathrm{X}])$. *En particulier,* $\Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{TX})$ *est une algèbre de Lie.*

Démonstration. — Posons $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}]$. On sait que $\mathrm{D\acute{e}r}_k(\mathrm{A}) = \mathrm{Hom_A}(\Omega_{\mathrm{A}/k}, \mathrm{A})$. Par conséquent, toute dérivation D définit un morphisme de A-algèbres $\widetilde{\mathrm{D}} : \mathrm{S_A}(\Omega_{\mathrm{A}/k}) \to \mathrm{A}$, d'où un morphisme $\sigma_{\mathrm{D}} : \mathrm{X} \to \mathrm{TX}$ tel que $\pi \circ \sigma_{\mathrm{D}} = \mathrm{id_X}$. On vérifie que, pour tout x, $\sigma_{\mathrm{D}}(x)$ est l'élément $\varepsilon_x \circ \mathrm{D} : \phi \mapsto (\mathrm{D}\phi)(x)$ de $\mathrm{D\acute{e}r}_k(\mathrm{A}, k_x)$.

Réciproquement, à tout champ de vecteurs $v : x \mapsto v_x$, on associe la dérivation D_v définie, pour tout $f \in k[\mathrm{X}]$ et $x \in \mathrm{X}$, par

$$(\mathrm{D}_v f)(x) = \mathrm{d}_x f(v_x) = \langle v_x, \overline{f - f(x)}\rangle,$$

où $\overline{f - f(x)}$ désigne l'image de $f - f(x)$ dans $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. On a bien $\mathrm{D}_v f \in k[\mathrm{X}]$. En effet, on identifie $\mathrm{T}k$ à $k \times k$, alors $\mathrm{D}_v f$ est la composée des morphismes

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{X} & \xrightarrow{v} & \mathrm{TX} & \xrightarrow{\mathrm{d}f} & k \times k & \xrightarrow{pr_2} & k \\ x & \longrightarrow & (x, v_x) & \longrightarrow & (f(x), \mathrm{d}_x f(v_x)) & \longrightarrow & \mathrm{d}_x f(v_x). \end{array}$$

Enfin, on vérifie que $\mathrm{D}_{\sigma_{\mathrm{D}}} = \mathrm{D}$ pour tout D, et que $\sigma_{\mathrm{D}_v} = v$ pour tout v. $\square$

Exemple 24.9. — On identifie $\mathrm{T}k$ à $k\times k$ et on note $\partial/\partial x$ le champ de vecteurs constant $x\mapsto(x,1)$. Sous l'identification précédente, ce champ de vecteurs correspond à la dérivation $f\mapsto f'=\partial f/\partial x$ (le vérifier !) ; et il engendre $\Gamma(k,\mathrm{T}k)=\mathrm{Dér}_k(k[x])$, qui est un $k[x]$-module libre de rang un.

Le lemme précédent se faisceautise :

Corollaire 24.10. — *Soit* X *une variété lisse. Alors* $\{$*sections locales de* TX$\}\cong\{$*dérivations locales de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}\}$.

Proposition 24.11. — (voir [Sp, 3.3.2–3.3.4] et [Bo, 3.20]) *Soient* G *un groupe algébrique affine et* $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. *On a des isomorphismes :*

$$\begin{array}{ll}\Omega_{\mathrm{G}/k}\cong k[\mathrm{G}]\otimes\mathfrak{g}^*, & \textit{comme } k[\mathrm{G}]\textit{-modules};\\ \mathrm{TG}\;\cong\;\mathrm{G}\rtimes\mathfrak{g}, & \textit{comme groupes algébriques,}\end{array}$$

où $\mathfrak{g}$ *est considéré comme groupe vectoriel* ($\cong\mathbb{G}_a^n$, *où* $n=\dim\mathrm{G}$), *et la stucture de produit semi-direct est donnée par* $g\cdot(g',\mathrm{X})=(gg',\mathrm{Ad}(g)\mathrm{X})$.

24.5. Exemples de fibrés vectoriels. — Le fibré tautologique $\mathrm{E_T}$ sur $\mathbb{P}^1$ est la donnée, au dessus de chaque point de $\mathbb{P}^1$, de la droite correspondante dans $\mathrm{V}=k^2$. C'est la sous-variété fermée de $\mathbb{P}^1\times k^2$ formée des points $([x,y],(z_1,z_2))$ vérifiant l'équation $yz_1-xz_2=0$, la projection $\mathrm{E_T}\to\mathbb{P}^1$ étant la première projection. Notons U et V les ouverts de $\mathbb{P}^1$ définis par $x\neq0$ et $y\neq0$. Alors $\pi^{-1}(\mathrm{U})=\{(x,xz_2,z_2)\}$ est isomorphe comme fibration à $\mathrm{U}\times k$, l'isomorphisme étant donné par $(x,z)\mapsto(x,xz,z)$. De même, $\pi^{-1}(\mathrm{V})\cong\mathrm{V}\times k$. Donc $\mathrm{E_T}$ est bien un fibré vectoriel algébrique de rang 1 sur $\mathbb{P}^1$.

Proposition 24.12. — *On a* $\Gamma(\mathbb{P}^1,\mathrm{E_T})=\{0\}$.

Démonstration. — Il résulte de ce qui précède que $\mathscr{S}_{\mathrm{E}}(\mathrm{U})$ est le $k[x]$-module libre engendré par la section $s(x)=(x,1)\in k^2$. De même, $\mathscr{S}_{\mathrm{E}}(\mathrm{V})$ est le $k[x^{-1}]$-module libre engendré par la section $s'(x^{-1})=(1,x^{-1})\in k^2$. De plus, $\mathscr{S}_{\mathrm{E}}(\mathrm{U}\cap\mathrm{V})=k[x,x^{-1}]s=k[x,x^{-1}]s'$. Comme $s=xs'$ sur $\mathrm{U}\cap\mathrm{V}$, alors $k[x]s=k[x]xs'$ ne rencontre $k[x^{-1}]s'$ qu'en 0. Il en résulte que $\Gamma(\mathbb{P}^1,\mathrm{E_T})=\{0\}$. □

Proposition 24.13. — *On a* $\dim\Gamma(\mathbb{P}^1,\mathrm{T}\mathbb{P}^1)=3$, *et toute section de* $\mathrm{T}\mathbb{P}^1$ *admet deux zéros* (*comptés avec multiplicité*). *D'autre part, comme algèbre de Lie,* $\Gamma(\mathbb{P}^1,\mathrm{T}\mathbb{P}^1)$ *est isomorphe* $\mathfrak{pgl}_2=\mathrm{Lie}(\mathrm{PGL}_2)$.

Démonstration. — Comme $k[\mathrm{U}]=k[x]$ et $k[\mathrm{V}]=k[x^{-1}]$, alors $\Gamma(\mathrm{U},\mathrm{T}\mathbb{P}^1)=k[x]\partial/\partial x$ et $\Gamma(\mathrm{V},\mathrm{T}\mathbb{P}^1)=k[x^{-1}]\partial/\partial x^{-1}$. Or, $\partial/\partial x=-x^{-2}\,\partial/\partial x^{-1}$. En effet, pour $n\geqslant0$, $(\partial/\partial x)(x^{-n})=-nx^{-n-1}=-x^{-2}\,(\partial/\partial x^{-1})(x^{-n})$. On en déduit que

$$\Gamma(\mathbb{P}^1,\mathrm{T}\mathbb{P}^1)=kx^2\frac{\partial}{\partial x}\oplus kx\frac{\partial}{\partial x}\oplus k\frac{\partial}{\partial x}=k\frac{\partial}{\partial x^{-1}}\oplus kx^{-1}\frac{\partial}{\partial x^{-1}}\oplus kx^{-2}\frac{\partial}{\partial x^{-1}}.$$

Ainsi, chaque section

$$s = ax^2\partial/\partial x + bx\partial/\partial x + c\partial/\partial x = -a\partial/\partial x^{-1} - bx\partial/\partial x^{-1} - cx^{-2}\partial/\partial x^{-1}$$

s'annule en exactement deux points, comptés avec multiplicité : c'est clair si $a \neq 0$ ou $c \neq 0$, car alors $s = \mathrm{P}(z)\partial/\partial z$, où P est un polynôme de degré 2 et $z = x$ ou bien x^{-1} ; et si $a = c = 0$, la section

$$x\partial/\partial x = -x^{-1}\partial/\partial x^{-1}$$

s'annule à l'ordre 1 en $x = 0$ et en $x^{-1} = 0$. Ceci prouve la première assertion.

D'autre part, posons $\mathrm{X}_+ = x^2\partial/\partial x$, $\mathrm{X}_- = -\partial/\partial x$ et $\delta = x\partial/\partial x$. Un calcul facile montre que

$$[\delta, \mathrm{X}_\pm] = \pm\mathrm{X}_\pm \quad \text{et} \quad [\mathrm{X}_+, \mathrm{X}_-] = \delta.$$

Par conséquent, désignant par e, f, h les images dans $\mathfrak{pgl}_2 = \mathfrak{gl}_2/k$ id des matrices élémentaires $\mathrm{E}_{12}, \mathrm{E}_{21}, \mathrm{E}_{11}$, on voit que l'application qui envoie $\mathrm{X}_+, \mathrm{X}_-, \delta$ sur e, f, h est un isomorphisme de k-algèbres de Lie de $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathrm{T}\mathbb{P}^1)$ sur $\mathfrak{pgl}_2$. □

24.6. Actions de groupes et champs de vecteurs. —

Proposition 24.14. — *Soient* X *une variété munie d'une action* $\sigma : \mathrm{G} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ *d'un groupe algébrique* G, *et* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$. *Alors* $\mathrm{d}\sigma$ *induit un morphisme d'algèbres de Lie* $\mathfrak{g} \to \Gamma(\mathrm{X}, \mathrm{TX}), \xi \mapsto \xi_\mathrm{X}$. *De plus, notant* ϕ_x *le morphisme* $g \mapsto gx$, *on a* $\mathrm{d}\phi_x(\xi) = \xi_\mathrm{X}(x)$, *pour* $x \in \mathrm{X}$, $\xi \in \mathfrak{g}$.

Démonstration. — On identifie X à $\{(e, 0)\} \times s_0(\mathrm{X}) \subseteq \mathrm{T}(\mathrm{G} \times \mathrm{X})$, et $\mathrm{T}_{(e,x)}(\mathrm{G} \times \mathrm{X})$ à $\mathfrak{g} \oplus \mathrm{T}_x\mathrm{X}$. Pour $\xi \in \mathfrak{g}$, on définit le champ de vecteurs ξ_X par $\xi_\mathrm{X}(x) = \mathrm{d}_{(e,x)}\sigma(\xi, 0) \in \mathrm{T}_x\mathrm{X}$. Ceci est bien un morphisme $\mathrm{X} \to \mathrm{TX}$, car c'est la composée de $\mathrm{d}\sigma : \mathrm{TG} \times \mathrm{TX} \to \mathrm{TX}$ avec le plongement $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{TG} \times \mathrm{TX}$, $x \mapsto ((e, \xi), s_0(x))$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que $\xi \mapsto \xi_\mathrm{X}$ est bien un morphisme d'algèbres de Lie. (En fait, σ induit un comorphisme $\sigma^* : \mathscr{O}_\mathrm{X} \to \mathscr{O}_\mathrm{X} \otimes \mathscr{O}_\mathrm{G}$, et pour $\xi \in \mathfrak{g}$ l'on a $\xi_x = (\mathrm{id} \otimes \xi) \circ \sigma^*$). De plus, on a $\mathrm{d}_{(e,x)}\sigma(\xi, 0) = \mathrm{d}\phi_x(\xi)$, pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$. □

24.7. Groupes connexes de dimension 1. — On peut maintenant énoncer le

Théorème 24.15. — *Soit* G *un groupe algébrique affine connexe de dimension* 1. *Alors* $\mathrm{G} \cong \mathbb{G}_a$ *ou bien* $\mathrm{G} \cong \mathbb{G}_m$.

Démonstration. — G est une courbe affine lisse. D'après la théorie des courbes, il existe une courbe projective lisse C, uniquement déterminée, telle que G soit un ouvert de C. Le morphisme $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G} \subseteq \mathrm{C}$ induit une application rationnelle $\alpha : \mathrm{G} \times \mathrm{C} \to \mathrm{C}$. Comme C est projective, et $\mathrm{G} \times \mathrm{C}$ lisse, donc normale, le complémentaire de $\mathrm{dom}(\alpha)$ est de codimension $\geqslant 2$, donc un ensemble fini $\mathrm{E} = \{(g_1, x_1), \ldots, (g_n, x_n)\}$, avec $x_i \notin \mathrm{G}$. On va montrer que $\mathrm{E} = \varnothing$.

Soit $h \in \mathrm{G} \setminus \{g_1, \ldots, g_n\}$. Alors les applications $\tau_h : \mathrm{C} \to \mathrm{C}$, $x \mapsto \alpha(h, x)$, et $\rho_h : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, $g \mapsto gh^{-1}$, sont des morphismes, et donc l'application rationnelle $\alpha_h = \alpha \circ (\rho_h, \tau_h) : \mathrm{G} \times \mathrm{C} \to \mathrm{C}$, $(g, x) \mapsto \alpha(gh^{-1}, hx)$ est définie en (g_i, x_i) si $g_i h^{-1} \notin \{g_1, \ldots, g_n\}$. Donc, si on choisit de plus h hors de l'ensemble fini $\{g_j^{-1} g_i\}_{i,j=1}^n$, alors α_h est définie en (g_i, x_i). Or les applications rationnelles α_h et α coïncident sur l'ouvert $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$, donc sont égales. Ceci montre que α est partout définie. Donc G opère morphiquement sur C. Alors, comme G est connexe et laisse stable l'ensemble fini $\Sigma := \mathrm{C} \setminus \mathrm{G}$, tout $x \in \Sigma$ est fixé par G.

Soit $\xi \in \mathrm{Lie(G)} \setminus \{0\}$. D'après la proposition 24.14, on obtient un champ de vecteur ξ_{C} sur C. Pour $x \in \mathrm{C}$, on note ϕ_x le morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{C}, g \mapsto gx$. Si $x \in \Sigma$ alors ϕ_x est constant et donc $0 = \mathrm{d}\phi_x(\xi) = \xi_{\mathrm{C}}(x)$. D'autre part, si $x \in \mathrm{G}$ alors $\phi_x : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ est un automorphisme, d'où $\xi_{\mathrm{C}}(x) = \mathrm{d}\phi_x(\xi) \neq 0$. Donc C admet un champ de vecteur non trivial, qui s'annule en au moins un point. D'après le théorème de Riemann-Roch et la théorie des courbes, ceci entraîne que $\mathrm{C} = \mathbb{P}^1$. Comme toute section de $\mathrm{T}\mathbb{P}^1$ s'annule en au plus deux points, on en déduit que, comme variété, $\mathrm{G} = k$ ou bien $\mathrm{G} = k^*$.

Supposons $\mathrm{G} = k$. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'élément neutre de G est 0. Le comorphisme de $\mu : k \times k \to k$ est un morphisme d'algèbres $\mu^* : k[x] \to k[x] \otimes k[y]$, déterminé par le polynôme $\mathrm{P} = \mu^*(x)$. Pour $x, y \in k$, on a $\mu(x, y) = \mathrm{P}(x, y)$. Pour tout y, la translation à droite $\mu(-, y)$ est un automorphisme de k. On en déduit que $\mathrm{P}(x, y) = a(y)x + b(y)$, avec $a, b \in k[y]$ et a ne s'annulant pas. Donc a est une constante, et $\mathrm{P}(x, y) = ax + b(y)$. Comme $\mathrm{P}(0, y) = y$, pour tout y, il vient $b(y) = y$, d'où $\mathrm{P}(x, y) = ax + y$. Alors, $\mathrm{P}(x, 0) = x$ pour tout x entraîne $a = 1$, d'où $\mu(x, y) = x + y$. Donc $\mathrm{G} = \mathbb{G}_a$.

Supposons $\mathrm{G} = k^*$. Sans perte de généralité, on peut supposer que l'élément neutre de G est 1. Le comorphisme $\mu^* : k[x, x^{-1}] \to k[x, x^{-1}] \otimes k[y, y^{-1}]$ est déterminé par le polynôme $\mathrm{P} = \mu^*(x)$. Pour $x, y \in k^*$, on a $\mu(x, y) = \mathrm{P}(x, y)$. Soit $y \in k^*$. On a vu plus haut que la translation à droite $\mu(-, y)$ s'étend en un automorphisme de $\mathbb{P}^1$ qui fixe $\mathbb{P}^1 \setminus k^*$; donc, en particulier, $\mu(-, y)$ s'étend en un automorphisme de k qui fixe 0. On en déduit que $\mathrm{P}(x, y) = a(y)x$, avec $a \in k[y, y^{-1}]$ ne s'annulant pas sur k^*, d'où $a = cy^i$ et $\mathrm{P}(x, y) = cy^i x$, avec $c \in k^*$ et $i \in \mathbb{Z}$. Comme $\mathrm{P}(1, y) = y$, pour tout y, il vient $c = i = 1$, d'où $\mathrm{P}(x, y) = xy$. Donc $\mathrm{G} = \mathbb{G}_m$. $\square$

Remarque 24.16. — Pour une autre démonstration du théorème précédent, voir [**Sp**, Thm. 3.4.9].

24.8. Fibrés en droites et $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-modules inversibles. — Soit X une variété algébrique. D'après la proposition 24.6, on a

$$\left\{\begin{array}{c}\text{fibrés en droites sur X,}\\ \text{à isomorphisme près}\end{array}\right\} \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\mathscr{O}_\mathrm{X}\text{-modules localement libres}\\ \text{de rang 1, à isomorphisme près}\end{array}\right\}$$

Soient $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-module localement libre de rang 1, et $\mathscr{L}^\vee = \mathscr{H}om(\mathscr{L}, \mathscr{O}_\mathrm{X})$. On a un morphisme naturel de $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-modules $\mathscr{L} \to (\mathscr{L}^\vee)^\vee$, et on vérifie localement que c'est un isomorphisme. Si $\mathscr{L}'$ est un autre $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-module localement libre de rang 1, on vérifie que $\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}'$, défini par $(\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}')(\mathrm{U}) = \mathscr{L}(\mathrm{U}) \otimes_{\mathscr{O}(\mathrm{U})} \mathscr{L}'(\mathrm{U})$, est un $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-module de rang 1, isomorphe à $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_\mathrm{X}}(\mathscr{L}^\vee, \mathscr{L}')$. De plus, le morphisme de $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-modules : $\mathscr{L}^\vee \otimes \mathscr{L} \to \mathscr{O}_\mathrm{X}$, $(\varphi, s) \mapsto \langle \varphi, s\rangle$ est un isomorphisme (vérification locale). On en déduit que l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-modules localement libres de rang 1 forme un groupe commutatif, pour la multiplication induite par le produit tensoriel (l'élément neutre étant $\mathscr{O}_\mathrm{X}$). Désormais, on emploiera la terminologie « $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-module inversible » comme synonyme de $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-module localement libre de rang un [(3)]. En résumé :

Proposition 24.17. — *L'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-modules inversibles* (*ou, de façon équivalente, de fibrés en droites sur* X) *est un groupe, appelé* **groupe de Picard** *de* X *et noté* $\mathit{Pic}(\mathrm{X})$.

24.9. Modules inversibles sur $\mathbb{P}^1$. — Soient X une variété algébrique irréductible, $\mathrm{X} = \mathrm{U} \cup \mathrm{V}$ un recouvrement ouvert, et $\mathscr{E}$ un $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-module inversible. On suppose que $\mathscr{E}$ est trivial au-dessus de U et de V. Donc il existe $s \in \mathscr{E}(\mathrm{U})$ et $s' \in \mathscr{E}(\mathrm{V})$ tels que $\mathscr{E}(\mathrm{U}) = \mathscr{O}(\mathrm{U})s$ et $\mathscr{E}(\mathrm{V}) = \mathscr{O}(\mathrm{V})s'$. Alors $\mathscr{E}(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) = \mathscr{O}(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})s = \mathscr{O}(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})s'$ et donc $s = ts'$, avec t appartenant à $\mathscr{O}(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})^\times$, le groupe des éléments inversibles de $\mathscr{O}(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})$.

Soit $\mathscr{K}$ le faisceau constant sur X défini par $\mathscr{K}(\mathrm{W}) = k(\mathrm{X})$, pour tout ouvert W non-vide. Pour tout $f \in \mathscr{O}(\mathrm{U} \cap \mathrm{V})^\times$, notons $\mathscr{L}_f$ le sous-faisceau de $\mathscr{K}$ défini par $\mathscr{L}_f|\mathrm{U} = \mathscr{O}_\mathrm{U}$ et $\mathscr{L}_f|\mathrm{V} = f^{-1}\,\mathscr{O}_\mathrm{V}$; c'est bien un faisceau car $\mathscr{O}_\mathrm{U}$ et $f^{-1}\,\mathscr{O}_\mathrm{V}$ coïncident sur $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ avec $\mathscr{O}_{\mathrm{U}\cap\mathrm{V}}$, et $\mathscr{L}_f$ est localement isomorphe à $\mathscr{O}_\mathrm{X}$. De plus, on peut vérifier que $\mathscr{L}_f \otimes \mathscr{L}_g \cong \mathscr{L}_{fg}$. Revenant au paragraphe précédent, on voit que la multiplication par la section s induit un isomorphisme $\mathscr{L}_t \cong \mathscr{E}$. Donc tout $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-module inversible trivial au-dessus de U et de V est isomorphe à un $\mathscr{L}_f$.

Réciproquement, soit $\varphi : \mathscr{L}_f \to \mathscr{L}_{f'}$ un isomorphisme. Alors $\varphi_\mathrm{U}(1) = g$ appartient à $\mathscr{O}(\mathrm{U})^\times$, et pour tout $a \in \mathscr{L}_f(\mathrm{U})$ on a $\varphi_\mathrm{U}(a) = ga$. De même,

[(3)] Ceci est justifié par la remarque suivante. On peut définir le produit tensoriel de deux $\mathscr{O}_\mathrm{X}$-modules arbitraires $\mathscr{F}, \mathscr{G}$. On montre alors que si $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G} \cong \mathscr{O}_\mathrm{X}$, alors $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont localement libres de rang 1.

$\varphi_{\mathrm{V}}(f^{-1}) = h/f'$ avec $h \in \mathscr{O}(\mathrm{V})^{\times}$, et pour tout $b \in \mathscr{L}_f(\mathrm{V})$ on a $\varphi_{\mathrm{V}}(b) = bhf/f'$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{L}_f(\mathrm{U}) & \xrightarrow{g} & \mathscr{L}_{f'}(\mathrm{U}) \\
{\scriptstyle\mathrm{res}}\downarrow & & {\scriptstyle\mathrm{res}}\downarrow \\
\mathscr{L}_f(\mathrm{U}\cap\mathrm{V}) & \longrightarrow & \mathscr{L}_{f'}(\mathrm{U}\cap\mathrm{V}) \\
{\scriptstyle\mathrm{res}}\uparrow & & {\scriptstyle\mathrm{res}}\uparrow \\
\mathscr{L}_f(\mathrm{V}) & \xrightarrow{hf/f'} & \mathscr{L}_{f'}(\mathrm{V}).
\end{array}$$

Il en résulte que $g = hf/f'$, soit $f' = fhg^{-1}$. On en déduit que l'application $f \mapsto \mathscr{L}_f$ induit un isomorphisme de groupes

$$\frac{\mathscr{O}(\mathrm{U}\cap\mathrm{V})^{\times}}{\mathscr{O}(\mathrm{U})^{\times}\ \mathscr{O}(\mathrm{V})^{\times}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}_{\mathrm{U},\mathrm{V}}(\mathrm{X}),$$

où $\mathrm{Pic}_{\mathrm{U},\mathrm{V}}(\mathrm{X})$ désigne le sous-groupe de $\mathrm{Pic}(\mathrm{X})$ formé des classes de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-modules inversibles triviaux sur U et V (vérifier que c'est bien un sous-groupe !).

Considérons maintenant $\mathbb{P}^1$ avec le recouvrement usuel $\mathbb{P}^1 = \mathrm{U} \cup \mathrm{V}$. On a $\mathrm{U} \cong \mathrm{V} \cong k$. Or on peut montrer que tout faisceau inversible sur k est trivial (car l'anneau $k[\mathrm{X}]$ est factoriel). On en déduit un isomorphisme de groupes

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z} & \xrightarrow{\cong} & k[\mathrm{U}\cap\mathrm{V}]^{\times}/k^{\times} & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1), \\
i & \longrightarrow & x^{-i} & \longrightarrow & \mathscr{L}_{x^{-i}} := \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}(i) = \mathscr{O}(i).
\end{array}$$

Alors $\mathscr{O}(1)$ et $\mathscr{O}(-1)$ sont les générateurs de $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1)$. Considérons le complexe

$$0 \to \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}(i)) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{O}(i)) \oplus \Gamma(\mathrm{V}, \mathscr{O}(i)) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{U}\cap\mathrm{V}, \mathscr{O}(i)) \longrightarrow \mathrm{Q}(i) \to 0.$$

On vérifie alors que :

si $i \geqslant 0$, $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}(i)) = k1 \oplus \cdots \oplus kx^i$ est de dimension $i+1$, et $\mathrm{Q}(i) = \{0\}$;

si $i < 0$, $\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}(i)) = 0$ et $\mathrm{Q}(i) = kx^{-1} \oplus \cdots \oplus kx^{i+1}$ est de dimension $-i-1$.

Par conséquent, $\mathscr{O}(1)$ est l'unique générateur de $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1)$ admettant des sections globales non-triviales.

24.10. Fibrés en droites sur $\mathbb{P}^1$. — Nous allons dans ce paragraphe décrire géométriquement les fibrés en droites sur $\mathbb{P}^1$ qui possèdent des sections globales $\neq 0$, c.-à-d., qui correspondent aux modules inversibles $\mathscr{O}(n)$ avec $n \geqslant 0$.

D'abord, $\mathscr{O}(0) = \mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$ correspond au fibré trivial $\mathrm{E}(0) := \mathbb{P}^1 \times k$, car une section locale de $\mathrm{E}(0)$ au-dessus d'un ouvert W n'est autre qu'une fonction régulière $\mathrm{W} \to k$.

Soit $\mathbf{V} = k^2$ avec sa base canonique (e_1, e_2). On note (x, y) (ou aussi (e_1^*, e_2^*)) la base duale de $\mathbb{P}^1$, c.-à-d., pour tout $v \in \mathbf{V}$ on écrit $v = xe_1 + ye_2$.

Soit $\mathrm{E}(1)$ l'ensemble des couples (δ, ϕ), où δ est un point de $\mathbb{P}^1$, c.-à-d., une droite de $\mathbf{V}$, et ϕ une forme linéaire sur δ, c.-à-d., un élément de l'espace dual δ^*. Soit $\pi : \mathrm{E}(1) \to \mathbb{P}^1$ la première projection ; pour chaque $\delta \in \mathbb{P}^1$, la fibre $\pi^{-1}(\delta)$ est δ^*, un espace vectoriel de dimension 1. On peut montrer que $\mathrm{E}(1)$ est muni d'une structure de variété algébrique, telle que π soit un morphisme de variétés, faisant de $\mathrm{E}(1)$ un fibré en droites sur $\mathbb{P}^1$. Déterminons le faisceau de ses sections.

Sur l'ouvert $\mathrm{U} = \{[xe_1 + ye_2] \mid y \neq 0\}$, la section

$$\phi = e_2^*|_{\mathrm{U}}$$

ne s'annule pas et donc trivialise $\mathrm{E}(1)$, c.-à-d., on a

$$\pi^{-1}(\mathrm{U}) \cong \{(xe_1 + e_2, t\phi) \mid x, t \in k\} \cong \mathrm{U} \times k,$$

et $\Gamma(\mathrm{U}, \mathrm{E}(1)) = k[\mathrm{U}]\phi$. De même, sur l'ouvert $\mathrm{V} = \{[xe_1 + ye_2] \mid x \neq 0\}$, la section

$$\psi = e_1^*|_{\mathrm{V}}$$

ne s'annule pas et donc trivialise $\mathrm{E}(1)$, c.-à-d., on a

$$\pi^{-1}(\mathrm{V}) \cong \{(e_1 + ye_2, t\psi) \mid y, t \in k\} \cong \mathrm{V} \times k,$$

et $\Gamma(\mathrm{V}, \mathrm{E}(1)) = k[\mathrm{V}]\psi$. De plus, sur $\mathrm{U}\cap\mathrm{V}$, on a $\psi = x^{-1}\phi$ puisque, pour $x \neq 0$, on a

$$\psi([xe_1 + e_2]) = \psi([e_1 + x^{-1}e_2]) \overset{\text{déf}}{=} x^{-1}.$$

Ceci montre que le faisceau des sections de $\mathrm{E}(1)$ est $\mathscr{O}(1)$, et l'espace des sections globales s'identifie à $\mathbf{V}^* = kx \oplus ky$.

Soit $\mathrm{S}(\mathbf{V}^*)$ l'algèbre symétrique de $\mathbf{V}^*$, c.-à-d., le quotient de l'algèbre tensorielle $\mathrm{T}(\mathbf{V}^*)$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments de degré 2 :

$$\xi \otimes \eta - \eta \otimes \xi, \qquad \xi, \eta \in \mathbf{V}^*.$$

C'est une algèbre graduée : $\mathrm{S} = k \oplus \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathrm{S}^n(\mathbf{V}^*)$; chaque $\mathrm{S}^n(\mathbf{V}^*)$ s'identifie à l'espace des polynômes homogènes de degré n sur $\mathbf{V}$, et admet pour base les $(n + 1)$ monômes :

$$x^n, x^{n-1}y, \cdots, xy^{n-1}, y^n.$$

Soit $\mathrm{E}(n)$ l'ensemble des couples (δ, ϕ), où δ est un point de $\mathbb{P}^1$, c.-à-d., une droite de $\mathbf{V}$, et ϕ un polynôme homogène de degré n sur δ, c.-à-d., un élément de $\mathrm{S}^n(\delta^*)$. Soit $\pi : \mathrm{E}(n) \to \mathbb{P}^1$ la première projection ; pour chaque $\delta \in \mathbb{P}^1$, la fibre $\pi^{-1}(\delta)$ est $\mathrm{S}^n(\delta^*)$, un espace vectoriel de dimension 1.

Sur l'ouvert $\mathrm{U} = \{[xe_1 + ye_2] \mid y \neq 0\}$, la section
$$\phi = y^n|_{\mathrm{U}}$$
ne s'annule pas et donc trivialise $\mathrm{E}(n)$, c.-à-d., on a un isomorphisme
$$\pi^{-1}(\mathrm{U}) \cong \{(xe_1 + e_2, t\phi) \mid x, t \in k\} \cong \mathrm{U} \times k,$$
et $\Gamma(\mathrm{U}, \mathrm{E}(n)) = k[\mathrm{U}]\phi$. De même, sur l'ouvert $\mathrm{V} = \{[xe_1 + ye_2] \mid x \neq 0\}$, la section
$$\psi = x^n|_{\mathrm{V}}$$
ne s'annule pas et donc trivialise $\mathrm{E}(n)$, c.-à-d., on a
$$\pi^{-1}(\mathrm{V}) \cong \{(e_1 + ye_2, t\psi) \mid y, t \in k\} \cong \mathrm{V} \times k,$$
et $\Gamma(\mathrm{V}, \mathrm{E}(n)) = k[\mathrm{V}]\psi$. De plus, sur $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$, on a $\phi = x^n\psi$ puisque, pour $x \neq 0$, on a
$$\phi([e_1 + x^{-1}e_2]) = \phi([xe_1 + e_2]) \overset{\text{déf}}{=} x^n = x^n\psi([e_1 + x^{-1}e_2]).$$
Ceci montre, d'abord, que $\mathrm{E}(n)$ est muni d'une structure de variété algébrique : c'est le recollement des variétés
$$\mathrm{U} \times k \cong k^2 = \{(x, t) \mid x, t \in k\}$$
et
$$\mathrm{V} \times k \cong k^2 = \{(y, u) \mid y, u \in k\}$$
le long de l'ouvert $(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) \times k \cong k^\times \times k$, via l'isomorphisme
$$(x, t) \mapsto (x^{-1}, tx^n) = (y, u).$$
Donc $\mathrm{E}(n)$ est une variété algébrique, et $\pi : \mathrm{E}(n) \to \mathbb{P}^1$ est un fibré en droites, comme on le voit en se plaçant au-dessus de U ou de V. De plus, puisque sur $\mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ le générateur ϕ de $\Gamma(\mathrm{U}, \mathrm{E}(n))$ coïncide avec $x^n\psi$, le faisceau des sections de $\mathrm{E}(n)$ est $\mathscr{O}(n)$, et l'espace de ses sections globales s'identifie à
$$\mathrm{S}^n(\mathbf{V}^*) = kx^n \oplus kx^{n-1}y \oplus \cdots \oplus ky^n.$$

24.11. Le morphisme $\mathrm{SL}_2/\mathrm{U} \to \mathrm{PGL}_2/\mathrm{U}'$. — On conserve la notation $\mathbf{V} = k^2$. Soit $\mathfrak{sl}_2$ l'algèbre de Lie des matrices 2×2 de trace nulle ; c'est l'algèbre de Lie de SL_2. On a défini (cf. 1.2) PGL_2 comme l'image dans $\mathrm{SL}(\mathfrak{sl}_2) \cong \mathrm{SL}_3$ de GL_2 (agissant par conjugaison sur $\mathfrak{sl}_2$). On a donc un morphisme de groupes algébriques
$$\rho : \mathrm{SL}_2 \longrightarrow \mathrm{SL}(\mathfrak{sl}_2)$$
dont l'image est PGL_2. Il n'est pas difficile d'écrire explicitement ce morphisme, par exemple en se plaçant dans la base standard de $\mathfrak{sl}_2$:
$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

mais comme nous n'en avons pas besoin, nous laissons cela comme un exercice (instructif !) pour le lecteur.

D'autre part, l'application bilinéaire

$$\mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow k, \qquad (v, v') \mapsto \mathrm{dét}(v, v')$$

est SL_2-équivariante, car

$$\mathrm{dét}(gv, gv') = \mathrm{dét}(g)\,\mathrm{dét}(v, v') = \mathrm{dét}(v, v') \quad \text{si } g \in \mathrm{SL}_2.$$

On obtient donc un morphisme non nul de SL_2-modules

$$\tau : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}^*, \quad \text{tel que } \tau(v)(v') = \mathrm{dét}(v, v'),$$

qui est un isomorphisme puisque $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}^*$ sont des SL_2-modules irréductibles. Explicitement, si $v = xe_1 + ye_2$, alors $\tau(v) = -ye_1^* + xe_1^*$. On a alors un morphisme de variétés SL_2-équivariant

$$\phi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathfrak{sl}_2, \quad v \mapsto v \otimes \tau(v),$$

donné explicitement par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -xy & x^2 \\ -y^2 & xy \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a $\phi(e_1) = \mathrm{E}$. De plus, le stabilisateur de e_1 dans SL_2 est le sous-groupe unipotent

$$\mathrm{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid z \in k \right\},$$

et son stabilisateur dans $\mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_2)$ est $\mathrm{Lie}(\mathrm{U})$, de sorte que le morphisme orbite $\mathrm{SL}_2/\mathrm{U} \to \mathrm{SL}_2 \cdot e_1 = \mathbf{V} \setminus \{0\}$ est un isomorphisme. D'autre part, on sait que le stabilisateur de E dans GL_2 (resp. $\mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_2)$) pour l'action adjointe est formé des matrices

$$\begin{pmatrix} \lambda & z \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

avec $z \in k$ et $\lambda \in k^\times$ (resp. $\lambda \in k$). On en déduit que le stabilisateur de E dans PGL_2 (resp. $\mathrm{Lie}(\mathrm{PGL}_2)$) est le groupe unipotent U' image de U dans PGL_2 (resp. $\mathrm{Lie}(\mathrm{U}')$). Par conséquent, le morphisme orbite

$$\mathrm{PGL}_2/\mathrm{U}' \longrightarrow \mathrm{PGL}_2 \cdot \mathrm{E} = \mathrm{GL}_2 \cdot \mathrm{E}$$

est un isomorphisme ; d'autre part, l'orbite est l'ensemble des matrices nilpotentes non nulles dans $\mathfrak{sl}_2$, c.-à-d., c'est $\mathrm{C}^\circ = \mathrm{C} \setminus \{0\}$, où C est le cône

$$\mathrm{C} = \left\{ \begin{pmatrix} -a & b \\ c & a \end{pmatrix} \mid a^2 + bc = 0 \right\}.$$

Alors, le morphisme $\phi : \mathbf{V} \to \mathfrak{sl}_2$ considéré plus haut :

$$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} -xy & x^2 \\ -y^2 & xy \end{pmatrix}$$

a pour image le cône C et induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{SL}_2/\mathrm{U} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{PGL}_2/\mathrm{U}' \arrow[d, "\cong"] \\ k^2 \setminus \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{C}^\circ \arrow[d] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, equal] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd} \quad , \quad (x, y) \mapsto (-xy, x^2, y^2)$$

Enfin, en utilisant le fait que l'anneau de polynômes $k[x, y]$ est factoriel, on peut démontrer la proposition suivante :

Proposition 24.18. — $\mathscr{O}(k^2 \setminus \{0\}) = k[x, y]$ *et* $\mathscr{O}(\mathrm{C}^\circ) = \mathscr{O}(\mathrm{C}) = k[x^2, xy, y^2]$.

Démonstration. — à compléter plus tard... □

25. Groupes réductifs : rang 1 et donnée radicielle

25.1. Groupes semi-simples de rang 1. — On a d'abord la proposition suivante, pour laquelle on renvoie à [**Bo**, III.10.8]

Proposition 25.1. — *Soit* $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ *le groupe des automorphismes de* $\mathbb{P}^1$. *C'est un groupe algébrique, isomorphe à* PGL_2. *De plus, si* G *est un groupe algébrique affine, toute action algébrique de* G *sur* $\mathbb{P}^1$ *induit (de façon unique) un morphisme de groupes algébriques* $\mathrm{G} \to \mathrm{PGL}_2$.

Remarque 25.2. — Ceci est en fait le cas particulier $n = 1$ d'un résultat général : le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^n$ est PGL_{n+1}. La démonstration de ce fait donnée dans [**Ha**, II, Example 7.1.1] n'est pas tout-à-fait convaincante (en particulier si k est de caractéristique 2) ; c'est pourquoi nous renvoyons à la démonstration ad hoc donnée dans [**Bo**], Chap.III, § 10.8.

Consignons ici le résultat suivant, dont nous avons déjà vu les assertions i) et ii) en 20.21 et 20.22.

Proposition 25.3. — *Soient* G *connexe et* $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{B}$ *une paire de Borel.*

i) *Si* B *est nilpotent, alors* $\mathrm{G} = \mathrm{B}$.

ii) *Si* $\dim \mathrm{G} \leqslant 2$, *alors* G *est résoluble.*

iii) *Si* T *est central,* B *est nilpotent et* $\mathrm{B} = \mathrm{G}$.

Démonstration. — Pour i) et ii), voir 20.21 et 20.22. Supposons T central. Alors, d'après les propositions 19.8 et 19.3, B est nilpotent, et donc $\mathrm{G} = \mathrm{B}$ d'après i). □

Théorème 25.4. — *Soient* G *un groupe connexe* **réductif de rang** 1*, non résoluble,* T *un tore maximal,* W *le groupe de Weyl, et* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$*,* $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(\mathrm{T})$*.*

a) *On a* $\#\mathrm{W}(\mathrm{T}) = 2$ *et* $\mathscr{B} \cong \mathbb{P}^1$*. De plus,* $\dim \mathrm{G} = 3$*,* $\mathrm{G} = (\mathrm{G}, \mathrm{G})$ *et* G *est semi-simple.*

b) *Il existe* $\alpha \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$ *tel que* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$*, on a* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1$*, et il existe un sous-groupe fermé unipotent connexe* U_α *(resp.* $\mathrm{U}_{-\alpha}$*) normalisé par* T *et dont l'algèbre de Lie est* $\mathfrak{g}_\alpha$ *(resp.* $\mathfrak{g}_{-\alpha}$*). Les groupes* $\mathrm{B}_\alpha = \mathrm{TU}_\alpha$ *et* $\mathrm{B}_{-\alpha} = \mathrm{TU}_{-\alpha}$ *sont les deux sous-groupes de Borel de* G *contenant* T*. Leurs algèbres de Lie sont* $\mathfrak{b}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ *et* $\mathfrak{b}_{-\alpha} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$*.*

c) *Soient* $n \in \mathrm{N_G}(\mathrm{T}) \setminus \mathrm{C_G}(\mathrm{T})$ *et* $\mathrm{U} = \mathrm{U}_\alpha$*,* $\mathrm{B} = \mathrm{TU}$*. Le morphisme orbite* $\psi_n : \mathrm{U} \to \mathrm{G}/\mathrm{B}$*,* $u \mapsto un\mathrm{B}/\mathrm{B}$ *est un isomorphisme de variétés.*

d) *On a* $\mathrm{G} \cong \mathrm{SL}_2$ *ou bien* $\mathrm{G} \cong \mathrm{PGL}_2$*.*

Démonstration. — G n'est pas résoluble, donc $\mathrm{W}(\mathrm{T}) \neq \{1\}$, d'après 21.20 b). D'autre part, W(T) s'identifie à un sous-groupe de Aut(T). Or $\mathrm{Aut}(\mathrm{T}) \cong \{\pm 1\}$, puisque $\mathrm{T} \cong \mathbb{G}_m$. Donc $\mathrm{W}(\mathrm{T}) = \{\pm 1\}$. Par conséquent, $\#\mathscr{B}^{\mathrm{T}} = 2$ et $\dim \mathscr{B} = 1$, d'après 21.20 a).

Soit $\mathrm{B} \in \mathscr{B}^{\mathrm{T}}$. D'après le théorème des semi-invariants de Chevalley, $\mathscr{B} = \mathrm{G}/\mathrm{B}$ est isomorphe à une sous-variété fermée d'un espace projectif $\mathbb{P}(\mathrm{V})$, où V est un G-module. Donc, d'après le lemme 21.15, on peut trouver un cocaractère $\lambda \in \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$ tel que

$$\mathscr{B}^{\lambda(\mathbb{G}_m)} = \mathscr{B}^{\mathrm{T}}.$$

Par conséquent, si $x \in \mathscr{B} \setminus \mathscr{B}^{\mathrm{T}}$, l'orbite $\lambda(\mathbb{G}_m)x$ est de dimension 1, donc dense dans $\mathscr{B}$, et par conséquent le comorphisme de

$$\phi_x : \mathbb{G}_m \longrightarrow \mathscr{B}, \qquad z \mapsto \lambda(z)x$$

induit une inclusion des corps de fractions $k(\mathscr{B}) \subseteq k(\mathbb{P}^1) = k(z)$. Donc, d'après le théorème de Lüroth, $\mathscr{B}$ est une extension transcendante pure de k. Ainsi, $\mathscr{B}$ est une courbe (= variété de dimension 1) projective et lisse, dont le corps des fractions est isomorphe à $k(\mathbb{P}^1)$. D'après la classification des courbes projectives lisses, ceci entraîne que $\mathscr{B} \cong \mathbb{P}^1$.

L'action de G sur $\mathscr{B}$ fournit donc un morphisme de groupes algébriques $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{PGL}_2$. Le noyau de π est formé des $g \in \mathrm{G}$ qui agissent trivialement sur $\mathscr{B}$, c.-à-d., qui normalisent chaque sous-groupe de Borel. Comme chaque Borel est son propre normalisateur, on a

$$\mathrm{Ker}\, \pi = \bigcap_{\mathrm{B} \in \mathscr{B}} \mathrm{B},$$

et donc $(\mathrm{Ker}\, \pi)^0 = \mathscr{R}(\mathrm{G})$. Or, comme G est réductif connexe, $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ est un tore central, d'après la proposition 23.14. Comme G est de rang 1 et non résoluble, alors $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ est trivial, car sinon ce serait un tore maximal central, et G serait nilpotent, d'après la proposition 25.3.

Donc $\mathscr{R}(\mathrm{G})$ est trivial, G est semi-simple, et $\operatorname{Ker}\pi$ est fini. Par conséquent, $\dim\phi(\mathrm{G}) = \dim \mathrm{G}$, qui est $\geqslant 3$ puisque G n'est pas résoluble. Comme $\dim \mathrm{PGL}_2 = 3$, alors $\dim \mathrm{G} = 3$ et ϕ est surjectif.

Enfin, $\mathscr{D}(\mathrm{G})$ est un sous-groupe fermé normal de G, non trivial puisque G n'est pas résoluble, et il ne peut être de dimension 1 ou 2 car sinon il serait résoluble, ainsi que $\mathrm{G}/\mathscr{D}(\mathrm{G})$, et G serait résoluble, une contradiction. Donc $\mathrm{G} = \mathscr{D}(\mathrm{G})$. Ceci s'applique en particulier à $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_2$ ou PGL_2 et montre que chacun de ces deux groupes est égal à son groupe dérivé (ce qu'on peut aussi voir directement). Ceci prouve l'assertion a).

Soient B un Borel de G contenant T, et $\mathrm{U} = \mathrm{B}_u$. Alors $\mathrm{B} = \mathrm{TU}$, et U est un groupe unipotent de dimension 1 normalisé par T. De plus, posant $\mathfrak{b} = \mathrm{Lie}(\mathrm{B})$ et $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(\mathrm{T})$, on a

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathrm{Lie}(\mathrm{U}),$$

et T agit sur Lie(U) par un caractère α. D'après le corollaire 23.8, on a $\alpha \neq 0$, car sinon U serait contenu dans le centralisateur de T, donc T serait central dans B, d'où $\mathrm{B} = \mathrm{G}$, une contradiction.

Soit $n \in \mathrm{N_G(T)} \setminus \mathrm{C_G(T)}$; son image dans $\mathrm{W(T)} = \{1, s\}$ est l'élément non trivial s, qui agit sur $\mathrm{T} \cong \mathbb{G}_m$ par $t \mapsto t^{-1}$, et sur $\mathrm{X(T)} \cong \mathbb{Z}$ par $\chi \mapsto -\chi$. On sait que $\mathscr{B}^{\mathrm{T}}$ a deux éléments, et le second est $\mathrm{B}^- := n\mathrm{B}n^{-1}$. Posant $\mathrm{U}^- = \mathrm{B}_u^-$, on a

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{B}^-) = \mathfrak{h} \oplus \mathrm{Lie}(\mathrm{U}^-),$$

et T agit sur $\mathrm{Lie}(\mathrm{U}^-)$ par le caractère $-\alpha$. Comme les espaces propres de T sont en somme directe et $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie(G)}$ est de dimension 3, on obtient

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha},$$

où $\mathfrak{g}_{\pm\alpha} = \mathrm{Lie}(\mathrm{U}^{\pm})$ est de dimension 1.

Comme U est connexe, de dimension 1 et unipotent, il résulte de la classification des groupes connexes de dimension 1 (cf. 24.15) que $\mathrm{U} \cong \mathbb{G}_a$.

Remarque 25.5. — Ici, on peut éviter la classification des courbes, utilisée dans la preuve de 24.15, en raisonnant comme suit. Comme $\mathrm{T} = \mathbb{G}_m$ agit sur $\mathrm{Lie(U)} = \mathrm{T}_e\mathrm{U}$ avec le poids $\alpha \neq 0$, il résulte du lemme de Nakayama gradué (voir 26.1 plus loin) que $\mathrm{U} \cong \mathrm{Lie(U)} \cong k$ comme variété. On conclut alors facilement, comme à la fin de la preuve du théorème 24.15, que la loi de groupe est donnée par $(x, y) \mapsto x + y$, c.-à-d., que $\mathrm{U} \cong \mathbb{G}_a$.

Choisissons un isomorphisme $\mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}$, $x \mapsto \theta(x)$. Par transport de structure, T agit sur $\mathbb{G}_a$. Donc il existe un morphisme de groupes $\chi : \mathrm{T} \to k^*$ tel que $t \cdot x = \chi(t)x$, pour $x \in k$, $t \in \mathrm{T}$; alors $\chi(t) = t \cdot 1$ est une fonction régulière de t, i.e. $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$. Alors, T agit sur $\mathrm{U} = \theta(\mathbb{G}_a)$ par

$$t\theta(x)t^{-1} = \theta(\chi(t)x),$$

et T agit sur Lie(U) via le caractère χ. Donc $\chi = \alpha$. En conjuguant par n, on obtient que T agit sur U^- via le caractère $-\alpha$. Posant $\mathrm{U}_\alpha = \mathrm{U}$ et $\mathrm{U}_{-\alpha} = \mathrm{U}^- = n\mathrm{U}n^{-1}$, on obtient que $\mathrm{B}_\alpha = \mathrm{TU}_\alpha$ et $\mathrm{B}_{-\alpha} = \mathrm{TU}_{-\alpha}$ sont les deux sous-groupes de Borel de G contenant T, et l'on a

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{B}_{\pm\alpha}) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\pm\alpha}.$$

Ceci prouve l'assertion b).

Remarque 25.6. — Si θ' est un autre isomorphisme $\mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}$, alors $\theta^{-1} \circ \theta'$ est un automorphisme de $\mathbb{G}_a$, donc de la forme $x \mapsto cx$, où $c \in k^*$. Donc $\theta'(x) = \theta(c\,x)$. Par conséquent, pour *tout* isomorphisme $\theta : \mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_\alpha$, on a

$$\forall\, t \in \mathrm{T}, \qquad t\theta(x)t^{-1} = \theta(\alpha(t)x), \tag{$*_\alpha$}$$

et on a l'assertion analogue pour $\mathrm{U}_{-\alpha}$.

Voyons l'assertion c). Le stabilisateur du point $n\mathrm{B}/\mathrm{B}$ est $n(\mathrm{B}) = \mathrm{TU}^-$, et le morphisme orbite $\gamma_n : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{B} = \mathscr{B}$, $g \mapsto gn\mathrm{B}/\mathrm{B}$ si'dentifie au morphisme quotient $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/n(\mathrm{B}) \cong \mathscr{B}$, qui est séparable. Par conséquent,

$$\mathrm{Ker}\, \mathrm{d}\gamma_n = \mathrm{Lie}\, n(\mathrm{B}) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}.$$

Comme $\mathrm{U} \cap n(\mathrm{B}) = \{1\}$ et $\mathrm{Lie(U)} \cap \mathrm{Ker}\, \mathrm{d}\gamma_n = \{0\}$, alors la restriction de γ_n à U induit un isomorphisme $\mathrm{U} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}n\mathrm{B}/\mathrm{B}$. Ceci prouve c).

Démontrons d). Soit $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ un morphisme surjectif entre deux groupes semi-simples de dimension 3, et soient $\mathrm{B} = \mathrm{TU}$ et $\mathrm{B}^- = \mathrm{TU}^-$ dans G et $\mathrm{B}' = \mathrm{T}'\mathrm{U}'$ et B'^- les images dans G'. D'après le théorème 20.19, on peut identifier les variétés de drapeaux : $\mathscr{B} = \mathscr{B}' = \mathbb{P}^1$, et notant e le point correspondant à B^- et B'^-, on a d'après ce qui précède on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{U} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\cong"'] & \mathrm{U}' \arrow[d, "\cong"] \\ \mathrm{U}e \arrow[r, equal] & \mathrm{U}'e \end{tikzcd}$$

et donc ϕ induit un isomorphisme $\mathrm{U} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}'$.

Lemme 25.7. — *Supposons que le morphisme induit* $\mathrm{G}/\mathrm{U} \to \mathrm{G}'/\mathrm{U}'$ *soit un isomorphisme. Alors* ϕ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — On déduit facilement de l'hypothèse que ϕ est bijectif. De plus, comme l'espace tangent à G/U au point U/U s'identifie à $\mathfrak{g}/\operatorname{Lie}(U)$, et de même pour G'/U', il résulte de l'hypothèse que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Lie}(U) & \longrightarrow & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g}/\operatorname{Lie}(U) & \longrightarrow & 0 \\ & & \cong\downarrow & & \mathrm{d}\phi\downarrow & & \downarrow\cong & & \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Lie}(U') & \longrightarrow & \mathfrak{g}' & \longrightarrow & \mathfrak{g}'/\operatorname{Lie}(U') & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Par conséquent, $\mathrm{d}\phi$ est un isomorphisme, donc ϕ est séparable et est donc un isomorphisme. $\square$

Ceci nous ramène à étudier le morphisme $G/U \to G'/U'$. Notons π et $\widetilde{\pi}$ les projections $G/U \to G/B$ et $G \to G/B$, et définissons de même π' et $\widetilde{\pi}'$.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où $G' = PGL_2$ et $\phi : G \to PGL_2$ est le morphisme qui nous est donné. Notons Ω (resp. Ω^-) l'orbite ouverte de U' (et U) (resp. de U'^- et U^-) dans $\mathbb{P}^1$. Il résulte de l'assertion c) et de son analogue pour G' que

$$\widetilde{\pi}^{-1}(\Omega) \cong \Omega \times T \times U \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\pi}'^{-1}(\Omega) \cong \Omega \times T' \times U'$$

d'où

$$\pi^{-1}(\Omega) \cong \Omega \times T \qquad \text{et} \qquad \pi'^{-1}(\Omega) \cong \Omega \times T'$$

et pour chaque $x \in \Omega$, l'application induite $T \cong \pi^{-1}(x) \to \pi'^{-1}(x) \cong T'$ s'identifie à $\phi : T \to T'$. Considérons les faisceaux images directes $\pi_*\mathscr{O}_{G/U}$ et $\pi'_*\mathscr{O}_{G'/U'}$. Par définition,

$$\pi_*\mathscr{O}_{G/U}(\Omega) = \mathscr{O}_{G/U}(\pi^{-1}\Omega),$$

et de même pour $\pi'_*\mathscr{O}_{G'/U'}$, et il résulte de ce qui précède que

$$\begin{aligned} \pi_*\mathscr{O}_{G/U}(\Omega) &\cong k[\Omega] \otimes k[T] \cong k[\Omega] \otimes \textstyle\bigoplus_{\chi \in X(T)} k\chi \\ \pi'_*\mathscr{O}_{G'/U'}(\Omega) &\cong k[\Omega] \otimes k[T'] \cong k[\Omega] \otimes \textstyle\bigoplus_{\chi \in X(T')} k\chi, \end{aligned}$$

et que via ces isomorphismes, l'application induite par ϕ coïncide avec l'inclusion de $X(T')$ dans $X(T)$. De plus, on a les mêmes assertions au-dessus de l'ouvert Ω^-.

Par conséquent, on obtient que les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\phi : G/U \to G'/U'$ est un isomorphisme

b) $\phi : T \to T'$ est un isomorphisme

c) l'inclusion $X(T') \hookrightarrow X(T)$ est une égalité.

Observons que T agit à droite sur G/U via $gU \cdot t = gtU$. Si l'on désigne par $\mathscr{L}(\chi)$ le sous-faisceau de $\pi_*\mathscr{O}_{G/U}$ formé des sections locales de poids χ, c.-à-d., pour tout ouvert V de G/B,

$$\mathscr{L}(\chi)(\mathrm{V}) = \{f \in k[\pi^{-1}(\mathrm{V})] \mid f(xt) = \chi(t)f(x), \ \ \forall\, x \in \mathrm{V},\, t \in \mathrm{T}\}$$

alors chaque $\mathscr{L}(\chi)$ est un $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1}$-module inversible, donc égal à un certain $\mathscr{O}(n_\chi)$. De plus, le produit d'une section s_1 de $\mathscr{L}(\chi_1)$ et d'une section s_2 de $\mathscr{L}(\chi_2)$ est de poids $\chi_1+\chi_2$, de sorte que $\chi \mapsto n_\chi$ est un morphisme de groupes $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, qui est injectif car les $\mathscr{L}(\chi)$ sont deux à deux distincts. On a donc des inclusions

$$\mathrm{X}(\mathrm{T}') \subseteq \mathrm{X}(\mathrm{T}) \subseteq \mathbb{Z},$$

donc il existe $d, d' \in \mathbb{N}^*$, avec d divisant d', tels que

$$\pi_*\mathscr{O}_{\mathrm{G}/\mathrm{U}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{O}(dn), \quad \pi_*\mathscr{O}_{\mathrm{G}'/\mathrm{U}'} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathscr{O}(d'n).$$

De plus, on a

$$\Gamma(\mathrm{G}'/\mathrm{U}', \mathscr{O}_{\mathrm{G}'/\mathrm{U}'}) = \Gamma(\mathbb{P}^1, \pi'_*\mathscr{O}_{\mathrm{G}'/\mathrm{U}'}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}(d'n)),$$

et de même pour G/U. Or, dans le cas de $\mathrm{G}' = \mathrm{PGL}_2$, on a vu précédemment que

$$k[\mathrm{G}'/\mathrm{U}'] = k[x^2, xy, y^2] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Gamma(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}(2n)).$$

Il en résulte que $d' = 2$, et donc $d = 1$ ou 2. Si $d = 2$, alors $\mathrm{X}(\mathrm{T}) = \mathrm{X}(\mathrm{T}')$ et donc $\phi : \mathrm{G}/\mathrm{U} \to \mathrm{PGL}_2/\mathrm{U}'$ est un isomorphisme, d'où $\mathrm{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{PGL}_2$.

Finalement, supposons $d = 1$ et soit χ le générateur de X(T) tel que $n_\chi = 1$. Alors,

$$\Gamma(\mathbb{P}^1, \mathscr{O}(1)) = \{f \in k[\mathrm{G}/\mathrm{U}] \mid f(xt) = \chi(t)f(x), \ \ \forall\, x \in \mathrm{G}/\mathrm{U},\, t \in \mathrm{T}\}$$

est un G-module rationnel de dimension 2. Par conséquent, on obtient un morphisme $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{GL}_2$, et comme $\mathrm{G} = \mathscr{D}(\mathrm{G})$ alors

$$\rho(\mathrm{G}) \subseteq \mathscr{D}(\mathrm{GL}_2) = \mathrm{SL}_2.$$

On obtient donc un morphisme $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{SL}_2$, qui est nécessairement surjectif (car sinon image et noyau seraient de dimension $\leqslant 2$ donc résolubles, et G serait résoluble, une contradiction). Donc on peut appliquer le raisonnement précédent à $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{G}' = \mathrm{SL}_2$. Or on a vu que

$$k[\mathrm{SL}_2/\mathrm{U}] = k[x, y] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \Gamma(\mathbb{P}_1, \mathscr{O}(n)),$$

d'où $d' = 1$ cette fois. Par conséquent, $d = 1$ et $\mathrm{X}(\mathrm{T}) = \mathrm{X}(\mathrm{T}')$, d'où $\mathrm{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{SL}_2$. Ceci achève la preuve du théorème 25.4. Ouf... □

Remarque 25.8. — Pour une autre démonstration de d), plus élémentaire mais plus calculatoire, voir [**Sp**, Theorem 7.2.4].

25.2. Groupes réductifs de rang semi-simple égal à 1. — Le théorème 25.4 s'étend à tout groupe réductif de rang semi-simple égal à 1, de la façon suivante.

Proposition 25.9. — *Soit* G *un groupe connexe* **réductif** *de* **rang semi-simple** *égal à* 1. *Soient* T *un tore maximal,* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$, $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(\mathrm{T})$, *et* W *le groupe de Weyl. Notons* $\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{G}/\mathrm{Z}^0(\mathrm{G})$ *et soit* $\overline{\mathrm{T}}$ *l'image de* T *dans* $\overline{\mathrm{G}}$ *; c'est un tore de dimension* 1, *et l'on a* $\mathbb{Z} \cong \mathrm{X}(\overline{\mathrm{T}}) \subseteq \mathrm{X}(\mathrm{T})$.

a) *Il existe* $\alpha \in \mathrm{X}(\overline{\mathrm{T}})$ *tel que* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, *et* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{-\alpha} = 1$.

b) $\mathscr{D}(\mathrm{G})$ *est isomorphe à* SL_2 *ou* PGL_2, *et l'on a* $\mathrm{G} = \mathscr{D}(\mathrm{G})\mathrm{Z}(\mathrm{G})^0$.

c) *Il existe un* **unique** *sous-groupe fermé unipotent connexe* U_α (*resp.* $\mathrm{U}_{-\alpha}$), *normalisé par* T *et dont l'algèbre de Lie est* $\mathfrak{g}_\alpha$ (*resp.* $\mathfrak{g}_{-\alpha}$). *Les groupes* $\mathrm{B}_\alpha = \mathrm{TU}_\alpha$ *et* $\mathrm{B}_{-\alpha} = \mathrm{TU}_{-\alpha}$ *sont les deux sous-groupes de Borel contenant* T. *Leurs algèbres de Lie sont* $\mathfrak{b}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ *et* $\mathfrak{b}_{-\alpha} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

d) *Soit* T_1 *l'unique tore maximal de* $\mathscr{D}(\mathrm{G})$ *contenu dans* T. *Il existe un unique* $\alpha^\vee \in \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}_1) \subseteq \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$ *tel que* $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ *et, notant* s_α *l'élément non trivial de* W, *on a*

$$s_\alpha \chi = \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha \qquad \textit{et} \qquad s_\alpha \eta = \eta - \langle \alpha, \eta \rangle \alpha^\vee,$$

pour tout $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$, $\eta \in \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$.

Démonstration. — D'après le théorème de Chevalley-Luna (cf. Corollaire 22.4) et le corollaire 23.8, on a $\mathfrak{g}^{\mathrm{T}} = \mathfrak{h}$. On peut donc écrire

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathfrak{g}_\alpha$$

où R est un sous-ensemble fini de $\mathrm{X}(\mathrm{T}) \setminus \{0\}$. De plus, comme $\mathrm{Z}^0 := \mathrm{Z}^0(\mathrm{G})$ est central, chaque $\alpha \in \mathrm{R}$ est trivial sur Z^0. Or, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{X}(\mathrm{T}/\mathrm{Z}^0) \longrightarrow \mathrm{X}(\mathrm{T}) \xrightarrow{\mathrm{res}} \mathrm{X}(\mathrm{Z}^0) \longrightarrow 0,$$

donc R est contenu dans le sous-groupe $\mathrm{X}(\overline{\mathrm{T}})$. D'autre part, $\mathrm{Z}^0 \subseteq \mathrm{T}$ et donc

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{G}/\mathrm{Z}^0) \cong \mathrm{Lie}(\mathrm{G})/\mathrm{Lie}(\mathrm{Z}^0) \cong \big(\mathfrak{h}/\mathrm{Lie}(\mathrm{Z}^0)\big) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Or, comme $\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{G}/\mathrm{Z}^0$ est semi-simple de rang 1, il résulte du théorème 25.4 que $\mathrm{R} = \{\alpha, -\alpha\}$ et que $\dim \mathfrak{g}_{\pm\alpha} = 1$. Ceci prouve a).

Voyons b). D'après la proposition 23.14, $\mathscr{D}(\mathrm{G}) \cap \mathscr{R}(\mathrm{G})$ est fini et $\mathscr{D}(\mathrm{G})$ est semi-simple, de rang 1, donc isomorphe à SL_2 ou PGL_2 d'après 25.4. De plus, puisque $\overline{\mathrm{G}} := \mathrm{G}/\mathscr{R}(\mathrm{G})$ est égal à son dérivé, alors l'application $\mathscr{D}(\mathrm{G}) \to \overline{\mathrm{G}}$ est surjective. On en déduit que $\mathscr{D}(\mathrm{G})\mathrm{Z}(\mathrm{G})^0$ est un sous-groupe fermé de G de dimension $\geqslant \dim \mathrm{G}$, donc égal à G. Ceci prouve b).

Démontrons c). Comme $\mathscr{D}(\mathrm{G})$ est semi-simple de rang 1, il contient un sous-groupe fermé connexe unipotent U_α (resp. $\mathrm{U}_{-\alpha}$), normalisé par T, et dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}_\alpha$ (resp. $\mathfrak{g}_{-\alpha}$). De plus, d'après le point 3) de la proposition 21.10, appliqué à $\mathrm{G} \to \overline{\mathrm{G}}$, on sait que G possède exactement deux sous-groupes de Borel contenant T : ce sont $\mathrm{B}_\alpha = \mathrm{TU}_\alpha$ et $\mathrm{B}_{-\alpha} = \mathrm{TU}_{-\alpha}$, dont les algèbres de Lie sont, respectivement, $\mathfrak{b}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{b}_{-\alpha} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$. Reste à montrer l'unicité de U_α et U_{α}.

Soit H un sous-groupe fermé connexe, normalisé par T, tel que $\mathrm{Lie}(\mathrm{H}) = \mathfrak{g}_\alpha$. Alors $\dim \mathrm{H} = 1$, et H ne peut-être un tore : sinon, il serait centralisé par T, d'après le théorème de rigidité, et T agirait trivialement sur Lie(H), contradiction. Donc H est unipotent connexe, normalisé par T. Par conséquent, TH est un sous-groupe fermé résoluble connexe contenant T, et est donc contenu dans B_α ou $\mathrm{B}_{-\alpha}$. Comme $\mathrm{Lie}(\mathrm{H}) = \mathfrak{g}_\alpha$ n'est pas contenue dans $\mathrm{Lie}(\mathrm{B}_{-\alpha})$, il vient $\mathrm{TH} \subseteq \mathrm{B}_\alpha$, d'où $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{U}_\alpha$ et $\mathrm{H} = \mathrm{U}_\alpha$. Le point c) est démontré.

Voyons d). Soient $\mathrm{G}_1 = \mathscr{D}(\mathrm{G})$, $\mathfrak{g}_1 := \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_1)$, et T_1 un tore maximal de G_1. Comme G_1 est normal dans G, on peut supposer que $\mathrm{T}_1 \subseteq \mathrm{T}$. Alors T_1 est la composante connexe de $\mathrm{G}_1 \cap \mathrm{T}$ et est l'unique tore maximal de G_1 contenu dans T.

Soit y un générateur de $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}_1) \cong \mathbb{Z}$. Puisque G_1 est isomorphe à SL_2 ou PGL_2 et que $\mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$, on voit que $\pm\alpha|_{\mathrm{T}_1}$ sont les poids de T_1 dans $\mathfrak{g}_1$, et que

$$\langle \alpha, y\rangle = \begin{cases} \pm 2 & \text{si } \mathrm{G}_1 = \mathrm{SL}_2, \\ \pm 1 & \text{si } \mathrm{G} = \mathrm{PGL}_2. \end{cases} \tag{$*$}$$

Par conséquent, l'élément $\alpha^\vee := 2y/\langle \alpha, y\rangle$ appartient à $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}_1)$, et c'est l'unique élément de $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}_1) \cong \mathbb{Z}y$ tel que $\langle \alpha, \alpha^\vee\rangle = 2$.

Soit $s = s_\alpha$ l'élément non-trivial de $\mathrm{W}(\mathrm{T}_1) = \mathrm{W}(\mathrm{T})$, et soit n un représentant de s dans $\mathrm{N_G}(\mathrm{T})$. Soit $\eta \in \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$, arbitraire. Alors $s(\eta) - \eta : \mathbb{G}_m \to \mathrm{T}$ est le cocaractère

$$z \mapsto n\eta(z)n^{-1}\eta(z)^{-1},$$

qui est à valeurs dans $\mathrm{T} \cap \mathscr{D}(\mathrm{G})$, donc dans T_1. Par conséquent, comme $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}_1) = \mathbb{Z}y$, il existe $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}), \mathbb{Z})$ tel que $s(\eta) - \eta = -\varphi(\eta)y$, pour tout $\eta \in \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$. De plus, comme $\langle \alpha, s(\eta) - \eta\rangle = -2\langle \alpha, \eta\rangle$, il vient $\varphi(\eta) = 2\langle \alpha, \eta\rangle / \langle \alpha, y\rangle$, et donc

$$s(\eta) = \eta - \langle \alpha, \eta\rangle \frac{2y}{\langle \alpha, y\rangle} = \eta - \langle \alpha, \eta\rangle \alpha^\vee.$$

Enfin, soit $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$. Pour tout $\eta \in \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$, on a

$$\langle s\chi, \eta\rangle = \langle \chi, s\eta\rangle = \langle \chi, \eta - \langle \alpha, \eta\rangle\alpha^\vee\rangle = \langle \chi - \langle \chi, \alpha^\vee\rangle\alpha, \eta\rangle.$$

Ceci montre que $s(\chi) = \chi - \langle \chi, \alpha^\vee\rangle\alpha$. La proposition est démontrée. $\square$

25.3. Donnée radicielle d'un groupe réductif. — Soient G un groupe réductif connexe, T un tore maximal, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(T)$, $W = W(G,T)$ le groupe de Weyl. On note R l'ensemble des poids non nuls de T dans $\mathfrak{g}$. D'après le corollaire 22.4 et le théorème 23.7, on a $C_G(T) = T$ et $\mathfrak{g}^T = \mathrm{Lie}(C_G(T)) = \mathfrak{h}$. Par conséquent,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha.$$

On va voir que R fait partie d'une donnée radicielle $(X(T), X^\vee(T), R, R^\vee)$, et que $W(G,T)$ s'identifie au groupe de Weyl $W(R)$ de R.

Définition 25.10. — Pour tout $\alpha \in R$, soit S_α le sous-tore $(\operatorname{Ker} \alpha)^0$ de T, et soit $Z_\alpha = C_G(S_\alpha)$.

Lemme 25.11. — a) *Soient* S *un sous-tore de* T *de codimension* 1, *et* π *l'application de restriction* $X(T) \to X(S)$. *Alors il existe* $\delta \in X(T)$ *tel que* $\operatorname{Ker} \pi = \mathbb{Z}\delta$.

b)*Soient* $\lambda \in X(T)$ *et* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. *Alors* $(\operatorname{Ker} \lambda)^0 = (\operatorname{Ker} n\lambda)^0$.

c) *Soient* $\lambda, \mu \in X(T) \setminus \{0\}$. *Alors* $(\operatorname{Ker} \lambda)^0 = (\operatorname{Ker} \mu)^0$ *si et seulement si il existe* $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *tels que* $m\lambda = n\mu$.

Démonstration. — Soit $r = \dim T$. Alors $X(T) \cong \mathbb{Z}^r$ et $X(S) \cong \mathbb{Z}^{r-1}$. Or on sait que π est surjective, d'après le point b) de la proposition 16.5. Donc $\operatorname{Ker} \pi$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 1, d'où a).

Voyons b). D'abord, on peut supposer $n > 0$. Alors, il est clair que $\operatorname{Ker} \lambda \subseteq \operatorname{Ker} n\lambda$, d'où $(\operatorname{Ker} \lambda)^0 \subseteq (\operatorname{Ker} n\lambda)^0$. Enfin, l'image par λ de $(\operatorname{Ker} n\lambda)^0$ est connexe, et contenue dans l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, donc égale à $\{1\}$. Ceci prouve b).

Dans c), l'implication $\Leftarrow$ résulte de b). Voyons la réciproque. Posons $S = (\operatorname{Ker} \lambda)^0 = (\operatorname{Ker} \mu)^0$ et soient π et δ comme en a). Alors $\pi(\lambda) = 0 = \pi(\mu)$, et donc il existe $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $\lambda = n\delta$ et $\mu = m\delta$, d'où $m\lambda = n\mu$. □

Proposition 25.12. — a) *Pour tout* $\alpha \in R$, Z_α *est réductif connexe, de rang semi-simple égal à* 1, *et l'on a*

$$\mathrm{Lie}\, Z_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}, \quad \dim \mathfrak{g}_{\pm\alpha} = 1, \quad \textit{et } \mathbb{Q}\alpha \cap R = \{\alpha, -\alpha\}.$$

b) *On note* s_α *l'élément non trivial de* $W(Z_\alpha, T) \subseteq W(G,T)$. *Alors il existe un unique* $\alpha^\vee \in X^\vee(T)$ *vérifiant* $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ *et, pour tout* $\chi \in X(T)$, $\eta \in X^\vee(T)$,

$$s_\alpha \chi = \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha, \qquad s_\alpha \eta = \eta - \langle \alpha, \eta \rangle \alpha^\vee.$$

c) *On pose* $R^\vee = \{\alpha^\vee,\ \alpha \in R\}$. *Alors* $(X(T), X^\vee(T), R, R^\vee)$ *est une donnée radicielle réduite.*

d) *Notons* $W(R)$ *le groupe de Weyl de* R *et* $W'(G,T)$ *le sous-groupe de* $W(G,T)$ *engendré par les* s_α, *pour* $\alpha \in R$. *Alors* $W'(G,T) \cong W(R)$.

Démonstration. — a) Soit $\alpha \in \mathrm{R}$. D'après le corollaire 22.4, Z_α est réductif et connexe. De plus, comme S_α est central, donc contenu dans $\mathscr{R}(\mathrm{Z}_\alpha)$, alors Z_α est de rang semi-simple $\leqslant 1$, d'après le théorème 20.19.

Comme $\mathfrak{g}_{\pm\alpha} \subseteq \mathrm{Lie}(\mathrm{Z}_\alpha)$, on déduit du point a) de la proposition 25.9 que

$$\mathrm{Lie}\,\mathrm{Z}_\alpha = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha} \quad \text{et} \quad \dim \mathfrak{g}_{\pm\alpha} = 1.$$

Enfin, soit $\mu \in \mathrm{R} \cap \mathbb{Q}\alpha$. D'après le lemme 25.11, $\mathrm{S}_\mu = \mathrm{S}_\alpha$ et donc $\mathfrak{g}_\mu$ est contenu dans $\mathrm{Lie}(\mathrm{Z}_\alpha)$, d'où $\mu = \pm\alpha$. Ceci prouve le point a).

L'assertion b) découle du point d) de la proposition 25.9. Voyons c). Il résulte des définitions que $\mathrm{W}(\mathrm{G}, \mathrm{T})$ stabilise R et que, pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, $w \in \mathrm{W}(\mathrm{G}, \mathrm{T})$, l'on a $w\mathrm{Z}_\alpha w^{-1} = \mathrm{Z}_{w\alpha}$ et $ws_\alpha w^{-1} = s_{w\alpha}$. On en déduit, pour tout $\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$, l'égalité

$$\chi - \langle w^{-1}\chi, \alpha^\vee\rangle w\alpha = ws_\alpha w^{-1}\chi = s_{w\alpha}\chi = \chi - \langle \chi, (w\alpha)^\vee\rangle w\alpha,$$

et ceci entraîne que $w(\alpha^\vee) = (w\alpha)^\vee$. Donc $\mathrm{W}(\mathrm{G}, \mathrm{T})$ stabilise $\mathrm{R}^\vee$. On en déduit que $(\mathrm{X}(\mathrm{T}), \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}), \mathrm{R}, \mathrm{R}^\vee)$ est une donnée radicielle, et elle est réduite d'après la dernière assertion de a). Ceci prouve c).

Prouvons d). On voit facilement que $\mathrm{W}(\mathrm{G}, \mathrm{T})$ agit **fidèlement** sur $\mathrm{X}(\mathrm{T})$, et donc sur $\mathrm{X}(\mathrm{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. D'autre part, le sous-groupe $\mathrm{W}'(\mathrm{G}, \mathrm{T})$ laisse stable le sous-espace vectoriel V de $\mathrm{X}(\mathrm{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ engendré par R.

Or, R est un système de racines dans V et, par définition, son groupe de Weyl $\mathrm{W}(\mathrm{R})$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathrm{V})$ engendré par les réflections $s_\alpha|_{\mathrm{V}}$. Il s'identifie donc à $\mathrm{W}'(\mathrm{G}, \mathrm{T})$. Ceci prouve d). La proposition est démontrée. □

26. Décomposition de Bialynicki-Birula

26.1. Le lemme de Nakayama gradué et une version géométrique. — Le lemme suivant est très utile.

Lemme 26.1. — *Soit* $\mathrm{A} = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_i$ *une* k*-algèbre commutative* $\mathbb{N}$*-graduée telle que* $\mathrm{A}_0 = k$. *Soient* $\mathfrak{m}$ *l'idéal d'augmentation et* E *un supplémentaire gradué de* $\mathfrak{m}^2$ *dans* $\mathfrak{m}$. *Alors* E *engendre* A *comme algèbre, et* $\mathfrak{m}$ *comme idéal.*

Démonstration. — Soit A' la sous-algèbre de A engendrée par E. Montrons par récurrence sur n que $\mathrm{A}_n \subseteq \mathrm{A}'$. Soit $n > 0$. On suppose que $\mathrm{A}_d \subseteq \mathrm{A}'$ si $d < n$ (c'est vrai si $n = 1$). Soit a un élément non nul de A_n. Quitte à retrancher un élément de E, on peut supposer que $a \in \mathfrak{m}^2$. On peut donc écrire $a = \sum_i a_i b_i$, avec les a_i, b_i dans $\mathfrak{m}$. Décomposant les a_i, b_i en leurs composantes homogènes (toutes de degré > 0), et en ne conservant dans le produit que les termes de degré n, on obtient une égalité $a = \sum_j \alpha_j\beta_j$, où les α_j, β_j sont homogènes de degré > 0, et $\deg\alpha_j + \deg\beta_j = n$ pour tout j. Alors, par hypothèse de récurrence, les α_j, β_j appartiennent à A', d'où $a \in \mathrm{A}'$. Ceci prouve la première assertion, et la deuxième en découle aussitôt. □

Remarque 26.2. — Supposons que A soit de plus une k-algèbre de type fini sans éléments nilpotents, de sorte que $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}]$ où X est la variété algébrique affine Max A. Observons que la graduation fournit une structure de $\mathbb{G}_m$-module rationnel sur A, définie par $t \cdot a_i = t^i a_i$ pour tout $a_i \in \mathrm{A}_i$, et fournit donc une structure de $\mathbb{G}_m$-variété sur X. Donc X est un « cône », le sommet du cône étant le point x_0 correspondant à l'idéal d'augmentation A_+, qui est $\mathbb{G}_m$-stable de sorte que x_0 est un point fixe de $\mathbb{G}_m$.

Réciproquement, si X est une variété algébrique affine avec action de $\mathbb{G}_m$, alors $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}]$ est un $\mathbb{G}_m$-module rationnel donc

$$\mathrm{A} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{A}_i.$$

Il n'y a pas nécessairemement de point fixe, par exemple si $\mathrm{X} = \mathbb{G}_m$! On peut aussi avoir, en général, $\mathrm{A}_0 \neq k$. Mais, on a la proposition suivante.

Proposition 26.3. — *Soit* X *une variété algébrique affine* **connexe** *avec action de* $\mathbb{G}_m$*, et possédant un point fixe* x*. Alors l'espace* $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$ *est un* $\mathbb{G}_m$*-module rationnel.* **Supposons** *que tous les poids de* $\mathbb{G}_m$ *dans* $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$ *soient* **non nuls** *et de* **même signe**. *Alors* $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}]$ *est munie d'une graduation* $\mathrm{A} = k \oplus \bigoplus_{n\geqslant 1} \mathrm{A}_n$*. Par conséquent,* X *s'identifie à une sous-variété fermée* T*-stable de l'espace tangent* $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$*, et* x *est l'unique point fixe de* $\mathbb{G}_m$ *dans* X.

De plus, si X *est lisse au point* x*, alors* $\mathrm{X} \cong \mathrm{T}_x\mathrm{X}$ *comme* $\mathbb{G}_m$*-variétés.*

Démonstration. — Posons $\mathrm{A} = k[\mathrm{X}]$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$. Alors A est un $\mathbb{G}_m$-module rationnel et, comme x est un point fixe, $\mathfrak{m}$ est stable par $\mathbb{G}_m$, de même que $\mathfrak{m}^2$, et donc

$$\mathrm{T}_x\mathrm{X} = (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^*$$

est un $\mathbb{G}_m$-module rationnel. Supposons que tous les poids de $\mathbb{G}_m$ soient non nuls et de même signe. Quitte à remplacer l'action donnée par l'action « opposée » : $t \star x = t^{-1} \cdot x$, on peut supposer que les poids sont tous < 0.

Alors, les poids dans l'idéal d'augmentation de $k[\mathrm{T}_x\mathrm{X}] = \mathrm{S}(\mathrm{T}_x^*\mathrm{X}) = \mathrm{S}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ sont tous > 0, et comme l'algèbre graduée

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}\mathrm{A} = k \oplus \bigoplus_{n\geqslant 1} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$$

est un quotient de $\mathrm{S}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$, alors les

$$(*) \qquad \text{poids de } \bigoplus_{n\geqslant 1} \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \quad \text{sont tous } > 0.$$

Montrons qu'il en est de même pour $\mathfrak{m}$.

Supposons d'abord X **irréductible**. Alors A est intègre et, d'après le théorème d'intersection de Krull (cf. [**AM**, Cor. 10.18]), on a $\bigcap_{n\geqslant 1} \mathfrak{m}^n = (0)$. Soit

$\phi \in \mathfrak{m}$ un vecteur de poids $i \in \mathbb{Z}$. Il existe $n \geqslant 1$ tel que $\phi \in \mathfrak{m}^n \setminus \mathfrak{m}^{n+1}$, alors l'image de ϕ dans $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ est non nulle, et de poids i, d'où $i > 0$ d'après $(*)$.

Donc $\mathrm{A} = k \oplus \mathfrak{m} = k \oplus \bigoplus_{i \geqslant 1} \mathrm{A}_i$ et l'on peut appliquer le lemme de Nakayama gradué : soit E un supplémentaire $\mathbb{G}_m$-stable de $\mathfrak{m}^2$ dans $\mathfrak{m}$. Alors, $\mathrm{E} \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ et donc

$$\mathrm{S(E)} \cong k[\mathrm{T}_x\mathrm{X}],$$

et le morphisme d'algèbres $\mathrm{S(E)} \to \mathrm{A}$ (induit par l'inclusion $\mathrm{E} \subset \mathfrak{m}$) est $\mathbb{G}_m$-équivariant et surjectif. Par conséquent, son comorphisme $\tau : \mathrm{X} \hookrightarrow \mathrm{T}_x\mathrm{X}$ est un isomorphisme $\mathbb{G}_m$-équivariant de X sur une sous-variété fermée $\mathbb{G}_m$-stable $\tau(\mathrm{X})$ de $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$, et $\tau(x) = 0$. Comme les poids de $\mathbb{G}_m$ dans $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$ sont < 0, alors pour tout $v \in \mathrm{T}_x\mathrm{X}$, la limite en $t = 0$ de $t^{-1}v$ existe et égale 0. Ceci montre que x est le seul point fixe de $\mathbb{G}_m$ dans X et est contenu dans toute sous-variété fermée $\mathbb{G}_m$-stable non vide.

De plus, si X est lisse en x, alors $\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{T}_x\mathrm{X}$ et donc $\tau(\mathrm{X}) = \mathrm{T}_x\mathrm{X}$ et τ est un isomorphisme.

Traitons maintenant le cas général : X est juste supposée connexe. Comme $\mathbb{G}_m$ est connexe, chaque composante irréductible de X est $\mathbb{G}_m$-stable. Soit X_1 une composante irréductible de X contenant x. Alors $\mathrm{T}_x\mathrm{X}_1 \subseteq \mathrm{T}_x\mathrm{X}$ donc X_1 vérifie les mêmes hypothèses que X, donc d'après le cas déjà traité, X_1 a x pour unique point fixe. Si $\mathrm{X} \neq \mathrm{X}_1$ alors, comme X est connexe, la composante X_1 n'est pas isolée donc il existe une composante irréductible X_2 rencontrant X_1. Alors $\mathrm{X}_1 \cap \mathrm{X}_2$ est un fermé non vide $\mathbb{G}_m$-stable de X_1, donc contient x. Si $\mathrm{X}_1 \cup \mathrm{X}_2 \neq \mathrm{X}$, il existe une composante X_3 rencontrant X_1 ou X_2, et l'argument précédent appliqué à X_1 ou X_2 permet de conclure que $x \in \mathrm{X}_3$. On montre ainsi, de proche en proche, que x appartient à chaque composante irréductible de X, et est l'unique point fixe de X.

Soient $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ les composantes irréductibles de X et $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ les idéaux premiers minimaux de A correspondants. Alors $\bigcap_i \mathrm{P}_i = (0)$ et $\mathrm{P}_i \subseteq \mathfrak{m}$ pour tout i. Appliquant le théorème d'intersection de Krul dans l'anneau noethérien intègre A/P_i, on obtient que $\bigcap_{n \geqslant 1} \mathfrak{m}^n$ est contenu dans chaque P_i, donc dans leur intersection, égale à (0). On conclut alors, comme dans le cas irréductible, que X s'identifie à une sous-variété fermée $\mathbb{G}_m$-stable de $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$.

De plus, si X est lisse en x, alors $\dim_x \mathrm{X} = \dim \mathrm{T}_x\mathrm{X}$ et donc $\mathrm{X} \cong \mathrm{T}_x\mathrm{X}$. □

26.2. Décomposition de Bialynicki-Birula. —

Lemme 26.4. — *Soient* T *un tore et* V *un* T*-module rationnel de dimension finie. Alors,* $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ *est recouvert par des ouverts affines* T*-stables.*

Démonstration. — Soit $(v_0, \ldots, v_n)$ une base de V formée de vecteurs de poids, et soit $(v_0^*, \ldots, v_n^*)$ la base duale. Alors $\mathbb{P}(\mathrm{V})$ est recouvert par les ouverts affines

standard
$$\mathrm{U}_i := \{[v] \mid v_i^*(v) \neq 0\},$$
et ceux-ci sont T-stables puisque chaque v_i^* est un vecteur de poids. $\square$

***Théorème 26.5* (Bialynicki-Birula).** — (*un cas particulier*) *Soient* V *un* $\mathbb{G}_m$-*module rationnel de dimension finie et* X *une sous-variété fermée irréductible* **lisse** *de* $\mathbb{P}(\mathrm{V})$, $\mathbb{G}_m$-*stable. Soit* $\mathrm{X}^{\mathbb{G}_m}$ *la sous-variété des points fixes* (non-vide, d'après le théorème du point fixe de Borel). *Pour chaque* $x \in \mathrm{X}^{\mathbb{G}_m}$, *on considère son* **bassin d'attraction** *:*
$$\mathrm{X}(x) = \{y \in \mathrm{X} \mid \lim_{t\to 0} t\cdot y = x\}.$$
Alors chaque $\mathrm{X}(x)$ *est une sous-variété localement fermée de* X, *isomorphe à un espace affine de dimension* $n(x)$, *et l'on a*
$$\mathrm{X} = \bigsqcup_{x\in \mathrm{X}^{\mathbb{G}_m}} \mathrm{X}(x).$$
(*« décomposition cellulaire » de* X).

De plus, si $\mathrm{X}^{\mathbb{G}_m}$ *est* **fini**, *il existe un unique point fixe dont le bassin d'attraction est ouvert ; on l'appelle le point fixe attractif et on le note* x_-. *De même, il existe un unique point fixe répulsif, noté* x_+, *tel que* $\mathrm{X}(x_+) = \{x_+\}$.

Exemple 26.6. — Soit $\mathrm{V} = k^{n+1}$ sur lequel $\mathbb{G}_m = k^\times$ agit par $z\cdot e_i = z^i e_i$, où $(e_0,\ldots,e_n)$ est la base canonique. Les points fixes dans $\mathbb{P}^n$ sont les $[e_i]$, pour $i = 0,\ldots,n$. On voit que
$$\mathrm{X}([e_0]) = \text{ ouvert affine } \{e_0^* \neq 0\} \cong k^n;$$
son complémentaire est l'hyperplan
$$\{e_0^* = 0\} = \mathbb{P}(\sum_{i\geqslant 1} ke_1) \cong \mathbb{P}^{n-1},$$
et
$$\mathrm{X}([e_1]) = \{x \in \mathbb{P}^{n-1} \mid e_1^* \neq 0\} \cong k^{n-1},$$
etc., de sorte que l'on obtient la décomposition cellulaire usuelle
$$\mathbb{P}^n = k^n \sqcup k^{n-1} \sqcup \cdots \sqcup k \sqcup \mathrm{pt}.$$

Démonstration du théorème. — Soit $x \in \mathrm{X}^{\mathbb{G}_m}$. D'après le lemme, il existe un ouvert affine U de X, contenant x et $\mathbb{G}_m$-stable. Posons $\mathrm{A} = k[\mathrm{U}]$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$. Écrivons
$$\mathrm{T}_x\mathrm{X} = \mathrm{T}_x^+\mathrm{X} \oplus \mathrm{T}_x^{\leqslant 0}\mathrm{X},$$
où $\mathrm{T}_x^+\mathrm{X}$, resp. $\mathrm{T}_x^{\leqslant 0}\mathrm{X}$, désigne la somme directe des espaces de poids > 0, resp. $\leqslant 0$. Soit E un supplémentaire $\mathbb{G}_m$-stable de $\mathfrak{m}^2$ dans $\mathfrak{m}$. Notons E^-, resp.

E', la somme directe des espaces de poids < 0, resp. $\geqslant 0$, dans E. On a un isomorphisme de $\mathbb{G}_m$-modules

$$E \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = (T_x X)^* \cong (T_x^+ X)^* \oplus (T_x^+ X)^\perp,$$

par lequel E^- correspond à $(T_x^+ X)^*$ et E' à $(T_x^+ X)^\perp$.

L'inclusion $E \subseteq \mathfrak{m}$ induit un morphisme $\mathbb{G}_m$-équivariant de k-algèbres

$$\phi : k[T_x X] = S(E) \longrightarrow A = k[U].$$

Le morphisme correspondant $\tau : U \to T_x X$ est $\mathbb{G}_m$-équivariant.

Posons $Y = \tau^{-1}(T_x^+ X)$; c'est la sous-variété fermée de U définie par l'idéal de A engendré par $\phi(I)$, où I est l'idéal de $T_x^+ X$ dans $k[T_x X]$. Or, I est l'idéal engendré par les formes linéaires nulles sur $T_x^+ X$, c.-à-d., par le sous-espace E' de E. Par conséquent, l'idéal de Y dans A est le radical de AE', noté $\sqrt{AE'}$.

Montrons que la restriction τ_Y de τ à Y induit un **isomorphisme** ($\mathbb{G}_m$-équivariant) de Y sur $T_x^+ X$. On a les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc} Y & \subseteq & U \\ {\scriptstyle \tau_Y}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \tau} \\ T_x^+ X & \subseteq & T_x X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A/\sqrt{AE'} & \longleftarrow & A \\ {\scriptstyle \overline{\phi}}\big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \phi} \\ k[T_x^+ X] & \longleftarrow & S(E), \end{array}$$

où l'on a identifié $S(E)/S(E)E'$ à $S(E^-) \cong k[T_x^+ X]$. Donc, pour montrer que τ_Y est un isomorphisme, il suffit de montrer que

$$\overline{\phi} : k[T_x^+ X] = S(E)/S(E)E' \longrightarrow A/\sqrt{AE'}$$

est un isomorphisme. Posons $r = \dim E' = \dim T_x X - \dim T_x^+ X$.

D'une part, l'idéal AE' est engendré par r éléments (à savoir, une base de E') donc, d'après la théorie de la dimension (cf. [**Ma1**, Ch. 5]), on a

$$\operatorname{Dim} A/\sqrt{AE'} \geqslant \operatorname{Dim} A - r = \dim U - r = \dim X - r.$$

Comme X est lisse, on a $\dim X = \dim T_x X =: n$. Donc, posant $d = \dim T_x^+ X$, on obtient l'inégalité

$$\operatorname{Dim} A/\sqrt{AE'} \geqslant \dim T_x^+ X = d.$$

D'autre part, l'espace cotangent à Y en x est $\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2 + \sqrt{AE'})$. C'est un quotient de $\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2 + E') \cong (T_x^+ X)^*$, ce qui montre que $\dim_x Y \leqslant d$. Ceci implique que

$$\mathfrak{m}^2 + E' = \mathfrak{m}^2 + \sqrt{AE'}, \qquad T_x Y \cong T_x^+ X,$$

et Y est lisse en x. Il résulte alors du lemme de Nakayama gradué que $\overline{\phi} : k[T_x Y] \to k[Y]$ est un isomorphisme, c.-à-d., que τ_Y est un isomorphisme de $Y = \tau^{-1}(T_x^+ X)$ sur $T_x^+ X$.

Lemme 26.7. — *Soit $y \in U$. Alors $\lim_{t \to 0} t \cdot y = x \Leftrightarrow y \in Y = \tau^{-1}(T_x^+ X)$.*

Démonstration. — L'implication $\Leftarrow$ est facile : si $y \in \mathrm{Y}$ alors $\tau(y) \in \mathrm{T}_x^+\mathrm{X}$, donc $\lim_{t\to 0} t \cdot \tau(y) = 0$, et comme τ est un isomorphisme $\mathbb{G}_m$-équivariant de Y sur $\mathrm{T}_x^+\mathrm{X}$, appliquant x sur 0, on obtient que $\lim_{t\to 0} t \cdot y = x$.

Réciproquement, supposons que $\lim_{t\to 0} t \cdot y = x$. Alors $\lim_{t\to 0} t \cdot \tau(y) = \tau(x) = 0$. Écrivons
$$\tau(y) = \sum_{i=a}^{b} v_i,$$
avec $a \leqslant b$ dans $\mathbb{Z}$ et chaque v_i de poids i. Les v_i sont linéairement indépendants, donc peuvent être complétés en une base de $\mathrm{T}_x^+\mathrm{X}$. Comme
$$t \cdot \tau(y) = \sum_{i=a}^{b} t^i\, v_i,$$
on voit que $\lim_{t\to 0} t \cdot \tau(y)$ existe si et seulement si $a \geqslant 0$, et elle vaut v_a si $a = 0$, et 0 si $a > 0$. Donc l'hypothèse entraîne que $\tau(y) \in \mathrm{T}_x^+\mathrm{X}$, c.-à-d., $y \in \mathrm{Y}$. Le lemme est démontré. $\square$

Le lemme montre déjà que $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{X}(x)$. Réciproquement, si $y \in \mathrm{X}(x)$ alors l'orbite $\mathbb{G}_m \cdot y$ rencontre le voisinage ouvert U de x, et comme U est $\mathbb{G}_m$-stable il vient $y \in \mathrm{U}$ d'où $y \in \mathrm{Y}$ d'après le lemme.

On a donc démontré que $\mathrm{X}(x) = \mathrm{Y} = \tau^{-1}(\mathrm{T}_x^+\mathrm{X})$; c'est une sous-variété $\mathbb{G}_m$-stable localement fermée de X, puisque fermée dans l'ouvert U, et isomorphe comme $\mathbb{G}_m$-variété à $\mathrm{T}_x^+\mathrm{X}$.

Enfin, comme on l'a vu dans le lemme 21.16, pour tout $y \in \mathrm{X}$, la limite $\lim_{t\to 0} t \cdot y$ existe et est un point fixe de $\mathbb{G}_m$ dans X. Par conséquent, on a une partition :
$$\mathrm{X} = \bigsqcup_{x \in \mathrm{X}^{\mathbb{G}_m}} \mathrm{X}(x).$$
Ceci démontre la première assertion du théorème.

Supposons de plus $\mathrm{X}^{\mathbb{G}_m}$ fini. Alors, comme X est irréductible et les $\mathrm{X}(x)$ sont localement fermés, donc ouverts dans leur adhérence, il existe un unique point fixe x_- tel que $\mathrm{X}(x_-)$ soit ouvert, et x_- est l'unique point fixe pour lequel tous les poids de l'espace tangent sont positifs, car pour tout point fixe x on a l'équivalence
$$\mathrm{T}_x^+\mathrm{X} = \mathrm{T}_x\mathrm{X} \Leftrightarrow \dim \mathrm{X}(x) = \dim \mathrm{X} \Leftrightarrow \mathrm{X}(x) \text{ ouvert}.$$
On a de même l'équivalence :
$$\mathrm{T}_x^-\mathrm{X} = \mathrm{T}_x\mathrm{X} \Leftrightarrow \mathrm{X}(x) = \{x\}.$$
Alors, d'après l'argument précèdent appliqué à la représentation $\rho'(t) = \rho(t^{-1})$, où on note $\rho : \mathbb{G}_m \to \mathrm{GL(V)}$ la représentation initialement donnée, on obtient

qu'il existe un unique point fixe x_+ tel que $\mathrm{T}_{x_+}\mathrm{X} = \mathrm{T}^-_{x_+}\mathrm{X}$, c.-à-d., tel que $\mathrm{X}(x_+) = \{x_+\}$. Le théorème est démontré. □

27. Structure des groupes réductifs et semi-simples

27.1. Sous-groupes de Borel contenant T et chambres de Weyl. — Soient G un groupe réductif connexe, T un tore maximal, $\mathrm{W}(\mathrm{G},\mathrm{T})$ le groupe de Weyl, et R le système de racines de (G,T), c.-à-d., posant $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ et $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(\mathrm{T})$, on a :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Alors, $\mathrm{W}(\mathrm{G},\mathrm{T})$ agit fidèlement dans $\mathrm{X}(\mathrm{T})$ et donc dans

$$\mathrm{V} := \mathrm{X}(\mathrm{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Par définition, le sous-groupe $\mathrm{W}'(\mathrm{G},\mathrm{T})$ de $\mathrm{W}(\mathrm{G},\mathrm{T}) \subseteq \mathrm{GL}(\mathrm{V})$ engendré par les réflections s_α, pour $\alpha \in \mathrm{R}$, est le groupe de Weyl $\mathrm{W}(\mathrm{R})$ du système de racines R. (Dans la définition usuelle, on remplace V par le sous-espace E engendré par R, ce qui ne change rien). On va montrer que $\mathrm{W}(\mathrm{G},\mathrm{T}) = \mathrm{W}'(\mathrm{G},\mathrm{T}) = \mathrm{W}(\mathrm{R})$.

Plaçons-nous dans l'espace vectoriel dual V^* ; il s'identifie à $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}$, on introduit l'hyperplan de V^* suivant :

$$\mathscr{H}_\alpha := \{f \in \mathrm{V}^* \mid \langle f, \alpha\rangle = 0\}.$$

Définition 27.1. — Les **chambres de Weyl** dans V^* sont les composantes connexes de

$$\mathrm{V}^* \setminus \bigcup_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathscr{H}_\alpha.$$

Ce sont aussi les classes d'équivalence pour la relation définie par : $\lambda \sim \mu$ si, pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, $\langle\lambda, \alpha\rangle$ et $\langle\mu, \alpha\rangle$ sont non nuls et de même signe. (À nouveau, on se place d'habitude dans le sous-espace de V^* engendré par $\mathrm{R}^\vee$, mais ceci ne change rien.)

On sait que $\mathrm{W}(\mathrm{R}) = \mathrm{W}(\mathrm{R}^\vee)$ agit de façon simplement transitive sur les chambres de Weyl.

Soit $\mathscr{B}$ la variété des sous-groupes de Borel de G. Alors $\mathscr{B}^{\mathrm{T}}$ est l'ensemble des sous-groupes de Borel contenant T.

Définition 27.2. — Un cocaractère $\lambda : \mathbb{G}_m \to \mathrm{T}$ est dit **régulier** s'il vérifie $\langle\alpha, \lambda\rangle \neq 0$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$. Dans ce cas, $w\lambda$ est aussi régulier, pour tout $w \in \mathrm{W}(\mathrm{G},\mathrm{T})$.

Remarquons que les cocaractères réguliers sont ceux qui appartiennent à une chambre de Weyl.

Proposition 27.3. — *On a $\mathscr{B}^{\lambda(\mathbb{G}_m)} = \mathscr{B}^{\mathrm{T}}$ pour tout cocaractère régulier λ.*

Démonstration. — Soit $\lambda(\mathbb{G}_m)$ un cocaractère régulier. Soit Y une composante irréductible de $\mathscr{B}^{\mathbb{G}_m}$. Alors Y est T-stable et projective, donc contient un point fixe x de T. Notons B_x le sous-groupe de Borel correspondant. Comme $\mathrm{T}_x\mathrm{X} \cong \mathfrak{g}/\operatorname{Lie}(\mathrm{B}_x)$ et $\operatorname{Lie}(\mathrm{B}_x)$ contient $\mathfrak{h}$, alors $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$ s'identife à la somme directe des $\mathfrak{g}_\alpha$, où α parcourt un certain sous-ensemble $\mathrm{R}(x)$ de R. Les poids de $\lambda(\mathbb{G}_m)$ dans $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$ sont donc les entiers

$$\langle \alpha, \lambda \rangle, \qquad \text{pour } \alpha \in \mathrm{R}(x),$$

qui, par hypothèse, sont tous $\neq 0$.

Si l'on avait $\dim \mathrm{Y} \geqslant 1$, alors $\mathbb{G}_m$ agirait trivialement sur $\mathrm{T}_x\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{T}_x\mathscr{B}$, donc 0 serait un poids de $\lambda(\mathbb{G}_m)$ dans $\mathrm{T}_x\mathrm{X}$, une contradiction. Donc $\dim \mathrm{Y} = 0$ et $\mathrm{Y} = \{x\}$. Ceci montre que $\mathscr{B}^{\lambda(\mathbb{G}_m)} = \mathscr{B}^{\mathrm{T}}$. Le lemme est démontré. □

Pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, on a introduit le sous-tore $\mathrm{S}_\alpha = (\operatorname{Ker} \alpha)^0$ et son centralisateur $\mathrm{Z}_\alpha = \mathrm{C}_\mathrm{G}(\mathrm{S}_\alpha)$, et l'on a vu que Z_α a exactement deux Borels contenant T, à savoir TU_α et $\mathrm{TU}_{-\alpha}$.

D'autre part, pour tout $\mathrm{B} \in \mathscr{B}^{\mathrm{T}}$, on a vu que $\mathrm{B} \cap \mathrm{Z}_\alpha$ est un Borel de Z_α. On a donc obtenu le lemme ci-dessous.

Lemme 27.4. — *Pour tout* $\mathrm{B} \in \mathscr{B}^{\mathrm{T}}$ *et tout* $\alpha \in \mathrm{R}$, B *contient exactement l'un de* U_α *et* $\mathrm{U}_{-\alpha}$.

Maintenant, soit $\mathrm{B}(\lambda)$ le point répulsif de $\lambda(\mathbb{G}_m)$ dans $\mathscr{B}$. Comme $\mathscr{B}$ s'identifie à $\mathrm{G}/\mathrm{B}(\lambda)$, alors

$$\mathrm{T}_{\mathrm{B}(\lambda)}\mathscr{B} \cong \mathfrak{g}/\operatorname{Lie}\mathrm{B}(\lambda),$$

et comme $\mathfrak{h} \subseteq \operatorname{Lie}\mathrm{B}(\lambda)$, ceci s'identifie à la somme directe de certains $\mathfrak{g}_\alpha$.

D'autre part, comme $\mathrm{B}(\lambda)$ est le poids fixe répulsif, alors les poids de $\lambda(\mathbb{G}_m)$ dans l'espace tangent sont tous < 0, d'où

$$\mathrm{T}_{\mathrm{B}(\lambda)}\mathscr{B} \subseteq \bigoplus_{\substack{\alpha\in\mathrm{R} \\ \langle\alpha,\lambda\rangle<0}} \mathfrak{g}_\alpha. \tag{1}$$

Mais comme $\operatorname{Lie}\mathrm{B}(\lambda)$ contient exactement l'un de $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_{-\alpha}$, pour chaque α, alors l'inclusion ci-dessus est une égalité, et l'on a

$$\operatorname{Lie}\mathrm{B}(\lambda) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\substack{\alpha\in\mathrm{R} \\ \langle\alpha,\lambda\rangle>0}} \mathfrak{g}_\alpha, \tag{2}$$

et $\mathrm{B}(\lambda)$ est l'unique élément de $\mathscr{B}^{\mathrm{T}}$ à vérifier cette égalité (qui caractérise le point fixe répulsif de $\lambda(\mathbb{G}_m)$). De plus, $\mathrm{B}(\lambda)$ ne dépend que de la chambre de Weyl contenant λ. On obtient donc une application $\mathrm{C} \mapsto \mathrm{B}(\mathrm{C})$ de l'ensemble des chambres de Weyl dans $\mathscr{B}^{\mathrm{T}}$, qui à chaque chambre associe le point fixe répulsif associé à C. De plus, cette application est injective, car (2) montre que $\operatorname{Lie}\mathrm{B}(\mathrm{C})$ détermine la chambre C.

Montrons que cette application est surjective. Soit $\mathrm{B} \in \mathscr{B}^{\mathrm{T}}$ arbitraire. Comme $\mathrm{W(G,T)}$ agit de façon simplement transitive sur $\mathscr{B}^{\mathrm{T}}$, il existe un unique $w \in \mathrm{W(G,T)}$ tel que $\mathrm{B} = n_w(\mathrm{B}(\lambda))$, où n_w est un représentant arbitraire de w dans $\mathrm{N_G(T)}$. On obtient alors que

$$\operatorname{Lie}\mathrm{B} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\substack{\beta\in\mathrm{R}\\ \langle\beta,w\lambda\rangle>0}} \mathfrak{g}_\beta.$$

Ceci montre que $\mathrm{B} = \mathrm{B(C')}$, où $\mathrm{C'}$ est la chambre contenant $w\lambda$. Donc $\mathrm{C} \mapsto \mathrm{B(C)}$ est bijective, et il en résulte que $\mathrm{W(G,T)} = \mathrm{W'(G,T)} \cong \mathrm{W(R)}$.

Rappelons, d'autre part, qu'à chaque chambre de Weyl C dans V^*, on associe l'ensemble des racines positives relativement à C, noté $\mathrm{R^+(C)}$, et formé des $\alpha \in \mathrm{R}$ telles que $\langle\alpha, f\rangle > 0$ pour un (et donc pour tout) $f \in \mathrm{C}$.

Pour $\mathrm{B} \in \mathscr{B}^{\mathrm{T}}$, on pose $\mathrm{R^+(B)} = \{\alpha \in \mathrm{R} \mid \mathrm{U}_\alpha \subseteq \mathrm{B}\}$. Remarquons aussi que

$$\mathrm{R^+(B)} = \{\alpha \in \mathrm{R} \mid \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{Lie}(\mathrm{B})\}.$$

En effet, l'inclusion $\subseteq$ est claire. Réciproquement, si $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \operatorname{Lie}(\mathrm{B})$, alors $\mathfrak{g}_\alpha$ est contenue dans $\operatorname{Lie}(\mathrm{B})^{\mathrm{S}_\alpha} = \operatorname{Lie}(\mathrm{B}\cap\mathrm{Z}_\alpha)$, et ceci entraîne que $\mathrm{B}\cap\mathrm{Z}_\alpha = \mathrm{B}_\alpha$. Pour résumer, on a donc obtenu le

Théorème 27.5. — *L'application* $\mathrm{C} \mapsto \mathrm{B(C)}$ *est une bijection de l'ensemble des chambres de Weyl* (*dans* V^*) *sur* $\mathscr{B}^{\mathrm{T}}$ *; elle vérifie* $\mathrm{R^+(B(C))} = \mathrm{R^+(C)}$*. Le groupe de Weyl* $\mathrm{W(G,T)}$ *est engendré par les* s_α*, pour* $\alpha \in \mathrm{R}$*, et s'identifie à* $\mathrm{W(R)}$.

Pour terminer ce paragraphe, consignons ici le lemme ci-dessous, qui sera utile plus loin (et qu'on peut aussi utiliser pour montrer que tout $\mathrm{B} \in \mathscr{B}^{\mathrm{T}}$ est déterminé par son algèbre de Lie).

Lemme 27.6. — *Soient* K *un sous-groupe fermé connexe de* G*, et* $\mathrm{K}_1, \dots, \mathrm{K}_n$ *des sous groupes fermés connexes de* K*. Si* $\operatorname{Lie}(\mathrm{K}) = \sum_i \operatorname{Lie}(\mathrm{K}_i)$*, alors les* K_i *engendrent* K.

Démonstration. — Soit $\mathrm{K'}$ le sous-groupe de K engendré par les K_i. D'après la proposition 17.1, $\mathrm{K'}$ est un sous-groupe fermé (et connexe) de K. D'autre part, $\operatorname{Lie}(\mathrm{K'})$ contient la somme des $\operatorname{Lie}(\mathrm{K}_i)$, qui égale $\operatorname{Lie}(\mathrm{K})$ par hypothèse. Par conséquent, $\dim \mathrm{K'} = \dim \mathrm{K}$ et $\mathrm{K'} = \mathrm{K}$ puisque K est connexe. □

27.2. Sous-groupes de Borel contenant T **et bases de** R. — Ce paragraphe peut-être omis : on y présente une autre preuve du théorème précédent, qui n'utilise pas la décomposition de Bialynicki-Birula et repose sur le lemme ci-dessous.

Lemme 27.7. — a) *Soient* B *un sous-groupe de Borel de* SL_2, *et* $\mathrm{U} = \mathrm{B}_u$. *Alors* $k[\mathrm{SL}_2]^{\mathrm{U}} \cong \mathrm{S}(\mathrm{V})$, *où* $\mathrm{V} = (k^2)^*$.

b) *Soit* $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_2$ *ou bien* PGL_2, *et soient* $\mathrm{B} = \mathrm{TU}$ *un sous-groupe de Borel, et* α *le poids de* T *dans* Lie(U). *Soit* $\lambda \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$ *tel qu'il existe* $f \in k[\mathrm{G}]$ *non-constante vérifiant* $f(gb) = \lambda(b)f(g)$, *pour tout* $g \in \mathrm{G}$, $b \in \mathrm{B}$. *Alors* $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0$.

Démonstration. — Posons $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_2$. On sait que $k[\mathrm{G}]^{\mathrm{U}} = k[\mathrm{G}/\mathrm{U}]$. Soit $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de k^2. On peut supposer que U est formé des matrices unipotentes triangulaires supérieures. Alors G/U s'identifie à l'orbite $\mathrm{G}e_1 = k^2 \setminus \{0\}$, et d'après le point a) du théorème 10.28, l'on a $k[\mathrm{G}e_1] = k[k^2] = \mathrm{S}(\mathrm{V})$. Plus précisément, l'isomorphisme $\mathrm{S}(\mathrm{V}) \xrightarrow{\sim} k[\mathrm{G}]^{\mathrm{U}}$ associe à tout $\mathrm{P} \in \mathrm{S}(\mathrm{V})$ la fonction $\phi_{\mathrm{P}} : g \mapsto \mathrm{P}(ge_1)$.

On voit sans peine, en utilisant le théorème 20.19, qu'il suffit de démontrer b) lorsque $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_2$. Dans ce cas, soit U comme plus haut. Soient $\lambda \in \mathrm{X}(\mathrm{T})$ et $f \in k[\mathrm{G}]$ vérifiant les hypothèses de l'assertion b). Pour tout $z \in \mathbb{G}_m$, $\alpha^\vee(z)$ est la matrice diagonale $z\mathrm{E}_{11} + z^{-1}\mathrm{E}_{22}$, et l'on a $\alpha^\vee(z)e_1 = ze_1$. On en déduit que le polynôme P tel que $f = \phi_{\mathrm{P}}$ est homogène, non-constant, et qu'on a $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = n$, où $n = \deg(\mathrm{P}) > 0$. L'assertion b) en découle. □

Rappelons que, pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, on note B_α le sous-groupe de Borel de Z_α qui contient T et dont l'algèbre de Lie contient $\mathfrak{g}_\alpha$.

Soit B un Borel de G contenant T. Alors, pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, $\mathrm{B} \cap \mathrm{Z}_\alpha = \mathrm{C}_{\mathrm{B}}(\mathrm{S}_\alpha)$ est égal ou bien à B_α, ou bien à $\mathrm{B}_{-\alpha}$. Donc, si l'on pose

$$\mathrm{R}^+(\mathrm{B}) = \{\alpha \in \mathrm{R} \mid \mathrm{B}_\alpha \subseteq \mathrm{B}\},$$

alors on obtient une partition $\mathrm{R} = \mathrm{R}^+(\mathrm{B}) \sqcup -\mathrm{R}^+(\mathrm{B})$. Observons aussi que

$$\mathrm{R}^+(\mathrm{B}) = \{\alpha \in \mathrm{R} \mid \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathrm{Lie}(\mathrm{B})\}.$$

En effet, l'inclusion $\subseteq$ est claire. Réciproquement, si $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathrm{Lie}(\mathrm{B})$, alors $\mathfrak{g}_\alpha$ est contenue dans $\mathrm{Lie}(\mathrm{B})^{\mathrm{S}_\alpha} = \mathrm{Lie}(\mathrm{B} \cap \mathrm{Z}_\alpha)$, et ceci entraîne que $\mathrm{B} \cap \mathrm{Z}_\alpha = \mathrm{B}_\alpha$.

Théorème 27.8. — 1) *Pour tout* $\mathrm{B} \in \mathscr{B}^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{R}^+(\mathrm{B})$ *est l'ensemble des racines positives associées à une base* $\Delta(\mathrm{B})$ *de* R.

2) *De plus, l'application* $\mathrm{B} \mapsto \Delta(\mathrm{B})$ *est injective. Par conséquent,* $\mathrm{W}(\mathrm{G}, \mathrm{T})$ *est engendré par les* s_α, $\alpha \in \mathrm{R}$, *et s'identifie à* W(R).

Démonstration. — Soit $\mathrm{B} \in \mathscr{B}^{\mathrm{T}}$. D'après le théorème de Chevalley 14.12, il existe un G-module rationnel V de dimension finie et une droite V_1 de V, tels que $\mathrm{Stab}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}_1) = \mathrm{B}$. Alors B agit sur V_1 par un caractère $\lambda \in \mathrm{X}(\mathrm{B}) = \mathrm{X}(\mathrm{T})$. Soit $v \in \mathrm{V}_1 \setminus \{0\}$ et, pour tout $f \in \mathrm{V}^*$ telle que $f(v) \neq 0$, soit ϕ_f l'élément de $k[\mathrm{G}]$ défini par $\phi_f(g) = f(gv)$, pour tout $g \in \mathrm{G}$. Alors $\phi_f(gb) = \lambda(b)\phi_f(g)$, pour tout $b \in \mathrm{B}$.

Soit $\alpha \in \mathrm{R}^+(\mathrm{B})$. Montrons que $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0$. Comme $\mathrm{H}_\alpha := \mathscr{D}(\mathrm{Z}_\alpha)$ est un sous-groupe normal de Z_α, alors $\mathrm{B}_\alpha \cap \mathrm{H}_\alpha$ est un sous-groupe de Borel de H_α. De plus, $\alpha^\vee$ est à valeurs dans H_α d'après le point d) de la proposition 25.9. Comme H_α est isomorphe à SL_2 ou PGL_2, on déduit alors du lemme 27.7 que $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \geqslant 0$. En fait, on a $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0$. En effet, pour tout $z \in \mathbb{G}_m$, $g \in \mathrm{H}_\alpha$, on a

$$\phi_f(g\alpha^\vee(z)) = z^{\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle}\phi_f(g).$$

Supposons que $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle = 0$. Alors, pour $g \in \mathrm{H}_\alpha$, on a $f(gv) = f(v)$ pour toute $f \in \mathrm{V}^*$ telle que $f(v) \neq 0$. On en déduit que H_α fixe v, puis que Z_α stabilise V_1, une contradiction puisque $\mathrm{Stab}_\mathrm{G}(\mathrm{V}_1) = \mathrm{B}$. On a donc montré que $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle > 0$, pour tout $\alpha \in \mathrm{R}^+(\mathrm{B})$.

Comme $\mathrm{R} = \mathrm{R}^+(\mathrm{B}) \cup -\mathrm{R}^+(\mathrm{B})$, on en déduit que λ est régulier (i.e. , $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \neq 0$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$), et que $\mathrm{R}^+(\mathrm{B})$ est l'ensemble de racines positives associé à la base $\Delta(\mathrm{B}) := \Delta(\lambda)$. Ceci prouve le point 1) du théorème.

Montrons le point 2). On déduit du lemme 27.6 que l'application $\mathrm{B} \mapsto \Delta(\mathrm{B})$ est injective, puisque B est engendré par les B_α, pour $\alpha \in \mathrm{R}^+(\mathrm{B})$. Comme W(R) agit transivitement sur l'ensemble des bases de R, il en résulte que $\#\mathrm{W}(\mathrm{G}, \mathrm{T}) = \#\mathscr{B}^\mathrm{T} \leqslant \#\mathrm{W}(\mathrm{R})$. Combiné avec le point d) de la proposition 25.12, ceci entraîne que $\mathrm{W}(\mathrm{G}, \mathrm{T}) = \mathrm{W}'(\mathrm{G}, \mathrm{T})$ et que le morphisme $\mathrm{W}(\mathrm{G}, \mathrm{T}) \to \mathrm{W}(\mathrm{R})$ est un isomorphisme. Le théorème est démontré. □

On peut reformuler le théorème de la façon suivante. Pour toute base Δ de R, notons $\mathrm{R}^+(\Delta)$ l'ensemble de racines positives associé, et $\mathrm{B}(\Delta)$ le sous-groupe (fermé, connexe) de G engendré par les B_α, pour $\alpha \in \mathrm{R}^+(\Delta)$.

Corollaire 27.9. — $\mathrm{W} = \mathrm{W}(\mathrm{G}, \mathrm{T})$ *s'identifie à* W(R)*, et l'application* $\Delta \mapsto \mathrm{B}(\Delta)$ *est une bijection* W*-équivariante entre l'ensemble des bases de* R *et* $\mathscr{B}^\mathrm{T}$.

27.3. Structure des groupes réductifs connexes. — On peut maintenant démontrer le théorème annoncé dans le § 23.5.

Théorème 27.10. — *Soient* G *un groupe réductif connexe,* T *un tore maximal,* $\mathrm{W} = \mathrm{W}(\mathrm{G}, \mathrm{T})$*,* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G})$*,* $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(\mathrm{T})$*, et soit* $(\mathrm{X}(\mathrm{T}), \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}), \mathrm{R}, \mathrm{R}^\vee)$ *la donnée radicielle définie dans la proposition* 25.12*. Alors*

1) $\mathrm{C}_\mathrm{G}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$ *et* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathfrak{g}_\alpha$*, avec* $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ *pour tout* α*.*

2) W *s'identifie à* W(R)*.*

3) *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$*, il existe un* **unique** *sous-groupe fermé connexe* U_α*, normalisé par* T*, et tel que* $\mathrm{Lie}(\mathrm{U}_\alpha) = \mathfrak{g}_\alpha$*. Il est unipotent, et pour tout isomorphisme* $\theta_\alpha : \mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_\alpha$ *on a, pour tout* $x \in \mathbb{G}_a$*,* $t \in \mathrm{T}$*,*

$$(*_\alpha) \qquad t\theta_\alpha(x)t^{-1} = \theta(\alpha(t)x).$$

De plus, si $w \in \mathrm{W}$ *et si* n *est un représentant de* w *dans* $\mathrm{N(T)}$*, alors* $n\mathrm{U}_\alpha n^{-1} = \mathrm{U}_{w\alpha}$.

4) G *est engendré par* T *et les* U_α, $\alpha \in \mathrm{R}$. *De plus, pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$, Z_α *est engendré par* T, U_α, *et* $\mathrm{U}_{-\alpha}$.

5) *Les sous-groupes de Borel contenant* T *sont en bijection avec les chambres de Weyl* (*et les bases*) *de* R. *Plus précisément, à toute chambre* C *on associe le sous-groupe* B(C) *engendré par* T *et les* U_α, *pour* $\alpha \in \mathrm{R}^+(\mathrm{C})$.

Démonstration. — On a déjà vu 1)-2) et l'existence dans 3), cf. Propositions 25.9 et 25.12. Voyons l'unicité. Soit H un sous-groupe fermé connexe normalisé par T et tel que $\mathrm{Lie(H)} = \mathfrak{g}_\alpha$. Alors $\dim \mathrm{H} = 1$, et l'on a $\mathrm{Lie(H \cap Z_\alpha)} = \mathrm{Lie(H)}^{\mathrm{S}_\alpha} = \mathfrak{g}_\alpha$. On en déduit que $\mathrm{H} \cap \mathrm{Z}_\alpha = \mathrm{H}$, d'où $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{Z}_\alpha$. Comme Z_α est réductif, d'après le corollaire 22.4, l'unicité résulte alors de la proposition 25.9.

Ensuite, $n\mathrm{U}_\alpha n^{-1}$ est un sous-groupe fermé unipotent connexe, normalisé par T, dont l'algèbre de Lie est $\mathrm{Ad}(n)\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{w\alpha}$; il est donc égal à $\mathrm{U}_{w\alpha}$. Ceci prouve le point 3).

Enfin, 4) résulte du lemme 27.6, et 5) est une reformulation du théorème 27.5 ou du corollaire 27.9. □

Remarque 27.11. — L'ingrédient pour démontrer l'existence de la donnée radicielle et l'existence et l'unicité des groupes U_α a été de se ramener aux groupes Z_α de rang semi-simple égal à 1. On obtient, de plus, la proposition suivante, qui est **très utile** (et généralise le point 4) du théorème précédent). On conserve les notations précédentes.

***Proposition 27.12* (Sous-groupes normalisés par T).** — *Soit* H *un sous-groupe fermé connexe de* G*, normalisé par* T. *Alors, pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$*, on a l'équivalence :*

$$(\dagger) \qquad \mathrm{U}_\alpha \subseteq \mathrm{H} \iff \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathrm{Lie(H)}.$$

Soit E *l'ensemble des* α *vérifiant cette condition ; alors*

$$\mathrm{Lie(H)} = \mathrm{Lie(T \cap H)} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{E}} \mathfrak{g}_\alpha,$$

et H *est engendré par* $\mathrm{T} \cap \mathrm{H}$ *et les* U_α*, pour* $\alpha \in \mathrm{E}$.

Démonstration. — Dans (†), l'implication ⇒ est évidente. Réciproquement, supposons $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathrm{Lie(H)}$. Alors $\mathfrak{g}_\alpha$ est contenue dans $(\mathrm{Lie\,H})^{\mathrm{S}_\alpha}$, où S_α désigne le sous-tore de T égal à $(\mathrm{Ker}\,\alpha)^0$. Or, d'après le théorème 23.7, on a

$$\mathrm{Lie(H)}^{\mathrm{S}_\alpha} = \mathrm{Lie}(\mathrm{H}^{\mathrm{S}_\alpha}) = \mathrm{Lie(H \cap Z_\alpha)}^0.$$

Donc, a fortiori, $\mathfrak{g}_\alpha$ est contenue dans Lie(K), où K désigne le sous-groupe de Z_α engendré par T et $\mathrm{H}' := (\mathrm{H} \cap \mathrm{Z}_\alpha)^0$. Il est fermé connexe et, puisque T normalise H', l'on a

$$\mathrm{K} = \mathrm{TH}' = \{th \mid t \in \mathrm{T},\ h \in \mathrm{H}'\}.$$

Supposons avoir montré que $\mathrm{U}_\alpha \subseteq \mathrm{K}$, et soit $x \in k$. Alors, il existe $t \in \mathrm{T}$ et $h \in \mathrm{H}'$ tels que

$$\mathrm{U}_\alpha(x) = th. \tag{1}$$

Soit $z \in k^\times$. Conjugant (1) par $\alpha^\vee(z) \in \mathrm{T}$, on obtient

$$\mathrm{U}_\alpha(z^2 x) = th', \tag{2}$$

où l'on a posé $h' = \alpha^\vee(z)\, h\, \alpha^\vee(-z)$; c'est un élément de H'. On déduit de (1) et (2) que $\mathrm{U}_\alpha((z^2-1)x)$ égale $h^{-1}h'$ donc appartient à H'. Il en résulte que $\mathrm{U}_\alpha \subseteq \mathrm{H}'$.

Il reste donc à montrer que $\mathrm{U}_\alpha \subseteq \mathrm{K}$. Or on sait que $\dim \mathrm{Z}_\alpha = \dim \mathrm{T} + 2$, et K est connexe et contient T. Donc, de deux choses l'une. Ou bien K égale Z_α, ou bien $\dim \mathrm{K} = \dim \mathrm{T} + 1$. Dans le second cas, soit B un sous-groupe de Borel de K contenant T. On a $\mathrm{B} \neq \mathrm{T}$, car sinon, d'après la proposition 20.21 (voir aussi 25.3), on aurait $\mathrm{K} = \mathrm{B} = \mathrm{T}$, ce qui n'est pas le cas puisque $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathrm{Lie}(\mathrm{K})$. Donc, pour une raison de dimension, on a $\mathrm{K} = \mathrm{B}$, et c'est l'un des deux sous-groupes de Borel B_α ou $\mathrm{B}_{-\alpha}$ de Z_α. Comme $\mathrm{Lie}(\mathrm{B}_{-\alpha}) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}$ ne contient pas $\mathfrak{g}_\alpha$, on a donc $\mathrm{K} = \mathrm{B}_\alpha$. On obtient donc, dans les deux cas, que K contient U_α. Ceci achève la preuve de l'équivalence (†).

Donc, étant un sous-T-module de $\mathfrak{g}$, Lie(H) est la somme directe des $\mathfrak{g}_\alpha$, pour $\alpha \in \mathrm{E}$, et de $\mathrm{Lie}(\mathrm{H})^{\mathrm{T}}$. De plus, d'après le corollaire 23.8, $\mathrm{Lie}(\mathrm{H})^{\mathrm{T}}$ est l'algèbre de Lie de (la composante connexe de) $\mathrm{H} \cap \mathrm{C}_\mathrm{G}(\mathrm{T}) = \mathrm{H} \cap \mathrm{T}$. On obtient donc

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{H}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{H} \cap \mathrm{T}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{E}} \mathfrak{g}_\alpha.$$

Par conséquent, d'après le lemme 27.6, H est engendré par $\mathrm{H} \cap \mathrm{T}$ et les U_α, pour $\alpha \in \mathrm{E}$. La proposition est démontrée. □

27.4. Sous-groupes unipotents normalisés par T. — Soient G un groupe réductif connexe, T un tore maximal, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ leurs algèbres de Lie, W le groupe de Weyl, R le système de racines.

Choisissons un sous-groupe de Borel B contenant T. D'après le théorème 27.5 (ou 27.8), ceci donne une chambre de Weyl C et l'ensemble associé R^+ de racines positives. De plus, il existe $\eta \in \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}) \cap \mathrm{C}$ tel que

$$\langle \eta, \alpha \rangle \geqslant 1, \qquad \forall\, \alpha \in \mathrm{R}^+.$$

On pose $\mathrm{U} = \mathrm{R}_u(\mathrm{B})$ et on note $\mathfrak{n} = \mathrm{Lie}(\mathrm{U})$.

Enfin, on pose $\mathrm{N} = \#\mathrm{R}^+$ et on choisit une numérotation $\beta_1, \ldots, \beta_\mathrm{N}$ des éléments de R^+.

***Théorème 27.13* (Structure de U et B).** — a) *Le morphisme* T*-équivariant*

$$\Phi : \mathrm{U}_{\beta_1} \times \cdots \times \mathrm{U}_{\beta_\mathrm{N}} \longrightarrow \mathrm{U}, \qquad (u_1, \dots, u_\mathrm{N}) \mapsto u_1 \cdots u_\mathrm{N}$$

est un isomorphisme de variétés.

b) *Plus généralement, soit* U' *un sous-groupe fermé de* U *normalisé par* T *et soient* $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ *les poids de* T *dans* $\mathrm{Lie}(\mathrm{U}')$*. Alors* U' *est connexe, on a* $\mathrm{U}_{\alpha_i} \subseteq \mathrm{U}'$ *pour* $i = 1, \dots, r$*, et le morphisme* T*-équivariant*

$$\mathrm{U}_{\alpha_1} \times \cdots \times \mathrm{U}_{\alpha_r} \longrightarrow \mathrm{U}', \qquad (u_1, \dots, u_r) \mapsto u_1 \cdots u_r$$

est un isomorphisme de variétés.

c) *Le morphisme* $\mathrm{T} \times \mathrm{U} \to \mathrm{B}$ *qui au couple* (t, u) *associe le produit* tu*, resp.* ut*, est un isomorphisme de variétés. Par conséquent, tout élément* $b \in \mathrm{B}$ *s'écrit de façon unique*

$$b = t\mathrm{U}_{\beta_1}(x_1) \cdots \mathrm{U}_{\beta_\mathrm{N}}(x_\mathrm{N}) = \mathrm{U}_{\beta_1}(\beta_1(t)x_1) \cdots \mathrm{U}_{\beta_\mathrm{N}}(\beta_\mathrm{N}(t)x_\mathrm{N}).$$

Démonstration. — a) Posons $\mathscr{V} = \mathrm{U}_{\beta_1} \times \cdots \times \mathrm{U}_{\beta_\mathrm{N}}$. Alors $\mathscr{V}$ est isomorphe, comme T-variétés, à l'espace tangent $\mathrm{T}_e\mathrm{U}$. Par conséquent, l'assertion a) résulte de la proposition 26.3. Rappelons l'argument.

Comme $\dim \mathscr{V} = \dim \mathrm{U}$, il suffit de montrer que Φ est une immersion fermée, i.e. que le comorphisme Φ^* est surjectif. Posons $\mathrm{A} = k[\mathscr{V}]$.

Comme $\mathscr{V} \cong \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{R}^+} \mathfrak{g}_\alpha$ comme T-variétés, alors A est graduée positivement par :

$$\mathrm{A} = k \oplus \mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_2 \oplus \cdots, \quad \text{où } \mathrm{A}_i = \{a \in \mathrm{A} \mid \eta(z)a = z^{-i}a,\ \forall\, z \in \mathbb{G}_m\}.$$

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal d'augmentation. C'est l'idéal maximal correspondant au point $(e, \dots, e)$ de $\mathscr{V}$. Notons $\mathfrak{m}_\mathrm{U}$ l'idéal maximal de $k[\mathrm{U}]$ au point e.

L'espace tangent $\mathrm{T}_0\mathscr{V}$ s'identifie à $\bigoplus_{\alpha \in \mathrm{R}^+} \mathfrak{g}_\alpha$, et la différentielle $\mathrm{d}_0\Phi$ est un isomorphisme $\mathrm{T}_0\mathscr{V} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{n}$. Donc

$$\mathfrak{m} = \Phi^*(\mathfrak{m}_\mathrm{U}) + \mathfrak{m}^2,$$

et ceci implique que $\Phi^*(\mathfrak{m}_\mathrm{U})$ contient un supplémentaire T-stable de $\mathfrak{m}^2$ dans $\mathfrak{m}$. Il résulte alors du lemme de Nakayama gradué 26.1 que Φ^* est surjective. Ceci prouve l'assertion a).

Démontrons l'assertion b). Traitons d'abord le cas où U' est supposé connexe. Soit $\alpha \in \mathrm{R}^+$ tel que $\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathrm{Lie}(\mathrm{U}')$. Alors $\mathfrak{g}_\alpha$ est contenue dans $(\mathrm{Lie}\,\mathrm{U}')^{\mathrm{S}_\alpha}$, où S_α désigne le sous-tore de T égal à $(\mathrm{Ker}\,\alpha)^0$. Or, d'après le théorème 23.7, on a

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{U}')^{\mathrm{S}_\alpha} = \mathrm{Lie}(\mathrm{U}'^{\mathrm{S}_\alpha}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{U}' \cap \mathrm{Z}_\alpha).$$

Or, $(\mathrm{U}' \cap \mathrm{Z}_\alpha)^0$ est un sous-groupe fermé connexe unipotent T-stable de Z_α, donc égal à U_α ou $\mathrm{U}_{-\alpha}$. Puisque son algèbre de Lie contient $\mathfrak{g}_\alpha$, alors $(\mathrm{U}' \cap \mathrm{Z}_\alpha)^0 =$

U_α, et donc $\mathrm{U}_\alpha \subseteq \mathrm{U}'$. Ceci montre l'équivalence :

$$\mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathrm{Lie}(\mathrm{U}') \Leftrightarrow \mathrm{U}_\alpha \subseteq \mathrm{U}'.$$

Le même argument que dans la preuve de a) montre alors que le morphisme $\psi : \mathrm{U}_{\alpha_1} \times \cdots \times \mathrm{U}_{\alpha_r} \to \mathrm{U}'$ est une immersion fermée. Puisque $\dim \mathrm{U}' = \dim \mathrm{Lie}(\mathrm{U}') = r$ et que U' est supposé connexe, ψ est un isomorphisme. Ceci prouve b) dans le cas où U' est supposé connexe.

Soit maintenant U' arbitraire, et soit U_1 sa composante connexe. Il résulte de ce qui précède que la multiplication induit un isomorphisme de variétés $\mathrm{U}_1 \times \mathrm{U}_2 \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}$, où U_2 est le produit des U_α non contenus dans U_1. Alors $\mathrm{U}' \cap \mathrm{U}_2$ est un sous-groupe de U_2, qui est T-stable et fini, car isomorphe à U'/U_1. On en déduit que $\mathrm{U}' \cap \mathrm{U}_2 = \{1\}$, et donc U' est connexe. L'assertion b) est démontrée.

Enfin, on a déjà vu que $\mathrm{T} \times \mathrm{U} \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}$ comme variétés, et la dernière assertion de c) est facile et laissée au lecteur. □

Pour terminer ce paragraphe, signalons le corollaire suivant. One note $\mathrm{Q(R)}^+$ le sous-monoïde de Q(R) engendré par R^+, ou, de façon équivalente, par la base Δ de R^+.

Corollaire 27.14. — *Comme* T*-module,* $k[\mathrm{U}] = \bigoplus_{\gamma \in \mathrm{Q(R)}^+} k[\mathrm{U}]_{-\gamma}$*, et chaque* $k[\mathrm{U}]_{-\gamma}$ *est de dimension finie. De plus,* $k[\mathrm{U}]_0 = k \cdot 1$*.*

Démonstration. — $k[\mathrm{U}]$ est isomorphe comme T-variété à $k[\mathrm{V}] = \mathrm{S}(\mathrm{V}^*)$, où V désigne le T-module

$$\bigoplus_{\alpha \in \mathrm{R}^+} \mathfrak{g}_\alpha = \bigoplus_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathfrak{g}_{\beta_i}.$$

Soit $\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}\}$ une base de V^*, où chaque X_i est de poids $-\beta_i$. Alors $k[\mathrm{U}]$ s'identifie à l'algèbre de polynômes $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{N}]$, et la première assertion en découle.

De plus, pour tout $\gamma \in \mathrm{Q(R)}^+$, l'espace de poids $-\gamma$ est engendré par les monômes $\mathrm{X}_1^{r_1} \cdots \mathrm{X}_\mathrm{N}^{r_\mathrm{N}}$ tels que $r_1\beta_1 + \cdots + r_\mathrm{N}\beta_\mathrm{N} = \gamma$. Or, comme Δ est une base, il n'y a qu'un nombre fini de telles écritures, et de plus $r_1 = \cdots = r_\mathrm{N} = 0$ si $\gamma = 0$. Le corollaire est démontré. □

27.5. Cellules de Schubert et décomposition de Bruhat. — Comme précédemment, soient G réductif connexe, T un tore maximal, W le groupe de Weyl, etc. On fixe un sous-groupe de Borel B contenant T, d'où un sous-ensemble de racines positives R^+. Soient $\mathrm{U} = \mathrm{B}_u$ et $\mathfrak{b} = \mathrm{Lie(B)}$, $\mathfrak{n} = \mathrm{Lie(U)}$. On identifie $\mathscr{B}$ à G/B et on désigne par e_w le point fixe $w\mathrm{B}/\mathrm{B}$. (Pour $w = 1$, on note simplement e.)

Définition 27.15. — Soit $\mathrm{C}^+ = \{f \in \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}) \otimes \mathbb{R} \mid \langle \alpha, f \rangle > 0, \ \ \forall\, \alpha \in \mathrm{R}^+\}$. On l'appelle la chambre de Weyl **dominante** (relativement à B ou R^+).

Comme le groupe de Weyl agit de façon simplement transitive sur les chambres de Weyl, il existe un unique $w_0 \in \mathrm{W}$ tel que $w_0(\mathrm{C}^+) = -\mathrm{C}^+$, et w_0 est une involution (puisque $w_0^2(\mathrm{C}^+) = \mathrm{C}^+$). On notera n_0 un représentant de w_0 dans $\mathrm{N}_\mathrm{G}(\mathrm{T})$.

On fixe un cocaractère $\lambda \in \mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$ **dominant régulier**, c.-à-d., tel que $\langle \alpha, \lambda \rangle \in \mathbb{N}^*$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}^+$. On considère la décomposition de Byalinicki-Birula correspondante :

$$\mathrm{G}/\mathrm{B} = \bigsqcup_{w \in \mathrm{W}} \mathrm{C}(w), \quad \text{où } \mathrm{C}(w) = \{x \in \mathrm{G}/\mathrm{B} \mid \lim_{t \to 0} \lambda(t)x = e_w\}.$$

Soit $x \in \mathrm{C}(w)$. Comme les poids de $\lambda(\mathbb{G}_m)$ dans Lie(U) sont tous > 0, alors pour tout $u \in \mathrm{U}$ et $t \in \mathbb{G}_m$, on a

$$\lim_{t \to 0} \lambda(t)u\lambda(t)^{-1} = 1,$$

et donc, comme $\lambda(t)ux = \lambda(t)u\lambda(t)^{-1}\,\lambda(t)x$,

$$\lim_{t \to 0} \lambda(t)ux = \lim_{t \to 0} \lambda(t)x = e_w.$$

Ceci montre que l'orbite $\mathrm{C}(w)$ est stable par U, donc en particulier contient $\mathrm{U}e_w$.

Or, si $\mathrm{U}x$ est une autre orbite de U dans $\mathrm{C}(w)$, qui est un espace affine, elle est fermée dans $\mathrm{C}(w)$, d'après le théorème de Kostant-Rosenlicht. Mais d'après ce qui précède, e_w appartient à son adhérence dans $\mathrm{C}(w)$. Donc $e_w \in \mathrm{U}x$ et $\mathrm{U}x = \mathrm{U}e_w$. Il en résulte que $\mathrm{C}(w) = \mathrm{U}e_w$. On a donc obtenu la première assertion de la proposition suivante. Pour chaque $w \in \mathrm{W}$, on note n_w un représentant dans $\mathrm{N}_\mathrm{G}(\mathrm{T})$ (et l'on écrit n_0 au lieu de n_{w_0}).

***Proposition 27.16* (Décomposition de Bruhat (I))**. — *Soit* B *un sous-groupe de Borel contenant* T*, correspondant à une chambre de Weyl* C^+*, et soit* $\mathrm{U} = \mathrm{B}_u$*. Alors les cellules de la décomposition de Bialynicki-Birula de* $\mathscr{B} = \mathrm{G}/\mathrm{B}$ *associée à* C^+ *sont exactement les orbites* $\mathrm{U}e_w$*, pour* $w \in \mathrm{W}$*. On a donc la décomposition de Bruhat :*

$$\mathrm{G}/\mathrm{B} = \bigsqcup_{w \in \mathrm{W}} \mathrm{U}n_w\mathrm{B}/\mathrm{B} \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{G} = \bigsqcup_{w \in \mathrm{W}} \mathrm{U}n_w\mathrm{B}.$$

De plus, l'orbite ouverte de U *dans* G/B (*resp., de* $\mathrm{U}\times\mathrm{B}$ *dans* G)*, est* $\mathrm{U}n_0\mathrm{B}/\mathrm{B}$ (*resp.,* $\mathrm{U}n_0\mathrm{B}$)*.*

Démonstration. — On a déjà vu la première assertion. D'autre part, l'espace tangent $\mathrm{T}_{e_{w_0}}(\mathrm{G}/\mathrm{B})$ s'identifie à

$$\mathfrak{g}/n_0(\mathfrak{b}) \cong \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{R}^+} \mathfrak{g}_\alpha;$$

les poids de $\lambda(\mathbb{G}_m)$ y sont tous > 0, donc c'est bien l'orbite ouverte. □

0n pose $\mathrm{R}^- = -\mathrm{R}^+$ et $\mathrm{U}^- = n_0(\mathrm{U})$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_\alpha \subseteq \mathrm{U} \quad &\Leftrightarrow \alpha \in \mathrm{R}^+;\\ \mathrm{U}_\alpha \subseteq \mathrm{U}^- &\Leftrightarrow \alpha \in \mathrm{R}^-. \end{aligned}$$

Définition 27.17. — Pour tout $w \in \mathrm{W}$, on pose

$$\mathrm{U}_w = \mathrm{U} \cap n_w(\mathrm{U}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}^w = \mathrm{U} \cap n_w(\mathrm{U}^-).$$

Ce sont deux sous-groupes fermés T-stables de U, donc chacun est le produit des U_α qu'il contient (cf. 27.13). De plus,

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_\alpha \subseteq \mathrm{U}_w &\Leftrightarrow \alpha \in \mathrm{R}^+ \cap w(\mathrm{R}^+);\\ \mathrm{U}_\alpha \subseteq \mathrm{U}^w &\Leftrightarrow \alpha \in \mathrm{R}^+ \cap w(\mathrm{R}^-). \end{aligned}$$

Comme les deux ensembles de racines ci-dessus forment une partition de R^+, on a, d'après 27.13 à nouveau, $\mathrm{U}^w \cap \mathrm{U}_w = \{1\}$ (car il ne contient aucun U_α), et la multiplication induit un isomorphisme de variétés $\mathrm{U}^w \times \mathrm{U}_w \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}$.

Proposition 27.18. — *Pour tout* $w \in \mathrm{W}$ *le stabilisateur du point* e_w *dans* G, *resp.* $\mathfrak{g}$, *resp.* U, *resp.* $\mathfrak{n}$, *est* $n_w(\mathrm{B})$, *resp.* $n_w(\mathfrak{b})$, *resp.*

$$\mathrm{U} \cap n_w(\mathrm{B}) = \mathrm{U}_w, \qquad \textit{resp.} \qquad \mathfrak{n} \cap n_w(\mathfrak{b}) = \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{R}^+\cap w(\mathrm{R}^+)} \mathfrak{g}_\alpha = \mathrm{Lie}(\mathrm{U}_w).$$

Par conséquent, $\mathrm{U}e_w = \mathrm{U}^w e_w$ *et le morphisme orbite* $\psi_w : \mathrm{U}^w \to \mathrm{U}^w e_w$ *est un isomorphisme. En particulier,*

$$\dim \mathrm{U}e_w = \dim \mathrm{U}^w = |\mathrm{R}^+ \cap w(\mathrm{R}^-)| =: n(w).$$

Démonstration. — Le morphisme $\phi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{B}$ est séparable, et $\operatorname{Ker} \mathrm{d}\phi = \mathfrak{b}$. Fixons $w \in \mathrm{W}$. Évidemment, le stabilisateur de $e_w = n_w\mathrm{B}/\mathrm{B}$ est $n_w(\mathrm{B})$ et, par G-équivariance, le morphisme orbite

$$\phi_w : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}/\mathrm{B}, \qquad g \mapsto gn_w\mathrm{B}/\mathrm{B} = n_w({n_w}^{-1}gn_w)\mathrm{B}/\mathrm{B},$$

est aussi séparable, et $\operatorname{Ker} \mathrm{d}\phi_w = n_w(\mathfrak{b})$. Les deux autres égalités en découlent en prenant l'intersection avec U ou $\mathfrak{n}$. Comme $\mathrm{U} = \mathrm{U}^w\mathrm{U}_w$ et $\mathrm{U}^w \cap \mathrm{U}_w = \{1\}$, alors $\psi_w : \mathrm{U}^w \to \mathrm{U}e_w$ est bijectif ; comme de plus

$$\operatorname{Ker} \mathrm{d}\psi_w = \mathrm{Lie}(\mathrm{U}^w) \cap \mathrm{Lie}(\mathrm{U}_w) = \{0\},$$

alors ψ_w est séparable, donc c'est un isomorphisme. □

Définition 27.19. — En particulier, pour $w = w_0$, on a $\mathrm{U}^{w_0} = \mathrm{U}$ et donc on obtient des isomorphismes

$$\mathrm{U} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}n_0\mathrm{B}/\mathrm{B} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}\times\mathrm{B} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}n_0\mathrm{B}.$$

Translatant ceci par ${n_0}^{-1}$, on obtient, comme ${n_0}^{-1}\mathrm{U}n_0 = \mathrm{U}^-$, des isomorphismes

$$\mathrm{U}^- \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}^-\mathrm{B}/\mathrm{B} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}^-\times\mathrm{B} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}^-\mathrm{B}.$$

Ce sont, respectivment, des voisinages ouverts affines de e_{n_0} dans G/B, resp. n_0 dans G, resp. e dans G/B, resp. G. Dans tous les cas, ces voisinages sont appelés « la grosse cellule » (au voisinage du point considéré).

Remarque 27.20. — Dans le cas des groupes semi-simples de rang 1, on avait déjà utilisé ces « grosses cellules » dans le cas de $\mathrm{G}/\mathrm{B} = \mathbb{P}^1$.

On peut maintenant énoncer une version plus précise de la décomposition de Bruhat :

***Théorème 27.21* (Décomposition de Bruhat (II))**. — *On a*

$$\mathrm{G} = \bigsqcup_{w\in\mathrm{W}} \mathrm{U}^w n_w \mathrm{B},$$

et, pour tout $w \in \mathrm{W}$, l'application $\mathrm{U}^w \times \mathrm{B} \to \mathrm{U}^w n_w\mathrm{B}$, $(u,b) \mapsto un_wb$ est un isomorphisme. En particulier, tout $g \in \mathrm{G}$ s'écrit de façon **unique**

$$g = un_wtu', \qquad \text{avec } t \in \mathrm{T},\ u' \in \mathrm{U},\ u \in \mathrm{U}^w.$$

De plus, on a les recouvrements ouverts

$$\mathrm{G} = \bigcup_{w\in\mathrm{W}} n_w\mathrm{U}^-\mathrm{B} \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{G}/\mathrm{B} = \bigcup_{w\in\mathrm{W}} n_w\mathrm{U}^-\mathrm{B}/\mathrm{B}.$$

Démonstration. — On a déjà vu tout cela, sauf la dernière assertion. Or, $n_w\mathrm{U}^-\mathrm{B}$ est un voisinage ouvert de n_w, qui égale $n_w(\mathrm{U}^-)n_w\mathrm{B}$ donc contient $\mathrm{U}^w n_w\mathrm{B}$, puisque $\mathrm{U}^w = n_w(\mathrm{U}^-)\cap\mathrm{U}$. □

Définition 27.22. — Pour tout $w \in \mathrm{W}$, on pose

$$\mathrm{N}(w) = \{\alpha \in \mathrm{R}^+ \mid w^{-1}\alpha \in \mathrm{R}^-\} = \mathrm{R}^+ \cap w(\mathrm{R}^-),$$

et $n(w) = |\mathrm{N}(w)|$. On a vu plus haut que $n(w) = \dim \mathrm{U}e_w = \dim \mathrm{C}(w)$.

On voit facilement que $n(w^{-1}) = n(w)$, et $n(w_0w) = n(ww_0) = \mathrm{N} - n(w)$, où $\mathrm{N} = \#\mathrm{R}^+$. Par conséquent, $\dim \mathrm{C}(w) = \dim \mathrm{C}(w^{-1})$ et $\dim \mathrm{C}(w_0w) = \mathrm{N} - \dim \mathrm{C}(w)$.

28. Structure des groupes semi-simples

28.1. Premières propriétés des groupes semi-simples. —

Théorème 28.1. — *Soient* G *un groupe connexe* **semi-simple**, T *un tore maximal,* $\mathrm{R} = \mathrm{R}(\mathrm{G}, \mathrm{T})$. *Alors :*

a) *Le sous-groupe* $\bigcap_{\alpha \in \mathrm{R}} \operatorname{Ker} \alpha \subset \mathrm{T}$ *égale* $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$, *qui est fini. Par conséquent,* R *engendre* $\mathrm{X}(\mathrm{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, *et* $\mathrm{R}^\vee$ *engendre* $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

b) G *est engendré par les* U_α, *pour* $\alpha \in \mathrm{R}$, *et donc* $\mathrm{G} = \mathscr{D}(\mathrm{G})$.

Démonstration. — On sait que $\mathrm{Z}(\mathrm{G}) \subseteq \mathrm{T}$, que G est engendré par T et les U_α, et que pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, $x \in \mathbb{G}_m$, $t \in \mathrm{T}$, on a $t\theta_\alpha(x)t^{-1} = \theta_\alpha(\alpha(t)x)$. On en déduit que

$$\mathrm{Z}(\mathrm{G}) = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{R}} \operatorname{Ker} \alpha.$$

D'autre part, comme G est semi-simple alors $\mathrm{Z}(\mathrm{G})^0 = \{1\}$ et donc $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$ est fini.

Il en résulte, d'après la question 1.6 du § 16.4, que $\mathrm{Q}(\mathrm{R})$ est d'indice fini dans $\mathrm{X}(\mathrm{T})$. Alors, puisque $\mathrm{Q}(\mathrm{R}^\vee)$ et $\mathrm{Q}(\mathrm{R})$ ont même rang (le cardinal d'une base de R), $\mathrm{Q}(\mathrm{R}^\vee)$ est aussi d'indice fini dans $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T})$. Ceci prouve a).

On en déduit que T est engendré par les sous-groupes $\alpha^\vee(\mathbb{G}_m)$, pour $\alpha \in \mathrm{R}$. En effet, soient S le sous-groupe (fermé connexe) engendré par ces derniers et π l'application de restriction $\mathrm{X}(\mathrm{T}) \to \mathrm{X}(\mathrm{S})$. Alors,

$$\operatorname{Ker} \pi = \{\chi \in \mathrm{X}(\mathrm{T}) \mid \langle \chi, \alpha^\vee \rangle = 0, \, \forall \, \alpha \in \mathrm{R}\}.$$

Comme $\mathrm{R}^\vee$ engendre $\mathrm{X}^\vee(\mathrm{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, on en déduit que $\operatorname{Ker} \pi = \{0\}$, d'où $\mathrm{T} = \mathrm{S}$. De plus, on a le lemme suivant.

Lemme 28.2. — *Pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$, $\alpha^\vee(\mathbb{G}_m)$ *est contenu dans le sous-groupe engendré par* U_α *et* $\mathrm{U}_{-\alpha}$.

Démonstration. — D'après le point d) de la proposition 25.9, $\alpha^\vee(\mathbb{G}_m)$ est contenu dans $\mathscr{D}(\mathrm{Z}_\alpha)$. Notons H_α le sous-groupe de $\mathscr{D}(\mathrm{Z}_\alpha)$ engendré par U_α et $\mathrm{U}_{-\alpha}$. C'est un sous-groupe fermé connexe non-trivial, normalisé par T et donc normal dans $\mathscr{D}(\mathrm{Z}_\alpha)$. Alors, H_α ne peut être de dimension 1 ou 2, car sinon H_α et $\mathscr{D}(\mathrm{Z}_\alpha)/\mathrm{H}_\alpha$ seraient résolubles, et donc $\mathscr{D}(\mathrm{Z}_\alpha)$ aussi, une contradiction. Donc $\dim \mathrm{H} = 3$ et $\mathrm{H}_\alpha = \mathscr{D}(\mathrm{Z}_\alpha)$. Le lemme est démontré. □

Il en résulte que $\mathrm{T} = \mathrm{S}$ est contenu dans le sous-groupe H engendré par les U_α, pour $\alpha \in \mathrm{R}$. Comme G est engendré par T et H, d'après le point 4) du théorème 27.10, on obtient que $\mathrm{G} = \mathrm{H}$. Il en résulte que $\mathrm{G} = \mathscr{D}(\mathrm{G})$, puisque chaque U_α est contenu dans $\mathscr{D}(\mathrm{G})$. En effet, pour $x \in \mathbb{G}_a$, $t \in \mathrm{T}$, on a

$$t\theta_\alpha(x)t^{-1}\theta_\alpha(-x) = \theta_\alpha((\alpha(t) - 1)x).$$

Ceci prouve b). Le théorème est démontré. □

Corollaire 28.3. — *Soit* G *réductif connexe. La multiplication induit un morphisme de groupes algébriques*

$$\mathscr{D}(\mathrm{G}) \times \mathrm{Z}^0(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{G},$$

qui est surjectif et de noyau fini.

Démonstration. — $\mathrm{G}/\mathrm{Z}^0(\mathrm{G})$ est semi-simple, donc égal à son groupe dérivé d'après le théorème précédent. Par conséquent, le morphisme de groupes $\mathscr{D}(\mathrm{G}) \to \mathrm{G}/\mathrm{Z}^0(\mathrm{G})$ est surjectif, d'où $\dim \mathscr{D}(\mathrm{G}) \geqslant \dim \mathrm{G} - \dim \mathrm{Z}^0$. Or, on a vu (Proposition 23.14) que le morphisme de groupes algébriques

$$\phi : \mathscr{D}(\mathrm{G}) \times \mathrm{Z}^0(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{G}$$

est de noyau fini (car $\operatorname{Ker} \phi \cong \mathscr{D}(\mathrm{G}) \cap \mathrm{Z}^0(\mathrm{G})$), donc son image est un sous-groupe fermé de G de dimension $\geqslant \dim \mathrm{G}$. Donc ϕ est surjectif. Le corollaire est démontré. □

28.2. Rappels sur les systèmes de racines. — On rappelle dans ce paragraphe quelques propriétés des systèmes de racines. Pour les démonstrations, on renvoie à [**BL4-6**, Chap. 6] ou [**Hu**, Chap. III].

28.3. Notation et conventions. — Soit R un système de racines dans un espace vectoriel réel E. Alors, $\mathrm{R}^\vee$ est un système de racines dans l'espace dual E^*. Soit W le groupe de Weyl. Il est commode d'identifier E et E^* au moyen d'un produit scalaire (défini positif) W-invariant. Ceci est possible car si $\phi(-,-)$ est un produit scalaire arbitraire sur E, alors la forme bilinéaire sur E définie par

$$(x, x') = \frac{1}{|\mathrm{W}|} \sum_{w \in \mathrm{W}} \phi(wx, wx')$$

est W-invariante et définie positive. On obtient alors un isomorphisme $\tau : \mathrm{E}^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}$ et l'on vérifie que, pour tout $\alpha \in \mathrm{R}$, on a

$$\tau(\alpha^\vee) = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)},$$

cf. *loc. cit.* Par abus, on écrira encore $\alpha^\vee$ au lieu de $\tau(\alpha^\vee)$, alors on a, pour tout $x \in \mathrm{E}$:

$$\langle \alpha^\vee, x \rangle = \frac{2(\alpha, x)}{(\alpha, \alpha)} \overset{\text{def}}{=} (\alpha^\vee, x),$$

c.-à-d., l'identification $\tau(\alpha^\vee) = \alpha^\vee$ est compatible avec le remplacement des crochets $\langle -, - \rangle$ par le produit scalaire $(-,-)$. De plus, comme $(\alpha, \alpha)/2 > 0$, alors

$$(\alpha^\vee, \beta), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha, \beta^\vee)$$

sont de même signe, pour tout $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$.

28.4. Systèmes de racines irréductibles. —

Définition 28.4. — Un systèmes de racines R est dit **réductible** s'il existe une partition de R en deux sous-ensembles non vides R_1 et R_2 tels que $(\alpha, \beta) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathrm{R}_1$ et $\beta \in \mathrm{R}_2$. Dans ce cas, on écrira

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_1 \overset{\perp}{\sqcup} \mathrm{R}_2.$$

Dans le cas contraire, on dit que R est **irréductible**.

Définition 28.5. — 1) Soit R un système de racines et Δ une base de R. On rappelle que les éléments de Δ forment les sommets du **graphe de Coxeter** C(R) de R, dans lequel deux sommets $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ sont reliés par

$$\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \, \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = \frac{4(\alpha, \beta)^2}{(\beta, \beta)(\alpha, \alpha)}$$

arêtes (ceci est un élément de $\{0, 1, 2, 3\}$).

2) Tout $\beta \in \mathrm{R}$ s'écrit de façon unique

$$\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} n_\alpha(\beta) \alpha.$$

On pose $\mathrm{Supp}(\beta) = \{\alpha \in \mid n_\alpha(\beta) \neq 0\}$; on l'appelle le **support** de β.

Soit R un système de racines ; notons $\mathrm{C}_1, \dots, \mathrm{C}_n$ les composantes connexes de C(R).

Proposition 28.6. — *Posons* $\mathrm{R}_i = \{\beta \in \mathrm{R} \mid \mathrm{Supp}(\beta) \subseteq \mathrm{C}_i\}$, *pour* $i = 1, \dots, n$. *Alors chaque* R_i *est un système de racines irréductible, dont le graphe de Coxeter est* C_i, *et* R *est la réunion disjointe orthogonale des* R_i *:*

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_1 \overset{\perp}{\sqcup} \cdots \overset{\perp}{\sqcup} \mathrm{R}_n$$

(c.-à-d., $(\alpha, \beta) = 0$ *si* $\alpha \in \mathrm{R}_i$, $\beta \in \mathrm{R}_j$, *et* $i \neq j$*). De plus, cette décomposition vérifie la propriété suivante : si*

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}'_1 \overset{\perp}{\sqcup} \cdots \overset{\perp}{\sqcup} \mathrm{R}'_m$$

est une partition de R *en sous-ensembles deux-à-deux orthogonaux, alors chaque* R'_j *est la réunion des* R_i *qu'il contient. En particulier, si les* R'_j *sont irréductibles, alors* $m = n$ *et il existe une permutation* $\sigma \in \mathrm{S}_n$ *telle que* $\mathrm{R}'_i = \mathrm{R}_{\sigma(i)}$ *pour* $i = 1, \dots, n$.

Par conséquent, les R_i *sont uniquement déterminés. On les appelle les* **composantes irréductibles** *de* R. *En particulier,* R *est irréductible si et seulement si* C(R) *est connexe.*

Remarque 28.7. — Il résulte de la proposition précédente que, pour tout $\beta \in \mathrm{R}$, son support est contenu dans une unique composante connexe de C(R).

28.5. Commutateurs et parties closes. —

Lemme 28.8. — *Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ telles que $\beta \neq \pm\alpha$. Il existe $w \in \mathrm{W}$ tel que $w\alpha \in \mathrm{R}^+$ et $w\beta \in \mathrm{R}^+$.*

Démonstration. — Comme W agit transitivement sur les bases et toute racine appartient à une base, on peut supposer que $\alpha \in \Delta$. Si $\beta \in \mathrm{R}^+$ alors $w = \mathrm{id}$ convient. Sinon, on a $s_\alpha\alpha = -\alpha$ et $s_\alpha\beta \in \mathrm{R}^-$ (car $\beta \neq -\alpha$) et alors $w_0 s_\alpha$ convient, où w_0 désigne l'unique élément de W tel que $w_0\mathrm{R}^+ = \mathrm{R}^-$. □

Proposition 28.9. — *Soient $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$, $\alpha \neq \pm\beta$. Il existe des $c_{i,j} \in k$ tels que*

$$(\theta_\alpha(x), \theta_\beta(y)) = \prod_{\substack{i,j \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \\ i\alpha+j\beta \in \mathrm{R}}} \theta_{i\alpha+j\beta}(c_{i,j}x^i y^j), \qquad \forall\, x, y \in k.$$

En particulier, U_α et U_β commutent si α et β ne sont pas dans la même composante irréductible de R.

Démonstration. — En utilisant le lemme précédent, on se ramène au cas où $\alpha, \beta \in \mathrm{R}^+$. Alors, puisque $\mathrm{U} \cong \prod_{\gamma \in \mathrm{R}^+} \mathrm{U}_\gamma$ (le produit étant pris dans un ordre fixé arbitraire), il existe des polynômes $\mathrm{P}_\gamma \in k[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$, uniquement déterminés, tels que, pour tout $x, y \in k$,

$$(\theta_\alpha(x), \theta_\beta(y)) = \prod_{\gamma \in \mathrm{R}^+} \theta_\gamma(\mathrm{P}_\gamma(x, y)). \tag{$*$}$$

Puisque $(\theta_\alpha(0), \theta_\beta(y)) = e = (\theta_\alpha(x), \theta_\beta(0))$, alors chaque P_γ est de degré $\geqslant 1$ en X et en Y.

Fixons γ et posons $\mathrm{P}_\gamma = \sum_{i,j \geqslant 1} c_{\gamma,i,j}\mathrm{X}^i\mathrm{Y}^j$. Conjugant $(*)$ par un élément arbitraire $t \in \mathrm{T}$, on obtient que

$$\gamma(t)\mathrm{P}_\gamma(x, y) = \mathrm{P}_\gamma(\alpha(t)x, \beta(t)y) = \sum_{i,j \geqslant 1} c_{\gamma,i,j}(i\alpha + j\beta)(t)\, \mathrm{X}^i\mathrm{Y}^j,$$

On en déduit que P_γ est la somme des $c_{\gamma,i,j}\mathrm{X}^i\mathrm{Y}^j$, pour les i, j tels que $i\alpha + j\beta = \gamma$. De plus, puisque $\mathbb{Q}\alpha \cap \mathrm{R} = \{\alpha, -\alpha\}$ et que $\beta \neq \pm\alpha$, on obtient que s'il existe $i, j \geqslant 1$ tels que $i\alpha + j\beta = \gamma$, alors le couple (i, j) est unique et l'on a

$$\mathrm{P}_\gamma = c_{i,j}\mathrm{X}^i\mathrm{Y}^j, \qquad \text{où } c_{i,j} = c_{i\alpha+j\beta,i,j}.$$

Sinon, on a $\mathrm{P}_\gamma = 0$. Ceci prouve la première assertion.

De plus, si α et β ne sont pas dans la même composante irréductible de R, alors aucun $i\alpha + j\beta$ ne peut être une racine, puisque le support d'une racine est contenu dans une composante connexe de C(R). Par conséquent, U_α et U_β commutent dans ce cas. La proposition est démontrée. □

Définition 28.10. — On dit qu'une partie Γ de R est **close** si elle vérifie la propriété suivante : si $\alpha, \beta \in \Gamma$ et $\alpha + \beta \in \mathrm{R}$, alors $\alpha + \beta \in \Gamma$.

Le corollaire suivant découle alors de la proposition.

Corollaire 28.11. — *Soit* Γ *une partie close de* R^+. *Alors* $\prod_{\alpha\in\Gamma} \mathrm{U}_\alpha$ *est un sous-groupe fermé* T*-stable de* U*, noté* U_Γ (*le produit étant pris dans un ordre fixé arbitraire*).

Remarque 28.12. — En caractéristique nulle, tout groupe unipotent H est connexe. En effet, H/H^0 est unipotent et fini. Or, puisque $\mathrm{car}(k) = 0$, tout groupe fini est formé d'éléments semi-simples. Donc $\mathrm{H}/\mathrm{H}^0 = \{1\}$.

Par contre, si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, alors $\mathbb{G}_a = k$ contient les sous-groupes finis

$$\mathbb{G}_a(\mathbb{F}_{p^n}) = \{x \in k \mid x^{p^n} = x\}.$$

Revenant à G réductif, T un tore maximal, etc., on a de même les sous-groupes $\mathrm{U}_\alpha(\mathbb{F}_{p^n})$; ils ne sont pas stables par T.

Toutefois, on peut montrer que tout sous-groupe fermé unipotent, non nécessairement connexe, de G est contenu dans un sous-groupe de Borel (voir [**Hu2**, Th. 30.4.b)]).

28.6. Composantes quasi-simples. —

Définition 28.13. — On dira qu'un groupe algébrique affine connexe est **quasi-simple** s'il est non commutatif et ne possède pas de sous-groupe fermé normal propre de dimension > 0. Dans ce cas, $\mathscr{D}(\mathrm{G}) = \mathrm{G}$ donc G n'est pas résoluble, d'où $\mathscr{R}(\mathrm{G}) = \{1\}$, donc G est semi-simple.

Remarque 28.14. — Soit G quasi-simple. On va voir dans le théorème qui suit que le centre Z(G) est fini et que tout sous-groupe fermé normal, distinct de G, est contenu dans Z(G). Par conséquent, G/Z(G) ne possède aucun sous-groupe normal fermé propre et distinct de $\{1\}$.

De plus, on peut montrer, en utilisant la théorie des systèmes de Tits, aussi appelés BN-paires, que G/Z(G) est simple comme groupe abstrait, voir [**Hu2**, § 29.5 Corollary].

Lemme 28.15. — *Soit* G *un groupe connexe réductif* (*resp. semi-simple*) *et soit* H *un sous-groupe fermé connexe normal. Alors* H *est réductif* (*resp. semi-simple*).

D'autre part, si T *est un tore maximal de* G*, alors* $(\mathrm{T} \cap \mathrm{H})^0$ *est un tore maximal de* H.

Démonstration. — Soit R le radical unipotent (resp. le radical) de H. Il est stable par tout automorphisme de H, donc est normal dans G. Par conséquent, $\mathrm{R} = \{1\}$. Ceci prouve la première assertion.

Soit T (resp. S) un tore maximal de G (resp. de H). Alors S est contenu dans un tore maximal $\mathrm{T}' = g^{-1}\mathrm{T}g$ de G. Alors, comme H est normal, $g\mathrm{S}g^{-1}$

est un tore maximal de H, qui est contenu dans, et donc égal à, $(\mathrm{T} \cap \mathrm{H})^0$. Le lemme est démontré. □

Théorème 28.16. — *Soient* G *un groupe* **semi-simple** *connexe,* T *un tore maximal,* $\mathrm{R} = \mathrm{R}(\mathrm{G}, \mathrm{T})$*, et soit*

$$\mathrm{R} = \mathrm{R}_1 \overset{\perp}{\sqcup} \cdots \overset{\perp}{\sqcup} \mathrm{R}_n$$

la décomposition de R *en composantes irréductibles. Pour* $i = 1, \dots, n$*, soit* G_i *le sous-groupe de* G *engendré par les* U_α*, avec* $\alpha \in \mathrm{R}_i$*. C'est un sous-groupe fermé connexe. De plus :*

a) *Si* $i \neq j$*,* G_i *et* G_j *commutent. Par conséquent, chaque* G_i *est normal dans* G*, et donc semi-simple, et l'on a*

$$\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \cdots \mathrm{G}_n.$$

De plus, ceci est un produit « presque direct », c.-à-d., pour chaque i*,* $\mathrm{G}_i \cap \prod_{j \neq i} \mathrm{G}_j$ *est* **fini**.

b) *Pour toute partie* I *de* $\{1, \dots, n\}$*, soit* G_I *le produit des* G_i *(resp.* R_I *la réunion des* R_i*), pour* $i \in \mathrm{I}$*. Alors, pour tout* $\alpha \in \mathrm{R}$*, on a*

$$(*_\mathrm{I}) \qquad \mathrm{U}_\alpha \subseteq \mathrm{G}_\mathrm{I} \Leftrightarrow \alpha \in \mathrm{R}_\mathrm{I},$$

d'où

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{G}_\mathrm{I}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{T}_\mathrm{I}) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{R}_\mathrm{I}} \mathfrak{g}_\alpha,$$

où l'on a posé $\mathrm{T}_\mathrm{I} = (\mathrm{T} \cap \mathrm{G}_\mathrm{I})^0$*, et* R_I *est le système de racines de* G_I.

c) *Tout sous-groupe fermé connexe normal de* G *est le produit des* G_i *qu'il contient. De plus, chaque* G_i *est quasi-simple.*

Démonstration. — G est engendré par les U_α, donc aussi par $\mathrm{G}_1, \dots, \mathrm{G}_n$. D'après la proposition 28.9, U_α commute à U_β si $\alpha \in \mathrm{R}_i$ et $\beta \in \mathrm{R}_j$, avec $j \neq i$. Donc chaque G_i est centralisé par les G_j, pour $j \neq i$ (et est évidemment normalisé par lui-même), donc est normal dans G, donc semi-simple, et l'on a

$$\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \cdots \mathrm{G}_n.$$

Démontrons maintenant les assertions b) et c). Soit I un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$, propre et non vide, et soit J son complémentaire. Soient $\mathrm{R}_\mathrm{I}, \mathrm{R}_\mathrm{J}$ et $\mathrm{G}_\mathrm{I}, \mathrm{G}_\mathrm{J}$ comme dans le théorème. Alors G_I est normal. Donc d'après le lemme précédent, G_I est semi-simple et $\mathrm{T}_\mathrm{I} := (\mathrm{T} \cap \mathrm{G}_\mathrm{I})^0$ en est un tore maximal. Soit $\alpha \in \mathrm{R}$ tel que

$$\mathrm{U}_\alpha \subseteq \mathrm{G}_\mathrm{I}.$$

Soit $\beta \in \mathrm{R_J}$ arbitraire. Alors $\beta^\vee(\mathbb{G}_m)$ est contenu dans le sous-groupe engendré par U_β et $\mathrm{U}_{-\beta}$, donc commute à $\mathrm{G_I}$ et donc à U_α. Donc, pour tout $x \in k$ et $z \in k^\times$, on a

$$1 = \alpha^\vee(z)\theta_\beta(x)\alpha^\vee(z^{-1})\theta_\beta(-x) = \theta_\beta((z^{\langle\beta,\alpha^\vee\rangle} - 1)x),$$

et il en résulte que $(\alpha, \beta) = 0$. Ceci montre que α est orthogonal à $\mathrm{R_J}$, donc n'appartient pas à $\mathrm{R_J}$, d'où $\alpha \in \mathrm{R_I}$. Ceci prouve $(*_\mathrm{I})$.

Alors, d'après la proposition 27.12, on a

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{G_I}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{T_I}) \oplus \bigoplus_{\alpha\in\mathrm{R_I}} \mathfrak{g}_\alpha.$$

De plus, la restriction à $\mathrm{T_I}$ de chaque $\alpha \in \mathrm{R_I}$ est non-triviale, puisque $\mathrm{T_I}$ contient $\alpha^\vee(\mathbb{G}_m)$. Donc $\mathrm{R_I}$ est bien le système de racines de $(\mathrm{G_I}, \mathrm{T_I})$. Ceci prouve b).

Soit $\mathrm{H} \neq \mathrm{G}$ un sous-groupe fermé connexe normal, de dimension > 0. D'après le lemme précédent, H est semi-simple et $\mathrm{T_H} := (\mathrm{T} \cap \mathrm{H})^0$ en est un tore maximal, et $\dim \mathrm{T_H} > 0$, d'après la remarque 23.13. Posons

$$\mathrm{R(H)} = \{\alpha \in \mathrm{R} \mid \mathrm{U}_\alpha \subseteq \mathrm{H}\}.$$

On va voir dans un instant que $\mathrm{R(H)} \neq \varnothing$. D'abord, comme $\mathrm{H} \neq \mathrm{G}$ alors $\mathrm{R(H)} \neq \mathrm{R}$, d'après le théorème 28.1. Donc $\mathrm{R}' := \mathrm{R} \setminus \mathrm{R(H)}$ est non-vide. Notons H' le sous-groupe de G engendré par les U_β, pour $\beta \in \mathrm{R}'$. Il est fermé et connexe, d'après la proposition 17.1.

Pour tout $\beta \in \mathrm{R}'$, $t \in \mathrm{T_H}$, $x \in \mathbb{G}_a$, on a

$$t\theta_\beta(x)t^{-1}\theta_\beta(-x) = \theta_\beta((\beta(t) - 1)x),$$

et ceci est dans H puisque t et $\theta_\beta(x)t^{-1}\theta_\beta(-x)$ y sont. Comme $\mathrm{U}_\beta \not\subseteq \mathrm{H}$, on en déduit que

$$(1) \qquad \forall\, \beta \in \mathrm{R}', \qquad \mathrm{Ker}\,\beta \supseteq \mathrm{T_H}.$$

Par conséquent, tout poids non-nul de $\mathrm{T_H}$ dans Lie(G), et a fortiori dans Lie(H), est la restriction à $\mathrm{T_H}$ d'un $\alpha \in \mathrm{R(H)}$. Comme H est semi-simple, ceci montre en particulier que $\mathrm{R(H)} \neq \varnothing$.

De plus, pour tout $\alpha \in \mathrm{R(H)}$, la restriction de α à $\mathrm{T_H}$ est non triviale, car sinon U_α appartiendrait au centralisateur de $\mathrm{T_H}$ dans H, dont on sait qu'il égale $\mathrm{T_H}$ puisque H est semi-simple.

On a donc obtenu que R(H) et R' sont tous deux non-vides, et il résulte de (1) que pour tout $\alpha \in \mathrm{R(H)}$ et $\beta \in \mathrm{R}'$, on a :

$$\langle\beta, \alpha^\vee\rangle = 0 = (\beta, \alpha).$$

Par conséquent, $\mathrm{R} = \mathrm{R(H)} \overset{\perp}{\sqcup} \mathrm{R}'$, et il résulte donc de la proposition 28.6, que R(H) et R' sont chacun une réunion de composantes irréductibles de R. La première assertion de c) est démontrée.

Ceci a la conséquence suivante. Soit I un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$, propre et non vide, et soit J son complémentaire. Appliquant $(*_{\mathrm{I}})$ à I et J, on obtient que la composante connexe de $\mathrm{G}_{\mathrm{I}} \cap \mathrm{G}_{\mathrm{J}}$ ne contient aucun U_α, donc est triviale. Ceci montre que $\mathrm{G}_{\mathrm{I}} \cap \mathrm{G}_{\mathrm{J}}$ est fini, et donc le produit $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \cdots \mathrm{G}_n$ est bien « presque direct ». Ceci achève la preuve de l'assertion a).

Enfin, soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ et soit H un sous-groupe fermé connexe normal de G_i. Alors H est normal dans G (car G_j commute à G_i pour $j \neq i$), donc engendré par les G_j qu'il contient. Mais d'après l'assertion b), G_i ne contient aucun G_j avec $j \neq i$, et donc H égale $\{1\}$ ou G_i. Ceci montre que G_i est quasi-simple. Le théorème est démontré. $\square$

TABLE DES MATIÈRES

Bibliographie

[Abe] E. Abe, Hopf algebras, Cambridge Univ. Press, 1977.

[Ad] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Univ. Chicago Press, 1969.

[Am] Y. Amice, Les nombres p-adiques, P.U.F., 1975.

[AM] M. Atiyah, I. G. Macdonald, Commutative algebra, Addison Wesley, 1969.

[Bl] A. Blanchard, Les corps non commutatifs, P.U.F., 1972.

[Bo] A. Borel, Linear algebraic groups, Second enlarged edition, Springer Verlag, 1991.

[BA1-3] N. Bourbaki, Algèbre, Chapitres 1 à 3, 1981.

[BA8] N. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, 1958.

[BL1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 1, 1971.

[BL4-6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4–6, 1968.

[BL7-8] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. 7-8, 1975.

[BI7-8] N. Bourbaki, Intégration, Chap. 7-8, 1963.

[BrM] J. Briançon, Ph. Maisonobe, Éléments d'algèbre commutative, niveau M1, Ellipses, 2004.

[BS] M. Brion, G. Schwarz, Théorie des invariants & Géométrie des variétés quotients, Hermann, 2000.

[BtD] Th. Bröcker, T. tom Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer 1985 (3rd printing, 2003).

[Ca] H. Cartan, Cours de calcul différentiel, Hermann, nouvelle édition, refondue et corrigée, 1977.

[Ca2] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes, Hermann, 1961, nouveau tirage, 1978.

[Die] J. Dieudonné, Cours de géométrie algébrique, tome 2, P.U.F., 1974.

[Di74] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, 1974

[Di81] J. Dixmier, Topologie générale, P.U.F., 1981.

[Do88] D. Z. Doković, An elementary proof of the structure theorem for connected solvable affine algebraic groups, Enseign. Math. (2) 34 (1988), 269-273.

[DK] J. J. Duistermaat, J. A. C. Kolk, Lie groups, Springer, 2000.

[Eis] D. Eisenbud, Commutative algebra with a view towards algebraic geometry, Springer, 1995.

[Fa] J. Faraut, Analyse sur les groupes de Lie, Calvage & Mounet, 2005.

[Go] R. Godement, Introduction à la théorie des groupes de Lie, Publ. Math. Paris VII, 1982, et Springer, 2004.

[GH] M. J. Greenberg, J. R. Harper, Algebraic Topology, a first course, Addison-Wesley, 1981.

[Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer Verlag, 1977.

[Hel] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press 1978, ninth printing Amer. Math. Soc. 2001.

[Her] I. N. Herstein, Noncommutative rings, Carus Math. Monogr., 1968, nouveau tirage, 1994.

[Ho] G. P. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965, trad. française : La structure des groupes de Lie, Dunod, 1968.

[Ho81] G. P. Hochschild, Basic theory of algebraic groups and Lie algebras, Springer-Verlag, 1981.

[Hu] J. E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, 1972, third printing, revised, 1980.

[Hu2] J. E. Humphreys, Linear algebraic groups, Springer-Verlag, 1975, corrected 2nd printing 1981.

[Iit] S. Iitaka, Algebraic geometry, Springer, 1982.

[Jac] N. Jacobson, Lie algebras, Wiley, 1962, Dover, 1979.

[Jac80] N. Jacobson, Basic Algebra II, Freeman & Co., 1980.

[KSS] H. Kraft, P. Slodowy, T. A. Springer (Ed.), Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie - Algebraic Transformation Groupes and Invariant Theory, Birkäuser, 1989.

[Ka] V. Kac, Infinite-dimensional Lie algebras, Birkhäuser 1983, 3rd edition, Cambridge Univ. Press, 1990.

[Ke] G. R. Kempf, Algebraic varieties, Cambridge Univ. Press, 1993.

[Kna] A. W. Knapp, Lie groups beyond an introduction, Birkhäuser, 1996, 2nd edition, 2002.

[Ku] E. Kunz, Introduction to commutative algebra and algebraic geometry, Birkhäuser, 1985.

[Laf74] J.-P. Lafon, Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative, Hermann, 1974.

[Laf77] J.-P. Lafon, Algèbre commutative (Langages géométrique et algébrique), Hermann, 1977.

[Laf] J. Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, Presses Univ. Grenoble, 1996.

[La] S. Lang, Algebra, Addison-Wesley, 1965. Traduction française de la 3ème édition : *Algèbre*, Dunod, 2004.

[Le] D. Leborgne, Calcul différentiel et géométrie, P.U.F., 1982.

[Lu99] Retour sur un théorème de Chevalley, Enseign. Math. (2) 45 (1999), 317-320.

[Ma] P. Malliavin, Géométrie différentielle intrinsèque, Hermann, 1972.

[Ma1] H. Matsumura, Commutative algebra (2nd edition), Benjamin, 1980.

[Ma2] H. Matsumura, Commutative ring theory, Cambridge Univ. Press, 1986, paperback edition with corrections, 1989.

[MT] R. Mneimné, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de lie classiques, Hermann, 1986, nouveau tirage 2005.

[Pe] D. Perrin, Géométrie algébrique - Une introduction, Inter Éditions/-CNRS Éditions, 1995.

[Po] P. Polo, Algèbre et théorie de Galois, cours de M1 2005/06 à l'Université Paris 6, www.math.jussieu.fr/~polo

[Pi] G. Pichon, Groupes de Lie : représentations linéaires et applications, Hermann, 1973.

[Ro] A. Robert, Introduction to the representation theory of compact and locally compact groups, Cambridge Univ. Press, 1983.

[Ru73] W. Rudin, Functional analysis, McGraw-Hill, 1973.

[Ru75] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, Masson, 1975.

[Se] J.-P. Serre, Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1965, Complex semisimple Lie algebras, Springer, 2001.

[Sp] T. A. Springer, Linear algebraic groups, Birkäuser, 1981, 2nd edition 1998.

[Sw] M. E. Sweedler, Hopf Algebras, Benjamin, 1969.

[Ti] J. Tits, Liesche Gruppen und Algebren, Springer-Verlag, 1983.

[Va] V. S. Varadarajan, Lie groups, Lie algebras, and their representations, Prentice-Hall 1974, Springer 1984.

[Wa] F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Scott & Foresman, 1971, Springer, 1983.

[Zi] R. Zimmer, Essential results of functional analysis, Univ. Chicago Press, 1990.