EXPOSÉ II

FIBRÉS TANGENTS – ALGÈBRES DE LIE

par M. Demazure

Nous nous proposons dans cet exposé de construire l'analogue en théorie des schémas des *fibrés tangents* et *algèbres de Lie* de la théorie classique. Il sera cependant utile de ne pas se restreindre aux schémas proprement dits, mais de s'intéresser aussi à certains foncteurs sur la catégorie des schémas qui ne sont pas nécessairement *représentables* (par exemple foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}$, $\underline{\mathrm{Norm}}$, etc.). Comme il a été annoncé dans l'exposé précédent (cf. I 1.1), nous identifierons un schéma avec le foncteur qui lui est associé. **43**

D'un autre côté, les constructions exposées ci-après dépassent le cadre de la théorie des schémas. Elles sont également valables, par exemple, en théorie des *espaces analytiques* avec éléments nilpotents, modulo quelques modifications de détail.

Avant de commencer cette construction, il nous faut poser quelques définitions générales qui complètent celles de I 1.7.

1. Les foncteurs $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$

Reprenons les notations de I 1.1. On identifie la catégorie $\mathscr{C}$ à une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathscr{C}} = \mathbf{Hom}(\mathscr{C}^{\circ}, (\mathbf{Ens}))$ (en particulier on supprime les soulignements [(1)] qui nous permettaient de distinguer graphiquement un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$ d'un objet de $\mathscr{C}$).

Considérons la situation suivante : quatre objets de $\widehat{\mathscr{C}}$, notés S, X, Y, Z, le premier étant en fait un objet de $\mathscr{C}$, X et Y au-dessus de Z, Z au-dessus de S : **44**

[(1)] N.D.E. : rendus dans cette édition par des caractères gras $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$, cf. Exposé I. Toutefois, pour des foncteurs tels que $\underline{\mathrm{Norm}}$ et $\underline{\mathrm{Centr}}$ (cf. 5.2) les soulignements ont été conservés dans l'original, et on les a rajoutés pour le foncteur $\underline{\mathrm{Lie}}$, ceci afin de distinguer le foncteur $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})$ de la $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})$-algèbre de Lie, $\mathrm{Lie}(\mathrm{G/S}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathrm{S})$, utilisée par exemple dans l'Exposé $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "p_X"'] & & Y \arrow[dl, "p_Y"] \\
& Z \arrow[d] & \\
& S &
\end{tikzcd}.$$

Définition 1.1. — On définit un objet de $\widehat{\mathscr{C}_{/S}}$, noté $\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y)$ par :

$$(1)\qquad \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y)(S') = \mathrm{Hom}_{Z_{S'}}(X_{S'}, Y_{S'}) = \mathrm{Hom}_Z(X \underset{S}{\times} S', Y),$$

pour tout objet S' de $\mathscr{C}_{/S}$. On voit aussitôt que $\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y)$ n'est autre que le sous-objet de $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y)$ formé des morphismes compatibles avec p_X et p_Y, c'est-à-dire le noyau du couple de morphismes

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y) \rightrightarrows \underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Z)$$

définis, le premier par la composition avec p_Y, le second comme étant le morphisme constant dont « l'image » est p_X.

(2) D'autre part, on voit comme en I 1.7 que, pour tout objet T de $\widehat{\mathscr{C}}$ au-dessus de S, on a une bijection naturelle :

$$(2)\qquad \mathrm{Hom}_S(T, \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_Z(X \underset{S}{\times} T, Y).$$

De plus, d'après I 1.7.1, si E, F sont des objets de $\widehat{\mathscr{C}}$ au-dessus de Z, on a :

$$\mathrm{Hom}_Z(E, \underline{\mathrm{Hom}}_Z(F, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_Z(E \times_Z F, Y) \simeq \mathrm{Hom}_Z(F, \underline{\mathrm{Hom}}_Z(E, Y)).$$

Appliquant ceci à $E = X$ et $F = Z \times_S T$, on obtient des bijections naturelles, pour tout objet T de $\widehat{\mathscr{C}}_{/S}$:

$$(3)\quad \mathrm{Hom}_S(T, \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y)) \simeq \mathrm{Hom}_Z(X \underset{S}{\times} T, Y) \simeq \begin{cases} \mathrm{Hom}_Z(Z \underset{S}{\times} T, \underline{\mathrm{Hom}}_Z(X, Y)) \\ \mathrm{Hom}_Z(X, \underline{\mathrm{Hom}}_Z(Z \underset{S}{\times} T, Y)). \end{cases}$$

De plus, ces bijections sont fonctorielles en T, donc on obtient des isomorphismes de S-foncteurs :

$$(4)\qquad \begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}_S(T, \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y)) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, \underline{\mathrm{Hom}}_Z(Z \times_S T, Y)) \\
& \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X \times_S T, Y) \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

Signalons deux cas particuliers de la définition. Si $Z = S$, on a :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{S/S}(X, Y) = \underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y).$$

(2) N.D.E. : On a détaillé les points (2), (3), (4) ; en particulier, (4) sera utilisé en 3.11.

D'autre part, lorsque X = Z, on pose

$$\prod_{Z/S} Y = \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(Z, Y), \tag{5}$$

on a donc par définition 45

$$\Big(\prod_{Z/S} Y\Big)(S') = \mathrm{Hom}_Z(Z \underset{S}{\times} S', Y) \simeq \Gamma(Y_{S'}/Z_{S'}).$$

Le foncteur $\prod_{Z/S} : \widehat{\mathscr{C}_{/Z}} \to \widehat{\mathscr{C}_{/S}}$ est *adjoint à droite* du foncteur de changement de base de S à Z : pour tout S-foncteur U on a

$$\mathrm{Hom}_S(U, \prod_{Z/S} Y) = \mathrm{Hom}_Z(U \times_S Z, Y).$$

(Si $\mathscr{C}$ = (**Sch**) et si Z est un S-schéma, le foncteur $\prod_{Z/S}$ est appelé « *restriction des scalaires à la Weil* ».) [3] Notons également que l'on a un isomorphisme :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{X/S}(X, Y \underset{Z}{\times} X) = \prod_{X/S}(Y \underset{Z}{\times} X), \tag{6}$$

qui donne en particulier pour Z = S un isomorphisme :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(X, Y) \simeq \prod_{X/S} Y_X. \tag{7}$$

Remarque 1.2. — Le foncteur $Y \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y)$ commute au produit au sens suivant : on a un isomorphisme fonctoriel

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y \underset{Z}{\times} Y') \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y) \underset{S}{\times} \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y'). \tag{$*$}$$

Il en résulte que si Y est un Z-groupe, resp. un Z-anneau, etc., alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y)$ est un S-groupe, resp. un S-anneau, etc.

Remarque 1.3. — [4] De plus, soit $\pi : M \to Y$ un Y-foncteur en $\mathbf{O}_Y$-modules (cf. I, 4.3.3.1). Posons $H = \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y)$. Alors, $\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, M)$ est muni d'une structure naturelle de $\mathbf{O}_H$-module; plus précisément, pour tout H′ au-dessus de H, $\mathrm{Hom}_H(H', \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, M))$ est muni d'une structure naturelle de $\mathbf{O}(H' \times_S X)$-module.

En effet, notons $m : M \times_Y M \to M$ et $\lambda : \mathbf{O}_Y \times_Y M \to M$ les morphismes définissant les structures de Y-groupe (abélien) et de $\mathbf{O}_Y$-module. Soit H′ un S-schéma au-dessus de $H = \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, Y)$, c.-à-d., on s'est donné un Z-morphisme $f : X \times_S H' \to Y$, qui fait donc de $X \times_S H'$ un Y-objet. Alors,

$$\mathrm{Hom}_H(H', \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, M))$$

est l'ensemble des Z-morphismes $\phi : X \times_S H' \to M$ tels que $\pi \circ \phi = f$, c.-à-d., des Y-morphismes $X \times_S H' \to M$.

---

[3] N.D.E. : On a ajouté les deux phrases précédentes.

[4] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, utile pour le corollaire 3.11.1.

Si ϕ, ψ sont deux tels morphismes, on définit $\phi+\psi$ comme le Y-morphisme composé

$$\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}' \xrightarrow{\phi\times\psi} \mathrm{M} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{M} \xrightarrow{m} \mathrm{M}$$

et l'on vérifie que ceci munit $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{M})$ d'une structure de groupe abélien au-dessus de $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. [5]

De même, si a est un élément de $\mathbf{O}(\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{H}')$, i.e. un S-morphisme $a : \mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{H}' \to \mathbf{O}_{\mathrm{S}}$, on définit $a\phi$ comme la composée $\lambda \circ (a \times \phi)$, où $a \times \phi$ désigne le Y-morphisme de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}'$ vers $\mathbf{O}_{\mathrm{Y}} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{M} \simeq \mathbf{O}_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{M}$ de composantes a et ϕ ; on vérifie que ceci munit $\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}(\mathrm{H}', \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{M}))$ d'une structure de $\mathbf{O}(\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}')$-module, fonctorielle en le H-objet H′.

2. Les schémas $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$

Définition 2.1. — Soient S un schéma et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent. On note $\mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{M})$ la $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre quasi-cohérente $\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \oplus \mathscr{M}$ (*où $\mathscr{M}$ est considéré comme un idéal de carré nul*). On note $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ le S-schéma $\mathrm{Spec}\,\mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{M})$. [6]

En particulier on note $\mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} = \mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$, $\mathrm{I}_{\mathrm{S}} = \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$ et on les nomme respectivement *algèbre des nombres duaux sur* S et *schéma des nombres duaux sur* S.

Alors $\mathscr{M} \mapsto \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ est un *foncteur contravariant* de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules quasi-cohérents dans celle des S-schémas. En particulier les morphismes $0 \to \mathscr{M}$ et $\mathscr{M} \to 0$ définissent respectivement le morphisme structural $\rho : \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \to \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(0) = \mathrm{S}$ et une section $\varepsilon_{\mathscr{M}}$ de celui-ci que l'on appelle *section zéro*. [7]

46 ***2.1.1***. — [8] Comme $\mathscr{M} \to \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ est un foncteur contravariant, tout $a \in \mathrm{End}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{M})$ définit un S-endomorphisme a^* de $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$, et l'on a $1^* = \mathrm{id}$, $(ab)^* = b^* \circ a^*$, $0^* = \varepsilon_{\mathscr{M}} \circ \rho$ et $a^* \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = \varepsilon_{\mathscr{M}}$. Par conséquent, le S-schéma $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ est muni d'une action à droite du *monoïde multiplicatif* de $\mathrm{End}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{M})$, qui commute aux S-morphismes $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \to \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}')$ provenant de morphismes $\mathscr{M}' \to \mathscr{M}$; en particulier, les opérateurs a^* conservent la section zéro de $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$.

Pour tout $a \in \mathrm{End}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{M})$ et $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $m \in \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S}')$, on notera $m\cdot a = a^*(m)$; alors $m \cdot 1 = m$, $(m \cdot a) \cdot b = m \cdot (ab)$, $m \cdot 0 = \varepsilon_{\mathscr{M}}(\rho(m))$ et, si $m = \varepsilon_{\mathscr{M}}(f)$, alors $m \cdot a = m$. [9]

---

[5] N.D.E. : Bien entendu, si M est un Y-groupe (non nécessairement abélien) et si l'on pose $\phi \cdot \psi = m \circ (\phi \times \psi)$, ceci fait de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{M})$ un groupe au-dessus de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

[6] N.D.E. : Noter que $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ a même espace sous-jacent que S.

[7] N.D.E. : Comparer avec 3.1.1.

[8] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, et l'on a ajouté la numérotation 2.1.1 à 2.1.3.

[9] N.D.E. : Dans la suite, on s'intéressera principalement au cas où $a \in \mathbf{O}(\mathrm{S})$, agissant par homothéties par $\mathscr{M}$. Par exemple, si $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module libre de rang r, alors, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}', \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}))$ s'identifie à l'ensemble des r-uplets $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \in \mathbf{O}(\mathrm{S}')$ tels que $\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$ pour tout i, j, et l'on a $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r) \cdot a = (a\varepsilon_1, \ldots, a\varepsilon_r)$ pour tout $a \in \mathbf{O}(\mathrm{S})$.

Remarque 2.1.2. — La formation des $\mathrm{I_S}(\mathscr{M})$ *commute à l'extension de la base* : on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{I_S}(\mathscr{M})_{\mathrm{S'}} \simeq \mathrm{I_{S'}}(\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \mathscr{O}_{\mathrm{S'}}).$$

Pour simplifier, on notera $\mathrm{I_{S'}}(\mathscr{M}) = \mathrm{I_S}(\mathscr{M})_{\mathrm{S'}}$; plus généralement, si X est un S-foncteur (non nécessairement représentable), on notera $\mathrm{I_X}(\mathscr{M}) = \mathrm{I_S}(\mathscr{M}) \times_\mathrm{S} \mathrm{X}$.

2.1.3. — [10] D'après ce qui précède, le monoïde multiplicatif de $\mathbf{O}(\mathrm{S'})$ opère sur le $\mathrm{S'}$-schéma $\mathrm{I_{S'}}(\mathscr{M})$, de façon fonctorielle en $\mathscr{M}$, i.e. le S-schéma $\mathrm{I_S}(\mathscr{M})$ est muni d'une structure d'objet à monoïde d'opérateurs $\mathbf{O}_\mathrm{S}$, cette structure étant fonctorielle en $\mathscr{M}$. On a donc un morphisme de S-schémas

$$\lambda : \mathrm{I_S}(\mathscr{M}) \times_\mathrm{S} \mathbf{O}_\mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{I_S}(\mathscr{M}),$$

vérifiant des conditions évidentes. Pour tout S-foncteur X, on obtient par changement de base un morphisme de X-foncteurs :

$$\lambda_\mathrm{X} : \mathrm{I_X}(\mathscr{M}) \times_\mathrm{S} \mathbf{O}_\mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{I_X}(\mathscr{M})$$

qui fait du S-foncteur $\mathrm{I_X}(\mathscr{M})$ un objet à monoïde d'opérateurs $\mathbf{O}(\mathrm{X})$: tout élément a de $\mathbf{O}(\mathrm{X}) = \mathrm{Hom_S}(\mathrm{X}, \mathbf{O}_\mathrm{S})$ définit un X-endomorphisme $a^* = \lambda_\mathrm{X} \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{I_X}(\mathscr{M})} \times (a \circ \mathrm{pr_X}))$ de $\mathrm{I_X}(\mathscr{M})$; explicitement, si $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S'})$ et $m \in \mathrm{I_S}(\mathscr{M})(\mathrm{S'}) = \mathrm{I_{S'}}(\mathscr{M})(\mathrm{S'})$, alors $a(x) = a \circ x$ appartient à $\mathbf{O}(\mathrm{S'})$ et l'on a :

$$(m, x) \cdot a = (m \cdot a(x), x).$$

Cette opération est fonctorielle en $\mathscr{M}$ et conserve la section zéro $\varepsilon_\mathscr{M} : \mathrm{X} \to \mathrm{I_X}(\mathscr{M})$, i.e. $a^* \circ \varepsilon_\mathscr{M} = \varepsilon_\mathscr{M}$ pour tout $a \in \mathbf{O}(\mathrm{X})$.

De plus, cette opération est « fonctorielle en X » au sens suivant : si $\pi : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ est un morphisme de S-foncteurs et $u : \mathbf{O}(\mathrm{X}) \to \mathbf{O}(\mathrm{Y})$ le morphisme d'anneaux correspondant (i.e. $u(a) = a \circ \pi \in \mathbf{O}(\mathrm{Y})$ pour tout $a \in \mathbf{O}(\mathrm{X}) = \mathrm{Hom_S}(\mathrm{X}, \mathbf{O}_\mathrm{S})$), alors le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I_X}(\mathscr{M}) \arrow[r, "a^*"] & \mathrm{I_X}(\mathscr{M}) \\ \mathrm{I_Y}(\mathscr{M}) \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "u(a)^*"] & \mathrm{I_Y}(\mathscr{M}) \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd} \quad .$$

2.2. Soient maintenant $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ deux $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules quasi-cohérents. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{M} \oplus \mathscr{N} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \mathscr{M} \arrow[dr] & & \mathscr{N} \arrow[dl] \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

[10] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe, qui sera utile en 3.4.2 et en 4.6.2.

définit un diagramme commutatif de S-schémas

$$(*)\qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}\oplus\mathscr{N}) & \\ \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \arrow[ur] & & \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{N}) \arrow[ul] \\ & \mathrm{S} \arrow[ul, "\varepsilon_{\mathscr{M}}"] \arrow[uu, "\varepsilon_{\mathscr{M}\oplus\mathscr{N}}"'] \arrow[ur, "\varepsilon_{\mathscr{N}}"'] & \end{tikzcd} .$$

Proposition 2.2. — *Pour tout* S-schéma X*, le diagramme de foncteurs au-dessus de* S
47 *obtenu en appliquant le foncteur* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(-,\mathrm{X})$ *au diagramme* $(*)$ *est cartésien :*

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}\oplus\mathscr{N}),\mathrm{X}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}),\mathrm{X}) \arrow[dr] & & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{N}),\mathrm{X}) \arrow[dl] \\ & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S},\mathrm{X})=\mathrm{X} & \end{tikzcd} .$$

Il faut vérifier que pour tout $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$, le diagramme d'ensembles obtenu en prenant la valeur des foncteurs sur S' est cartésien. Comme la formation de $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{P})$ commute à l'extension de la base au sens explicité plus haut, il suffit de le faire pour $\mathrm{S}'=\mathrm{S}$, donc de vérifier que le diagramme d'ensembles suivant est cartésien :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathrm{X}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}\oplus\mathscr{N})) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "\mathrm{X}(\varepsilon_{\mathscr{M}\oplus\mathscr{N}})"] & \\ \mathrm{X}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})) \arrow[dr, "\mathrm{X}(\varepsilon_{\mathscr{M}})"'] & & \mathrm{X}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{N})) \arrow[dl, "\mathrm{X}(\varepsilon_{\mathscr{N}})"] \\ & \mathrm{X}(\mathrm{S}) & \end{tikzcd} .$$

Or, si $x\in\mathrm{X}(\mathrm{S})$, il résulte de SGA 1, III 5.1 [(11)], que $\mathrm{X}(\varepsilon_{\mathscr{M}})^{-1}(x)$ est isomorphe, fonctoriellement en $\mathscr{M}$, à

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(x^*(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}),\mathscr{M}),$$

où $\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ désigne le faisceau des différentielles relatives de X par rapport à S. Or ce dernier foncteur (en $\mathscr{M}$) transforme évidemment une somme directe de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules en le produit des ensembles correspondants, d'où le résultat.

(11) N.D.E. : voir aussi l'ajout 0.1.8 dans l'Exp. III.

Corollaire 2.2.1. — *Soient* X *un* S*-schéma et* $\mathscr{M}$ *un* $\mathscr{O}_S$*-module libre de type fini. Le foncteur* $\underline{\mathrm{Hom}}_S(I_S(\mathscr{M}), X)$ *est isomorphe* (comme foncteur au-dessus de X) *à un produit fini* (au-dessus de X) *de copies de* $\underline{\mathrm{Hom}}_S(I_S, X)$. 48

Nota 2.2.2. — Il résulte de la démonstration de la proposition que $\underline{\mathrm{Hom}}_S(I_S, X)$ est isomorphe comme X-foncteur à $\mathbf{V}(\Omega^1_{X/S})$ (I 4.6.1) donc *représentable* par la fibration vectorielle [12] $\mathbb{V}(\Omega^1_{X/S})$.

3. Le fibré tangent, la condition (E)

Dans ce paragraphe, sauf notification contraire, les lettres $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}'$, $\mathscr{N}$, etc., désigneront toujours des $\mathscr{O}_S$*-modules libres de type fini* (c'est-à-dire isomorphes à une somme directe finie de copies de $\mathscr{O}_S$).

Nous utiliserons systématiquement les identifications justifiées dans l'exposé I ; c'est ainsi que nous dirons « foncteur au-dessus de S » pour désigner indifféremment un foncteur muni d'un morphisme dans S (= $\mathbf{h}_S$) ou un foncteur sur la catégorie des objets au-dessus de S. On dira de même « foncteur en groupes au-dessus de S », etc.

Définition 3.1. — Soient S un schéma et $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_S$-module libre de type fini. Soit X un foncteur au-dessus de S. On appelle fibré tangent à X au-dessus de S relativement au $\mathscr{O}_S$-module $\mathscr{M}$ et on note $T_{X/S}(\mathscr{M})$ le S-foncteur

$$T_{X/S}(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Hom}}_S(I_S(\mathscr{M}), X).$$

En particulier, on appelle *fibré tangent à* X *au-dessus de* S et on note $T_{X/S}$ le foncteur

$$T_{X/S} = T_{X/S}(\mathscr{O}_S) = \underline{\mathrm{Hom}}_S(I_S, X). \quad {}^{(13)}$$

Alors $\mathscr{M} \mapsto T_{X/S}(\mathscr{M})$ est un *foncteur covariant* de la catégorie des $\mathscr{O}_S$-modules libres de type fini dans la catégorie des S-foncteurs. En particulier les morphismes [14] $\mathscr{M} \to 0$ et $0 \to \mathscr{M}$ définissent respectivement un S-morphisme 49

$$\pi_{\mathscr{M}} : \quad T_{X/S}(\mathscr{M}) \longrightarrow T_{X/S}(0) \simeq X$$

et une section τ_0 de celui-ci appelée section zéro (ou *section nulle*).

Remarque 3.1.1. — [15] On notera que la projection $\pi_{\mathscr{M}} : T_{X/S}(\mathscr{M}) \to X$ est induite par la section zéro $\varepsilon_{\mathscr{M}} : S \to I_S(\mathscr{M})$, tandis que la section nulle $\tau_0 : X \to T_{X/S}(\mathscr{M})$ est induite par le morphisme structural $\rho : I_S(\mathscr{M}) \to S$; c.-à-d., pour tout point $t \in T_{X/S}(\mathscr{M})(S')$ (resp. $x \in X(S')$), correspondant à un S-morphisme $f : S' \times_S I_S(\mathscr{M}) \to X$ (resp. $g : S' \to X$), on a $\pi(t) = f \circ (\mathrm{id}_{S'} \times \varepsilon_{\mathscr{M}})$ (resp. $\tau_0(x) = g \circ (\mathrm{id}_{S'} \times \rho)$).

---

[12] N.D.E. : cf. N.D.E. (33) de l'Exp. I.

[13] N.D.E. : Lorsque $S = \mathrm{Spec}(k)$ et X est un k-schéma, on a $T_{X/S}(S') = \mathrm{Hom}_S(S' \otimes_k k[\varepsilon], X) = X(S' \otimes_k k[\varepsilon])$; on retrouve donc une des définitions usuelles du fibré tangent.

[14] N.D.E. : On a corrigé « $0 \to \mathscr{M}$ et $\mathscr{M} \to 0$ » en : « $\mathscr{M} \to 0$ et $0 \to \mathscr{M}$ ».

[15] N.D.E. : On a ajouté les paragraphes 3.1.1 et 3.1.2.

Il résulte de 3.1 que $\mathscr{M} \mapsto \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ est un *foncteur covariant de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules libres de type fini dans celle des foncteurs au-dessus de* X. En particulier $\mathbf{O}(\mathrm{S})$ est un *monoïde d'opérateurs* du X-foncteur $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ qui respecte « la fonctorialité en $\mathscr{M}$ ».

Scholie 3.1.2. — [15] Ce qui précède signifie, en particulier, les choses suivantes. Pour tout S-morphisme $\phi : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$, posons

$$\Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}', \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})).$$

On a une action du monoïde multiplicatif $\mathrm{End}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{M})$ sur $\Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M})$, notée $(\lambda, x) \mapsto \lambda * x$, telle que $\lambda * (\mu * x) = (\lambda\mu) * x$, $1 * x = x$, et $0 * x = \tau_0 \circ \phi$, où τ_0 est la section nulle $\mathrm{X} \to \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$. On a de même une action de $\mathrm{End}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{M})$ sur $\Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M} \oplus \mathscr{M})$. [16]

De plus, soient $m : \mathscr{M} \oplus \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ (resp. $\delta : \mathscr{M} \to \mathscr{M} \oplus \mathscr{M}$) l'addition (resp. l'application diagonale) de $\mathscr{M}$, et notons $m_{\mathrm{X}'} : \Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M} \oplus \mathscr{M}) \to \Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M})$ et $\delta_{\mathrm{X}'} : \Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M}) \to \Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M} \oplus \mathscr{M})$ les morphismes induits par m et δ. Pour $\lambda, \mu \in \mathbf{O}(\mathrm{S})$, notons ℓ_λ (resp. $\ell_{\lambda,\mu}$) la multiplication par λ dans $\mathscr{M}$ (resp. par (λ, μ) dans $\mathscr{M} \oplus \mathscr{M}$). Comme $m \circ \ell_{\lambda,\lambda} = \ell_\lambda \circ m$ et $m \circ \ell_{\lambda,\mu} \circ \delta = \ell_{\lambda+\mu}$, on a, pour tout $z \in \Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M} \oplus \mathscr{M})$ et $x \in \Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M})$:

$$(\dagger) \qquad \lambda * m(z) = m((\lambda, \lambda) * z), \qquad m((\lambda, \mu) * \delta(x)) = (\lambda + \mu) * x.$$

Définition 3.2. — Soit $u \in \mathrm{X}(\mathrm{S}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}, \mathrm{X}) = \Gamma(\mathrm{X}/\mathrm{S})$. On appelle espace tangent à X au-dessus de S au point u relativement à $\mathscr{M}$, et on note $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$, le S-foncteur obtenu à partir du X-foncteur $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ par image réciproque par le morphisme $u : \mathrm{S} \to \mathrm{X}$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \arrow[d, "\pi"] \\ \mathrm{S} \arrow[r, "u"] & \mathrm{X} \end{tikzcd}.$$

En particulier $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})$ est noté $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$. C'est l'*espace tangent à* X *au-dessus de* S *au point u.*

Remarque 3.2.1. — [17] Il résulte de 3.1.1 que, pour tout $t : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S}')$ est l'ensemble des S-morphismes $f : \mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}) \to \mathrm{X}$ tels que $f \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = u \circ t$, où $\varepsilon_{\mathscr{M}} : \mathrm{S}' \to \mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})$ est la section zéro.

Notons immédiatement la

Proposition 3.3. — *Si* X *est représentable par un* S*-schéma noté* $\widetilde{\mathrm{X}}$*, alors* $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ *et* $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ *sont représentables. En particulier* $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ *et* $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ *sont représentables par des fibrations vectorielles sur* $\widetilde{\mathrm{X}}$ *et sur* S *qui sont respectivement* $\mathbb{V}(\Omega^1_{\widetilde{\mathrm{X}}/\mathrm{S}})$ *et* $\mathbb{V}(u^*(\Omega^1_{\widetilde{\mathrm{X}}/\mathrm{S}}))$.

[16] N.D.E. : En fait, on s'intéresse uniquement à l'action de $\mathbf{O}(\mathrm{S})$ (resp. $\mathbf{O}(\mathrm{S}) \times \mathbf{O}(\mathrm{S})$) sur $\Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M})$ (resp. $\Sigma(\mathrm{X}', \mathscr{M} \oplus \mathscr{M})$), cf. ci-dessous et la démonstration de 3.6.

[17] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

Il suffit évidemment de démontrer la proposition pour $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$, les résultats analogues pour $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ s'en déduisant par image réciproque. D'après le corollaire 2.2.1, il suffit même de le faire pour $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}$, et en ce cas, la proposition n'est autre que la remarque signalée en 2.2.2.

Remarque 3.3.1. — Il résulte de cette proposition une description particulièrement simple de la fibration vectorielle représentant $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}$: l'image de la section u de X sur 50
S est localement fermée [18], donc définie par un idéal quasi-cohérent $\mathfrak{m}$ d'un schéma induit sur un ouvert de X. Le quotient $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ peut être considéré comme un module quasi-cohérent sur S. C'est celui-ci qui définit la fibration vectorielle cherchée.

Soit par exemple X un schéma algébrique sur un corps k et u un point de X *rationnel* sur k. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{X},u}$ et soit $\mathfrak{t}$ le k-espace vectoriel dual de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$; c'est l'espace tangent de Zariski de $\mathscr{O}_{\mathrm{X},u}$ au point u. Alors, avec les notations de I 4.6.5.1, on a :

$$\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/k} = \mathbb{V}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \mathrm{W}(\mathfrak{t}).$$

Cette parenthèse fermée, revenons à la situation générale. Remarquons d'abord que $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ est un *foncteur covariant de la catégorie des* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules libres de type fini dans celle des foncteurs au-dessus de* S. En particulier $\mathbf{O}(\mathrm{S})$ est un *ensemble d'opérateurs* du S-foncteur $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ qui respecte la fonctorialité en $\mathscr{M}$. [19]

Proposition 3.4. — *La formation de* $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ *et* $\mathrm{L}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ *commute à l'extension de la base : pour tout* S*-schéma* S′, *on a des isomorphismes fonctoriels en* $\mathscr{M}$

$$\mathrm{T}_{\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}'}(\mathscr{M}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})_{\mathrm{S}'},$$
$$\mathrm{L}^{u'}_{\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}'}(\mathscr{M}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})_{\mathrm{S}'}, \quad \text{où } u' = u_{\mathrm{S}'}\,.$$

Cela résulte immédiatement du fait que les <u>Hom</u> commutent à l'extension de la base.

Corollaire 3.4.1. — *Le* X*-foncteur* $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ (*resp. le* S*-foncteur* $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$) *est muni naturellement d'une structure d'*objet à opérateurs $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$ (resp. $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$), *cette structure étant fonctorielle en* $\mathscr{M}$.

Montrons-le d'abord pour $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$. Pour chaque S′ au-dessus de S, $\mathbf{O}(\mathrm{S}')$ opère sur $\mathscr{M}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$ donc sur $\mathrm{L}^{u'}_{\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}'}(\mathscr{M}\otimes\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) = \mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})_{\mathrm{S}'}$; or on vérifie que cette opération est fonctorielle en S′. Elle munit donc comme annoncé $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ d'une structure de foncteur à opérateurs $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$.

Pour $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ c'est un peu plus compliqué. Pour chaque X′ au-dessus de X, posons 51
$\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})_{\mathrm{X}'} = \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})\times_{\mathrm{X}}\mathrm{X}'$; il faut munir $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})_{\mathrm{X}'}(\mathrm{X}') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}', \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}))$ d'une structure d'ensemble à monoïde d'opérateurs $\mathbf{O}(\mathrm{X}')$ de manière fonctorielle en

[18] N.D.E. : cf. EGA I, 5.3.11
[19] N.D.E. : cf. 3.1.2.

X'. Pour cela on construit le diagramme suivant, où $\mathrm{X}_{\mathrm{X}'}$ dénote $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}'$ et f' la section de $\mathrm{X}_{\mathrm{X}'}$ sur X' définie par $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{T}_{\mathrm{X}_{\mathrm{X}'}/\mathrm{X}'}(\mathscr{M}) \arrow[dl] \arrow[dd] & \\
\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \arrow[dd] & & \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})_{\mathrm{X}'} \arrow[ul] \arrow[ll] \arrow[dd] \\
 & \mathrm{X}_{\mathrm{X}'} \arrow[dl] & \\
\mathrm{X} \arrow[dr] & & \mathrm{X}' \arrow[ul, "f'"'] \arrow[ll, "f"] \arrow[dl] \\
 & \mathrm{S} &
\end{tikzcd}$$

[20] Ce diagramme, joint à 3.2.1, montre que $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})_{\mathrm{X}'}(\mathrm{X}')$ s'identifie à

$$\mathrm{L}^{f'}_{\mathrm{X}_{\mathrm{X}'}/\mathrm{X}'}(\mathscr{M})(\mathrm{X}') = \{\mathrm{X}'\text{-morphismes } \psi : \mathrm{I}_{\mathrm{X}'}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathrm{X}_{\mathrm{X}'} \text{ tels que } \psi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = f'\},$$

sur lequel tout $a \in \mathbf{O}(\mathrm{X}')$ opère via son action sur $\mathrm{I}_{\mathrm{X}'}(\mathscr{M})$, c.-à-d., avec les notations de 2.1.1, on a : $a\psi = \psi \circ a^*$, i.e. pour tout $\mathrm{X}'' \to \mathrm{X}'$ et $x \in \mathrm{I}_{\mathrm{X}'}(\mathscr{M})(\mathrm{X}'')$, $(a\psi)(x) = \psi(x \cdot a)$. On vérifie alors facilement que cette construction est fonctorielle en X'.

Les isomorphismes de la proposition 3.4 sont alors par construction des isomorphismes pour les structures de $\mathbf{O}_{\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}}$-objets, resp. $\mathbf{O}_{\mathrm{S}'}$-objets.

Remarque 3.4.2. — [21] L'opération de $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$ sur $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ peut se voir, plus simplement, comme suit. Pour tout $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}', \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})) = \{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{X}'}(\mathscr{M}), \mathrm{X}) \mid \phi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = f\},$$

et l'on a vu en 2.1.3 que $\mathrm{I}_{\mathrm{X}'}(\mathscr{M})$, *considéré comme* S-*foncteur*, est muni d'une opération du monoïde $\mathbf{O}(\mathrm{X}')$ qui conserve la section zéro $\varepsilon_{\mathscr{M}} : \mathrm{X}' \to \mathrm{I}_{\mathrm{X}'}(\mathscr{M})$. Par conséquent, si l'on note a^* le X'-endomorphisme de $\mathrm{I}_{\mathrm{X}'}(\mathscr{M})$ défini par $a \in \mathbf{O}(\mathrm{X}')$, on a : $a\phi = \phi \circ a^*$, c.-à-d., pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $(m, x') \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}', \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}')$,

$$(a\phi)(m, x') = \phi(m \cdot a(x'), x')$$

(noter que $a^* \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = \varepsilon_{\mathscr{M}}$, d'où $(a\phi) \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = \phi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = f$).

De même, l'opération de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$ sur $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ peut se décrire comme suit. Pour tout $t : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S}')$ est l'ensemble des S-morphismes $\phi : \mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}) \to \mathrm{X}$ tels que $\phi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = u \circ t$; pour un tel ϕ et $a \in \mathbf{O}(\mathrm{S}')$, on a : $a\phi = \phi \circ a^*$.

Remarque 3.4.3. — [21] Les observations de 3.1.2 valent également pour l'opération de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$ sur $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ et celle de $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$ sur $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$.

---

[20] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.
[21] N.D.E. : On a ajouté les remarques 3.4.2 et 3.4.3.

Définition 3.5. — Soient S un schéma et X un S-foncteur. On dit que X *vérifie la condition* (E) *relativement à* S si, pour tout S′ au-dessus de S et tous $\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$-modules libres de type fini $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$, le diagramme d'ensembles

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{X}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}\oplus\mathscr{N})) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathrm{X}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})) \arrow[dr] & & \mathrm{X}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{N})) \arrow[dl] \\
 & \mathrm{X}(\mathrm{S}') &
\end{tikzcd},$$

obtenu en appliquant X au diagramme $(*)$ défini dans 2.1, est cartésien. [22] 52

3.5.1. — Il revient au même de dire que *le foncteur* $\mathscr{M} \mapsto \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ *transforme sommes directes de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-modules libres de type fini en produits de* X*-foncteurs*; [23] dans ce cas, il en est de même du foncteur $\mathscr{M} \mapsto \mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) = \mathrm{S} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$, pour tout $u \in \Gamma(\mathrm{X/S})$.

La proposition 2.2 montre que *tout foncteur représentable vérifie la condition* (E).

Abréviation : au lieu de dire « X *vérifie la condition* (E) *par rapport à* S », on dira parfois « X/S *vérifie la condition* (E) ».

Si X/S vérifie la condition (E), le foncteur $\mathscr{M} \mapsto \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ commute au produit donc transforme groupes en groupes. En particulier $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ est un X-groupe commutatif. Pour la même raison, $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ est un S-groupe commutatif.

Proposition 3.6. — *Si* X/S *vérifie* (E), *la structure de groupe abélien sur* $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ (*resp.* $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$) *et l'opération de* $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$ (*resp.* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$) *munissent* $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ (*resp.* $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$) *d'une structure de* $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$*-module* (*resp.* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module*).

L'opération de $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$ (resp. $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$) est fonctorielle en $\mathscr{M}$; elle respecte donc la structure de groupe abélien qui est déduite par fonctorialité de celle de $\mathscr{M}$. [24] En effet, reprenons les notations de 3.1.2. La structure de X-groupe (abélien) de $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ est définie par la composée :

$$\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{X}} \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) \simeq \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}\oplus\mathscr{M}) \xrightarrow{m} \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}),$$

et d'autre part le morphisme

$$\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}\oplus\mathscr{M}) \simeq \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{X}} \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$$

[22] N.D.E. : Pour des exemples de S-foncteurs et S-groupes ne vérifiant pas (E), voir 6.2 et 6.3.
[23] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.
[24] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

est le morphisme diagonal. Tenant compte de la remarque 3.4.3, on déduit des égalités (†) de 3.1.2 que

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y, \qquad (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x,$$

pour tout $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$, $x, y \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}', \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}))$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{O}(\mathrm{X}')$.

Remarque 3.6.1. — Si X est représentable, auquel cas, d'une part il vérifie (E), d'autre part $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}$ et $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}$ sont représentables par des fibrations vectorielles, les lois précédentes sont les mêmes que celles qui se déduisent des structures de fibration vectorielle (cf. I 4.6). [25]

Proposition 3.4. bis. — *Si* X/S *vérifie* (E)*, alors* $\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}'$ *vérifie* (E) *et les isomorphismes de* 3.4 *respectent les structures de* $\mathbf{O}_{\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}}$*-modules, resp. de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}'}$*-modules.*

Sans commentaires.

53 ***Proposition 3.7***. — *Les foncteurs* $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ *et* $\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ *sont fonctoriels en* X*, c.-à-d., si* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ *est un* S*-morphisme, on a des diagrammes commutatifs :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) \arrow[r, "\mathrm{T}(f)"] \arrow[d] & \mathrm{T}_{\mathrm{X'/S}}(\mathscr{M}) \arrow[d] \\ \mathrm{X} \arrow[r] & \mathrm{X}' \end{tikzcd} , \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) \arrow[rr, "\mathrm{L}(f)"] \arrow[dr] & & \mathrm{L}^{f\circ u}_{\mathrm{X'/S}}(\mathscr{M}) \arrow[dl] \\ & \mathrm{S} & \end{tikzcd} .$$

[26] *De plus, si f est un monomorphisme, il en est de même de* $\mathrm{T}(f)$ *et* $\mathrm{L}(f)$*.*

L'existence de $\mathrm{T}(f)$ et $\mathrm{L}(f)$, ainsi que la dernière assertion, se déduisent immédiatement des définitions. La commutativité des diagrammes résulte alors de la fonctorialité de ces morphismes par rapport à $\mathscr{M}$ et du fait que $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(0) = \mathrm{X}$.

Remarque 3.7.1. — [27] Supposons X et X′ *représentables* et soit r le rang du $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module libre $\mathscr{M}$. Alors, d'après 2.2.2, $\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})$ est isomorphe au produit au-dessus de X de r copies de $\mathbb{V}(\Omega^1_{\mathrm{X/S}})$, et de même pour $\mathrm{T}_{\mathrm{X'/S}}(\mathscr{M})$. Par conséquent, le carré ci-dessus est cartésien lorsque f est une *immersion ouverte*, plus généralement lorsque $f^*(\Omega^1_{\mathrm{X'/S}}) = \Omega^1_{\mathrm{X/S}}$, par exemple si f est *étale* ; sous ces conditions, on a un isomorphisme de S-foncteurs

$$\mathrm{L}^u_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^{f\circ u}_{\mathrm{X'/S}}(\mathscr{M}).$$

[25] N.D.E. : C.-à-d., pour tout S-morphisme $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$, l'action de $\mathbf{O}(\mathrm{X}')$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}', \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}))$ correspond, via l'identification

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}', \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}'}}(f^*(\Omega^1_{\mathrm{X/S}}), \mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{X}'})$$

à l'action naturelle de $\mathbf{O}(\mathrm{X}')$ sur le terme de droite ; ceci résulte de la démonstration de SGA 1, III 5.1 (voir aussi l'ajout 0.1.8 dans l'Exp. III).

[26] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[27] N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse que X et X′ soient représentables, et l'on a détaillé ce qui suit.

En général, le carré cartésien de 3.7 définit un morphisme de X-foncteurs :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{T}_{\mathrm{X}'/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{X}'} \mathrm{X} \arrow[dl] \\
& \mathrm{X} &
\end{tikzcd}.$$

Proposition 3.7. bis. — *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{X}'$ *un* S*-morphisme ; si* X *et* X′ *vérifient* (E) *par rapport à* S, *alors*

$$\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\mathrm{T}(f)} \mathrm{T}_{\mathrm{X}'/\mathrm{S}}(\mathscr{M})_{\mathrm{X}} \qquad \text{resp.} \quad \mathrm{L}^{u}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\mathrm{L}(f)} \mathrm{L}^{f\circ u}_{\mathrm{X}'/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$$

est un morphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$*-modules* (*resp. de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-modules*).

Résulte de la proposition 3.7 par fonctorialité en $\mathscr{M}$.

Proposition 3.8. — *Soient* X *et* Y *deux foncteurs au-dessus de* S. *On a des isomorphismes fonctoriels en* $\mathscr{M}$ *:*

$$\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{(\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}), \tag{3.8.1}$$

$$\mathrm{L}^{u}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{L}^{v}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^{(u,v)}_{(\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}). \tag{3.8.2}$$

[28] Le premier isomorphisme découle de 1.2 $(*)$, le second s'en déduit par le changement de base $(u, v) : \mathrm{S} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$. 54

Remarque 3.8.0. — Remarquons que (3.8.1) peut aussi s'interpréter comme un isomorphisme de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$-foncteurs

$$\big(\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \underset{\mathrm{X}}{\times} (\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y})\big) \underset{\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}}{\times} \big(\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \underset{\mathrm{Y}}{\times} (\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y})\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_{(\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}).$$

Corollaire 3.8.1. — *Si* X/S *est muni d'une structure algébrique définie par produits cartésiens finis, alors* $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ *est muni d'une structure de même espèce et la projection* $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \to \mathrm{X}$ *est un morphisme de cette espèce de structure.*

Proposition 3.8. bis. — *Si* X/S *et* Y/S *vérifient* (E), *alors* $(\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y})/\mathrm{S}$ *vérifie* (E) *et* (3.8.1) (resp. (3.8.2)) *est un isomorphisme de* $\mathbf{O}_{\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}}$*-modules* (*resp.* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-modules*).

Démonstration. [29] Supposons que X/S et Y/S vérifient (E). Alors, d'après 3.5.1 et (3.8.1), il en est de même de $(\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y})/\mathrm{S}$. Montrons que (3.8.1) est un isomorphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{X}\times_{\mathrm{S}}\mathrm{Y}}$-modules.

---

[28] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

[29] N.D.E. : On a ajouté cette démonstration.

Soit $(x,y) : \mathrm{Z} \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}$ un S-morphisme ; tenant compte de 3.4.2, il suffit de voir que l'application

$$\{\phi \in \mathrm{Hom_S}(\mathrm{I_Z}(\mathscr{M}), \mathrm{X}) \mid \phi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = x\} \times \{\psi \in \mathrm{Hom_S}(\mathrm{I_Z}(\mathscr{M}), \mathrm{Y}) \mid \psi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = y\} \\ \longrightarrow \{\theta \in \mathrm{Hom_S}(\mathrm{I_Z}(\mathscr{M}), \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}) \mid \theta \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = (x,y)\}$$

qui à (ϕ, ψ) associe $\phi \times \psi$ est un morphisme de $\mathbf{O}(\mathrm{Z})$-modules. Mais ceci est clair, car si $a \in \mathbf{O}(\mathrm{Z})$ alors $a \cdot (\phi, \psi) = (\phi \circ a^*, \psi \circ a^*)$ est envoyé sur

$$(\phi \circ a^*) \times (\psi \circ a^*) = (\phi \times \psi) \circ a^* = a \cdot (\phi \times \psi).$$

De même, en utilisant 3.2.1, on montre que (3.8.2) est un isomorphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules.

3.9.0. — [30] Si X est un S-groupe et si $e : \mathrm{S} \to \mathrm{X}$ désigne sa section unité, on note :

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X/S}, \mathscr{M}) = \mathrm{L}^e_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}),$$

c.-à-d., $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X/S}, \mathscr{M})$ est défini par le carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X/S}, \mathscr{M}) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & \mathrm{T_{X/S}}(\mathscr{M}) \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{S} \arrow[r, "e"] & \mathrm{X}. \end{tikzcd}$$

D'après le corollaire 3.8.1, la projection $p : \mathrm{T_{X/S}}(\mathscr{M}) \to \mathrm{X}$ est un morphisme de S-groupes, et il en résulte que $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X/S}, \mathscr{M})$ est muni d'une structure de S-groupe, et est isomorphe via i au noyau de p.

Si, de plus, X/S vérifie la condition (E), on va voir dans la proposition 3.9 que la structure de S-groupe de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X/S}, \mathscr{M})$, induite par celle de X, *coïncide avec la structure de groupe abélien induite par la fonctorialité en* $\mathscr{M}$ (cf. 3.5.1). En fait, ce résultat est valable sous l'hypothèse plus faible que X soit un S-foncteur en monoïdes ou, plus généralement, un S-foncteur en H-ensembles (cf. la définition ci-dessous).

Définitions 3.9.0.1. — a) Introduisons la terminologie suivante : [31] un H-*ensemble* est un ensemble X muni d'une loi de composition à unité bilatère, notée e_{X} ou simplement e. Si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un morphisme de H-ensembles, son *noyau* $\mathrm{Ker}\, f$ est $f^{-1}(e_{\mathrm{Y}})$; c'est un sous-H-ensemble de X.

b) Un H-*objet* dans une catégorie $\mathscr{C}$ se définit de la manière habituelle : c'est donc un objet X de $\mathscr{C}$, muni d'un morphisme $\mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ tel qu'il existe une section de X (au-dessus de l'objet final) possédant les propriétés d'une unité bilatère. Tout $\mathscr{C}$-monoïde, en particulier tout $\mathscr{C}$-groupe est donc un $\mathscr{C}$-H-objet. En particulier, un H-objet de la catégorie des foncteurs au-dessus du schéma S sera appelé S-H-*foncteur*.

[30] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe, afin d'expliquer l'introduction de la notion de S-H-foncteur.
[31] N.D.E. : Ceci est inspiré de la notion de H-espace en topologie.

c) Si X est un S-H-foncteur (par exemple, un S-groupe), et si $e : \mathrm{S} \to \mathrm{X}$ désigne la section unité de X, on note :

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) = \mathrm{L}^{e}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \quad \text{et} \quad \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}}).$$

Explicitons alors le cas particulier suivant de 3.8.1. (32)

Corollaire 3.9.0.2. — *Si* X *est un* S-H-*foncteur* (*resp. un* S-*groupe*), *alors* $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ *et* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ *sont aussi des* S-H-*foncteurs* (*resp. des* S-*groupes*) *et l'on a des morphismes de* S-H-*foncteurs* (*resp. de* S-*groupes*) *:*

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\ i\ } \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathrm{X} \quad ,$$

où i est un isomorphisme de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S})(\mathscr{M})$ *sur* $\operatorname{Ker} p$ *et s est une section de p.*

Proposition 3.9. — *Soit* X *un* S-H-*foncteur vérifiant* (E) *par rapport à* S. *La structure de* S-H-*foncteur de* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ *provenant de celle de* X *coïncide avec la structure de* S-*groupe définie en* 3.5.1. 55

Il résulte de ce qu'on a dit plus haut que $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ est un H-objet dans la catégorie des $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules. La proposition résultera alors du lemme suivant : (33)

Lemme 3.10. — *Soit* $\mathscr{C}$ *une catégorie. Soit* G *un* H-*objet dans la catégorie des* $\mathscr{C}$-H-*objets ;* G *est donc un* $\mathscr{C}$-H-*objet* (dont nous noterons la loi de composition $f : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$) *muni d'un morphisme de* $\mathscr{C}$-H-*objets* $h : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$. (34) *Alors* $f = h$ *et f est commutative.*

En prenant les valeurs des foncteurs sur un argument variable, on se ramène à la manière habituelle à vérifier le lemme lorsque $\mathscr{C}$ est la catégorie des ensembles. On a donc un ensemble G et deux applications f, $h : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ telles que

$$h(f(x, y), f(z, t)) = f(h(x, z), h(y, t)).$$

On a d'autre part deux éléments de G, soient e et u, avec $f(e, x) = f(x, e) = x$, $h(u, x) = h(x, u) = x$. On voit d'abord que

$$h(f(u, y), f(x, u)) = f(x, y) = h(f(x, u), f(u, y)).$$

En particulier, pour $y = e$, resp. $x = e$, on obtient, respectivement

$$x = f(x, e) = h(f(u, e), f(x, u)) = h(u, f(x, u)) = f(x, u),$$
$$y = f(e, y) = h(f(e, u), f(u, y)) = h(u, f(u, y)) = f(u, y)$$

d'où en reportant dans l'égalité originelle

$$h(y, x) = f(x, y) = h(x, y).$$

Ceci prouve le lemme, ainsi que la proposition 3.9. On déduit alors de 3.9 les corollaires suivants.

(32) N.D.E. : On a ajouté le corollaire 3.9.0.2, qui sera utile en 4.1.

(33) N.D.E. : inspiré par la démonstration standard prouvant que le groupe fondamental d'un H-espace est abélien.

(34) N.D.E. : $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$ est muni de la loi $(\mathrm{G} \times \mathrm{G}) \times (\mathrm{G} \times \mathrm{G}) \to \mathrm{G} \times \mathrm{G}$, $((x, z), (y, t)) \mapsto (f(x, y), f(z, t))$.

Corollaire 3.9.1. — *Si* X *est un* S-H-*foncteur vérifiant* (E) *par rapport à* S, *tout élément de* $X(I_S(\mathscr{M}))$ *qui se projette sur l'élément unité de* X(S) *est inversible.*

Corollaire 3.9.2. — *Si* X *est un* S-*monoïde vérifiant* (E) *par rapport à* S, *un élément de* $X(I_S(\mathscr{M}))$ *est inversible si et seulement si son image dans* X(S) *l'est.*

56 ***Corollaire 3.9.3***. — *Si* X *est un* S-*groupe vérifiant* (E) *par rapport à* S, *les deux lois de* S-*groupe sur* $\underline{\mathrm{Lie}}(X/S, \mathscr{M})$ *coïncident.*

Corollaire 3.9.4. — [35] *Soit* G *un* S-*groupe vérifiant* (E) *par rapport à* S. *Pour* $n \in \mathbb{Z}$, *soit* $n_G : G \to G$ *le morphisme de* S-*foncteurs défini par* $g \mapsto g^n$. *Alors le morphisme dérivé* $L(n_G) : \underline{\mathrm{Lie}}(G/S) \to \underline{\mathrm{Lie}}(G/S)$ *est la « multiplication par* n *», i.e. l'application qui à tout* $x \in \underline{\mathrm{Lie}}(G/S)(S')$ *associe* $n\,x$.

Remarquons d'abord que n_G n'est pas en général un morphisme de groupes, mais il préserve la section unité $e : S \to G$ donc le morphisme dérivé $L(n_G)$ envoie bien $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S) = L^e_{X/S}$ dans lui-même. Si l'on note i l'inclusion $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S) \hookrightarrow T_{G/S}$, alors $L(n_G)$ est défini par l'égalité $i(L(n_G)(x)) = i(x)^n$, pour tout $S' \to S$ et $x \in \underline{\mathrm{Lie}}(G/S)(S')$. Or, d'après 3.9, les deux lois de groupes sur $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)$ (provenant de la condition (E) et provenant de la loi de G) coïncident, i.e. on a $i(x)^n = i(n\,x)$, d'où $L(n_G)(x) = n\,x$.

Avant de tirer d'autres conséquences de la proposition 3.9, démontrons un autre résultat de fonctorialité :

Proposition 3.11. — *Dans la situation de la section* 1, *on a un isomorphisme fonctoriel en* $\mathscr{M}$

$$T_{\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y)/S}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, T_{Y/Z}(\mathscr{M})).$$

En effet, on a par définition (cf. 3.1) :

$$T_{\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y)/S}(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Hom}}_S(I_S(\mathscr{M}), \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y)).$$

D'après l'isomorphisme (4) de 1.1, appliqué à $T = I_S(\mathscr{M})$, on a :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_S(I_S(\mathscr{M}), \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y)) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, \underline{\mathrm{Hom}}_Z(Z \times_S I_S(\mathscr{M}), Y)).$$

Tenant compte de l'isomorphisme $Z \times_S I_S(\mathscr{M}) \simeq I_Z(\mathscr{M})$, ceci donne

$$T_{\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y)/S}(\mathscr{M}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, \underline{\mathrm{Hom}}_Z(I_Z(\mathscr{M}), Y)) = \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X, T_{Y/Z}(\mathscr{M})).$$

Corollaire 3.11.1. — *Si* Y/Z *vérifie* (E), *alors* $\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y)/S$ *vérifie* (E) *et l'isomorphisme de* 3.11 *respecte les structures de* **O**-*modules au-dessus de* $\underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y)$. [36]

[35] N.D.E. : On a ajouté ce corollaire, qui amplifie la remarque 4.1.1.2 plus loin.

[36] N.D.E. : Posant $H = \underline{\mathrm{Hom}}_{Z/S}(X,Y)$ ceci entraîne, en particulier, que $T_{H/S}(\mathscr{M})$ est muni d'une structure naturelle de module sur $\prod_{X \times_S H/H} \mathbf{O}_H$. Ce résultat a paru un peu surprenant aux éditeurs ; pour cette raison on en a détaillé la démonstration.

Démonstration. Soient $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ deux $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules libres de type fini. Si Y/Z vérifie (E), alors

$$\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \simeq \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M}) \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{N}).$$

Le terme de droite est un sous-foncteur de $\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{N})$ et via l'isomorphisme de 1.2 (∗), on obtient un isomorphisme

$$\begin{aligned}&\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N})) \simeq \\ &\qquad\qquad \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M})) \underset{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}{\times} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{N})).\end{aligned}$$

Combiné avec 3.11, ceci entraîne :

$$\mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \simeq \mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \underset{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}{\times} \mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{N}),$$

donc $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ vérifie (E) par rapport à S. Ceci prouve la première assertion du corollaire.

Voyons la seconde. Notons $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et donnons-nous un S-morphisme $\Delta : \mathrm{H}' \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, c.-à-d., un Z-morphisme $\delta : \mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, qui fait donc de $\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ un Y-objet.

D'une part, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}(\mathrm{H}', \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M}))) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}', \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M}))) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M})) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M})) \arrow[d, equal] \\
\{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{I}_{\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}}(\mathscr{M}), \mathrm{Y}) \mid \psi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = \delta\} \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{I}_{\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}}(\mathscr{M}), \mathrm{Y}) .
\end{tikzcd}$$

D'après 1.3, l'action de $\alpha \in \mathbf{O}(\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X})$ sur $\Psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M}))$ est donnée par : pour tout $\mathrm{U} \to \mathrm{S}$ et $(h, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X})$ (U étant alors au-dessus de Y via $\delta \circ (h, x)$), on a :

$$(\alpha\Psi)(h, x) = \alpha(h, x)\Psi(h, x),$$

où $\alpha(h, x) \in \mathbf{O}(\mathrm{U})$ agit sur $\Psi(h, x) \in \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M})(\mathrm{U})$ via la structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{Y}}$-module de $\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M})$. D'après 3.4.2, cette dernière est donnée, via l'identification

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Y}}(\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M})) = \{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{I}_{\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}}(\mathscr{M}), \mathrm{Y}) \mid \psi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = \delta\},$$

par : pour tout $(m, h, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X})$,

$$(\alpha\psi)(m, h, x) = \psi(m \cdot \alpha(h, x), h, x). \tag{1}$$

D'autre part, considérons l'espace tangent $\mathrm{T}_{\mathrm{H}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}), \mathrm{H})$; on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}(\mathrm{H}', \mathrm{T}_{\mathrm{H}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{H}', \mathrm{T}_{\mathrm{H}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})) \arrow[d, equal] \\
\{\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{H}'}(\mathscr{M}), \mathrm{H}) \mid \Phi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = \Delta\} \arrow[r, hook] \arrow[d, equal, "(*)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{H}'}(\mathscr{M}), \mathrm{H}) \arrow[d, equal] \\
\{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{I}_{\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}}(\mathscr{M}), \mathrm{Y}) \mid \phi \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} = \delta\} \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{I}_{\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}}(\mathscr{M}), \mathrm{Y}),
\end{tikzcd}$$

où la bijection $(*)$ est donnée comme suit (cf. 1.1 (2) et I 1.7.1) : pour tout $\mathrm{U} \to \mathrm{S}$ et $(m, h, x) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X})$ (de sorte que U est au-dessus de Z via $\mathrm{U} \xrightarrow{x} \mathrm{X} \to \mathrm{Z}$), on a $\Phi(m, h) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{U}, \mathrm{Y})$ et

$$(\dagger) \qquad \phi(m, h, x) = \Phi(m, h) \circ (x \times \mathrm{id}_{\mathrm{U}}) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{U}, \mathrm{Y}).$$

D'après 3.4.2 (où l'on remplace X par $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ et X′ par H′), l'action de $a \in \mathbf{O}(\mathrm{H}')$ sur $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{H}'}(\mathscr{M}), \mathrm{H})$ est donnée par : pour tout $\mathrm{U} \to \mathrm{S}$ et $(m, h) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}')$,

$$(a\Phi)(m, h) = \Phi(m \cdot a(h), h).$$

Par conséquent, si ϕ (resp. $a\phi$) est l'élément de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{I}_{\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}}(\mathscr{M}), \mathrm{Y})$ associé à Φ (resp. $a\Phi$), on a, d'après $(\dagger)$,

$$(2) \qquad (a\phi)(m, h, x) = \Phi(m \cdot a(h), h) \circ (x \times \mathrm{id}_{\mathrm{U}}) = \phi(m \cdot a(h), h, x).$$

Joint à (1), ceci montre que l'isomorphisme $\mathrm{T}_{\mathrm{H}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M}))$ de 3.11.1 est un isomorphisme de $\mathbf{O}(\mathrm{H})$-modules ; de plus, pour tout $\mathrm{H}' \to \mathrm{H}$, la structure de $\mathbf{O}(\mathrm{H}')$-module de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{H}}(\mathrm{H}', \mathrm{T}_{\mathrm{H}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}))$ s'étend, de façon fonctorielle en H′, en une structure de $\mathbf{O}(\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X})$-module.

En particulier, pour Z = S, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.11.2. — *On a un isomorphisme fonctoriel en* $\mathscr{M}$

$$\mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})).$$

De plus, si Y/S *vérifie* (E), *alors* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})/\mathrm{S}$ *vérifie* (E) *et l'isomorphisme précédent respecte les structures de* $\mathbf{O}$*-modules au-dessus de* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

[37] Soit $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un S-morphisme ; on l'identifie au morphisme constant $\mathbf{u} : \mathrm{S} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ tel que $\mathbf{u}(f) = u$ pour tout $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. On voit alors aussitôt que le produit fibré de $\mathbf{u}$ et de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ s'identifie à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}))$, où X est au-dessus de Y via u. Par conséquent, on déduit de la définition de $\mathrm{L}^{\mathbf{u}}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ et du corollaire précédent le :

[37] N.D.E. : On a ajouté les phrases qui suivent.

Corollaire 3.11.3. — *Soit* $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un* S*-morphisme. On a un isomorphisme fonctoriel en* $\mathscr{M}$ *(où dans le terme de droite* X *est au-dessus de* Y *via* u*) :*

$$\mathrm{L}^{\mathbf{u}}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})).$$

[38] *C'est un isomorphisme de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-modules si* Y/S *vérifie* (E).

En particulier, pour $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$, $\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})$ est un S-foncteur en monoïdes, donc *a fortiori* un S-H-foncteur ; rappelant que $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ désigne $\mathrm{L}^{e}_{\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$, où e est la section unité (cf. 3.9.0.1), on obtient :

Corollaire 3.11.4. — *On a un isomorphisme fonctoriel en* $\mathscr{M}$ 57

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M});$$

[38] *c'est un isomorphisme de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-modules si* Y/S *vérifie* (E).

Remarque 3.11.5. — [39] Supposons que X/S vérifie (E). Alors $\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}))$ est muni d'une structure de $(\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathbf{O}_{\mathrm{X}})$-module, i.e. pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$,

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}))(\mathrm{S}') = \{\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}, \mathrm{X}) \mid \psi \circ (\varepsilon_{\mathscr{M}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{X}}) = \mathrm{pr}_{\mathrm{X}}\}$$

est muni d'une structure de $\mathbf{O}(\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}')$-module, fonctorielle en S'. Ceci résulte, au choix, de 3.6 et des propriétés du foncteur $\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ (cf. 1.2), ou bien de la démonstration de 3.11.1.

Nous allons maintenant interpréter géométriquement la définition du fibré tangent. [40] Soit U un S-foncteur ; d'après I 1.7.2, on a des isomorphismes fonctoriels en $\mathscr{M}$

$$\begin{aligned}\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{U}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}), \mathrm{X})) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}), \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \mathrm{X})) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}(\mathrm{U}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}, \mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}).\end{aligned}$$

En particulier, le morphisme $\mathscr{M} \to 0$ donne un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\pi_{\mathscr{M}}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}(\mathrm{U}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}, \mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \mathrm{X}) \arrow[r, "\text{identité}"] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U}, \mathrm{X})
\end{tikzcd} ,$$

où la seconde flèche verticale est obtenue par le changement de base $\varepsilon_{\mathscr{M}} : \mathrm{S} \to \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$. [41]

En conséquence :

---

[38] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.
[39] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.
[40] N.D.E. : On a simplifié l'original dans ce qui suit.
[41] N.D.E. : via l'isomorphisme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}(\mathrm{U}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}, \mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}), \mathrm{X})$, ceci équivaut à la remarque 3.1.1. De même, 3.12 équivaut à la première partie de la remarque 3.4.2.

Proposition 3.12. — *Soit* $h_0 : \mathrm{U} \to \mathrm{X}$ *un* S-*morphisme. Alors* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\mathrm{U}, \mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M}))$ *s'identifie à l'ensemble des* $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$*-morphismes de* $\mathrm{U}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}$ *dans* $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}$ *qui se restreignent à* h_0 *sur* U *(vu comme sous-objet de* $\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ *via* $\mathrm{id}_{\mathrm{U}} \times_{\mathrm{S}} \varepsilon_{\mathscr{M}}$*).*

[42] En particulier, pour $\mathrm{U} = \mathrm{X}$ et $h_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{X}}$, on obtient le

Corollaire 3.12.1. — *L'ensemble* $\Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})/\mathrm{X})$ *s'identifie à l'ensemble des* $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$*-endomorphismes* ϕ *de* $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}$ *qui induisent l'identité sur* X*, i.e. tels que le diagramme ci-dessous soit commutatif :* [43]

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I}_{\mathrm{X}}(\mathscr{M}) \arrow[r, "\phi"] & \mathrm{I}_{\mathrm{X}}(\mathscr{M}) \\ \mathrm{X} \arrow[u, "\varepsilon_{\mathscr{M}}"] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathrm{X}. \arrow[u, "\varepsilon_{\mathscr{M}}"'] \end{tikzcd}$$

[44] D'autre part, d'après 3.11.2, $\Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})/\mathrm{X}) \simeq \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S})$; si de
58 plus X/S vérifie (E) alors $\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}$ vérifie (E), donc $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ est un $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module, d'après 3.6 (et en fait un $(\prod_{\mathrm{X/S}} \mathbf{O}_{\mathrm{X}})$-module, d'après 3.11.5). Appliquant 3.9 on en déduit la

Proposition 3.13. — *Si* X/S *vérifie* (E)*, le groupe abélien* $\Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{M})/\mathrm{X})$ *s'identifie à l'ensemble des* $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$*-endomorphismes de* $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}$ *qui induisent l'identité sur* X*. Par conséquent, tout* $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$*-endomorphisme de* $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}$ *qui induit l'identité sur* X *est un automorphisme.*

Corollaire 3.13.1. — *Soit* $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un* S*-isomorphisme,* Y/S *vérifiant* (E)*. Tout* $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$*-morphisme de* $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}$ *dans* $\mathrm{Y}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}$ *qui prolonge* u *est un isomorphisme.*

Corollaire 3.13.2. — *Si* Y/S *vérifie* (E)*, alors le monomorphisme* $\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *induit, pour tout* $u \in \mathrm{Isom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$*, un isomorphisme*

$$\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}).$$

[45] *Démonstration.* Il faut voir que $\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S}') \to \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S}')$ est une bijection, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. Par changement de base (cf. 3.4), il suffit de le faire pour $\mathrm{S}' = \mathrm{S}$. Dans ce cas, $\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S})$ (resp. $\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S})$) est l'ensemble des $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$-morphismes (resp. automorphismes) $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})} \to \mathrm{Y}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})}$ qui prolongent u, et l'on applique le corollaire précédent.

---

[42] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[43] N.D.E. : Lorsque $\mathscr{M} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}}$, ceux-ci sont appelés « endomorphismes infinitésimaux » de X ; voir 6.2 à la fin de cet exposé.

[44] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[45] N.D.E. : On a ajouté la démonstration qui suit.

Corollaire 3.13.3. — *Si* X/S *vérifie* (E), *le monomorphisme* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}) \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})$ *induit, pour tout* $u \in \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})$, *un isomorphisme* $\mathrm{L}^{u}_{\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{L}^{u}_{\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$. *En particulier, on a*

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}),$$

[46] *de sorte que* $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ *est muni d'une structure de* $(\prod_{\mathrm{X}/\mathrm{S}} \mathbf{O}_{\mathrm{X}})$*-module.*

3.14. Supposons pour terminer X *représentable.* [47] Dans ce cas, on a vu en 2.2.2 que le X-foncteur $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ est représentable par $\mathbb{V}(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}})$, d'où des bijections :

$$\Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}/\mathrm{X}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{X}}(\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \simeq \mathrm{Dér}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}}).$$

Ceci se déduit aussi de ce qui précède, comme suit. D'après 3.13, $\Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}/\mathrm{X})$ s'identifie à l'ensemble des endomorphismes infinitésimaux de X (i.e. des I_{S}-endomorphismes de $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}}$ induisant l'identité sur X). Or X et $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}}$ ont le même espace topologique sous-jacent, les faisceaux d'anneaux correspondants étant $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ et $\mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \oplus \mathscr{M}$, où $\mathscr{M} = \mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ est considéré comme idéal de carré nul. Notant $\pi : \mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}} \to \mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ le morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$-algèbres qui s'annule sur $\mathscr{M}$, on en déduit que se donner un endomorphisme infinitésimal de X équivaut à se donner un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbres $\phi : \mathscr{O}_{\mathrm{X}} \to \mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}}$ tel que $\pi \circ \phi = \mathrm{id}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X}}}$, ce qui équivaut à se donner une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-dérivation du faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$.

De plus, on voit facilement que si $\mathrm{D}, \mathrm{D}' \in \mathrm{Dér}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ et si l'on note ϕ_{D} l'endomorphisme infinitésimal correspondant à D, alors

$$\phi_{\mathrm{D}+\mathrm{D}'} = \phi_{\mathrm{D}} \circ \phi_{\mathrm{D}'}.$$

Ceci montre que l'identification

$$\{\text{endomorphismes infinitésimaux de X}\} \simeq \mathrm{Dér}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$$

est un isomorphisme de groupes abéliens. Tenant compte de 3.13 (et 3.11.5), on a donc fabriqué un isomorphisme de groupes abéliens (et même de $\mathbf{O}(\mathrm{X})$-modules) **59**

$$\Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}/\mathrm{X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Dér}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$$

ce qui redonne l'interprétation classique des champs de vecteurs tangents en termes de dérivations du faisceau structural. [48] Remarquons d'ailleurs que $\Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}/\mathrm{X})$ est égal à $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathfrak{g}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}})$, où $\mathfrak{g}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ est le dual de $\Omega^1_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$.

---

[46] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

[47] N.D.E. : On a ajouté le rappel de 2.2.2, et détaillé la suite.

[48] N.D.E. : De plus, cet isomorphisme est fonctoriel en S : si $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, posant $\mathrm{X}' = \mathrm{X}_{\mathrm{S}'}$, on a $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})/\mathrm{S})(\mathrm{S}') \simeq \Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{X}'/\mathrm{S}'}/\mathrm{X}') \simeq \mathrm{Dér}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{O}_{\mathrm{X}'})$.

4. Espace tangent à un groupe – Algèbres de Lie

4.1. Soit G un foncteur en groupes au-dessus de S. D'après 3.9.0.2, $\mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M})$ et $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M})$ sont munis de structures de groupes au-dessus de S et l'on a des morphismes de groupes

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M}) \xrightarrow{\ i\ } \mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M}) \underset{s}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathrm{G} \quad ;$$

par définition i est un isomorphisme de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathscr{M})$ sur le noyau de p et s est une section de p. Il résulte alors de I 2.3.7 que cette suite de morphismes permet d'identifier $\mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M})$ au produit semi-direct de G par $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M})$.

Définition 4.1.A. — [49] L'opération correspondante de G sur $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M})$ est notée

$$\mathrm{Ad}: \quad \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M}))$$

et appelée *représentation adjointe* (relativement à $\mathscr{M}$) de G ; on a donc par définition, pour $x \in \mathrm{G(S')}$ et $\mathrm{X} \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M})(\mathrm{S'})$:

$$\mathrm{Ad}(x)\mathrm{X} = i^{-1}(s(x)i(\mathrm{X})s(x)^{-1}).$$

Si G est commutatif, alors $\mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M})$ l'est aussi et $\mathrm{Ad}(x)\mathrm{X} = \mathrm{X}$.

Définition 4.1.B. — [49] Si G et H sont deux foncteurs en groupes au-dessus de S et si $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ est un morphisme de groupes, il s'en déduit par fonctorialité un morphisme de suites exactes compatible avec les sections canoniques :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{L}(f)"'] & \mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{T}(f)"'] & \mathrm{G} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{H/S},\mathscr{M}) \arrow[r] & \mathrm{T}_{\mathrm{H/S}}(\mathscr{M}) \arrow[r] & \mathrm{H} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd} \quad ;$$

60 $\mathrm{L}(f)$ que l'on notera également $\underline{\mathrm{Lie}}(f)$ est le *morphisme dérivé de* f. [50]

Remarque 4.1.C. — [51] Si G/S et H/S vérifient (E), alors $\mathrm{L}(f)$ respecte les structures de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules déduites de la « fonctorialité en $\mathscr{M}$ » (cf. 3.6).

Proposition 4.1.1. — *Soit* $g \in \mathrm{G(S)}$. *Alors* $\mathrm{Ad}(g) : \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M}) \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M})$ *est le morphisme dérivé de* $\mathrm{Int}(g) : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$.

En effet $\mathrm{Ad}(g)\mathrm{X} = i^{-1}(\mathrm{Int}(g)i(\mathrm{X}))$, ce qui n'est autre que $\mathrm{L}(\mathrm{Int}(g))(\mathrm{X})$ par la définition même du morphisme dérivé.

Supposons que G/S vérifie (E). Alors, d'après la proposition 3.9, la structure de groupe de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M})$ définie comme plus haut n'est autre que la structure induite par sa structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module (définie grâce à (E)). On déduit alors de la proposition précédente et de la fonctorialité de l'opération de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$ (cf. 3.6) le corollaire :

---

[49] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 4.1.A et 4.1.B pour mettre en évidence ces définitions.

[50] N.D.E. : Si f est un monomorphisme, il en est de même de $\mathrm{L}(f)$ et $\mathrm{T}(f)$, cf. 3.7.

[51] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

Corollaire 4.1.1.1. — *Supposons que* G/S *vérifie* (E). *Alors,* Ad *envoie* G *dans le sous-groupe*

$$\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M}))$$

de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M}))$*, c.-à-d., pour tout* $g \in \mathrm{G(S')}$, $\mathrm{Ad}(g)$ *respecte la structure de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S'}}$*-module de* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G'/S'}, \mathscr{M})$ *(où* $\mathrm{G'} = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S'}$*). Autrement dit,* Ad *est une* représentation linéaire (cf. I, 3.2) *de* G *dans le* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})$.

Remarques 4.1.1.2. — a) Pour que G/S vérifie (E), il faut et il suffit que pour tout couple $(\mathscr{M}, \mathscr{N})$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules libres de type fini, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M}) \arrow[dr] & & \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{N}) \arrow[dl] \\
& \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, 0) = \mathrm{S} &
\end{tikzcd} ,$$

obtenu en appliquant le foncteur $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\ \ )$ au diagramme $(*)$ de 2.1, soit cartésien.

b) Supposons que G/S vérifie (E). Alors le morphisme dérivé de la loi de groupe $\pi : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ n'est autre que la loi d'addition dans $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})$. (N. B. π n'est **61**
pas un morphisme de groupes mais $\pi(e, e) = e$, donc le morphisme dérivé $\mathrm{L}(\pi)$ envoie $\mathrm{T}^{(e,e)}_{(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})$ dans $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})$, cf. 3.7 et 3.8.) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on montre de même que si l'on note $n_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ le morphisme de S-foncteurs défini par $g \mapsto g^n$, alors le morphisme dérivé $\mathrm{L}(n_{\mathrm{G}})$ est la multiplication par n sur $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})$, cf. 3.9.4.

4.1.2.0. — [52] Considérons maintenant le S-foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{G/S}}(\mathrm{G}, \mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M}))$; pour tout $\mathrm{S'} \to \mathrm{S}$, on a $\mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M})_{\mathrm{S'}} \simeq \mathrm{T}_{\mathrm{G_{S'}/S'}}(\mathscr{M})$ (cf. 3.4) et donc :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{G/S}}(\mathrm{G}, \mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M}))(\mathrm{S'}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{G_{S'}}}(\mathrm{G_{S'}}, \mathrm{T}_{\mathrm{G_{S'}/S'}}(\mathscr{M})) = \Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{G_{S'}/S'}}(\mathscr{M})/\mathrm{G_{S'}}).$$

Notons d'abord que l'on a un isomorphisme, fonctoriel en S′,

$$(*) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{S'}}(\mathrm{G_{S'}}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G_{S'}/S'}, \mathscr{M})) \xrightarrow{\ \sim\ } \Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{G_{S'}/S'}}(\mathscr{M})/\mathrm{G_{S'}})$$

qui associe à tout $f : \mathrm{G_{S'}} \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G_{S'}/S'}, \mathscr{M})$ la section $s_f : \mathrm{G_{S'}} \to \mathrm{T}_{\mathrm{G_{S'}/S'}}(\mathscr{M})$ telle que, pour tout $\mathrm{S''} \to \mathrm{S'}$ et $g \in \mathrm{G(S'')}$:

$$s_f(g) = i(f(g))\, s(g).$$

[52] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, pour faire voir l'action de G sur les *foncteurs* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{G/S}}(\mathrm{G}, \mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M}))$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M}))$.

Soit h un automorphisme du foncteur $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ au-dessus de S', ne respectant pas nécessairement la structure de groupe. À toute section τ de $\mathrm{T}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}'}(\mathscr{M})$, on peut associer $h(\tau)$ définie par transport de structure : c'est par exemple la seule section de $\mathrm{T}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}'}(\mathscr{M})$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "h"'] & \mathrm{T}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}'}(\mathscr{M}) \arrow[d, "\mathrm{T}(h)"] \\
\mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \arrow[r, "h(\tau)"] & \mathrm{T}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}'}(\mathscr{M})
\end{tikzcd} .$$

En particulier, prenons pour h la translation à droite t_x par un élément x de $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$, c.-à-d., $h(g) = t_x(g) = g\cdot x$, pour tout $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}'')$, $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$. Alors, on a immédiatement

$$t_x(s_f) = s_{t_x(f)}$$

où $t_x(f)$ désigne le morphisme de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ dans $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}', \mathscr{M})$ défini par

$$t_x(f)(g) = f(g\cdot x^{-1}).$$

pour tout $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}'')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}'$.

62 Il en résulte que si l'on fait opérer G par translations à droite dans

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}(\mathrm{G}, \mathrm{T}_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})) \qquad \text{et} \qquad \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{G}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}, \mathscr{M}))$$

de la façon suivante : pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $x \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$, $\sigma \in \Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}'}(\mathscr{M})/\mathrm{G}_{\mathrm{S}'})$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}', \mathscr{M}))$,

$$(\sigma\cdot x)(g) = \sigma(g\cdot x^{-1})\cdot s(x) \qquad \text{et} \qquad (f\cdot x)(g) = f(g\cdot x^{-1}),$$

pour tout $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}'')$, $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$, alors l'isomorphisme $(*)$ plus haut respecte les opérations de G.

En particulier, par cet isomorphisme, les éléments de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}(\mathrm{G}, \mathrm{T}_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}))^{\mathrm{G}}(\mathrm{S}')$ correspondent aux morphismes *constants* de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ dans $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}', \mathscr{M})$ (i.e. se factorisant par la projection $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{S}'$) ou encore aux éléments de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}', \mathscr{M})(\mathrm{S}') = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}')$.

Terminologie. — Les éléments de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}(\mathrm{G}, \mathrm{T}_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}))^{\mathrm{G}}(\mathrm{S}')$ seront appelés « sections de $\mathrm{T}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}'}(\mathscr{M})$ *invariantes par translation à droite* ».

On obtient alors la :

Proposition 4.1.2. — (*) *L'application* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}) \to \Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})/\mathrm{G})$ *qui associe à* $\mathrm{X} \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S})$ *la section* $x \mapsto \mathrm{X}\cdot x$ *est une bijection de* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S})$ *sur la partie de* $\Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})/\mathrm{G})$ *formée des sections invariantes par translation à droite.*

(*) Les énoncés 4.1.2, 4.1.3 et 4.1.4 s'obtiennent plus simplement en remarquant que les automorphismes de G invariants par translations à droite sont les translations à gauche. [53]

[53] N.D.E. : voir par exemple la démonstration des propositions 4.6 et 2.5 de [**DG70**], § II.4.

De même, on fait agir G à droite sur $\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{I_S}(\mathscr{M})/\mathrm{S}}(\mathrm{G}_{\mathrm{I_S}(\mathscr{M})})$ comme suit : pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $x \in \mathrm{G}(\mathrm{S}')$ et $u \in \underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{I_S}(\mathscr{M})/\mathrm{S}}(\mathrm{G}_{\mathrm{I_S}(\mathscr{M})})(\mathrm{S}') = \mathrm{End}_{\mathrm{I_{S'}}(\mathscr{M})}(\mathrm{G}_{\mathrm{I_{S'}}(\mathscr{M})})$,

$$(u \cdot x)(g) = u(g \cdot x^{-1}) \cdot x,$$

pour tout $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}'')$, $\mathrm{S}'' \to \mathrm{I_{S'}}(\mathscr{M})$. Alors le morphisme de 3.12.1

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{G/S}}(\mathrm{G}, \mathrm{T_{G/S}}(\mathscr{M})) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{I_S}(\mathscr{M})/\mathrm{S}}(\mathrm{G}_{\mathrm{I_S}(\mathscr{M})})$$

respecte les opérations de G et induit donc pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ une bijection entre $\Gamma(\mathrm{T}_{\mathrm{G_{S'}/S'}}(\mathscr{M})/\mathrm{G_{S'}})$ et l'ensemble des $\mathrm{I_{S'}}(\mathscr{M})$-endomorphismes u de $\mathrm{G}_{\mathrm{I_{S'}}(\mathscr{M})}$ qui induisent l'identité sur G et qui « *commutent aux translations à droite* », i.e. qui vérifient $u_{\mathrm{S}''} \cdot x = u_{\mathrm{S}''}$ pour tout $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$ et $x \in \mathrm{G}(\mathrm{S}'')$. On obtient donc :

Proposition 4.1.3. — (*) *Il existe une bijection fonctorielle en* G *entre l'ensemble* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})(\mathrm{S})$ *et l'ensemble des* $\mathrm{I_S}(\mathscr{M})$*-endomorphismes de* $\mathrm{G}_{\mathrm{I_S}}(\mathscr{M})$ *induisant l'identité sur* G *et* commutant aux translations à droite *de* G (au sens indiqué plus haut).

Tenant maintenant compte de 3.13 :

Théorème 4.1.4. — (*) *Soit* G *un* S*-foncteur en groupes ; supposons que* G/S vérifie (E). *Alors le groupe* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S}, \mathscr{M})(\mathrm{S})$ *s'identifie, fonctoriellement en* G, *au groupe des* $\mathrm{I_S}(\mathscr{M})$*-automorphismes de* $\mathrm{G}_{\mathrm{I_S}(\mathscr{M})}$ *induisant l'identité sur* G *et* commutant aux translations à droite *de* G (au sens indiqué plus haut).

On retrouve ainsi (dans le cas $\mathscr{M} = \mathscr{O}_\mathrm{S}$) une des définitions classiques de l'algèbre de Lie d'un groupe.

4.2.0. — [54] Avant d'aller plus loin, établissons de nouveaux corollaires à 3.11. Soient X, Y au-dessus de Z, Z au-dessus de S, comme dans la section 1. Comme on l'a vu en 3.11, les isomorphismes 1.1 (4) :

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] \underline{\mathrm{Hom}}_\mathrm{S}(\mathrm{I_S}(\mathscr{M}), \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Hom}}_\mathrm{Z}(\mathrm{I_Z}(\mathscr{M}), \mathrm{Y})) \\ & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X} \times_\mathrm{S} \mathrm{I_S}(\mathscr{M}), \mathrm{Y}) \arrow[ur, "\simeq"'] & \end{tikzcd} \tag{1}$$

induisent l'isomorphisme θ ci-dessous

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] \mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}(\mathscr{M}) \arrow[rr, "\theta", "\sim"'] \arrow[dr, "\simeq"'] & & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X}, \mathrm{T_{Y/Z}}(\mathscr{M})) \\ & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z/S}}(\mathrm{X} \times_\mathrm{S} \mathrm{I_S}(\mathscr{M}), \mathrm{Y}) \arrow[ur, "\simeq"'] & \end{tikzcd} \tag{2}$$

.

[54] N.D.E. : On a ajouté le paragraphe 4.2.0, dont les résultats sont utilisés de façon implicite en 4.2 et 4.7 de l'original.

D'après 1.3, si Y est un Z-groupe, il en est de même de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{V},\mathrm{Y})$ pour tout $\mathrm{V}\to\mathrm{Z}$ (en particulier pour $\mathrm{V}=\mathrm{I}_{\mathrm{Z}}(\mathscr{M})$) ; explicitement, si $\mathrm{Z}''\to\mathrm{Z}'\to\mathrm{Z}$ et $\phi,\psi\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}}(\mathrm{V}_{\mathrm{Z}'},\mathrm{Y})$, alors $\phi\cdot\psi$ est défini par $(\phi\cdot\psi)(v)=\phi(v)\psi(v)$, pour tout $v\in\mathrm{V}_{\mathrm{Z}'}(\mathrm{Z}'')$.

Supposons maintenant que X et Y soient des Z-groupes et posons la définition suivante.

Définition 4.2.0.1. — Soit $\underline{\mathrm{Hom}}_{(\mathrm{Z}/\mathrm{S})\text{-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ le sous-foncteur de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Z}/\mathrm{S}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ défini par : pour tout $\mathrm{S}'\to\mathrm{S}$,

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{(\mathrm{Z}/\mathrm{S})\text{-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})(\mathrm{S}')=\mathrm{Hom}_{\mathrm{Z}_{\mathrm{S}'}\text{-gr.}}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}'},\mathrm{Y}_{\mathrm{S}'}).\tag{3}$$

Cette définition s'applique également lorsqu'on remplace Y par le Z-groupe $\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M})$.

On voit alors facilement que $\mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{(\mathrm{Z}/\mathrm{S})\text{-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S}')$ correspond, dans les isomorphismes (2) précédents, aux $\mathrm{Z}_{\mathrm{S}'}$-morphismes

$$\phi:\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}\times_{\mathrm{S}'}\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})\longrightarrow\mathrm{Y}_{\mathrm{S}'}$$

qui sont « multiplicatifs en X », c.-à-d., qui vérifient $\phi(x_1x_2,m)=\phi(x_1,m)\phi(x_2,m)$, et ceux-ci correspondent aux morphismes de $\mathrm{Z}_{\mathrm{S}'}$-groupes $\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}\to\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M})_{\mathrm{S}'}$. On a donc obtenu :

Proposition 4.2.0.2. — *Soient* X, Y *des* Z*-groupes,* Z *au-dessus de* S. *On a des isomorphismes de* S*-foncteurs, fonctoriels en* $\mathscr{M}$ *:*

$$\mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{(\mathrm{Z}/\mathrm{S})\text{-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})}(\mathscr{M})\xrightarrow{\sim}\underline{\mathrm{Hom}}_{(\mathrm{Z}/\mathrm{S})\text{-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{Z}}(\mathscr{M})).$$

En particulier, pour Z = S, on obtient le corollaire suivant. Avant de l'énoncer, remarquons que si Y est un S-groupe commutatif, il en est de même de $\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$, puis de $\mathrm{H}=\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ et $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}))$, et enfin de $\mathrm{T}_{\mathrm{H}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$.

Corollaire 4.2.0.3. — *Soient* X, Y *des* S*-groupes. On a des isomorphismes de* S*-foncteurs, fonctoriels en* $\mathscr{M}$ *:*

$$\mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})\xrightarrow{\sim}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}\text{-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})).$$

Si Y *est commutatif, ce sont de plus des isomorphismes de* S*-groupes abéliens.*

Définition 4.2.0.4. — (55) Si Y est un $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module, le foncteur $\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ (resp. $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S},\mathscr{M})$) est muni d'une structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module déduite de celle de Y. Muni de cette structure, on le notera $\mathrm{T}'_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ (resp. $\underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S},\mathscr{M})$).

Par conséquent, si X, Y sont des $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules, alors $\mathrm{T}'_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})=\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}),\mathrm{Y})$ et $\mathrm{H}=\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$, puis $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{X},\mathrm{T}'_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}))$ et $\mathrm{T}'_{\mathrm{H}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$, sont munis d'une structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module, et l'on obtient le :

(55) N.D.E. : On a inséré ici cette définition, qui dans l'original apparaissait en 4.3.

Corollaire 4.2.0.5. — *Si* X, Y *sont des* $\mathbf{O}_S$*-modules, on a des isomorphismes de* $\mathbf{O}_S$*-modules, fonctoriels en* $\mathscr{M}$ *:*

$$\mathrm{T}'_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_S\text{-mod.}}(X,Y)/S}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_S\text{-mod.}}(X, \mathrm{T}'_{Y/S}(\mathscr{M})).$$

Définition 4.2.A. — [56] Soient X, L des S-groupes, X opérant sur L par automorphismes de groupes (cf. I 2.3.5). On définit le sous-foncteur $\underline{Z}^1_S(X,L)$ de $\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,L)$ comme suit : pour tout $S' \to S$,

$$\underline{Z}^1_S(X,L)(S') = \left\{ \phi \in \mathrm{Hom}_{S'}(X_{S'}, L_{S'}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi(x_1x_2) = \phi(x_1)(x_1 \cdot \phi(x_2)), \\ \text{pour tout } x_1, x_2 \in X(S''),\ S'' \to S' \end{array} \right\}.$$

On l'appelle le « foncteur des homomorphismes croisés de X dans L ».

Remarque 4.2.B. — [56] a) Si L′ est un second S-groupe sur lequel X opère par automorphismes de groupes, on a

$$\underline{Z}^1_S(X, L \times_S L') \simeq \underline{Z}^1_S(X,L) \times_S \underline{Z}^1_S(X,L').$$

b) Si L est un G-$\mathbf{O}_S$-module, $\underline{Z}^1_S(X,L)$ coïncide avec le noyau de la différentielle $\partial : \underline{\mathrm{Hom}}_S(X,L) \to \underline{\mathrm{Hom}}_S(X^2,L)$ définie en I 5.1 ; en particulier, $\underline{Z}^1_S(X,L)$ est dans ce cas un $\mathbf{O}_S$-module.

4.2. Soit $u : X \to Y$ un morphisme de S-groupes ; alors $\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(X,Y)/S}(\mathscr{M})$ se décrit comme suit. D'abord, on a vu en 3.11.3 que l'on a un isomorphisme de S-foncteurs, fonctoriel en $\mathscr{M}$: 63

$$(\dagger) \qquad \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)/S}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{Y/S}(X, \mathrm{T}_{Y/S}(\mathscr{M})).$$

D'autre part, comme Y est un S-groupe ; on a alors

$$\mathrm{T}_{Y/S}(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}(Y/S,\mathscr{M}) \cdot Y = \underline{\mathrm{Lie}}(Y/S,\mathscr{M})_Y\,;$$

il en résulte un isomorphisme de S-foncteurs, fonctoriel en $\mathscr{M}$:

$$\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_S(X,Y)/S}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_S(X, \underline{\mathrm{Lie}}(Y/S,\mathscr{M})).$$

Pour tout $S' \to S$, notons $u' : X' \to Y'$ le morphisme déduit de u par changement de base. Considérons le S-foncteur défini comme suit : [57] pour tout $S' \to S$,

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{Hom}}_{(Y/S)\text{-gr.}}(X, \underline{\mathrm{Lie}}(Y/S,\mathscr{M}) \cdot Y)(S') &= \mathrm{Hom}_{Y'\text{-gr.}}(X', (\underline{\mathrm{Lie}}(Y/S,\mathscr{M}) \cdot Y)_{S'}) \\ &= \mathrm{Hom}_{Y'\text{-gr.}}(X', \underline{\mathrm{Lie}}(Y'/S',\mathscr{M}) \cdot Y'). \end{aligned}$$

Alors on voit facilement que l'isomorphisme (†) induit un isomorphisme

$$(\dagger') \qquad \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{S\text{-gr.}}(X,Y)/S}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{(Y/S)\text{-gr.}}(X, \underline{\mathrm{Lie}}(Y/S,\mathscr{M}) \cdot Y).$$

D'autre part, le morphisme

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{\mathrm{Ad}} \underline{\mathrm{Aut}}_{S\text{-gr.}}(\underline{\mathrm{Lie}}(Y/S,\mathscr{M}))$$

[56] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit ; en particulier, on a ajouté la définition 4.2.A et la remarque 4.2.B.

[57] N.D.E. : C'est la définition 4.2.0.1 appliquée à Z = Y et aux Y-groupes $u : X \to Y$ et $\mathrm{T}_{Y/S}(\mathscr{M})$.

définit une opération de X sur $\mathrm{L} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ par automorphismes de groupes.

Si $\Phi \in \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \cdot \mathrm{Y})$ alors, pour tout $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S}'')$, on peut écrire de façon unique

$$\Phi(\mathrm{S}')(x) = \phi(\mathrm{S}')(x) \cdot u'(x), \qquad \text{où} \quad \phi(\mathrm{S}')(x) \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}'/\mathrm{S}', \mathscr{M})(\mathrm{S}'');$$

ceci détermine un élément ϕ de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M}))$. Alors $\Phi(\mathrm{S}')$ est un morphisme de groupes si, et seulement si, pour tout $x_1, x_2 \in \mathrm{X}(\mathrm{S}'')$ on a :

$$\begin{aligned}\phi(\mathrm{S}')(x_1 x_2) &= \phi(\mathrm{S}')(x_1)\,\big(u(x_1)\,\phi(\mathrm{S}')(x_2)\,u(x_1)^{-1}\big)\\ &= \phi(\mathrm{S}')(x_1)\,(x_1 \cdot \phi(\mathrm{S}')(x_2)),\end{aligned}$$

c.-à-d., si et seulement si $\phi \in \underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M}))$. On a donc obtenu la :

Proposition 4.2. — *Soit $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de* S*-groupes. On a un isomorphisme de* S*-foncteurs, fonctoriel en* $\mathscr{M}$ *:*

$$\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})).$$

(58) Supposons de plus que Y/S vérifie (E). Alors il résulte de 4.2.0.3, exactement comme dans la démonstration de 3.11.1, que $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})/\mathrm{S}$ vérifie (E). Donc on a (cf. 3.5.1) :

$$\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \simeq \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{N}).$$

(Ceci découle aussi de 4.2 et 4.2.B a)). Par conséquent, $\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ est muni, comme $\underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M}))$ (cf. 4.2.B b)), d'une structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module, déduite de la fonctorialité en $\mathscr{M}$. On en déduit que l'isomorphisme de 4.2 est, dans ce cas, un isomorphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules :

Proposition 4.2. bis. — (58) *Soit $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de* S*-groupes ; on suppose que* Y/S *vérifie* (E). *On a un isomorphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules, fonctoriel en* $\mathscr{M}$ *:*

$$\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})).$$

De plus, lorsque Y/S vérifie (E), on déduit de 3.13.1, exactement comme dans la démonstration de 3.13.2, que pour tout $u \in \mathrm{Isom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ on a un isomorphisme fonctoriel en $\mathscr{M}$:

$$(*) \qquad \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}).$$

On en déduit les deux corollaires suivants.

Corollaire 4.2.1. — *Soit $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de* S*-groupes ; si* Y/S *vérifie* (E), *on a un isomorphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules, fonctoriel en* $\mathscr{M}$ *:*

$$\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Isom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})).$$

(58) N.D.E. : On a ajouté les phrases qui suivent et la proposition 4.2 bis, implicite dans l'original.

Corollaire 4.2.2. — *Soit* X *un* S-*groupe ; si* X/S *vérifie* (E)*, on a un isomorphisme de* $\mathbf{O}_S$*-modules, fonctoriel en* $\mathscr{M}$ *:*

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M})).$$

[59] Par ailleurs, si Y est *commutatif*, l'action adjointe de Y sur $\mathrm{L} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ est triviale, d'où $\underline{\mathrm{Z}}^1_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{L}) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X}, \mathrm{L})$. Donc :

Corollaire 4.2.3. — *Soit* Y *un* S-*groupe* commutatif *; on a un isomorphisme de* S-*foncteurs, fonctoriel en* $\mathscr{M}$ *:* 64

$$\mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})).$$

4.3. Considérons maintenant le cas où X et Y sont des $\mathbf{O}_S$-*modules*. Rappelons (cf. 4.2.0.4) qu'on note $\mathrm{T}'_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ (resp. $\underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$) le foncteur $\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ (resp. $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$) muni de la structure de $\mathbf{O}_S$-module déduite de celle de Y.

Lorsque Y/S vérifie (E), on notera toujours $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ le foncteur $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ muni de la structure de $\mathbf{O}_S$-module définie pour tout foncteur vérifiant (E). Dans ce cas, nous savons (cf. 3.9) que les structures de groupes abéliens de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ et $\underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ coïncident, mais il n'en est pas de même a priori pour celles de module (voir un contre-exemple au paragraphe 6.3). Pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $a \in \mathbf{O}(\mathrm{S}')$, on notera $a \cdot' m$ (resp. $a \cdot m$) l'action de a sur $m \in \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}')$ (resp. sur $m \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}')$), et de même pour l'action de a sur $\mathrm{T}'_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ et $\mathrm{T}_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$.

On a $\mathrm{T}'_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \simeq \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \oplus \mathrm{Y}$ comme $\mathbf{O}_S$-modules ; par conséquent, on obtient, exactement comme pour les proposition 4.2 et 4.2 bis, la :

Proposition 4.3. — *Soit* $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de* $\mathbf{O}_S$*-modules. On a un isomorphisme de* S*-foncteurs, fonctoriel en* $\mathscr{M}$ *:*

$$(*) \qquad \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_S\text{-mod.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_S\text{-mod.}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})).$$

[60] *Si* Y/S *vérifie* (E)*, alors* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_S\text{-mod.}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})/\mathrm{S}$ *vérifie* (E) *et* $(*)$ *est un isomorphisme de* $\mathbf{O}_S$*-modules lorsqu'on munit les deux membres de la structure de* $\mathbf{O}_S$*-module déduite de la fonctorialité en* $\mathscr{M}$*.* [61]

Remarque 4.3. bis. — [62] Soit $u : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un morphisme de $\mathbf{O}_S$-modules ; notons τ_u l'application qui à tout morphisme de $\mathbf{O}_S$-modules $\phi : \mathrm{X} \to \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ associe le morphisme

$$u \oplus \phi : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{T}'_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) = \mathrm{Y} \oplus \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M}).$$

---

[59] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[60] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[61] N.D.E. : Noter que sur le terme de droite, c'est la structure définie par $(a\phi)(x) = a{\cdot}\phi(x)$, où $a{\cdot}\phi(x)$ désigne l'action de a sur $\phi(x) \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$. Ceci diffère de l'action $(a \cdot' \phi)(x) = a \cdot' \phi(x) = \phi(ax)$, mais coïncide avec celle-ci si $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$.

[62] N.D.E. : On a ajouté cette remarque qui sera utile en 4.5.1.

Alors l'isomorphisme de 4.3 s'insère dans le diagramme commutatif suivant, fonctoriel en $\mathscr{M}$:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S}, \mathscr{M})) \arrow[d, hook, "\tau_u"] \\ \mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \arrow[r, "\sim"] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X}, \mathrm{T}'_{\mathrm{Y}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})). \end{tikzcd}$$

De plus, lorsque Y/S vérifie (E), on déduit de 3.13.1, exactement comme dans la démonstration de 3.13.2, que pour tout $u \in \mathrm{Isom}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$, on a

$$(*) \qquad \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Isom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) = \mathrm{L}^u_{\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X},\mathrm{Y})/\mathrm{S}}(\mathscr{M}).$$

Corollaire 4.3.1. — *Soit* X *un* $\mathbf{O}_\mathrm{S}$*-module vérifiant* (E) *par rapport à* S*. On un isomorphisme fonctoriel en* $\mathscr{M}$ *:*

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X}, \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M}))$$

qui respecte les structures de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$*-modules déduites de la fonctorialité en* $\mathscr{M}$*.* (63) *En particulier,* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}$ *vérifie* (E).

Démonstration. La première assertion découle de $(*)$ et 4.3 ; démontrons la seconde. Comme X/S vérifie (E), on a des isomorphismes de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-modules $\underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \simeq \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \times_\mathrm{S} \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{X}/\mathrm{S}, \mathscr{N})$, et donc :

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \simeq \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}, \mathscr{N}).$$

Compte tenu de 4.1.1.2 a), ceci prouve que $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{X})/\mathrm{S}$ vérifie (E).

4.3.2. — Avant de continuer dans cette direction, examinons de plus près les relations entre Y, $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Y}/\mathrm{S})$ et $\underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{Y}/\mathrm{S})$. Remarquons d'abord que

$$(1) \qquad \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) = \mathrm{W}(\mathscr{M})$$

(où $\mathrm{W}(\mathscr{M})$ est défini en I 4.6) et que l'on a donc un isomorphisme canonique

$$(2) \qquad d : \mathbf{O}_\mathrm{S} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}).$$

65 Soit maintenant F un $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module. Pour tout $\mathrm{S}_2 \to \mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}$ (64), on a un dihomomorphisme

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathrm{F}(\mathrm{S}_1) \to \mathrm{F}(\mathrm{S}_2) \\ \mathbf{O}(\mathrm{S}_1) \to \mathbf{O}(\mathrm{S}_2), \end{cases}$$

d'où un morphisme de $\mathbf{O}(\mathrm{S}_2)$-modules

$$\mathrm{F}(\mathrm{S}_1) \otimes_{\mathbf{O}(\mathrm{S}_1)} \mathbf{O}(\mathrm{S}_2) \longrightarrow \mathrm{F}(\mathrm{S}_2).$$

(63) N.D.E. : cf. N.D.E. (61). D'autre part, on a ajouté la phrase qui suit, ainsi que sa démonstration.
(64) N.D.E. : On a changé $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ en $\mathrm{S}_2 \to \mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}$, car on doit faire varier S_2 et S_1 (cf. plus bas). D'autre part, on a détaillé l'original dans ce qui suit.

En particulier, posant $S_1 = S'$ et $S_2 = I_{S'}(\mathscr{M})$, on en déduit des morphismes de $\mathbf{O}(S')$-modules, fonctoriels en $\mathscr{M}$

$$F(S') \otimes_{\mathbf{O}(S')} T_{\mathbf{O}_S/S}(\mathscr{M})(S') \longrightarrow T'_{F/S}(\mathscr{M})(S');$$

faisant varier S', on obtient des morphismes de $\mathbf{O}_S$-modules, fonctoriels en $\mathscr{M}$

$$F \otimes_{\mathbf{O}_S} T_{\mathbf{O}_S/S}(\mathscr{M}) \longrightarrow T'_{F/S}(\mathscr{M}). \tag{4}$$

Ces morphismes sont fonctoriels en $\mathscr{M}$, donc compatibles avec les projections des fibrés tangents sur leurs bases ; ils définissent donc des morphismes de $\mathbf{O}_S$-modules

$$F \otimes_{\mathbf{O}_S} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_S/S, \mathscr{M}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}'(F/S, \mathscr{M}) \tag{5}$$

tels qu'on ait le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \otimes_{\mathbf{O}_S} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_S/S, \mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d] & F \otimes_{\mathbf{O}_S} T_{\mathbf{O}_S/S}(\mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \underline{\mathrm{Lie}}'(F/S, \mathscr{M}) \arrow[r] & T'_{F/S}(\mathscr{M}) \arrow[r] & F \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

On peut considérer les morphismes (5) comme des morphismes de S-*groupes abéliens*

$$F \otimes_{\mathbf{O}_S} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_S/S, \mathscr{M}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(F/S, \mathscr{M})\,; \tag{6}$$

en tensorisant F avec l'isomorphisme $d : \mathbf{O}_S \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_S/S)$, on en déduit (pour **66**
$\mathscr{M} = \mathscr{O}_S$) un morphisme de S-groupes abéliens

$$F \xrightarrow{\sim} F \otimes_{\mathbf{O}_S} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_S/S) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(F/S) \tag{7}$$

noté également $d : F \to \underline{\mathrm{Lie}}(F/S)$.

Remarque 4.3.3. — [65] Lorsque F/S vérifie (E), les morphismes (6) et (7) ne sont pas nécessairement des morphismes de $\mathbf{O}_S$-modules, lorsqu'on munit les deux membres des structures de modules déduites de celle de $\mathscr{M}$ à l'aide de la condition (E).

Par exemple, soient k un corps de caractéristique $p > 0$, $S = \mathrm{Spec}(k)$, et F le $\mathbf{O}_S$-module qui à tout S-schéma T associe $F(T) = \Gamma(T, \mathscr{O}_T)$ muni de la structure de $\mathbf{O}(T)$-module obtenue en faisant opérer les scalaires par l'intermédiaire de la puissance p-ième, c.-à-d., $r \cdot f = r^p f$, pour $r \in \mathbf{O}(T)$, $f \in F(T)$. Comme S-foncteur en groupes, F est isomorphe à $\mathbb{G}_{a,\,S}$. Donc F vérifie (E) et $\underline{\mathrm{Lie}}(F/S)$ s'identifie à $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathbb{G}_{a,\,S}/S) \cong \mathbf{O}_S$. Alors, le morphisme canonique $d : F \to \underline{\mathrm{Lie}}(F/S)$ est, pour tout $T \to S$, l'application identique $F(T) \to \mathbf{O}(T)$: il respecte bien la structure de groupe abélien mais pas la structure de $\mathbf{O}_S$-module.

---

[65] N.D.E. : On trouvait dans l'original l'assertion que lorsque F/S vérifie (E), les morphismes (6) (et donc (7)) sont des morphismes de $\mathbf{O}_S$-modules, assertion contredite par un contre-exemple donné en 6.3. On a supprimé cette assertion, inséré ici l'exemple précité, et modifié en conséquence la définition 4.4. Ceci est sans conséquence pour la suite.

Remarque 4.3.4. — [66] On peut expliciter les morphismes (4) et (5) comme suit. Le morphisme $\Theta : \mathrm{F}\otimes_{\mathbf{O}_\mathrm{S}} \mathrm{T}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \to \mathrm{T}'_{\mathrm{F}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Hom}}_\mathrm{S}(\mathrm{I}_\mathrm{S}(\mathscr{M}, \mathrm{F})$ est défini par : pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\alpha \in \mathbf{O}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}))$, et $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{F}$,

$$\Theta(f \otimes \alpha) = \alpha \cdot (\tau_0 \circ f) = \alpha \cdot (f \circ \rho)\,,$$

où τ_0 est la section nulle $\mathrm{F} \to \mathrm{T}'_{\mathrm{F}/\mathrm{S}}(\mathscr{M})$ et ρ le morphisme structural $\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}) \to \mathrm{S}'$. Alors Θ induit un morphisme $\theta : \mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \to \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$; ceci résulte de la « fonctorialité en $\mathscr{M}$ » déjà évoquée après (4), et peut se voir explicitement comme suit. D'une part, on a

$$\underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}') = \{\phi \in \mathrm{Hom}_\mathrm{S}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}), \mathrm{F}) \mid \phi \circ \varepsilon_\mathscr{M} = e\},$$

où e désigne la section unité $\mathrm{S}' \to \mathrm{F}$. D'autre part, $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}') = \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{M})$ est le noyau de l'augmentation $\eta : \mathbf{O}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})) \to \mathbf{O}(\mathrm{S}')$, et il s'agit donc de voir que si $f \in \mathrm{F}(\mathrm{S}')$ et $\alpha \in \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{M})$, alors $\big(\alpha \cdot (f \circ \rho)\big) \circ \varepsilon_\mathscr{M} = e$.

Considérons le dihomomorphisme (3), dans le cas où $\mathrm{S}_2 \to \mathrm{S}_1$ est le S-morphisme $\varepsilon_\mathscr{M} : \mathrm{S}' \to \mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})$; on a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})) \arrow[r, "\mathrm{F}(\varepsilon_\mathscr{M})"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathrm{F}(\mathrm{S}') \arrow[d, "\eta(\alpha)"] \\
\mathrm{F}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})) \arrow[r, "\mathrm{F}(\varepsilon_\mathscr{M})"] & \mathrm{F}(\mathrm{S}')
\end{tikzcd}\;.$$

Pour tout $\phi : \mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}) \to \mathrm{F}$, on a donc $(\alpha\cdot\phi)\circ\varepsilon_\mathscr{M} = \eta(\alpha)\cdot(\phi\circ\varepsilon_\mathscr{M})$, d'où $(\alpha\cdot\phi)\circ\varepsilon_\mathscr{M} = e$ si $\eta(\alpha) = 0$.

En particulier, prenant $\mathscr{M} = t\,\mathscr{O}_\mathrm{S}$, on a $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}) = t\,\mathbf{O}_\mathrm{S}$ et le morphisme $\mathrm{F} \to \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S})$ est donné par $f \mapsto t \cdot (f \circ \rho)$.

Remarque 4.3.5. — [67] Soit F un $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module, posons $\mathrm{E} = \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$ et notons d_F et d_E les morphismes de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-modules donnés par 4.3.2 (5) :

$$\begin{aligned}
d_\mathrm{F} &: \mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M}),\\
d_\mathrm{E} &: \mathrm{E} \otimes_{\mathbf{O}_\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{E}/\mathrm{S}, \mathscr{M}).
\end{aligned}$$

On déduit de 4.3.4 le diagramme commutatif suivant de morphismes de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-modules :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E} \otimes_{\mathbf{O}_\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \arrow[r, "d_\mathrm{E}"] \arrow[d, equal] & \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{E}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \\
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}}(\mathrm{F}, \mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_\mathrm{S}/\mathrm{S}, \mathscr{M})) \arrow[r, "d_\mathrm{F}"] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}}(\mathrm{F}, \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M})) \arrow[u, "\simeq"', "(*)"]
\end{tikzcd}$$

où la flèche verticale de droite est l'isomorphisme $(*)$ de 4.3. Donc (*loc. cit.*), si F/S vérifie (E), alors E/S vérifie (E) et $(*)$ est aussi un isomorphisme de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-modules lorsqu'on munit les termes de droite de la structure de $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module déduite de (E).

---

[66] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, qui sera utile en 4.6.2.

[67] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, qui sera utile en 4.5 et 4.7.

Remarque 4.4.0. — [68] Dans 4.3.2, les morphismes (4) sont des isomorphismes si et seulement si les morphismes (5) le sont. De plus, si ces conditions sont vérifiées, alors F/S vérifie (E). En effet, il suffit de vérifier que $\underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F/S}, \mathscr{M}\oplus\mathscr{N}) \simeq \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F/S}, \mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F/S}, \mathscr{N})$. Or on a le diagramme commutatif ci-dessous, où par hypothèse les flèches horizontales sont des isomorphismes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}, \mathscr{M}\oplus\mathscr{N}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F/S}, \mathscr{M}\oplus\mathscr{N}) \arrow[d] \\
\mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} \big(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}, \mathscr{N})\big) \arrow[r, "\sim"] & \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F/S}, \mathscr{M}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F/S}, \mathscr{N});
\end{tikzcd}$$

la seconde flèche verticale est donc aussi un isomorphisme, i.e. F/S vérifie (E).

Définition 4.4. — On dit que F est un *bon* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module* si les morphismes

$$\mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} \mathrm{T}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathrm{F/S}}(\mathscr{M})$$

ou, de façon équivalente, $\mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F/S}, \mathscr{M})$,

sont des isomorphismes de S-groupes abéliens (de sorte que F/S vérifie (E)) et si de plus ils respectent les structures de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules déduites de la condition (E).

Corollaire 4.4.1. — [69] *Soit* F *un* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module. Considérons les conditions suivantes :*

(i) F *est un bon* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module.*

(ii) F/S *vérifie* (E) *et* $d : \mathrm{F} \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F/S})$ *est un isomorphisme de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-modules.*

(iii) $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F/S}, \mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F/S}, \mathscr{M})$.

Alors on a (i) ⇔ (ii) ⇒ (iii).

Démonstration. (i) ⇒ (ii) résulte de la définition. Pour prouver (ii) ⇒ (i), il faut montrer que les morphismes de S-groupes abéliens (fonctoriels en $\mathscr{M}$)

$$\mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F/S}, \mathscr{M})$$

sont des isomorphismes de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules. Comme F/S vérifie (E), les deux membres transforment sommes directes finies de copies de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ en produits finis de S-groupes abéliens. Ceci nous ramène au cas où $\mathscr{M} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, qui résulte de l'hypothèse.

Enfin (i) ⇒ (iii) découle de la définition et du fait que les isomorphismes

$$\mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F/S}, \mathscr{M})$$

de 4.3.2 (5) sont des morphismes de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules.

Exemples 4.4.2. — Pour tout $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-Module quasi-cohérent $\mathscr{E}$, les $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\mathrm{V}(\mathscr{E})$ et **67**
$\mathrm{W}(\mathscr{E})$ définis en I 4.6 sont bons.

---

[68] N.D.E. : Compte tenu des modifications dans la définition 4.4 (cf. N.D.E. (65)), on a inséré ici cette remarque, qui dans l'original figurait dans la démonstration de 4.4.1.

[69] N.D.E. : L'original montrait que (i) implique (ii) et (iii) ; on a ajouté l'implication (ii) ⇒ (i).

[70] En effet, pour tout $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, les morphismes

$$\mathrm{V}(\mathscr{E})(\mathrm{S}') \otimes_{\mathbf{O}(\mathrm{S}')} \mathbf{O}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})) \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathrm{V}(\mathscr{E})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S}')$$
$$\mathrm{W}(\mathscr{E})(\mathrm{S}') \otimes_{\mathbf{O}(\mathrm{S}')} \mathbf{O}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})) \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathrm{W}(\mathscr{E})/\mathrm{S}}(\mathscr{M})(\mathrm{S}')$$

correspondent, respectivement, aux morphismes :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}\text{-mod.}}(f^*(\mathscr{E}), \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) \otimes_{\mathbf{O}(\mathrm{S}')} \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{M})) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}\text{-mod.}}(f^*(\mathscr{E}), \mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{M}))$$
$$\Gamma(\mathrm{S}', f^*(\mathscr{E})) \otimes_{\mathbf{O}(\mathrm{S}')} \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{M})) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{S}', f^*(\mathscr{E}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}} \mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{M}));$$

ceux-ci sont des isomorphismes puisque $\mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}}(\mathscr{M})$ est isomorphe, comme $\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$-module, à une somme directe finie de copies de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$.

Proposition 4.5. — *Soit* F *un* bon $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module. Alors :*

(i) $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S}$ *vérifie* (E) *et l'on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M}))$$

qui respecte les structures de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-modules déduites de la condition* (E)*. En particulier, on a un isomorphisme de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-modules*

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F}).$$

(ii) [71] *De plus,* $\underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$ *est un bon* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module.*

En effet, d'après 4.4.1, F/S vérifie (E) et

$$(1) \qquad \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}'(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \simeq \mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}, \mathscr{M}).$$

L'assertion (i) résulte alors de 4.3.1. Posons $\mathrm{E} = \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$. D'après (1) et la remarque 4.3.5, on a le diagramme commutatif suivant de morphismes de S-groupes abéliens :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F}) \otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \arrow[r, "d_{\mathrm{E}}"] \arrow[d, equal] & \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \\
\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathrm{F}, \mathrm{F} \otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}, \mathscr{M})) \arrow[r, "d_{\mathrm{F}}"] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}}(\mathrm{F}, \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S}, \mathscr{M})) \arrow[u, "\simeq"', "(*)"]
\end{tikzcd}$$

où d_{F} et $(*)$ sont des isomorphismes de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules ; par conséquent, il en est de même de d_{E}. Ceci prouve (ii).

Scholie 4.5.1. — [72] Posons (cf. 2.1) $\mathscr{O}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \oplus t\,\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ (avec $t^2 = 0$), et soit F un *bon* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module. Alors, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, le morphisme

$$\mathrm{F}(\mathrm{S}') \bigoplus t\,\mathrm{F}(\mathrm{S}') = \mathrm{F}(\mathrm{S}') \otimes_{\mathbf{O}(\mathrm{S}')} \mathbf{O}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}) \longrightarrow \mathrm{F}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}) = \mathrm{F}(\mathrm{S}') \bigoplus \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S})(\mathrm{S}')$$

[70] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.
[71] N.D.E. : On a ajouté le point (ii), conséquence immédiate de ce qui précède.
[72] N.D.E. : On a ajouté ce scholie, implicite dans l'original, qui sera utile en 4.7.1. (Ici et dans la suite, on note t, t', etc. des variables de carré nul, la lettre ε étant réservée à la section unité des groupes.)

(qui est l'identité sur $\mathrm{F}(\mathrm{S}'))$ induit un isomorphisme de $\mathbf{O}(\mathrm{S}')$-modules $t\,\mathrm{F}(\mathrm{S}') \simeq \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S})(\mathrm{S}')$. Faisant varier S', on obtient un isomorphisme qu'on pourra noter $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S}) \simeq t\,\mathrm{F}$.

Pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, on a donc, d'après 4.5, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}'}\text{-mod.}}(\mathrm{F}_{\mathrm{S}'}) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}'}\text{-mod.}}(\mathrm{F}_{\mathrm{S}'}, t\,\mathrm{F}_{\mathrm{S}'}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook] & \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S})(\mathrm{S}') \arrow[d, hook] \\
 & \mathrm{Aut}_{\mathbf{O}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}}\text{-mod.}}(\mathrm{F}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}}) \arrow[r, equal] & \mathrm{T}_{\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S}}(\mathrm{S}')
\end{tikzcd}$$

et l'on déduit de 4.3 bis que tout $\mathrm{X} \in \mathrm{End}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}'}\text{-mod.}}(\mathrm{F}_{\mathrm{S}'})$ correspond à l'élément $\mathrm{id} + t\mathrm{X}$ de $\mathrm{Aut}_{\mathbf{O}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}}\text{-mod.}}(\mathrm{F}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}})$.

Définition 4.6. — On dit que le S-*foncteur en groupes* G est *bon* si G/S vérifie la condition (E) et si $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est un bon $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module.

[73] Notons que si F est un bon $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module, c'est un bon S-groupe ; en effet F/S vérifie (E) et $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S}) \simeq \mathrm{F}$ est un bon $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module.

Exemple 4.6.1. — Si G est représentable, il est bon. En effet, G/S vérifie (E) et $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est de la forme $\mathrm{V}(\mathscr{E})$ donc bon, d'après 4.4.2.

Lemme 4.6.2. — [74] *Soit* G *un* S-*foncteur en groupes tel que* G/S *vérifie* (E), *et soit* $\mathrm{F} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$. *Alors* F *vérifie* (E) *et le morphisme de groupes abéliens* $d : \mathrm{F} \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S})$ *respecte les structures de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-*module.*

Par conséquent, G *est bon si et seulement si* $\mathrm{F} \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S})$ *est* bijectif.

Démonstration. Supposons que G/S vérifie (E). Soient $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules libres de rang fini. Notons $\mathrm{F}(\mathscr{N}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}, \mathscr{N})$ et e la section unité de G.

Pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, on a $\mathrm{F}(\mathscr{N})(\mathrm{S}') = \{g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{N}), \mathrm{G}) \mid g \circ \varepsilon_{\mathscr{N}} = e\}$ et $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}') = \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}), \mathrm{F}(\mathscr{N}))$ s'identifie à

$$\left\{ \Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{N}) \times_{\mathrm{S}'} \mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}), \mathrm{G}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \Phi \circ (\varepsilon_{\mathscr{N}} \times \mathrm{id}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})}) = e \in \mathrm{G}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})) \\ \Phi \circ (\mathrm{id}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{N})} \times \varepsilon_{\mathscr{M}}) = e \in \mathrm{G}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{N})) \end{array} \right\}.$$

Ceci montre que

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S}, \mathscr{M}) \simeq \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{M})/\mathrm{S}, \mathscr{N}). \tag{1}$$

Comme G/S vérifie (E), on en déduit :

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S}, \mathscr{M}_1 \oplus \mathscr{M}_2) &\simeq \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{M}_1 \oplus \mathscr{M}_2)/\mathrm{S}, \mathscr{N}) \\ &\simeq \underline{\mathrm{Lie}}((\mathrm{F}(\mathscr{M}_1) \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{F}(\mathscr{M}_2))/\mathrm{S}, \mathscr{N}).\end{aligned}$$

D'après 3.8, le terme de droite est isomorphe à

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{M}_1)/\mathrm{S}, \mathscr{N}) \underset{\mathrm{S}}{\times} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{M}_2)/\mathrm{S}, \mathscr{N}) \simeq \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S}, \mathscr{M}_1) \underset{\mathrm{S}}{\times} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S}, \mathscr{M}_2).$$

[73] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.
[74] N.D.E. : On a ajouté ce lemme.

Il en résulte

$$\text{(2)} \qquad \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S}, \mathscr{M}_1 \oplus \mathscr{M}_2) \simeq \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S}, \mathscr{M}_1) \times_{\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S}, \mathscr{M}_2),$$

donc $\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S}$ vérifie (E), d'après la remarque 4.1.1.2 a).

Montrons maintenant que le morphisme de groupes abéliens $d : \mathrm{F}(\mathscr{N}) \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S})$ respecte les structures de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module. Considérons le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module libre $\mathscr{M} = t\,\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, de sorte que

$$\mathbf{O}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})) = \mathbf{O}(\mathrm{S}')[t]/(t^2) = \mathbf{O}(\mathrm{S}') \oplus t\,\mathbf{O}(\mathrm{S}')$$

et $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{S}}/\mathrm{S}) \simeq t\,\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$. On notera ρ_t le morphisme structural $\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \to \mathrm{S}$, qui correspond à l'injection $u_t : \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \hookrightarrow \mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}}(\mathscr{M}) = \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \oplus t\,\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$. Rappelons (cf. 3.4.2) que, pour tout S-foncteur X, $\mathrm{F}(\mathscr{N})(\mathrm{X}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}, \mathscr{N})(\mathrm{X})$ est l'ensemble des S-morphismes $\phi : \mathrm{I}_{\mathrm{X}}(\mathscr{N}) \to \mathrm{G}$ tels que $\phi \circ \varepsilon_{\mathscr{N}} = e$, et que l'opération de $a \in \mathbf{O}(\mathrm{X})$ est donnée par $a \cdot \phi = \phi \circ a^*$, où a^* est l'endomorphisme de $\mathrm{I}_{\mathrm{X}}(\mathscr{N})$ associé à a, cf. 2.1.3.

Par conséquent, d'après 4.3.4, le morphisme $d : \mathrm{F}(\mathscr{N}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{F}(\mathscr{N}) \otimes_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}} t\,\mathbf{O}_{\mathrm{S}} \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}(\mathscr{N})/\mathrm{S})$ est donné par : pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}', \mathrm{F}(\mathscr{N}))$,

$$f \mapsto f \otimes t \mapsto t \cdot (f \circ \rho_t) = f \circ \rho_t \circ t^*,$$

où, dans le dernier terme, $f \circ \rho_t \in \mathrm{F}(\mathscr{N})(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}))$ est considéré comme un S-morphisme $\phi : \mathrm{I}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})}(\mathscr{N}) \to \mathrm{G}$ (tel que $\phi \circ \varepsilon_{\mathscr{N}} = e$). Il s'agit de voir que d est un morphisme de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules, c.-à-d., que $d(a \cdot f) = u_t(a) \cdot d(f)$ pour tout $a \in \mathbf{O}(\mathrm{S}')$.

Considérant $f \in \mathrm{F}(\mathscr{N})(\mathrm{S}')$ comme un morphisme $\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{N}) \to \mathrm{G}$, on a de même $a \cdot f = f \circ a^*$. D'autre part, d'après la fonctorialité en X de l'opération de $\mathbf{O}(\mathrm{X})$ sur $\mathrm{I}_{\mathrm{X}}(\mathscr{N})$ (cf. 2.1.3), on a le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{N}) \arrow[r, "a^*"] & \mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{N}) \\
\mathrm{I}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})}(\mathscr{N}) \arrow[u, "\rho_t"] \arrow[r, "u_t(a)^*"] & \mathrm{I}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})}(\mathscr{N}) \arrow[u, "\rho_t"'] .
\end{tikzcd}$$

On a donc

$$d(a \cdot f) = f \circ a^* \circ \rho_t \circ t^* = f \circ \rho_t \circ u_t(a)^* \circ t^* = f \circ \rho_t \circ t^* \circ u_t(a)^* = u_t(a) \cdot d(f)$$

(l'avant-dernière égalité résultant du fait que $\mathbf{O}$ est commutatif). Ceci achève la démonstration du lemme 4.6.2.

Théorème 4.7. — *Si* F *est un bon* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module, le* S*-groupe* $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$ *est bon.*

[75] En effet, d'après 4.5, $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S}$ vérifie (E) et $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S}) \simeq$
68 $\underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$ est un bon $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module.

[75] N.D.E. : On a simplifié l'original, en utilisant les ajouts faits dans 4.3.1 et 4.5 .

4.7.1. — [76] Soit maintenant G un S-groupe et F un *bon* $\mathbf{O}_S$-module. Supposons donnée une *représentation linéaire de* G *dans* F, c'est-à-dire (I 4.7.1), un morphisme de S-groupes

$$\rho : G \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_S\text{-mod.}}(F).$$

Si G/S vérifie (E), on en déduit par 4.1.C et 4.5 un morphisme de $\mathbf{O}_S$-modules, noté ρ' ou $d\rho$:

$$\underline{\mathrm{Lie}}(G/S) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_S\text{-mod.}}(F)/S) \simeq \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_S\text{-mod.}}(F).$$

[77] De plus, posant $\mathscr{O}_{I_S} = \mathscr{O}_S \oplus t\,\mathscr{O}_S$ (avec $t^2 = 0$), on déduit de 4.5.1 que, si $S' \to S$ et $X \in \underline{\mathrm{Lie}}(G/S)(S') \subset G(I_{S'})$, alors on a dans $\mathrm{Aut}_{\mathbf{O}_{I_{S'}}\text{-mod.}}(F_{I_{S'}})$ l'égalité suivante :

$$(*) \qquad \rho(X) = \mathrm{id} + t\,\rho'(X),$$

i.e. pour tout $S'' \to I_{S'}$ et $f \in F(S'')$, on a dans $F(S'')$ l'égalité $\rho(X)(f) = f + t\rho'(X)(f)$.

Définition 4.7.2. — Soit G un *bon* S-groupe. Alors $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)$ est un bon $\mathbf{O}_S$-module, et on a un morphisme de S-groupes $\mathrm{Ad} : G \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_S\text{-mod.}}(\underline{\mathrm{Lie}}(G/S))$. On en déduit par 4.7.1 un morphisme de $\mathbf{O}_S$-modules

$$\mathrm{ad} : \underline{\mathrm{Lie}}(G/S) \longrightarrow \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_S\text{-mod.}}(\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)),$$

où, ce qui revient au même, un morphisme $\mathbf{O}_S$-bilinéaire :

$$\underline{\mathrm{Lie}}(G/S) \times_S \underline{\mathrm{Lie}}(G/S) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(G/S), \qquad (x, y) \mapsto [x, y] = \mathrm{ad}(x) \cdot y$$

(où x et y désignent deux éléments arbitraires de $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)(S') = \underline{\mathrm{Lie}}(G_{S'}/S')(S')$). Si 69
G est commutatif, alors $[x, y] = 0$.

4.7.3. — On peut donner du crochet une définition équivalente comme suit : remarquons d'abord qu'il suffit de le faire pour $x, y \in \underline{\mathrm{Lie}}(G/S)(S)$. Remarquons ensuite qu'il y a un isomorphisme canonique $I_S \times_S I_S \simeq I_{I_S}$; pour éviter des confusions, notons I et I′ deux exemplaires de I_S et posons $\mathscr{O}_I = \mathscr{O}_S[t]$, $\mathscr{O}_{I'} = \mathscr{O}_S[t']$, où $t^2 = 0 = t'^2$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} I \times I' & \longrightarrow & I' \\ \downarrow & & \downarrow \\ I & \longrightarrow & S \end{array} \quad ,$$

les deux flèches partant de $I \times I'$ identifiant celui-ci au schéma des nombres duaux sur I ou sur I′. Il en résulte un diagramme commutatif de groupes (où on note $L = \underline{\mathrm{Lie}}(G/S)$) :

[76] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 4.7.1, 4.7.2, 4.7.3.
[77] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

$$
\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
 & & \mathrm{L}(\mathrm{I}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{L}(\mathrm{S}) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{L}(\mathrm{I}') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G}(\mathrm{I}\times\mathrm{I}') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G}(\mathrm{I}') \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{L}(\mathrm{S}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G}(\mathrm{I}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G}(\mathrm{S}) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 1 & 1 & 1 & .
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

La neuvième pièce du puzzle n'est autre que Lie(L/S)(S). Si G est *bon*, c'est L(S) et on a donc le diagramme commutatif suivant, où les lignes et les colonnes sont
70 des suites exactes de groupes, les cinq L( ) sont commutatifs, [(78)] et où, compte tenu de l'identification $\mathrm{L}(\mathrm{I}) = \mathrm{L}(\mathrm{S}) \oplus t\,\mathrm{L}(\mathrm{S})$ (resp. $\mathrm{L}(\mathrm{I}') = \mathrm{L}(\mathrm{S}) \oplus t'\,\mathrm{L}(\mathrm{S})$), l'injection $\mathrm{L}(\mathrm{S}) \hookrightarrow \mathrm{L}(\mathrm{I})$ (resp. $\mathrm{L}(\mathrm{S}) \hookrightarrow \mathrm{L}(\mathrm{I}')$) est donnée par $u \mapsto t\,u$ (resp. $u \mapsto t'\,u$) :

$$
\begin{tikzcd}
z \in \mathrm{L}(\mathrm{S}) \arrow[r, "t"] \arrow[d, "t'"'] & \mathrm{L}(\mathrm{I}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{L}(\mathrm{S}) \ni x \arrow[d] \\
\mathrm{L}(\mathrm{I}') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G}(\mathrm{I}\times\mathrm{I}') \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G}(\mathrm{I}') \arrow[d] \\
y \in \mathrm{L}(\mathrm{S}) \arrow[r] & \mathrm{G}(\mathrm{I}) \arrow[r] & \mathrm{G}(\mathrm{S}) \quad .
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

Or dans un tel diagramme, si on prend deux éléments x et y comme noté, et qu'on relève arbitrairement x resp. y en un élément $\widetilde{x} \in \mathrm{L}(\mathrm{I})$ resp. $y' \in \mathrm{L}(\mathrm{I}')$, le commutateur $\widetilde{x}y'\widetilde{x}^{-1}y'^{-1}$ dans $\mathrm{G}(\mathrm{I}\times\mathrm{I}')$ ne dépend pas des relèvements choisis et est l'image d'un élément z comme noté. Le lecteur vérifiera que l'on a $z = [x, y]$. [(79)]

En effet, si l'on note encore x l'image de x par la section canonique $\mathrm{L}(\mathrm{S}) \to \mathrm{L}(\mathrm{I})$ (et de même pour y), alors $\widetilde{x} = xu$ et $y' = yv$, avec $u, v \in \mathrm{L}(\mathrm{S}) = \mathrm{L}(\mathrm{I}) \cap \mathrm{L}(\mathrm{I}')$, et puisque L(I) et L(I′) sont commutatifs on a

$$\widetilde{x}y'\widetilde{x}^{-1}y'^{-1} = x\,u\,y\,v\,u^{-1}x^{-1}v^{-1}y^{-1} = x\,u\,y\,u^{-1}v\,x^{-1}v^{-1}y^{-1} = x\,y\,x^{-1}y^{-1}.$$

(78) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

(79) N.D.E. : L'original indiquait en note de bas de page : « (∗) Le rédacteur reconnaît, à la demande de Gabriel, que l'exercice n'est pas immédiat ; c'est d'ailleurs la raison pour laquelle il n'est pas dans le texte ». On a donné les détails, en tenant compte de l'ajout fait en 4.7.1 ; voir aussi [**DG70**], § II.4, 4.2.

De plus, cet élément s'envoie sur l'élément unité de G(I) et de G(I′), donc provient d'un (unique) z comme indiqué. Enfin, considérant y (resp. x) comme un élément de $\mathrm{L}_{\mathrm{I}'}(\mathrm{I}')$ (resp. de $\mathrm{L}(\mathrm{S}) \subset \mathrm{G}(\mathrm{I}')$), on a d'après 4.7.1 (∗) :

$$x\,y\,x^{-1} = \mathrm{Ad}(x)(y) = \big(\mathrm{id} + t'\ \mathrm{ad}(x)\big)(y) = y + t'\,[x,y]\,,$$

donc l'élément $x\,y\,x^{-1}y^{-1}$ de L(I′) est l'image de l'élément $z = [x,y]$ de L(S).

Sur cette construction apparaissent les deux propriétés suivantes :

(i) le crochet est « fonctoriel en G » : de manière précise, $\mathrm{G} \mapsto \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est un foncteur de la catégorie des bons S-groupes dans la catégorie des bons $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules munis d'une loi de composition $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-bilinéaire.

(ii) On a $[x,y] + [y,x] = 0$: en effet le diagramme est symétrique par rapport à la première diagonale. [80]

Proposition 4.8. — *Soit* F *un bon* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-module. Via l'identification*

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S}) = \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$$

on a

$$\mathrm{Ad}(g)\cdot \mathrm{Y} = g \circ \mathrm{Y} \circ g^{-1} \qquad et \qquad [\mathrm{X},\mathrm{Y}] = \mathrm{X}\circ\mathrm{Y} - \mathrm{Y}\circ\mathrm{X},$$

pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $g \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}'}\text{-mod.}}(\mathrm{F}_{\mathrm{S}'})$, *et* $\mathrm{X},\mathrm{Y} \in \underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})/\mathrm{S})(\mathrm{S}') = \mathrm{End}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}'}\text{-mod.}}(\mathrm{F}_{\mathrm{S}'})$.

Démonstration. [81] Par changement de base, on se ramène à S′ = S, ce qui permet d'alléger la notation. Posons $\mathrm{I} = \mathrm{I}_{\mathrm{S}}$ et $\mathscr{O}_{\mathrm{I}} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[t]$ (avec $t^2 = 0$). Rappelons (cf. 4.5.1) que l'inclusion $i : \mathrm{End}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{O}_{\mathrm{I}}\text{-mod.}}(\mathrm{F}_{\mathrm{I}})$ envoie Y sur $\mathrm{id} + t\,\mathrm{Y}$. Alors, par définition de $\mathrm{Ad}(g)$ (cf. 4.1.A), on a :

$$\mathrm{id} + t\,\mathrm{Ad}(g)(\mathrm{Y}) = g \circ (\mathrm{id} + t\,\mathrm{Y}) \circ g^{-1} = \mathrm{id} + t\,(g \circ \mathrm{Y} \circ g^{-1}),$$

d'où $\mathrm{Ad}(g)(\mathrm{Y}) = g \circ \mathrm{Y} \circ g^{-1}$.

Soit I′ une seconde copie de I_{S}, posons $\mathscr{O}_{\mathrm{I}'} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[t']$ (avec $t'^2 = 0$). Appliquons les résultats de 4.7.3 à $\mathrm{G} = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$ et $\mathrm{L} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) = \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$. On identifie X à son image par la section canonique $\mathrm{L}(\mathrm{S}) \hookrightarrow \mathrm{L}(\mathrm{I})$; son image dans $\mathrm{G}(\mathrm{I}\times\mathrm{I}')$ est alors $\mathrm{id} + t'\,\mathrm{X}$, dont l'inverse est $\mathrm{id} - t'\,\mathrm{X}$. De même, Y se relève en $\mathrm{id} + t\,\mathrm{Y}$, dont l'inverse est $\mathrm{id} - t\,\mathrm{Y}$. Alors, le commutateur

$$(\mathrm{id} + t'\,\mathrm{X}) \circ (\mathrm{id} + t\,\mathrm{Y}) \circ (\mathrm{id} - t'\,\mathrm{X}) \circ (\mathrm{id} - t\,\mathrm{Y}) = \mathrm{id} + tt'\,(\mathrm{X}\circ\mathrm{Y} - \mathrm{Y}\circ\mathrm{X})$$

est l'image dans $\mathrm{G}(\mathrm{I}\times\mathrm{I}')$ de l'élément $\mathrm{Z} = \mathrm{X}\circ\mathrm{Y} - \mathrm{Y}\circ\mathrm{X}$ de L(S) (en effet, Z est envoyé sur $t\,\mathrm{Z} \in \mathrm{L}(\mathrm{I})$, puis sur $\mathrm{id} + t't\,\mathrm{Z} \in \mathrm{G}(\mathrm{I}\times\mathrm{I}')$). D'après 4.7.3, ceci montre que $[\mathrm{X},\mathrm{Y}] = \mathrm{X}\circ\mathrm{Y} - \mathrm{Y}\circ\mathrm{X}$. **71**

[80] N.D.E. : i.e. x et y jouent des rôles symétriques : l'image dans $\mathrm{G}(\mathrm{I}\times\mathrm{I}')$ de $[y,x]$ égale le commutateur $y'\widetilde{x}y'^{-1}\widetilde{x}^{-1}$, qui est l'inverse de $\widetilde{x}y'\widetilde{x}^{-1}y'^{-1} = [x,y]$. Par contre (cf. 4.10 plus loin), on ne sait pas si l'on a nécessairement $[x,x] = 0$: si l'on considère x comme un élément de $\widetilde{x} \in \mathrm{L}(\mathrm{I})$ (resp. $x' \in \mathrm{L}(\mathrm{I}')$) il n'est pas clair *a priori* que $\widetilde{x}$ et x' commutent…

[81] N.D.E. : On a détaillé et simplifié l'original dans ce qui suit.

Corollaire 4.8.1. — *Soient* G *un bon* S-*groupe et* $x, y, z \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{S}')$. *On a :*

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

[82] En effet, comme G est bon, $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est un bon $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module et donc, d'après 4.7, $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}))$ est un bon S-groupe. Alors, le morphisme de S-groupes

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}))$$

donne par la fonctorialité 4.7.3 (i) : $\mathrm{ad}[x, y] = [\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y]$. Combiné avec 4.8, ceci donne :

$$\mathrm{ad}[x, y] = [\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y] = \mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y - \mathrm{ad}\, y \circ \mathrm{ad}\, x,$$

ce qui, appliqué à un élément z, donne la relation de Jacobi.

Corollaire 4.8.2. — *Soit* G *un* bon S-*groupe opérant linéairement sur un* bon $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-*module* F (i.e. soit F un G-$\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module, G et F bons). *Alors l'application linéaire* $\rho' : \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) \to \underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$ *est une* représentation, *c'est-à-dire que l'on a*

$$\rho'([x, y]) = \rho'(x) \circ \rho'(y) - \rho'(y) \circ \rho'(x).$$

72

Scholie 4.9. — À tout bon S-groupe (par exemple représentable), on a associé un bon $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ muni fonctoriellement d'une application bilinéaire vérifiant

$$[x, y] + [y, x] = 0, \qquad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Nous appellerons $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ muni de cette structure l'« *algèbre de Lie* » *de* G *sur* S (les guillemets étant justifiés par le fait qu'on ne sait pas si $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est à strictement parler une $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-algèbre de Lie [83]). À toute représentation linéaire de G dans un bon $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module F est associée une représentation de son « algèbre de Lie ». En particulier, à la représentation adjointe de G est associée la représentation adjointe de son « algèbre de Lie ».

Définition 4.10. — Un foncteur en groupes G au-dessus de S est dit *très bon* s'il est bon et si $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est une $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-algèbre de Lie (c'est-à-dire si on a identiquement $[x, x] = 0$).

Exemples 4.10.1. — Les S-groupes suivants sont très bons : $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_\mathrm{S}\text{-mod.}}(\mathrm{F})$ pour tout bon $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module F (cf. 4.7 et 4.8), tout groupe représentable (voir ci-après), tout bon S-groupe admettant un monomorphisme dans un très bon S-groupe, par exemple tout bon sous-foncteur en groupes d'un groupe représentable, ou tout bon-S-groupe admettant une représentation linéaire fidèle dans un bon $\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module, par exemple tout bon S-groupe tel que Ad soit un monomorphisme ...

[82] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.
[83] N.D.E. : car on ne sait pas si $[x, x] = 0$, voir 4.10 qui suit.

4.11. Supposons maintenant que G soit un *schéma en groupes sur* S. D'après 4.1.4, $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathrm{S})$ s'identifie au groupe des automorphismes infinitésimaux de G/S invariants à droite, c'est-à-dire par 3.14 au groupe des *dérivations de* $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$ *au-dessus de* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ *invariantes par translation à droite.* De plus cette identification respecte la structure de module et est un [84] *anti-isomorphisme* d'algèbres de Lie, comme on le voit en raisonnant comme en 4.7.3 : posons $\mathscr{O}_{\mathrm{I}} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[t]$ et $\mathscr{O}_{\mathrm{I}'} = \mathscr{O}_{\mathrm{S}}[t']$ et soient $x \in \mathrm{L(I)}$ et $y \in \mathrm{L(I')}$. La translation à gauche λ_x (resp. λ_y) est un S-automorphisme de $\mathrm{G}_{\mathrm{I}\times\mathrm{I}'}$ qui induit l'identité sur $\mathrm{G}_{\mathrm{I}'}$ (resp. G_{I}) et qui correspond à un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-automorphisme 73

$$u = \mathrm{id} + t d_x \qquad \text{resp.} \qquad v = \mathrm{id} + t' d_y$$

de $\mathscr{O}_{\mathrm{G}_{\mathrm{I}\times\mathrm{I}'}} = \mathscr{O}_{\mathrm{G}}[t,t']/(t^2,t'^2)$, où d_x, d_y sont des $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-dérivations de $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$ invariantes par translation à droite. Comme la correspondance entre S-automorphismes de $\mathrm{G}_{\mathrm{I}\times\mathrm{I}'}$ et $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-automorphismes de $\mathscr{O}_{\mathrm{G}_{\mathrm{I}\times\mathrm{I}'}}$ est contravariante, $\lambda_x\lambda_y\lambda_x^{-1}\lambda_y^{-1}$ correspond à $v^{-1}u^{-1}v\,u = \mathrm{id} + tt'(d_y d_x - d_x d_y)$. On en déduit, d'après 4.7.3, que l'application $x \mapsto -d_x$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie (pour plus de détails, voir [**DG70**], § II.4, 4.4 et 4.6). Ce qui précède est valable pour $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})(\mathrm{S}') = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{S}')(\mathrm{S}')$ pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. On retrouve alors la définition classique : [85]

Scholie 4.11.1. — *Via l'isomorphisme* $x \mapsto -d_x$, $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})$ *s'identifie au foncteur qui à tout* S′ *au-dessus de* S, *associe la* $\mathbf{O}(\mathrm{S}')$*-algèbre de Lie des dérivations de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *par rapport à* S′ *invariantes par translation à droite.*

Comme on sait déjà, d'après 4.6.1, que tout groupe représentable est bon, il résulte de ce qui précède :

Corollaire 4.11.2. — *Tout groupe représentable est très bon.*

Soit $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{G}$ la section unité de G. Posons $\omega^1_{\mathrm{G/S}} = \varepsilon^*(\Omega^1_{\mathrm{G/S}})$ et rappelons (cf. 3.3) que $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})$ est représentable par la fibration vectorielle $\mathbb{V}(\omega^1_{\mathrm{G/S}})$.

Scholie 4.11.3. — *On a donc associé fonctoriellement à tout* S*-schéma en groupes* G *une fibration vectorielle* $\mathbb{L}\mathrm{ie}(\mathrm{G/S}) = \mathbb{V}(\omega^1_{\mathrm{G/S}})$ *sur* S, *qui représente le foncteur* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})$, *donc est munie d'une structure de* S*-schéma en* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-algèbres de Lie. De plus* (*cf.* 3.4 *et* 3.8), *cette construction commute à l'extension de la base et aux produits finis.*

Remarques 4.11.4. — [86] Notons π le morphisme $\mathrm{G} \to \mathrm{S}$.

a) Le $\mathscr{O}_{\mathrm{G}}$-module $\Omega^1_{\mathrm{G/S}}$ est évidemment $(\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G})$-équivariant (cf. I, § 6) et donc, d'après I 6.8.1, on a $\Omega^1_{\mathrm{G/S}} \simeq \pi^*(\omega^1_{\mathrm{G/S}})$. Il en résulte par exemple que $\Omega^1_{\mathrm{G/S}}$ *est localement libre* (resp. localement libre de type fini) si $\omega^1_{\mathrm{G/S}}$ l'est, ce qui est en particulier le cas *si* S *est le spectre d'un corps* (resp. si S est le spectre d'un corps et G localement de type fini sur S).

---

[84] N.D.E. : On a corrigé une erreur de signe dans l'original, cf. [**DG70**], § II.4, 4.4 et 4.6.

[85] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit ; en particulier, on a ajouté, pour des références ultérieures, la numérotation 4.11.1 à 4.11.8.

[86] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit, en tenant compte des ajouts faits dans l'Exp. I, § 6.8.

b) De plus, d'après I 6.8.2, $\omega^1_{G/S}$ est muni d'une structure canonique de G-$\mathscr{O}_S$-module, qui induit sur $\mathbb{V}(\omega^1_{G/S}) = \mathbb{L}\mathrm{ie}(G/S)$ l'opération adjointe. [87]

c) D'autre part (cf. EGA I, 5.3.11 et 5.4.6), ε est une immersion, et est une immersion fermée si G est séparé sur S. Donc $\omega^1_{G/S}$ s'identifie à $\mathscr{I}/\mathscr{I}^2$, où $\mathscr{I}$ est l'idéal quasi-cohérent définissant $\varepsilon(S)$ dans un ouvert U de G dans lequel $\varepsilon(S)$ est fermé (si $G \to S$ est séparé, on peut prendre $U = G$, et si $G = \operatorname{Spec} \mathscr{A}(G)$ est affine sur S, $\mathscr{I}$ n'est autre que l'idéal d'augmentation de $\mathscr{A}(G)$, i.e. le noyau de $\varepsilon^\natural : \mathscr{A}(G) \to \mathscr{O}_S$, cf. I 4.2). [88]

Remarque 4.11.5. — On peut déduire de l'isomorphisme $\Omega^1_{G/S} \simeq \pi^*(\omega^1_{G/S})$ que le $\mathscr{O}_S$-module $\omega^1_{G/S}$ s'identifie au faisceau $\pi^G_*(\Omega^1_{G/S})$ des « différentielles de G par rapport à S invariantes à droite », c'est-à-dire au faisceau dont les sections sur un ouvert U de S sont les sections de $\Omega^1_{G/S}$ sur $\pi^{-1}(U)$, invariantes par translation à droite (cf. I, 6.8.3, comparer aussi avec $\mathrm{VII_A}$, 2.4). [89]

74 ***Notation 4.11.6***. — On note $\mathscr{L}ie(G/S)$ le faisceau des sections de la fibration vectorielle $\mathbb{L}\mathrm{ie}(G/S) \to S$; c'est le $\mathscr{O}_S$-module $(\omega^1_{G/S})^\vee = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}(\omega^1_{G/S}, \mathscr{O}_S)$ dual de $\omega^1_{G/S}$ (cf. EGA II 1.7.9). Il est muni d'une structure de $\mathscr{O}_S$-algèbre de Lie.

Comme cette construction ne commute pas à l'extension de la base (en général), la structure d'algèbre de Lie sur ce module ne permet pas de reconstituer la structure de S-schéma en $\mathbf{O}_S$-algèbres de Lie sur $\mathbb{L}\mathrm{ie}(G/S)$. [90]

Cependant on a :

Lemme 4.11.7. — *On suppose $\omega^1_{G/S}$ localement libre de type fini* (ce qui se produit en particulier si G est *lisse* sur S (cf. EGA IV_4, 17.2.4), ou si S est le spectre d'un corps et G localement de type fini sur S). *Alors $\mathscr{L}ie(G/S)^\vee \cong (\omega^1_{G/S})^{\vee\vee} \cong \omega^1_{G/S}$ et donc*

$$\mathbb{L}\mathrm{ie}(G/S) = \mathbb{V}(\omega^1_{G/S}) = \mathbb{V}(\mathscr{L}ie(G/S)^\vee) = \mathrm{W}(\mathscr{L}ie(G/S))$$

(*la dernière égalité résultant de* I 4.6.5.1).

[87] N.D.E. : Pour cette raison, l'opération linéaire de G sur $\omega^1_{G/S}$ pourrait être appelée l'opération « pré-adjointe » ; en fait, par abus de langage, on parlera encore de « l'opération adjointe » sur $\omega^1_{G/S}$. Signalons ici une construction un peu plus générale, qui sera utilisée dans l'Exp. III (cf. en particulier III 0.8). Supposons donné, pour tout $Y \to S$, un $\mathscr{O}_Y$-module $\mathscr{N}(Y)$, et pour tout S-morphisme $\phi : Z \to Y$, un morphisme de $\mathscr{O}_Z$-modules $\mathscr{N}(\phi) : \phi^*\mathscr{N}(Y) \to \mathscr{N}(Z)$, qui soit fonctoriel en ϕ (ceci est le cas, par exemple, si $\mathcal{J}$ est un idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_S$ et si l'on pose $\mathscr{N}(Y) = \mathcal{J}\mathscr{O}_Y$, cf. l'Exp. III) ; alors l'opération de G sur $\omega^1_{G/S}$ induit une « opération adjointe » (généralisée) de G sur le S-foncteur en groupes abéliens qui à tout $f : Y \to S$ associe $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_Y}(f^*(\omega^1_{G/S}), \mathscr{N}(Y))$.

[88] N.D.E. : On a ajouté la description qui précède de $\omega^1_{G/S}$, qui sera utile plus loin (par exemple, en $\mathrm{VII_A}$, 5.5).

[89] N.D.E. : Cette description de $\omega^1_{G/S}$ en termes de différentielles invariantes ne sera pas utilisée dans la suite.

[90] N.D.E. : car $\mathscr{L}ie(G/S) \cong (\omega^1_{G/S})^\vee$ ne détermine pas nécessairement $\omega^1_{G/S}$. Par exemple, si $S = \mathbb{A}^1_k$ (k un corps) et si G est le S-groupe dont la fibre en $s = 0$ est $\mathbb{G}_{a,k}$ et les autres fibres sont le groupe unité, alors $\mathscr{L}ie(G/S) = 0$ mais $\underline{\mathrm{Lie}}(G_s/k)(k) = k$.

Enfin, soit $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un *monomorphisme* de foncteurs en groupes. Alors $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{H}/\mathrm{S})$ est également un *monomorphisme* (cf. 3.7). Comme tout monomorphisme vectoriel de fibrations vectorielles est une immersion fermée [(91)] on obtient :

Corollaire 4.11.8. — *Soit* $\mathrm{G} \hookrightarrow \mathrm{H}$ *un* monomorphisme de S-schémas en groupes.

(i) $\mathbb{L}\mathrm{ie}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) \to \mathbb{L}\mathrm{ie}(\mathrm{H}/\mathrm{S})$ *est une immersion fermée et donc* $\omega^1_{\mathrm{H}/\mathrm{S}} \to \omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}$ *est un épimorphisme.*

(ii) *Si* $\omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}$ *est* localement libre de type fini, *alors le morphisme correspondant* $\mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S}) \to \mathscr{L}ie(\mathrm{H}/\mathrm{S})$ *est un isomorphisme de* $\mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ *sur un sous-module de* $\mathscr{L}ie(\mathrm{H}/\mathrm{S})$ localement facteur direct.

5. Calcul de quelques algèbres de Lie

5.1. Exemples d'algèbres de Lie : les groupes diagonalisables. — Soit $\mathrm{G} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ un groupe diagonalisable sur S (I 4.4). La formation de $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ commutant à l'extension de la base, il suffit de faire la construction pour $\mathrm{G} = \mathrm{D}(\mathrm{M})$. On a alors :

$$\mathrm{G}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{M}, \Gamma(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}, \mathscr{O}_{\mathrm{I}_{\mathrm{S}}})^{\times}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{M}, \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}})^{\times}).$$

Or on a une suite exacte scindée

$$1 \longrightarrow \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{D}_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}})^{\times} \longrightarrow \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}})^{\times} \longrightarrow 1,$$

ce qui donne que $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G})(\mathrm{S})$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.}}(\mathrm{M}, \mathbf{O}(\mathrm{S}))$ muni de sa structure de 75
$\mathbf{O}(\mathrm{S})$-module évidente. On obtient donc après changement de base :

Proposition 5.1. — *On a des isomorphismes*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{M}_{\mathrm{S}}, \mathbf{O}_{\mathrm{S}}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})/\mathrm{S}) \quad et \quad \mathscr{H}om_{\mathrm{gr.}}(\widetilde{\mathrm{M}}_{\mathrm{S}}, \mathscr{O}_{\mathrm{S}}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}ie(\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})/\mathrm{S}),$$

(*où, dans le second isomorphisme,* $\widetilde{\mathrm{M}}_{\mathrm{S}}$ *désigne le faisceau de groupes constant sur* S *défini par* M*, et* $\mathscr{H}om_{\mathrm{gr.}}$ *le faisceau des homomorphismes de faisceaux de groupes*).

Corollaire 5.1.1. — *Si* M *est libre de type fini* (ou, comme nous dirons plus tard, si $\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$ est un tore déployé) *alors* (voir I, 4.6.5 pour la définition de W)

$$\begin{aligned} \mathrm{W}(\mathscr{L}ie(\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})/\mathrm{S})) &\xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})/\mathrm{S}) \ , \\ \mathrm{M}^{\vee} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}} &\xrightarrow{\sim} \mathscr{L}ie(\mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})/\mathrm{S}) \ , \end{aligned}$$

où $\mathrm{M}^{\vee}$ *désigne le dual du groupe abélien* M. *En particulier*

$$\mathbf{O}_{\mathrm{S}} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}/\mathrm{S}) \quad et \quad \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}ie(\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}/\mathrm{S}).$$

5.2. Normalisateurs et centralisateurs. — Démontrons d'abord quelques lemmes. Rappelons (cf. I 3.1.1) qu'une suite $0 \to \mathrm{F}' \to \mathrm{F} \to \mathrm{F}'' \to 0$ de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules est dite *exacte* si pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ la suite $0 \to \mathrm{F}'(\mathrm{S}') \to \mathrm{F}(\mathrm{S}') \to \mathrm{F}''(\mathrm{S}') \to 0$ de 76
$\mathbf{O}(\mathrm{S}')$-modules est exacte.

(91)N.D.E. : Soient $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules et $\mathscr{P} = \mathrm{Coker}(f)$. Si $\mathbb{V}(\mathscr{N}) \to \mathbb{V}(\mathscr{M})$ est un monomorphisme, le morphisme surjectif $\mathrm{Sym}(\mathscr{N}) \to \mathrm{Sym}(\mathscr{P})$ se factorise par $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$, donc $\mathscr{P} = 0$.

De même, une suite $1 \to G' \to G \to G'' \to 1$ de S-groupes est dite exacte si pour tout $S' \to S$ la suite de groupes $1 \to G'(S') \to G(S') \to G''(S') \to 1$ est exacte.

Lemme 5.2.1. — [92] *Soit* $1 \to G' \to G \to G'' \to 1$ *une suite exacte de* S-*groupes.*

(i) *Les suites* $1 \to T_{G'/S}(\mathscr{M}) \to T_{G/S}(\mathscr{M}) \to T_{G''/S}(\mathscr{M}) \to 1$ *et*

$$1 \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(G'/S, \mathscr{M}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(G/S, \mathscr{M}) \longrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(G''/S, \mathscr{M}) \longrightarrow 1$$

sont alors exactes.

(ii) *Soit* $1 \to H' \to H \to H'' \to 1$ *une seconde suite de groupes ; elle est exacte si et seulement si la suite ci-dessous est exacte :*

$$1 \longrightarrow G' \underset{S}{\times} H' \longrightarrow G \underset{S}{\times} H \longrightarrow G'' \underset{S}{\times} H'' \longrightarrow 1.$$

(iii) *Si deux des* S-*groupes* G', G, G'' *vérifient* (E)*, le troisième vérifie aussi* (E)*.*

(iv) *Si* $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ *est une suite exacte de* $\mathbf{O}_S$-*modules et si deux des modules* F', F, F'' *sont bons, le troisième l'est aussi.*

(v) *Si deux des* S-*groupes* G', G, G'' *sont bons, le troisième l'est aussi.*

[93] La première partie de (i) est immédiate, et la seconde partie en découle. De même, (ii) est immédiat. Démontrons (iii). Pour abréger, notons $L(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}(G, \mathscr{M})$, $L'(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}(G', \mathscr{M})$, etc. Alors, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & L'(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \arrow[r] \arrow[d] & L(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \arrow[r] \arrow[d] & L''(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & L'(\mathscr{M}) \underset{S}{\times} L'(\mathscr{N}) \arrow[r] & L(\mathscr{M}) \underset{S}{\times} L(\mathscr{N}) \arrow[r] & L''(\mathscr{M}) \underset{S}{\times} L''(\mathscr{N}) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

dans lequel la première (resp. la seconde) ligne est exacte d'après (i) (resp. (i) et (ii)). L'assertion (iii) en résulte.

Prouvons (iv). On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F' \otimes_{\mathbf{O}_S} T_{\mathbf{O}_S/S}(\mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d] & F \otimes_{\mathbf{O}_S} T_{\mathbf{O}_S/S}(\mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d] & F'' \otimes_{\mathbf{O}_S} T_{\mathbf{O}_S/S}(\mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_{F'/S}(\mathscr{M}) \arrow[r] & T_{F/S}(\mathscr{M}) \arrow[r] & T_{F''/S}(\mathscr{M}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

à lignes exactes (la première, car $T_{\mathbf{O}_S/S}(\mathscr{M})$ est un $\mathbf{O}_S$-module libre donc plat, la seconde d'après (i)). Il en résulte que si deux des modules F', F, F'' sont bons, le troisième l'est aussi. Enfin, (v) découle de (iii) et (iv).

Lemme 5.2.2. — *Soient* G *un* S-*groupe,* E, H *deux* G-*objets,* F *un* G-$\mathbf{O}_S$-*module.*

(i) *L'homomorphisme canonique* $E^G \times_S H^G \to (E \times_S H)^G$ *est un isomorphisme.*

(ii) *Si* F *est un bon* $\mathbf{O}_S$-*module, il en est de même de* F^G*.*

[92] N.D.E. : On a détaillé l'énoncé du lemme (et sa démonstration) ; ceci sera utile en 5.3.1.

[93] N.D.E. : On a ajouté la démonstration des points (iii) et (v).

[94] La première assertion est immédiate ; démontrons la seconde. Pour tout $S' \to S$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F^{G}(I_{S'}(\mathscr{M})) \arrow[r, hook] & F(I_{S'}(\mathscr{M})) \\ F^{G}(S') \otimes_{\mathbf{O}(S')} \mathbf{O}(I_{S'}(\mathscr{M})) \arrow[r, hook] \arrow[u, "\phi"] & F(S') \otimes_{\mathbf{O}(S')} \mathbf{O}(I_{S'}(\mathscr{M})) \arrow[u, "\simeq"', "\phi_1"] \end{tikzcd}$$

et l'on doit démontrer que ϕ est bijectif ; or il est évidemment injectif ; montrons qu'il est surjectif. Soit $(t_0, \ldots, t_n)$ une base du $\mathbf{O}(S')$-module libre $\mathbf{O}(I_{S'}(\mathscr{M}))$ et soit

$$u = \sum_{i=0}^{n} f_i \otimes t_i$$

un élément de $F(S') \otimes_{\mathbf{O}(S')} \mathbf{O}(I_{S'}(\mathscr{M}))$ tel que $\phi_1(u)$ appartienne à $F^{G}(I_{S'}(\mathscr{M}))$. Montrons que les f_i appartiennent à $F^{G}(S')$.

Soit $S'' \to S'$; on peut considérer S'' comme au-dessus de $I_{S'}(\mathscr{M})$ par la section zéro $\varepsilon_{\mathscr{M}}$. Alors, pour tout $g \in G(S'')$, on a :

$$u_{S''} = g \cdot u_{S''} = \sum_{i=0}^{n} g \cdot (f_i)_{S''} \otimes (t_i)_{S''}.$$

Comme les $(t_i)_{S''}$ forment une base de $\mathbf{O}(I_{S''}(\mathscr{M})) \simeq \mathbf{O}(I_{S'}(\mathscr{M})) \otimes_{\mathbf{O}(S')} \mathbf{O}(S'')$ sur $\mathbf{O}(S'')$, il en résulte que $g \cdot (f_i)_{S''} = (f_i)_{S''}$, d'où $f_i \in F^{G}(S')$ pour tout i.

Notations. — [95] Si E est un S-groupe et F un sous-S-groupe de E, on note E/F le S-*foncteur* qui à tout $S' \to S$ associe l'ensemble $E(S')/F(S')$ des classes $\overline{x} = x\,F(S')$, $x \in E(S')$. Si E est un S-groupe commutatif alors E/F est un S-groupe commutatif.

Soient maintenant G un S-groupe et K un sous-S-groupe de G ; posons $E = \underline{\mathrm{Lie}}(G/S, \mathscr{M})$ et $F = \underline{\mathrm{Lie}}(K/S, \mathscr{M})$. L'action adjointe de K sur E stabilise F, donc induit une action de K sur le S-foncteur E/F. Alors, pour tout $S' \to S$, on a :

$$(E/F)^{K}(S') = \left\{ \overline{x} \in E(S')/F(S') \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{pour tout } f : S'' \to S' \text{ et } k \in K(S''), \\ f^*(x^{-1})\,\mathrm{Ad}(k)(f^*(x)) \in F(S'') \end{array} \right\},$$

où $f^*(x)$ désigne l'image de x dans $E(S'')$.

Théorème 5.2.3. — *Soient* G *un* S-*groupe,* K *un sous-*S-*groupe de* G. *Notons* (I 2.3.3) 77

$$N = \underline{\mathrm{Norm}}_{G}(K), \qquad Z = \underline{\mathrm{Centr}}_{G}(K).$$

Faisons opérer K *sur* $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S, \mathscr{M})$ *par l'intermédiaire de la représentation adjointe de* G.

[94] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.
[95] N.D.E. : On a détaillé ces notations.

(i) *Si la loi de groupe de* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M})$ *est commutative* (*) [96], *alors*

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{N/S},\mathscr{M})\Big/\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K/S},\mathscr{M}) = \Big(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M})\Big/\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K/S},\mathscr{M})\Big)^{\mathrm{K}}.$$

(ii) *Si la loi de groupe de* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M})$ *est commutative* (*), *alors*

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Z/S},\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M})^{\mathrm{K}}.$$

(iii) *Si* G *vérifie* (E) (*resp. si* G *et* K *vérifient* (E)), *alors* Z *vérifie* (E) (*resp.* N *vérifie* (E)).

(iv) *Supposons* G *bon, alors* Z *est bon ; si de plus* G *est très bon, alors* Z *est très bon.*

(v) *Supposons* G *et* K *bons, alors* N *est bon ; si de plus* G *est très bon, alors* N *est très bon.*

Pour démontrer (i) et (ii) [97] nous utiliserons le lemme suivant, qui résulte du diagramme de suites exactes considéré en 4.1.B (avec G et H intervertis).

Lemme 5.2.3.0. — *Soient* G *un* S-*groupe,* H *un sous-*S-*groupe de* G, *et* $\mathscr{M}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-*module libre de type fini. Alors* $\mathrm{T}_{\mathrm{H/S}}(\mathscr{M})$ *et* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M})$ *sont des sous-*S-*groupes de* $\mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M})$ *et l'on a :*

$$\mathrm{T}_{\mathrm{H/S}}(\mathscr{M}) \bigcap \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{H/S},\mathscr{M}),$$

où l'on a posé $\mathrm{T}_{\mathrm{H/S}}(\mathscr{M}) \bigcap \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M}) \overset{\text{déf.}}{=} \mathrm{T}_{\mathrm{H/S}}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{T}_{\mathrm{G/S}}(\mathscr{M})} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M})$.

Comme les foncteurs considérés dans (i) et (ii) commutent à l'extension de la base, il suffit de montrer les égalités de S-points.

Posons H = N (resp. = Z) et soit $\alpha = \pm 1$. D'après le lemme précédent et la définition de N et Z (cf. I 2.3.3), on a : $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{H/S},\mathscr{M})(\mathrm{S}) =$

$$\left\{ \mathrm{X} \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M})(\mathrm{S}) \subset \mathrm{G}(\mathrm{I_S}(\mathscr{M})) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{pour tout } f : \mathrm{S}' \to \mathrm{I_S}(\mathscr{M}) \text{ et } u \in \mathrm{K}(\mathrm{S}'), \\ \left.\begin{array}{l} f^*(\mathrm{X}^{\alpha}) \cdot u \cdot f^*(\mathrm{X}^{-\alpha}) \cdot u^{-1} \in \mathrm{K}(\mathrm{S}') \\ \text{resp. } \; f^*(\mathrm{X}) \cdot u \cdot f^*(\mathrm{X}^{-1}) \cdot u^{-1} = 1 \end{array}\right\} (*) \end{array} \right\},$$

où $f^*(\mathrm{X})$ désigne l'image de X dans $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$.

Pour simplifier l'écriture, notons

$$\mathfrak{g} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S},\mathscr{M}), \quad \mathfrak{k} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K/S},\mathscr{M}), \quad \mathfrak{n} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{N/S},\mathscr{M}), \quad \mathfrak{z} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{Z/S},\mathscr{M}).$$

Si $\mathrm{X} \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{H/S},\mathscr{M})(\mathrm{S})$, les égalités $(*)$ sont valables pour tout $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, car $f = \rho \circ \varepsilon_{\mathscr{M}} \circ f$ se factorise à travers $\mathrm{I_S}(\mathscr{M})$ (où $\rho : \mathrm{I_S}(\mathscr{M}) \to \mathrm{S}$ est le morphisme structural et $\varepsilon_{\mathscr{M}} : \mathrm{S} \to \mathrm{I_S}(\mathscr{M})$ la section zéro). On en déduit que

$$\mathfrak{n}(\mathrm{S})/\mathfrak{k}(\mathrm{S}) \subset (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^{\mathrm{K}}(\mathrm{S}) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{z}(\mathrm{S}) \subset \mathfrak{g}^{\mathrm{K}}(\mathrm{S}).$$

(*) Condition automatiquement vérifiée si G vérifie (E) (cf. 3.9) par exemple si G est représentable.

[96] N.D.E. : Pour un exemple où le S-groupe $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})$ n'est pas commutatif, voir 6.3.

[97] N.D.E. : On a détaillé la démonstration, ajoutant en particulier le lemme 5.2.3.0, implicite dans l'original.

Pour prouver les inclusions réciproques, supposons désormais $\mathfrak{g} = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ commutative ; alors $\mathfrak{g}^{\mathrm{K}}$ et $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^{\mathrm{K}}$ sont des S-groupes commutatifs. Soient $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}(\mathrm{S})$ et $\overline{\mathrm{X}}$ son image dans $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})(\mathrm{S})$, supposons que $\overline{\mathrm{X}} \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^{\mathrm{K}}(\mathrm{S})$ (resp. $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}^{\mathrm{K}}(\mathrm{S})$) et montrons que $\mathrm{X} \in \mathfrak{n}(\mathrm{S})$ (resp. $\mathrm{X} \in \mathfrak{z}(\mathrm{S})$). **78**

Soit $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M})$; montrons que la condition $(*)$ précédente est vérifiée pour tout $u \in \mathrm{K}(\mathrm{S}')$. Considérons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}) \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\rho'"'] & \mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M}) \arrow[d, "\rho"] \\ \mathrm{S}' \arrow[r, "\rho\circ f"] & \mathrm{S} \end{tikzcd}$$

et soit h la section de ρ' définie par f. Il suffit de montrer que, pour tout $v \in \mathrm{K}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}))$, on a

$$\left.\begin{array}{rl} & p^*(\mathrm{X}^{\alpha}) \cdot v \cdot p^*(\mathrm{X}^{-\alpha}) \cdot v^{-1} \in \mathrm{K}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M})) \\ \text{resp.} & p^*(\mathrm{X}) \cdot v \cdot p^*(\mathrm{X}^{-1}) \cdot v^{-1} = 1 \end{array}\right\} (**)$$

En effet, prenant $v = \rho'^*(u)$ et appliquant h^* à $(**)$, on obtient $(*)$, puisque $\rho' \circ h = \mathrm{id}_{\mathrm{S}'}$ et $p \circ h = f$.

Montrons maintenant $(**)$; pour simplifier, on écrira X au lieu de $p^*(\mathrm{X})$. Tout $v \in \mathrm{K}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}'}(\mathscr{M}))$ s'écrit de manière unique $\mathrm{Y} \cdot k$ où $\mathrm{Y} \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K}/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}')$ et $k \in \mathrm{K}(\mathrm{S}')$. L'expression $\mathrm{X}^{\alpha} \cdot u \cdot \mathrm{X}^{-\alpha} \cdot u^{-1}$ devient alors $\mathrm{X}^{\alpha} \cdot \mathrm{Y} \cdot (k \cdot \mathrm{X}^{-\alpha} \cdot k^{-1}) \cdot \mathrm{Y}^{-1}$ qui, comme $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ est commutatif, s'écrit $\mathrm{X}^{\alpha}\,\mathrm{Ad}(k)(\mathrm{X}^{-\alpha})$. Or celui-ci est a priori dans $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}')$; tenant compte du lemme 5.2.3.0, la condition $(**)$ pour X devient donc : pour tout $k \in \mathrm{K}(\mathrm{S}')$,

$$\begin{cases} \mathrm{Ad}(k)(\mathrm{X}) = \mathrm{X} & \text{si} \quad \mathrm{H} = \mathrm{Z}; \\ \mathrm{X}^{\alpha}\,\mathrm{Ad}(k)(\mathrm{X}^{-\alpha}) \in \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K}/\mathrm{S}, \mathscr{M})(\mathrm{S}') & \text{si} \quad \mathrm{H} = \mathrm{N}. \end{cases}$$

Lorsque $\mathrm{H} = \mathrm{Z}$, cette condition est bien conséquence de l'hypothèse $\mathrm{X} \in \mathfrak{g}^{\mathrm{K}}(\mathrm{S})$. Lorsque $\mathrm{H} = \mathrm{N}$, la condition s'écrit aussi :

$$(*') \qquad \mathrm{Ad}(k)(\overline{\mathrm{X}}) = \overline{\mathrm{X}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ad}(k)(\overline{\mathrm{X}}^{-1}) = \overline{\mathrm{X}}^{-1},$$

or la seconde condition de $(*')$ est conséquence de la première, puisque l'opération de K sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ respecte la structure de groupe de ce dernier. Donc, lorsque $\mathrm{H} = \mathrm{N}$, la condition $(**)$ pour X est bien conséquence de l'hypothèse $\overline{\mathrm{X}} \in (\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^{\mathrm{K}}(\mathrm{S})$. Ceci démontre (i) et (ii).

Pour prouver (iii)–(v), notons $\mathfrak{g}(\mathscr{M}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}, \mathscr{M})$ et définissons de même $\mathfrak{k}(\mathscr{M})$, $\mathfrak{z}(\mathscr{M})$ et $\mathfrak{n}(\mathscr{M})$. Si G/S vérifie (E), alors $\mathfrak{g}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}) \simeq \mathfrak{g}(\mathscr{M}) \times_{\mathrm{S}} \mathfrak{g}(\mathscr{N})$ et donc, d'après 5.2.2 (i),

$$\mathfrak{g}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N})^{\mathrm{K}} \simeq \mathfrak{g}(\mathscr{M})^{\mathrm{K}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathfrak{g}(\mathscr{N})^{\mathrm{K}}$$

d'où $\mathfrak{z}(\mathscr{M}\oplus\mathscr{N})\simeq\mathfrak{z}(\mathscr{M})\times_{\mathrm{S}}\mathfrak{z}(\mathscr{S})$, donc Z vérifie (E). Si de plus K/S vérifie (E), on obtient successivement des isomorphismes :

$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})(\mathscr{M}\oplus\mathscr{N})\simeq(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})(\mathscr{M})\underset{\mathrm{S}}{\times}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})(\mathscr{N})$$
$$(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^{\mathrm{K}}(\mathscr{M}\oplus\mathscr{N})\simeq(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})(\mathscr{M})^{\mathrm{K}}\underset{\mathrm{S}}{\times}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})(\mathscr{N})^{\mathrm{K}},$$

puis un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{k}(\mathscr{M}\oplus\mathscr{N}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathfrak{n}(\mathscr{M}\oplus\mathscr{N}) \arrow[r] \arrow[d] & (\mathfrak{n}/\mathfrak{k})(\mathscr{M}\oplus\mathscr{N}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{k}(\mathscr{M})\underset{\mathrm{S}}{\times}\mathfrak{k}(\mathscr{N}) \arrow[r] & \mathfrak{n}(\mathscr{M})\underset{\mathrm{S}}{\times}\mathfrak{n}(\mathscr{N}) \arrow[r] & (\mathfrak{n}/\mathfrak{k})(\mathscr{M})\underset{\mathrm{S}}{\times}(\mathfrak{n}/\mathfrak{k})(\mathscr{N}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

d'où il résulte que $\mathfrak{n}(\mathscr{M}\oplus\mathscr{N})\simeq\mathfrak{n}(\mathscr{M})\times_{\mathrm{S}}\mathfrak{n}(\mathscr{N})$, donc N vérifie (E).

Désormais, notons $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}(\mathscr{O}_{\mathrm{S}})=\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ et définissons de même $\mathfrak{k},\mathfrak{z},\mathfrak{n}$. Si G est bon, $\mathfrak{g}$ est un bon $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module donc, d'après 5.2.2 (ii), $\mathfrak{z}\simeq\mathfrak{g}^{\mathrm{K}}$ l'est aussi, donc Z (qui vérifie (E) d'après (iii)) est bon. Si de plus K est bon, alors $\mathfrak{k}$ est un bon $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module donc, d'après 5.2.1 (iv) et 5.2.2 (ii), il en est de même de $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ et $(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^{\mathrm{K}}$. Compte tenu de la suite exacte

$$0\longrightarrow\mathfrak{k}\longrightarrow\mathfrak{n}\longrightarrow(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})^{\mathrm{K}}\longrightarrow 0,$$

on obtient, d'après 5.2.1 (iv) à nouveau, que $\mathfrak{n}$ est bon. Enfin, si en plus des conditions précédentes, G est très bon, c.-à-d., si on a identiquement $[x,x]=0$ pour tout $x\in\mathfrak{g}$, il est clair que Z et N sont très bons. Ceci prouve (iii), (iv) et (v).

Corollaire 5.2.3.1. — *On a* $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})/\mathrm{S})=\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})^{\mathrm{G}}$ *si la loi de groupe de* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ *est commutative.*

Corollaire 5.2.3.2. — *Si la loi de groupe de* $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ *est commutative et si* K *est un sous-groupe* invariant *de* G*, alors*

$$\Big(\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})\Big/\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K}/\mathrm{S})\Big)^{\mathrm{K}}=\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})\Big/\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{K}/\mathrm{S}).$$

79 **5.3. Représentations linéaires.** — Soit G un *bon* S-groupe opérant linéairement sur un *bon* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module F via

$$\rho:\mathrm{G}\longrightarrow\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F}).$$

On a défini (4.7.1 et 4.8.2) une représentation linéaire correspondante

$$\rho':\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})\longrightarrow\underline{\mathrm{End}}_{\mathbf{O}_{\mathrm{S}}\text{-mod.}}(\mathrm{F}).$$

Les sous-S-groupes $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{E})$ et $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{E})$ sont définis pour toute partie E de F, par exemple pour tout sous-$\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module E de F.

Définition 5.3.0. — On posera de manière analogue : pour tout $S' \to S$,

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)}(E)(S') = \{X \in \underline{\mathrm{Lie}}(G/S)(S') \mid \rho'(X)E_{S'} \subset E_{S'}\};$$
$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)}(E)(S') = \{X \in \underline{\mathrm{Lie}}(G/S)(S') \mid \rho'(X)E_{S'} = 0\}.$$

(Notons que cette construction se fait pour toute représentation linéaire d'une $\mathbf{O}_S$-« algèbre de Lie » (au sens de 4.9) et que les deux sous-objets construits sont des sous-$\mathbf{O}_S$-modules stables par le crochet).

Théorème 5.3.1. — *Soit* G *un* bon S-*groupe opérant linéairement sur un* bon $\mathbf{O}_S$-*module* F *et soit* E *un sous-*$\mathbf{O}_S$*-module de* F.

(i) *On a* $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Centr}}_G(E)/S) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)}(E)$ *et* $\underline{\mathrm{Centr}}_G(E)$ *est un bon* S-*groupe ; il est très bon si* G *l'est.*

(ii) *Supposons que* E *soit un* bon $\mathbf{O}_S$*-module. Alors* [98] $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Norm}}_G(E)/S) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)}(E)$ *et* $\underline{\mathrm{Norm}}_G(E)$ *est un bon* S-*groupe ; il est très bon si* G *l'est.*

La démonstration est laissée au lecteur.

5.3.2. — Soit G un bon S-groupe ; ce qui précède s'applique en particulier au cas où on prend pour ρ la représentation adjointe de G. Soit E un *bon* [99] sous-module de 80
$\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)$; on lui associe donc deux sous-groupes de G, son centralisateur et son normalisateur. D'après 5.3.1, leurs algèbres de Lie sont respectivement le centralisateur et le normalisateur de E dans $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)$ calculés comme d'habitude à l'aide du crochet :

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)}(E)(S') = \{X \in \underline{\mathrm{Lie}}(G/S)(S') \mid [X, E_{S'}] = 0\}.$$
$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)}(E)(S') = \{X \in \underline{\mathrm{Lie}}(G/S)(S') \mid [X, E_{S'}] \subset E_{S'}\}.$$

5.3.3. — Soit K un sous-S-groupe de G, alors $\underline{\mathrm{Lie}}(K/S)$ est un sous-$\mathbf{O}_S$-module de $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)$; supposons que $\underline{\mathrm{Lie}}(K/S)$ soit un *bon* $\mathbf{O}_S$-module [99] (ce qui est le cas si K est un bon S-groupe). On a évidemment

$$\underline{\mathrm{Centr}}_G(K) \subset \underline{\mathrm{Centr}}_G(\underline{\mathrm{Lie}}(K/S))$$
$$\underline{\mathrm{Norm}}_G(K) \subset \underline{\mathrm{Norm}}_G(\underline{\mathrm{Lie}}(K/S)),$$

d'où, d'après 5.3.1,

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Centr}}_G(K)/S) \subset \underline{\mathrm{Centr}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)}(\underline{\mathrm{Lie}}(K/S))$$
$$\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Norm}}_G(K)/S) \subset \underline{\mathrm{Norm}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)}(\underline{\mathrm{Lie}}(K/S)),$$

mais aucune de ces quatre inclusions n'est a priori une identité ; nous en verrons par la suite bien des exemples.

Il résulte en particulier de ces inclusions que si K est un *sous-groupe invariant* de G, alors $\underline{\mathrm{Lie}}(K/S)$ est un *idéal* de $\underline{\mathrm{Lie}}(G/S)$.

---

(98) N.D.E. : On a corrigé l'original, qui énonçait l'égalité qui suit sans hypothèses sur E ; voir 6.5.1 pour des contre-exemples.

(99) N.D.E. : On a ajouté cette hypothèse ; cf. 6.5.1.

6. Remarques diverses

6.1. On peut définir le crochet de deux automorphismes infinitésimaux pour un S-
81 foncteur X qui ne soit pas nécessairement un groupe. Il suffit d'appliquer les résultats de cet exposé au groupe $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X})$. Pour pouvoir aboutir à un formalisme agréable, on est conduit à supposer X *bon*, c'est-à-dire à supposer que le $\mathbf{O}_{\mathrm{X}}$-module $\mathrm{T}_{\mathrm{X}/\mathrm{S}}$ est bon (si X est un S-groupe, cette définition coïncide évidemment avec la définition 4.6).

6.2. Il existe des foncteurs possédant des endomorphismes infinitésimaux qui ne soient pas des automorphismes, donc *a fortiori* ne vérifiant pas la condition (E). [100] Pour tout ensemble pointé (E, x_0), soit MA(E) le monoïde abélien libre engendré par E et soit $\mathrm{MA}_{\mathrm{P}}(\mathrm{E}, x_0)$ le monoïde abélien obtenu en quotientant MA(E) par la relation d'équivalence engendrée par la relation $m \sim x_0 + m$. Alors $(\mathrm{E}, x_0) \mapsto \mathrm{MA}_{\mathrm{P}}(\mathrm{E}, x_0)$ est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli de la catégorie des monoïdes abéliens vers celle des ensembles pointés ; on dira que $\mathrm{MA}_{\mathrm{P}}(\mathrm{E}, x_0)$ est le « monoïde abélien libre sur l'ensemble pointé (E, x_0) ».

Prenons alors pour X le foncteur qui à tout schéma S associe le monoïde abélien libre sur l'ensemble $\mathbf{O}(\mathrm{S})$, pointé par l'élément zéro. Chaque morphisme $f : \mathrm{S} \to \mathrm{I}_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[\varepsilon])$ correspond à un élément de carré nul u_f de $\mathbf{O}(\mathrm{S})$, donc définit un endomorphisme de X(S) par $x \mapsto x + u_f$ (somme dans $\mathrm{MA}_{\mathrm{P}}(\mathbf{O}(\mathrm{S}), 0)$). On obtient ainsi un endomorphisme ϕ de $\mathrm{X}_{\mathrm{I}_{\mathbb{Z}}} = \mathrm{X} \times_{\mathbb{Z}} \mathrm{I}_{\mathbb{Z}}$, défini comme suit. Pour tout $f \in \mathrm{I}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{S})$ et $x \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$,

$$\phi((x, f)) = (x + u_f, f).$$

Si $f_0 : \mathrm{S} \to \mathrm{I}_{\mathbb{Z}}$ est la composée du morphisme structural $\mathrm{S} \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ et de la section zéro de $\mathrm{I}_{\mathbb{Z}}$, l'élément correspondant est $u_{f_0} = 0$, et donc $\phi((x, f_0)) = (x, f_0)$, puisque $x + 0 = x$ dans $\mathrm{MA}_{\mathrm{P}}(\mathbf{O}(\mathrm{S}), 0)$. Ceci montre que ϕ induit l'identité sur X ; c'est donc un endomorphisme infinitésimal de X qui n'est évidemment pas un automorphisme.

6.3. Il existe des modules qui ne sont pas bons. D'une part, on peut modifier légèrement le contre-exemple précédent : [101] prenons pour F(S) le $\mathbf{O}(\mathrm{S})$-module libre de base les éléments de $\mathbf{O}(\mathrm{S})$, alors F ne vérifie pas la condition (E) par rapport à $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$; de plus, soit G le $\mathbb{Z}$-groupe défini par $\mathrm{G}(\mathrm{S}) = \mathrm{GL}_n(\mathrm{R}(\mathrm{S}))$, où $n \geqslant 2$ et R(S) est la $\mathbf{O}(\mathrm{S})$-algèbre du groupe abélien $\mathbf{O}(\mathrm{S})$, alors le $\mathbb{Z}$-groupe $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathbb{Z})$ n'est pas commutatif.

[102] D'autre part, on peut donner les contre-exemples suivants. Soit $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(k)$, k un corps de caractéristique $p > 0$.

a) Soit F le $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module qui à tout S-schéma T associe $\mathrm{F}(\mathrm{T}) = \Gamma(\mathrm{T}, \mathscr{O}_{\mathrm{T}})$ muni de la structure de $\mathbf{O}(\mathrm{T})$-module obtenue en faisant opérer les scalaires par l'intermédiaire de la puissance p-ième, c'est-à-dire, $r \cdot f = r^p f$, pour $r \in \mathbf{O}(\mathrm{T}), f \in \mathrm{F}(\mathrm{T})$. Comme S-foncteur en groupes, F est isomorphe à $\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}$. Donc F/S vérifie (E) et $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S})$ s'identifie à $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathbb{G}_{a,\mathrm{S}}/\mathrm{S}) \cong \mathbf{O}_{\mathrm{S}}$. Alors, le morphisme canonique $\mathrm{F} \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathrm{S})$ est,

---

[100] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit. En particulier, la définition correcte du « monoïde abélien libre sur un ensemble pointé » nous a été signalée par O. Gabber.

[101] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

[102] N.D.E. : Dans ce qui suit, on a détaillé l'exemple a) et ajouté l'exemple b).

pour tout $\mathrm{T} \to \mathrm{S}$, l'application identique $\mathrm{F}(\mathrm{T}) \to \mathbf{O}(\mathrm{T})$: il respecte bien la structure de groupe abélien mais pas la structure de module. Donc F n'est pas bon (cf. 4.4.1).

b) Soit $\boldsymbol{\alpha}_{p,k}$ le k-foncteur en groupes qui à tout S-schéma T associe

$$\boldsymbol{\alpha}_{p,k}(\mathrm{T}) = \{x \in \mathscr{O}(\mathrm{T}) \mid x^p = 0\},$$

il est représenté par $\mathrm{Spec}(k[\mathrm{X}]/(\mathrm{X}^p)$ donc c'est un très bon S-groupe ; il est aussi muni d'une structure de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module, mais ce n'est pas un bon $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module, car le morphisme canonique $\boldsymbol{\alpha}_{p,k} \to \underline{\mathrm{Lie}}(\boldsymbol{\alpha}_{p,k}/k) = \mathbb{G}_{a,k}$ n'est pas bijectif.

6.4. Soit G un foncteur en groupes sur S. On a par définition les implications suivantes 82

$$(\mathrm{G/S} \text{ vérifie } (\mathrm{E})) \Longleftarrow (\mathrm{G} \text{ est bon}) \Longleftarrow (\mathrm{G} \text{ est très bon}).$$ [103]

Il serait intéressant de démontrer ou de contre-exempler les implications en sens inverse.

6.5. [104] Soit Nil le $\mathbb{Z}$-foncteur en groupes défini comme suit : pour tout schéma S, Nil(S) est l'idéal de $\mathscr{O}(\mathrm{S})$ formé des éléments nilpotents, i.e.

$$\mathrm{Nil}(\mathrm{S}) = \{x \in \mathscr{O}(\mathrm{S}) \mid \text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x^n = 0\}.$$

(N. B. Nil est très bon mais n'est pas représentable). Soient Nil^2, $\mathbf{O}_{\mathrm{réd}}$ et F les $\mathbb{Z}$-foncteurs en groupes qui à tout schéma S associent, respectivement, l'idéal $\mathrm{Nil}(\mathrm{S})^2$ et

$$\mathbf{O}_{\mathrm{réd}}(\mathrm{S}) = \mathscr{O}(\mathrm{S})/\,\mathrm{Nil}(\mathrm{S}), \qquad \mathrm{F}(\mathrm{S}) = \mathscr{O}(\mathrm{S})/\,\mathrm{Nil}(\mathrm{S})^2.$$

On voit facilement que $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathbf{O}_{\mathrm{réd}}/\mathbb{Z}) = 0$, donc le $\mathbf{O}_{\mathbb{Z}}$-module $\mathbf{O}_{\mathrm{réd}}$ n'est pas bon (bien que ce soit un bon $\mathbb{Z}$-groupe). Si $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ sont des $\mathbb{Z}$-modules libres de rang fini, on a

$$\mathrm{Nil}^2(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N})) \simeq \mathrm{Nil}^2(\mathrm{S}) \oplus \mathrm{Nil}(\mathrm{S}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{M} \oplus \mathrm{Nil}(\mathrm{S}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{N}$$

et donc

$$\mathrm{F}(\mathrm{I}_{\mathrm{S}}(\mathscr{M} \oplus \mathscr{N})) \simeq \mathrm{F}(\mathrm{S}) \oplus \mathbf{O}_{\mathrm{réd}}(\mathrm{S}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{M} \oplus \mathbf{O}_{\mathrm{réd}}(\mathrm{S}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{N}.$$

On en déduit, d'une part, que le $\mathbb{Z}$-foncteur en groupes F vérifie la condition (E) et, d'autre part, que $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{F}/\mathbb{Z}) = \mathbf{O}_{\mathrm{réd}}$; comme ce dernier n'est pas un bon $\mathbf{O}_{\mathbb{Z}}$-module, ceci montre que F est un exemple de $\mathbb{Z}$-groupe qui vérifie (E) mais qui n'est pas bon.

6.5.1. — Donnons aussi les contre-exemples signalés en 5.3.1–5.3.3. Soient S un schéma, F le bon $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}^{\oplus 2}$ muni de l'action naturelle du bon S-groupe $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_{2,\mathrm{S}}$, et E le sous-$\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-module de F formé des couples (x_1, x_2) tels que x_2 soit nilpotent. Posons $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{E})$. Alors $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{N/S}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})$ tandis que, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, on a

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})}(\mathrm{E})(\mathrm{S}') = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ x & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, x \in \mathscr{O}(\mathrm{S}'),\ x \text{ nilpotent} \right\}$$

donc $\underline{\mathrm{Lie}}(\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{E})/\mathrm{S}) \neq \underline{\mathrm{Norm}}_{\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G/S})}(\mathrm{E})$.

[103] N.D.E. : Et G est très bon s'il est représentable (4.11). Pour des critères de représentabilité, voir par exemple [**MO67**]. D'autre part, pour les automorphismes d'un groupe algébrique affine (sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0), citons [**HM69**].
[104] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe.

En considérant le produit semi-direct $G_1 = F \cdot G$, on obtient un contre-exemple analogue où E est un sous-$\mathbf{O}_S$-module de $\underline{\mathrm{Lie}}(G_1/S)$; de plus, avec les notations introduites plus haut, $E = \underline{\mathrm{Lie}}(K/S)$ où K est le sous-groupe $\mathbf{O}_S \oplus \mathrm{Nil}^2$ de F (c.-à-d., pour tout $S' \to S$, $K(S')$ est formé des couples (x_1, x_2) tels que $x_2 \in \mathrm{Nil}(S')^2$).

Bibliographie

[105]

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes Algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[HM69] G. Hochschild, G. D. Mostow, *Automorphisms of affine algebraic groups*, J. Algebra **13** (1969), 535-543.

[MO67] H. Matsumura, F. Oort, *Representability of group functors and automorphisms of algebraic schemes*, Invent. math. **4** (1967), 1-25.

[105] N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé