EXPOSÉ $\mathrm{VII_B}$

ÉTUDE INFINITÉSIMALE DES SCHÉMAS EN GROUPES

par P. Gabriel

B) Groupes formels

L'étude des groupes formels est habituellement d'une simplicité extrême. Si cela **476**
n'apparaît pas clairement dans les pages qui suivent, la responsabilité en incombe à un arithméticien, qui prétend connaître des groupes formels sur « autre chose que des corps ». [(1)] Nous avons donc déroulé pour les groupes formels « localement libres sur des limites projectives d'anneaux artiniens » les généralités qu'on énonce d'habitude pour les groupes formels définis sur un corps. Pour une étude plus détaillée de ces derniers, nous renvoyons au séminaire de géométrie algébrique 1964/65 de Heidelberg-Strasbourg. [(2)]

0. Rappels sur les anneaux et modules pseudocompacts

Ce paragraphe contient quelques préliminaires techniques ; nous y rappelons et complétons quelques résultats de [**CA**] (*Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France 90, 1962).

0.1. Un anneau *pseudocompact* à gauche est un anneau topologique avec élément unité, séparé et complet, qui possède une base de voisinages de 0 formée d'idéaux à **477**
gauche $\mathfrak{l}$ de colongueur finie (i.e. $\mathrm{long}_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}/\mathfrak{l}) < +\infty$). Nous allons supposer ici que A est commutatif, de sorte qu'il n'y a pas à distinguer « entre la gauche et la droite ». En particulier, les quotients $\mathrm{A}/\mathfrak{l}$ sont des anneaux artiniens et A s'identifie à la limite projective topologique de ces anneaux qu'on munit de la topologie discrète.

(1) N.D.E. : L'intérêt des groupes formels sur un anneau local noethérien complet apparaît, par exemple, dans les travaux de Lubin et Tate (cf. [**LT65**]). L'étude des groupes formels sur une base arbitraire, et des questions de relèvement et de déformation, en particulier pour les groupes de Barsotti-Tate (« groupes p-divisibles ») a donné lieu a une abondante littérature, cf. par exemple [**LT66, Ta67, Gr74, Me72, La75, Fo77, Il85, Br00**] ; en particulier, les résultats du présent exposé sont en grande partie repris dans le chapitre I de [**Fo77**].

(2) N.D.E. : Les éditeurs ont seulement trouvé un tel séminaire daté 1965/66 et intitulé « Groupes algébriques linéaires », où la notion de groupe formel n'apparaît pas ; voir par contre [**De72**].

Un anneau local noethérien complet $(\mathrm{A}, \mathfrak{m})$ est évidemment pseudocompact [3].

0.1.1. — Tout idéal fermé I de A est l'intersection des idéaux ouverts qui le contiennent. [4] Tout idéal fermé maximal est donc ouvert. De plus, si $\mathfrak{l}$ est un idéal ouvert de A, les idéaux maximaux de $\mathrm{A}/\mathfrak{l}$ correspondent biunivoquement aux idéaux maximaux $\mathfrak{m}$ qui contiennent $\mathfrak{l}$; ces derniers sont donc ouverts et fermés. Par conséquent, tout idéal fermé maximal est un idéal maximal *ouvert* (et donc fermé) ; la réciproque étant évidente. On notera $\Upsilon(\mathrm{A})$ l'ensemble de ces idéaux.

Si $\mathfrak{l}$ est un idéal ouvert de A et si $\mathfrak{m} \in \Upsilon(\mathrm{A})$, le localisé $(\mathrm{A}/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}}$ est donc un anneau local si $\mathfrak{m}$ contient $\mathfrak{l}$ et est nul sinon. Comme l'anneau $\mathrm{A}/\mathfrak{l}$ est artinien, il est produit direct d'un nombre fini d'anneaux locaux, ce qu'on peut écrire

$$\mathrm{A}/\mathfrak{l} \simeq \prod_{\mathfrak{m} \in \Upsilon(\mathrm{A})} (\mathrm{A}/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}} \ .$$

On tire de là des isomorphismes « canoniques »

$$\mathrm{A} \simeq \varprojlim_{\mathfrak{l}} (\mathrm{A}/\mathfrak{l}) \simeq \varprojlim_{\mathfrak{l}} \prod_{\mathfrak{m}} (\mathrm{A}/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}} \simeq \prod_{\mathfrak{m}} \varprojlim_{\mathfrak{l}} (\mathrm{A}/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}} \simeq \prod_{\mathfrak{m}} \mathrm{A}_{\mathfrak{m}} \ ,$$

où l'on a posé :

$$\mathrm{A}_{\mathfrak{m}} = \varprojlim_{\mathfrak{l}} (\mathrm{A}/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}} \ .$$

Cette *composante locale* $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ est une limite projective filtrante d'anneaux locaux artiniens, munis de la topologie discrète ; c'est donc un anneau local qui est pseudocompact
478 pact pour la topologie de la limite projective. [5]

0.1.2. — Soit $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$ l'intersection des idéaux maximaux ouverts de A, c'est-à-dire le produit cartésien des idéaux $\mathfrak{m}\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ lorsqu'on identifie A à $\prod_{\mathfrak{m}} \mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$. Pour tout idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de A, l'image de $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$ dans $\mathrm{A}/\mathfrak{l}$ est contenue dans le radical de $\mathrm{A}/\mathfrak{l}$. Une certaine puissance de cette image est donc nulle, de sorte que $\mathfrak{r}(\mathrm{A})^n$ est contenu dans $\mathfrak{l}$ lorsque n est assez grand. La suite des $\mathfrak{r}(\mathrm{A})^n$ tend donc vers 0.

Il en va de même de la suite des x^n, lorsque x appartient à $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$. Autrement dit, tout élément de $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$ est topologiquement nilpotent et la réciproque est claire. Il s'ensuit que la suite de terme général $1 + x + \cdots + x^n$ est convergente et converge vers $1/(1-x)$ lorsque $x \in \mathfrak{r}(\mathrm{A})$. Cela montre que $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$ est le radical de Jacobson de A, c.-à-d., l'intersection de *tous* les idéaux maximaux de A (cf. Bourbaki, *Algèbre*, Chap. 8, § 6, th. 1). [6]

---

[3] N.D.E. : (lorsqu'on le munit de la topologie $\mathfrak{m}$-adique)

[4] N.D.E. : En effet, si $x \notin \mathrm{I}$, il existe un idéal ouvert $\mathfrak{l}$ tel que $(x + \mathfrak{l}) \cap \mathrm{I} = \varnothing$, alors $\mathrm{I} + \mathfrak{l}$ est un idéal ouvert ne contenant pas x. D'autre part, dans ce qui suit, on a explicité le fait que tout idéal « fermé maximal » est maximal et *ouvert*.

[5] N.D.E. : Remarquons que $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ est le *localisé* de A en l'idéal maximal $\mathfrak{m}$. En effet, l'élément unité $e_{\mathfrak{m}}$ de $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ est un idempotent de A n'appartenant pas à $\mathfrak{m}$, et comme $\mathrm{A} = \mathrm{A}_{\mathfrak{m}} \times \mathrm{B}$, où $\mathrm{B} = \mathrm{A}(1 - e_{\mathfrak{m}})$, alors $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ s'identifie au localisé $\mathrm{A}_{e_{\mathfrak{m}}}$ et donc aussi au localisé $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{A}$, où $\mathrm{S} = \mathrm{A} - \mathfrak{m}$. D'autre part, comme $e_{\mathfrak{m}}(1 - e_{\mathfrak{m}}) = 0$ alors $\mathfrak{m}$ contient $1 - e_{\mathfrak{m}}$ donc aussi B et donc $\mathfrak{m}$ s'identifie à $\mathfrak{m}\mathrm{A}_{\mathfrak{m}} \times \mathrm{B}$.

[6] N.D.E. : En effet, soit $x \in \mathfrak{r}(\mathrm{A})$; si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal ne contenant pas x, il existe $y \in \mathrm{A}$ tel que $1 - xy \in \mathfrak{m}$, or $xy \in \mathfrak{r}(\mathrm{A})$ donc $1 - xy$ est inversible, d'où une contradiction. Notons la conséquence suivante : si $\Upsilon(\mathrm{A})$ est un ensemble *fini* $\{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r\}$, les $\mathfrak{m}_i$ sont *tous* les idéaux maximaux de A.

Remarques. — [7] a) Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier *ouvert* de A alors, comme $A/\mathfrak{p}$ est artinien, $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal. Par conséquent, $\Upsilon(A)$ égale l'ensemble des idéaux *premiers ouverts* de A.

b) Chaque $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ est un *idéal de définition* de $A_{\mathfrak{m}}$, i.e. un idéal *ouvert* I tel que la suite des I^n tende vers 0 (cf. EGA 0_I, 7.1.2). Par conséquent, $\mathrm{Spec}(A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}})$, muni de l'anneau topologique $A_{\mathfrak{m}}$, est un schéma *formel affine* au sens de EGA I, 10.1.2.

c) L'anneau topologique A est *admissible* au sens de EGA 0_I, 7.1.2, si et seulement si $\mathfrak{r}(A)$ est *ouvert* (donc un idéal de définition), et ceci a lieu si et seulement si $\Upsilon(A)$ est *fini*. Dans ce cas, le schéma formel affine $\mathrm{Spf}(A) = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{r}(A))$ (cf. EGA I, 10.1.2) a $\Upsilon(A)$, muni de la topologie discrète, comme espace sous-jacent, et le faisceau structural a pour anneau de sections sur une partie E de $\Upsilon(A)$ le produit $\prod_{\mathfrak{m}\in E} A_{\mathfrak{m}}$.

d) Soit A un anneau pseudocompact arbitraire. En 1.1 plus bas, l'espace $\Upsilon(A)$ est muni de la topologie discrète et du faisceau d'anneaux dont l'anneau des sections sur toute partie E est $\prod_{\mathfrak{m}\in E} A_{\mathfrak{m}}$. D'après b), tout point admet alors un voisinage ouvert qui est un schéma formel affine, donc ceci définit un *schéma formel* (EGA I, 10.4.2), qu'on notera $\mathrm{Spf}(A)$. (Pour que ce schéma formel soit affine, il faut qu'il soit quasi-compact, donc que $\Upsilon(A)$ soit fini, et en ce cas $\mathrm{Spf}(A)$ coïncide avec la définition de EGA I, 10.1.2).

0.1.3. — Si A et B sont deux anneaux pseudocompacts, un *homomorphisme* de A dans B est, par définition, une application *continue* compatible avec l'addition, la multiplication et les éléments unité. Un tel homomorphisme envoie un élément topologiquement nilpotent de A sur un élément topologiquement nilpotent de B ; il applique donc le radical $\mathfrak{r}(A)$ de A dans le radical $\mathfrak{r}(B)$ de B.

0.2. Soit A un anneau pseudocompact (commutatif). Un A-*module pseudocompact* M est un A-module topologique, séparé et complet, qui possède une base de voisinages de 0 formée de sous-modules M′ tels que M/M′ soit de longueur finie sur A.

Si M et N sont deux A-modules pseudocompacts, un *morphisme* de M dans N est par définition une application A-linéaire continue. On notera $\mathrm{Hom}_c(M, N)$ le groupe **479**
de ces morphismes.

Proposition 0.2.B. — [8] (i) *Les* A-*modules pseudocompacts forment une catégorie* abélienne*, qu'on notera* $\mathbf{PC}(A)$. (*En particulier, pour tout morphisme* $f : M \to N$, $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-module complet, donc* fermé *dans* N).

(ii) *Les* A-*modules pseudocompacts de longueur finie* (*dont la topologie est donc discrète*) *forment un système de cogénérateurs de* $\mathbf{PC}(A)$.

---

[7] N.D.E. : On a ajouté ces remarques, afin de pouvoir comparer la définition du *spectre formel* Spf(A) donnée en 1.1, avec celles de EGA I, 10.1.2 et 10.4.2.

[8] N.D.E. : On a mis en évidence les résultats de ce paragraphe dans la proposition qui suit, et l'on a indiqué ensuite les étapes de la démonstration, cf. [**CA**], § IV.3 ou [**DG70**], § V.2.

(iii) *Les produits infinis et limites projectives filtrantes sont exacts, c.-à-d.,* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ *vérifie l'axiome* (AB5*). [9]

Pour la commodité du lecteur, indiquons brièvement les étapes de la démonstration. D'abord, on a le lemme suivant ([**CA**] § IV.3, Lemme 1 ; pour la démonstration, voir [**BEns**], III, § 7.4, th. 1 et exemple 2) :

Lemme 0.2.C. — *Soient* B *un anneau,* I *un ensemble ordonné* filtrant, (M_i) *et* (N_i) *deux systèmes projectifs de* B*-modules à gauche, indexés par* I. *Soit* (s_i) *un morphisme de systèmes projectifs* $(\mathrm{M}_i) \to (\mathrm{N}_i)$*, tel que* s_i *soit* surjectif et de noyau artinien *pour tout* i*. Alors, l'application*

$$\varprojlim s_i : \quad \varprojlim \mathrm{M}_i \longrightarrow \varprojlim \mathrm{N}_i$$

est surjective.

Corollaire 0.2.D ([**CA**] § IV.3, Prop. 10 & 11). — *Soit* M *un* A*-module pseudocompact.*

(i) *Soit* K *un sous-module fermé de* M. *Alors* M/K*, muni de la topologie quotient, est un* A*-module pseudo-compact.*

(ii) *Soit* (M_i) *une famille filtrante décroissante de sous-modules fermés de* M.

(a) *L'application canonique* $\mathrm{M} \to \varprojlim \mathrm{M}/\mathrm{M}_i$ *est* surjective *et a pour noyau* $\bigcap_i \mathrm{M}_i$.

(b) *Pour tout sous-module* fermé N *de* M*, on a* $\mathrm{N} + \bigcap_i \mathrm{M}_i = \bigcap_i (\mathrm{N} + \mathrm{M}_i)$.

Démonstration. Soit (L_j) la famille filtrante décroissante des sous-modules ouverts de M. On munit M/K de la topologie quotient, i.e. une base de voisinages de 0 est formée par les sous-modules ouverts $(\mathrm{K}+\mathrm{L}_j)/\mathrm{K}$. Comme K est fermé, il est égal à l'intersection des $\mathrm{K}+\mathrm{L}_j$, donc l'application

$$\tau : \quad \mathrm{M}/\mathrm{K} \longrightarrow \varprojlim_j \mathrm{M}/(\mathrm{K}+\mathrm{L}_j)$$

est injective. Elle est également ouverte, le terme de droite étant la limite projective des modules discrets $\mathrm{M}/(\mathrm{K}+\mathrm{L}_j)$. De plus, pour chaque j, l'application $t_j : \mathrm{M}/\mathrm{L}_j \to \mathrm{M}/(\mathrm{K}+\mathrm{L}_j)$ est surjective, de noyau artinien, donc d'après le lemme précédent, l'application t dans le diagramme commutatif ci-dessous est surjective :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M} \arrow[r, "p", "\sim"'] \arrow[d] & \varprojlim_j \mathrm{M}/\mathrm{L}_j \arrow[d, "t"] \\
\mathrm{M}/\mathrm{K} \arrow[r, "\tau"] & \varprojlim_j \mathrm{M}/(\mathrm{K}+\mathrm{L}_j).
\end{tikzcd}$$

Comme p est un isomorphisme puisque M est complet, il en résulte que τ est surjectif, donc est un isomorphisme. Ceci prouve (i).

[9] N.D.E. : cf. [**Gr57**], I § 1.5 et Prop. 1.8 ; on peut aussi consulter, par exemple, [**Po73**], § 2.8 ou [**We95**], Append. A.4.

Montrons (ii) (a). D'après ce qui précède, on a pour tout i un isomorphisme $\mathrm{M}/\mathrm{M}_i \xrightarrow{\sim} \varprojlim_j \mathrm{M}/(\mathrm{M}_i + \mathrm{L}_j)$, et donc les deux flèches horizontales dans le diagramme commutatif ci-dessous sont des isomorphismes :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M} \arrow[r, "p", "\sim"'] \arrow[d, "g"] & \varprojlim_j \mathrm{M}/\mathrm{L}_j \arrow[d, "s"] \\
\varprojlim_i \mathrm{M}/\mathrm{M}_i \arrow[r, "\sim"'] & \varprojlim_{i,j} \mathrm{M}/(\mathrm{M}_i + \mathrm{L}_j).
\end{tikzcd}$$

De plus, pour chaque j, la famille de sous-modules $(\mathrm{M}_i+\mathrm{L}_j)/\mathrm{L}_j$ admet un plus petit élément, puisque M/L_j est artinien, donc le morphisme $s_j : \mathrm{M}/\mathrm{L}_j \to \varprojlim_i \mathrm{M}/(\mathrm{L}_j + \mathrm{M}_i)$ est surjectif ; donc, d'après le lemme précédent, s est surjectif. Il en résulte que g est surjectif. Enfin, le noyau de g est la limite projective des M_i, i.e. leur intersection. Ceci prouve le point (a).

Déduisons-en le point (b). Comme N est un sous-module fermé (donc séparé et complet), c'est un module pseudocompact pour la topologie induite par celle de M. Donc, d'après (a), les morphismes f et g dans le diagramme commutatif et exact ci-dessous sont surjectifs :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{N} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \mathrm{M} \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \mathrm{M}/\mathrm{N} \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \varprojlim_i \mathrm{N}/(\mathrm{N}\cap \mathrm{M}_i) \arrow[r] & \varprojlim_i \mathrm{M}/\mathrm{M}_i \arrow[r] & \varprojlim_i \mathrm{M}/(\mathrm{N} + \mathrm{M}_i) & .
\end{tikzcd}$$

Alors, d'après le « lemme du serpent », la suite $0 \to \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Ker} g \to \operatorname{Ker} h \to 0$ est exacte, et l'égalité $\mathrm{N} + \bigcap_i \mathrm{M}_i = \bigcap_i (\mathrm{N} + \mathrm{M}_i)$ en résulte.

On peut maintenant démontrer la proposition 0.2.B. Soit $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ un morphisme de A-modules pseudocompacts. Alors $\mathrm{K} = \operatorname{Ker}(f)$ est un sous-module fermé de M, donc séparé et complet, donc K est un module pseudocompact pour la topologie induite par celle de M. D'après 0.2.D (i), M/K muni de la topologie quotient est pseudocompact.

Montrons que le morphisme continu bijectif $\mathrm{M}/\mathrm{K} \to \operatorname{Im}(f)$ est bicontinu. Identifiant M/K à $\operatorname{Im}(f)$, il s'agit de montrer que la topologie quotient $\mathcal{Q}$ est plus fine que la topologie $\mathcal{T}$ induite par celle de N. Notons (L_j) (resp. (N_i)) l'ensemble filtrant décroissant des sous-modules ouverts de M (resp. N) et posons $\mathrm{N}'_i = \mathrm{N}_i \cap \operatorname{Im}(f)$. Soit $\mathrm{P} = (\mathrm{K} + \mathrm{L}_j)/\mathrm{K}$ un sous-module de M/K ouvert pour $\mathcal{Q}$. Comme $\mathrm{M}/(\mathrm{K} + \mathrm{L}_j)$ est artinien, la famille $\mathrm{N}'_i + \mathrm{P}$ a un plus petit élément $\mathrm{N}'_{i_0} + \mathrm{P}$. Comme les N'_i sont ouverts, donc fermés, pour $\mathcal{T}$ donc aussi pour $\mathcal{Q}$, il résulte de 0.2.D (ii) (b) que

$$\mathrm{N}'_{i_0} + \mathrm{P} = \bigcap_i (\mathrm{N}'_i + \mathrm{P}) = \mathrm{P} + \bigcap_i \mathrm{N}'_i = \mathrm{P},$$

d'où $\mathrm{N}'_{i_0} \subset \mathrm{P}$. Ceci montre que P est ouvert pour $\mathcal{T}$, et $\mathrm{M}/\mathrm{K} \to \operatorname{Im}(f)$ est donc un isomorphisme de modules pseudocompacts.

En particulier, $\operatorname{Im}(f)$ est complet pour $\mathcal{T}$, donc *fermé* dans N. Alors, d'après 0.2.D (i) à nouveau, $\operatorname{Coker}(f)$ muni de la topologie quotient est pseudocompact. Ceci prouve que $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ est une catégorie abélienne.

D'autre part, les limites projectives arbitraires existent dans $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$: si (M_i) est un système projectif de modules pseudocompacts, la limite projective des M_i a pour module sous-jacent la limite projective des modules sous-jacents, pour topologie celle de la limite projective. De plus, si l'on a une famille de suites exactes dans $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$:

$$0 \longrightarrow \mathrm{K}_i \longrightarrow \mathrm{M}_i \longrightarrow \mathrm{Q}_i \longrightarrow 0$$

alors la suite $0 \to \prod_i \mathrm{K}_i \to \prod_i \mathrm{M}_i \to \prod_i \mathrm{Q}_i \to 0$ est exacte. Le point (iii) de 0.2.B en découle, car dans toute catégorie abélienne où les produits arbitraires existent, les conditions (a) et (b) de 0.2.D sont équivalentes et équivalent à l'exactitude des limites projectives filtrantes (cf. [**Mi65**], III 1.2–1.9 ou [**Po73**], Chap. 2, Th. 8.6).

Enfin, tout module pseudocompact M est un sous-module du produit $\prod_{\mathrm{L}} \mathrm{M}/\mathrm{L}$, où L parcourt les sous-modules ouverts de M, donc les objets de longueur finie forment un système de cogénérateurs de $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$. (De plus, tout objet de longueur n est isomorphe à un quotient A^n/L, où L est un sous-module ouvert de A^n de colongueur n ; ces quotients forment donc un *ensemble* de cogénérateurs.) Ceci achève la démonstration de 0.2.B.

(10) Soient $(\mathbf{Ab})$ la catégorie des groupes abéliens et $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ formée des objets *de longueur finie*. Pour tout objet M de $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$, notons $\mathbf{h}_c^{\mathrm{M}}$ le foncteur :

$$\mathbf{LF}(\mathrm{A}) \longrightarrow (\mathbf{Ab}), \qquad \mathrm{N} \mapsto \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

D'après [**CA**], § II.4, th. 1, lemme 4 et cor. 1, on a les résultats suivants. (11)

Proposition 0.2.E. — *Le foncteur* $\mathrm{M} \mapsto \mathbf{h}_c^{\mathrm{M}}$ *est une* anti-équivalence *de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ *sur la catégorie* $\mathbf{Lex}(\mathbf{LF}(\mathrm{A}), (\mathbf{Ab}))$ *des foncteurs exacts à gauche* $\mathbf{LF}(\mathrm{A}) \to (\mathbf{Ab})$.

Corollaire 0.2.F. — (i) *Un objet* P *de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ *est* projectif *si et seulement si le foncteur* $\mathbf{h}_c^{\mathrm{P}}$ *est exact (c.-à-d., si et seulement si le foncteur* $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{P}, -)$ *est exact sur* $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$*).*

(ii) *Soit* (M_i) *un système projectif filtrant* (12) *d'objets de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$. *Pour tout objet* N *de* $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$*, on a un isomorphisme fonctoriel en* N *:*

$$\mathrm{Hom}_c(\varprojlim \mathrm{M}_i, \mathrm{N}) \cong \varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}_i, \mathrm{N}).$$

(iii) *Toute limite projective filtrante et tout produit* (12) *d'objets projectifs de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ *est un objet projectif de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$.

Enfin, on déduit de 0.2.F le

Corollaire 0.2.G. — *Soit* $(\mathrm{M}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *une famille d'objets de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$. *Alors* $\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{M}_i$ *est projectif si et seulement si chaque* M_i *l'est.*

(10) N.D.E. : On a inséré dans ce paragraphe la proposition 0.2.E et le corollaire 0.2.F, qui seront utiles en 0.2.2. (Dans l'original, ces résultats figuraient en 0.3).

(11) N.D.E. : En effet, $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ a un ensemble de cogénérateurs artiniens, les limites projectives filtrantes y sont exactes, et $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$ est la sous-catégorie des objets artiniens. La catégorie duale $\mathbf{PC}(\mathrm{A})^0$ a donc un ensemble de générateurs noethériens, et les limites inductives filtrantes y sont exactes. D'après la démonstration de [**CA**] § II.4, th. 1, le foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}, -)$ est une anti-équivalence de $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ sur $\mathbf{Lex}(\mathbf{LF}(\mathrm{A}), (\mathbf{Ab}))$. De même, lemme 4 et cor. 1 de *loc. cit.* énoncent des résultats « *duaux* » de ceux du corollaire 0.2.F. Pour une démonstration « directe », voir [**DG70**], § V.2, th. 3.1, lemme 3.5, cor. 3.3 & 3.4.

(12) N.D.E. : Comme tout produit infini est une limite projective filtrante de produits finis, tout foncteur additif qui commute aux limites projectives filtrantes commute aussi aux produits infinis.

En effet, pour tout $N \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{LF}(A)$, on a $\mathrm{Hom}_c(\prod_i M_i, N) \cong \bigoplus_i \mathrm{Hom}_c(M_i, N)$.

0.2.1. — Chaque composante locale $A_{\mathfrak{m}}$ de A est un facteur direct de A, donc un objet projectif de $\mathbf{PC}(A)$ (A est manifestement projectif). De plus, $A_{\mathfrak{m}}$ a $S_{\mathfrak{m}} = A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ pour unique quotient simple, donc est indécomposable. D'autre part, tout objet simple de $\mathbf{PC}(A)$ est isomorphe à un unique $S_{\mathfrak{m}}$. D'après [**CA**], IV § 3, cor. 1 du th. 3, [(13)] on a donc :

Proposition. — (i) *Tout objet projectif de* $\mathbf{PC}(A)$ *est produit direct d'objets projectifs indécomposables, uniquement déterminés* (*à isomorphisme près*).

(ii) *Tout objet projectif indécomposable est isomorphe à un unique* $A_{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{m} \in \Upsilon(A)$).

Définition. — Un A-module pseudocompact M est dit *topologiquement libre* s'il est isomorphe au produit d'une famille (A_i) d'exemplaires de A.

Dans ce cas, une famille (m_i) d'éléments de M est appelée une *pseudobase* de M si les applications A-linéaires de A_i dans M qui envoient l'élément unité de A_i sur m_i se prolongent en un isomorphisme de $\prod_i A_i$ sur M.

0.2.2. — [(14)] Si M est un A-module pseudocompact, on notera $M^\dagger$ le A-module (sans topologie) $\mathrm{Hom}_c(M, A)$.

Réciproquement, si N est un A-module, on note $N^* = \mathrm{Hom}_A(N, A)$ son dual, muni de la topologie de la convergence ponctuelle, c.-à-d., une base de voisinages de 0 dans N^* est formée par les sous-modules suivants, où $x \in N$ et $\mathfrak{l}$ est un idéal ouvert de A :

$$\mathscr{V}(x, \mathfrak{l}) = \{f \in N^* \mid f(x) \in \mathfrak{l}\}.$$

Ceci fait de N^* un A-module pseudocompact. En effet, on voit d'abord que si $N = A$, alors $N^* = A$, muni de sa topologie d'anneau pseudo-compact, et si N est un module libre $A^{(I)}$, alors N^* est le produit A^I, muni de la topologie produit. D'autre part, pour tout morphisme $\phi : N_1 \to N_2$, le morphisme transposé ${}^t\phi : N_2^* \to N_1^*$ est continu, puisque l'image inverse par ${}^t\phi$ d'un sous-module $\mathscr{V}(x_1, \mathfrak{l})$ de N_1^* n'est autre que le sous-module $\mathscr{V}(\phi(x_1), \mathfrak{l})$ de N_2^*. Alors, pour N arbitraire, prenant une présentation

$$A^{(J)} \xrightarrow{\ \phi\ } A^{(I)} \xrightarrow{\ \pi\ } N \longrightarrow 0\ ,$$

on voit que N^* est le noyau du morphisme continu ${}^t\phi : A^I \to A^J$, donc N^* est pseudo-compact.

Lorsque A est artinien (auquel cas on peut prendre ci-dessus $\mathfrak{l} = 0$), on déduit de 0.2.F :

Proposition. — *Lorsque* A *est* artinien, *les foncteurs* **480**

$$P \mapsto P^\dagger \qquad et \qquad Q \mapsto Q^*\ ,$$

[(13)] N.D.E. : Ceci renvoie aux énoncés « duaux », établis dans *loc. cit.*, § 2, Th. 2 et § 1, Prop. 2 ; pour une démonstration « directe », voir [**DG70**], V, § 2, Th. 4.5 et Exemple 4.6 b).

[(14)] N.D.E. : On a détaillé les résultats de ce paragraphe, qui jouent un rôle important dans la suite (cf. 1.2.3, 1.3.5, 2.2.1, etc.).

où P (*resp.* Q) *est un objet projectif de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ (*resp. un* A*-module projectif*), *établissent une* anti-équivalence *entre la catégorie des* A*-modules pseudocompacts projectifs et celle des* A*-modules projectifs.* [15]

En particulier, *lorsque* A *est un corps* k, $\mathrm{P}\mapsto\mathrm{P}^{\dagger}$ est une anti-équivalence de la catégorie de tous les k-modules pseudocompacts (on parle aussi de k-*espaces vectoriels linéairement compacts*) sur celle des k-espaces vectoriels. [16]

0.3. [17] Soient L et M deux A-modules pseudocompacts. Le foncteur

$$\mathbf{LF}(\mathrm{A})\longrightarrow(\mathbf{Ab}),\qquad \mathrm{N}\mapsto\mathrm{Bil}_c(\mathrm{L}\times\mathrm{M},\mathrm{N}),$$

où $\mathrm{Bil}_c(\mathrm{L}\times\mathrm{M},\mathrm{N})$ désigne le groupe abélien des applications A-bilinéaires continues de $\mathrm{L}\times\mathrm{M}$ dans N, est exact à gauche.

D'après 0.2.E, il existe donc un A-module pseudocompact $\mathrm{L}\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{M}$, unique à isomorphisme unique près, qui représente ce foncteur, i.e. tel qu'on ait un isomorphisme fonctoriel, pour tout objet N de $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$:

$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{M},\mathrm{N})\simeq\mathrm{Bil}_c(\mathrm{L}\times\mathrm{M},\mathrm{N}).$$

De plus, $\mathrm{L}\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{M}$ s'identifie à la limite projective $\mathrm{P}=\widehat{\mathrm{L}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}}$ des A-modules (discrets) $(\mathrm{L}/\mathrm{L}')\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}/\mathrm{M}')$, où L' et M' parcourent respectivement les sous-modules ouverts de L et de M.

En effet, soit $\varphi:\mathrm{L}\times\mathrm{M}\to\mathrm{N}$ une application bilinéaire continue de $\mathrm{L}\times\mathrm{M}$ dans un A-module (discret) de longueur finie N. D'après le lemme 0.3.1 ci-dessous, il existe des sous-modules ouverts L' et M' de L et M tels que $\varphi(\mathrm{L}'\times\mathrm{M})=\varphi(\mathrm{L}\times\mathrm{M}')=\{0\}$.
481 Cela signifie que l'application $\overline{\varphi}:\mathrm{L}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}\to\mathrm{N}$, qui est induite par φ, est de la forme $\varphi'\circ p$, où p est la projection canonique de $\mathrm{L}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ sur $(\mathrm{L}/\mathrm{L}')\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}/\mathrm{M}')$. Si l'on note $\widehat{\varphi}$ la composée :

$$\mathrm{P}\longrightarrow(\mathrm{L}/\mathrm{L}')\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}/\mathrm{M}')\xrightarrow{\varphi'}\mathrm{N},$$

on voit que l'application $\varphi\mapsto\widehat{\varphi}$ est une bijection fonctorielle de $\mathrm{Bil}_c(\mathrm{L}\times\mathrm{M},\mathrm{N})$ sur $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{P},\mathrm{N})$, d'où $\mathrm{P}\cong\mathrm{L}\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{M}$.

Le module pseudocompact $\mathrm{L}\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{M}$ est donc le séparé complété de $\mathrm{L}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$, pour la topologie linéaire définie par les noyaux des projections canoniques de $\mathrm{L}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ sur $(\mathrm{L}/\mathrm{L}')\otimes_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}/\mathrm{M}')$, et on l'appellera le *produit tensoriel complété* de L et M.

Si x et y appartiennent à L et M, l'image de $x\otimes_{\mathrm{A}}y$ dans $\mathrm{L}\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{M}$ sera notée $x\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}y$.

0.3.1. Lemme. — *Soient* L, M *et* N *des* A*-modules pseudocompacts,* N *étant de longueur finie. Si* $\varphi:\mathrm{L}\times\mathrm{M}\to\mathrm{N}$ *est une application* A*-bilinéaire continue, il existe des sous-modules ouverts* L' *et* M' *de* L *et* M *tels que* $\varphi(\mathrm{L}'\times\mathrm{M})=\varphi(\mathrm{L}\times\mathrm{M}')=\{0\}$.

[15] N.D.E. : Rappelons d'autre part que, sur un anneau *artinien*, un module est projectif si, et seulement si, il est plat, voir par exemple VI_{B}, N.D.E. (54) ou 0.3.7 plus loin.

[16] N.D.E. : On notera que la *somme directe dans* $\mathbf{PC}(k)$ d'une famille $(\mathrm{V}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de k-espaces vectoriels linéairement compacts est $(\prod_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{V}_i^{\dagger})^{*}$.

[17] N.D.E. : On a modifié ce paragraphe, en tenant compte des ajouts faits en 0.2.

En effet, $\varphi^{-1}(0)$ est un voisinage ouvert de $(0,0)$, donc contient un ouvert de la forme $\mathrm{L}_1\times\mathrm{M}_1$, où L_1 et M_1 sont des sous-modules ouverts de L et M. Comme L/L_1 est de longueur finie, il existe des éléments $x_1,\dots,x_r$ de L tels que $\mathrm{L}_1+\mathrm{A}x_1+\cdots+\mathrm{A}x_r=\mathrm{L}$. Si $\mathrm{M}'\subset\mathrm{M}_1$ est « assez petit », on a aussi $\varphi(x_i,\mathrm{M}')=0$ pour tout i, parce que l'application $y\mapsto\varphi(x_i,y)$ est continue ; on tire de là $\varphi(\mathrm{L},\mathrm{M}')=\{0\}$; de même, $\varphi(\mathrm{L}',\mathrm{M})=\{0\}$ si L' est assez petit.

Corollaire 0.3.1.1. — [18] *Soit* M *un* A-*module pseudocompact.*

(i) *Pour tout sous-module ouvert* M'*, il existe un idéal ouvert* $\mathfrak{l}$ *de* A *tel que* $\overline{\mathfrak{l}\mathrm{M}}\subset\mathrm{M}'$.

(ii) *Par conséquent,* $\mathrm{M}\simeq\varprojlim_{\mathfrak{l}}\mathrm{M}/\overline{\mathfrak{l}\mathrm{M}}$*, où* $\mathfrak{l}$ *parcourt le système projectif filtrant des idéaux ouverts de* A *et chaque* $\mathrm{M}/\overline{\mathfrak{l}\mathrm{M}}$ *est muni de la topologie quotient* (*qui en fait un module pseudocompact, cf.* 0.2.D).

En effet, considérons l'application $\varphi:\mathrm{A}\times\mathrm{M}\to\mathrm{M}/\mathrm{M}'$, $(a,m)\mapsto am+\mathrm{M}'$; d'après 0.3.1 il existe un idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de A tel que $\mathfrak{l}\mathrm{M}\subset\mathrm{M}'$ et comme M' est aussi fermé, il contient aussi $\overline{\mathfrak{l}\mathrm{M}}$. Comme l'intersection des sous-modules ouverts de M est nulle, on a donc $\bigcap_{\mathfrak{l}}\overline{\mathfrak{l}\mathrm{M}}=(0)$. D'autre part, d'après 0.2.D, l'application $\phi:\mathrm{M}\to\varprojlim_{\mathfrak{l}}\mathrm{M}/\overline{\mathfrak{l}\mathrm{M}}$ est surjective ; d'après (la démonstration de) 0.2.B, ϕ induit donc un isomorphisme $\mathrm{M}/\operatorname{Ker}(\phi)\xrightarrow{\sim}\varprojlim_{\mathfrak{l}}\mathrm{M}/\overline{\mathfrak{l}\mathrm{M}}$, or on vient de voir que $\operatorname{Ker}(\phi)=\bigcap_{\mathfrak{l}}\overline{\mathfrak{l}\mathrm{M}}$ est nul.

Remarque 0.3.1.2. — [19] Le produit tensoriel complété vérifie la condition usuelle d'associativité : si L, M, P sont des A-modules pseudocompacts, on a un isomorphisme canonique
$$(\mathrm{L}\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathrm{M})\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathrm{P}\simeq\mathrm{L}\mathbin{\widehat{\otimes}}(\mathrm{M}\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathrm{P});$$
en effet, ces deux objets représentent le foncteur qui associe à tout objet N de $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$ le groupe abélien des applications A-trilinéaires continues de $\mathrm{L}\times\mathrm{M}\times\mathrm{P}$ dans N.

0.3.2. — Soient $\mathrm{L}'\xrightarrow{f}\mathrm{L}\xrightarrow{g}\mathrm{L}''\to 0$ une suite exacte et M un objet de $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$. Il est clair que pour tout objet N de $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$, les suites induites :
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Bil}_c(\mathrm{L}''\times\mathrm{M},\mathrm{N}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Bil}_c(\mathrm{L}\times\mathrm{M},\mathrm{N}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Bil}_c(\mathrm{L}'\times\mathrm{M},\mathrm{N}) \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}''\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{M},\mathrm{N}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{M},\mathrm{N}) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}'\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{M},\mathrm{N})
\end{tikzcd}$$
sont exactes. D'après 0.2.E, ceci équivaut à dire que la suite 482
$$(*)\qquad \mathrm{L}'\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{M}\xrightarrow{f\widehat{\otimes}\mathrm{M}}\mathrm{L}\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{M}\xrightarrow{g\widehat{\otimes}\mathrm{M}}\mathrm{L}''\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{M}\longrightarrow 0$$
est exacte. Donc :

Corollaire. — *Pour tout* A-*module pseudocompact* M*, le foncteur* $-\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ *est exact à droite.*

[18] N.D.E. : On a ajouté ce corollaire.

[19] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

Prenons en particulier pour L l'anneau A, pour f l'inclusion d'un idéal fermé $\mathfrak{a}$ dans A, pour g la projection canonique de A sur $\mathrm{A}/\mathfrak{a}$. On peut alors identifier $\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{M}$ à M au moyen de l'application $x\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}} m \mapsto x\,m$. Comme l'image de $\mathfrak{a}\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{M}$ est fermée dans M (cf. 0.2.B) et que l'image de $\mathfrak{a}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{M}$ est partout dense dans $\mathfrak{a}\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{M}$, l'image de $f\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{M}$ n'est autre que l'adhérence $\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}}$ de $\mathfrak{a}\mathrm{M}$ dans M. La suite exacte $(*)$ entraîne donc l'isomorphisme :

$$(\mathrm{A}/\mathfrak{a})\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}}\mathrm{M} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{M}/\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}}.$$

0.3.3. Lemme de Nakayama. — *Soient* A *un anneau pseudocompact,* M *un* A*-module pseudocompact et* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* A *contenu dans le radical* $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$*. L'égalité* $\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}} = \mathrm{M}$ *entraîne alors* $\mathrm{M} = 0$.

En effet, supposons $\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}} = \mathrm{M}$. [20] Soient M' un sous-module ouvert de M et M'' le quotient M/M'. Comme M'' est discret, $\mathfrak{a}\mathrm{M}''$ est fermé dans M'', donc égal à $\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}''}$. D'après 0.3.2, l'application canonique de $\mathrm{M}/\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}}$ dans $\mathrm{M}''/\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}''}$ est surjective, de sorte qu'on a $\mathfrak{a}\mathrm{M}'' = \overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}''} = \mathrm{M}''$. Puisque M'' est un A-module de type fini et $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{r}(\mathrm{A})$, ceci entraîne $\mathrm{M}'' = 0$, d'après le lemme de Nakayama usuel. Par conséquent, tout sous-module ouvert M' de M est égal à M, donc M est nul [21].

483 ***0.3.4***. — On tire du lemme de Nakayama les conséquences habituelles :

Corollaire. — *Soient* $\mathfrak{a}$ *un idéal fermé contenu dans* $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$ *et* $f : \mathrm{M}\to\mathrm{N}$ *un morphisme de* A*-modules pseudocompacts.*

(i) *f est surjectif si l'application induite* $f' : \mathrm{M}/\overline{\mathfrak{a}\mathrm{M}} \to \mathrm{N}/\overline{\mathfrak{a}\mathrm{N}}$ *l'est.* [22]

(ii) *Si* N *est projectif, f est inversible si f' l'est.*

En effet, (i) résulte du lemme 0.3.3 appliqué à $\mathrm{Coker}\, f$. Pour (ii), supposons f' inversible. Alors, d'après (i), f est surjectif, donc possède une section ; on applique alors 0.3.3 à $\mathrm{Ker}\, f$.

Lorsque A est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, on peut aussi déduire de 0.3.3 le *théorème d'échange* qui suit :

Théorème. — *Soient* A *un anneau pseudocompact* local*,* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal,* M *un* A*-module topologiquement libre de pseudobase* $(m_i)_{i\in\mathrm{I}}$ (0.2.1) *et* N *un facteur direct* (*fermé*) *de* M*. Il existe une pseudobase de* M *formée d'éléments de* N *et de certains* m_i.

En effet, cela est clair lorsque A est un corps (se servir alors de la dualité de 0.2.2 et appliquer le théorème d'échange habituel) ; par conséquent, $\mathrm{N}/\overline{\mathfrak{m}\mathrm{N}}$ [23] a pour supplémentaire un module topologiquement libre sur $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$ de pseudobase $(\overline{m}_i)_{i\in\mathrm{J}}$, où $\overline{m}_i$ est l'image de m_i dans $\mathrm{M}/\overline{\mathfrak{m}\mathrm{M}}$ et J une partie de I. Si P désigne le produit direct

[20] N.D.E. : Quitte à remplacer $\mathfrak{a}$ par son adhérence, on peut supposer $\mathfrak{a}$ *fermé.*

[21] N.D.E. : puisqu'égal à la limite projective des $\mathrm{M}/\mathrm{M}' = 0$.

[22] N.D.E. : Par conséquent, tout A-module pseudocompact est quotient d'un A-module topologiquement libre (on se ramène d'abord au cas où A est local), cf. la preuve de 0.3.7.

[23] N.D.E. : On a corrigé $\mathrm{N}/\mathfrak{m}\mathrm{N}$ en $\mathrm{N}/\overline{\mathfrak{m}\mathrm{N}}$, et de même pour $\mathrm{M}/\overline{\mathfrak{m}\mathrm{M}}$ ci-dessous.

$\prod_{i\in\mathrm{J}} \mathrm{A}m_i$, l'application canonique de $\mathrm{N}\oplus\mathrm{P}$ dans M est « bijective modulo $\mathfrak{m}$ » ; elle est donc bijective d'après ce qui précède (pour une autre preuve voir [**CA**], § IV.2, prop. 8).

0.3.5. — Considérons maintenant trois A-modules pseudocompacts L, M et N, où N est de longueur finie. Munissant le A-module $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M},\mathrm{N})$ de la topologie discrète, tout élément ψ de $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M},\mathrm{N}))$ définit une application bilinéaire continue $\psi' : (\ell, m)\mapsto \psi(\ell)(m)$ de $\mathrm{L}\times\mathrm{M}$ dans N. On obtient ainsi un isomorphisme naturel 484

$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M},\mathrm{N}))\xrightarrow{\ \sim\ }\mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\mathrm{M},\mathrm{N}),\tag{1}$$

donc une autre caractérisation de $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M},\mathrm{N})$, qu'on va utiliser lorsque M est la limite projective d'un système projectif filtrant de A-modules pseudocompacts M_i. Alors, d'après (1) et 0.2.F (ii), on a des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\varprojlim \mathrm{M}_i,\mathrm{N}) &\simeq \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\mathrm{Hom}_c(\varprojlim \mathrm{M}_i,\mathrm{N}))\\ &\simeq \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}_i,\mathrm{N})).\end{aligned}\tag{2}$$

De plus, comme le module $\varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}_i,\mathrm{N})$ est discret, toute application continue de source L se factorise par un quotient de longueur finie de L. Par conséquent, l'application naturelle ci-dessous est un isomorphisme :

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}_i,\mathrm{N}))\longrightarrow \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}_i,\mathrm{N})).\tag{3}$$

Enfin, d'après (1) et 0.2.F (ii) à nouveau, on a des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned}\varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L},\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}_i,\mathrm{N})) &\simeq \varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}_i,\mathrm{N})\\ &\simeq \mathrm{Hom}_c(\varprojlim(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}_i),\mathrm{N}).\end{aligned}\tag{4}$$

Combinant les isomorphismes (2), (3), (4), on obtient :

Proposition. — *Soit* (M_i) *un système projectif filtrant d'objets de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$*, et soit* L (*resp.* N) *un objet de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$ (*resp.* $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$)*. On a un isomorphisme fonctoriel en* N *:*

$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\varprojlim \mathrm{M}_i,\mathrm{N})\simeq \mathrm{Hom}_c(\varprojlim(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}_i),\mathrm{N}),$$

et donc un isomorphisme :

$$\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\varprojlim \mathrm{M}_i\simeq \varprojlim(\mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}_i).$$

Donc le produit tensoriel complété commute aux limites projectives filtrantes. [24]

0.3.6. — En particulier, [25] *le produit tensoriel complété commute aux produits infinis.* Par exemple, comme l'anneau A est le produit de ses composantes locales $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ (0.1.1), tout A-module pseudocompact M ($\simeq \mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}$) s'identifie au produit des modules $\mathrm{M}_{\mathfrak{m}} = \mathrm{A}_{\mathfrak{m}}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}$ (les *composantes locales* de M).

[24] N.D.E. : On retrouve ainsi 0.3.1.1 : $\mathrm{L} = \mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{A} = \mathrm{L}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\varprojlim_{\mathfrak{l}}(\mathrm{A}/\mathfrak{l})\simeq \varprojlim_{\mathfrak{l}} \mathrm{L}/\overline{\mathfrak{l}\mathrm{L}}$, où $\mathfrak{l}$ parcourt les idéaux ouverts de A.

[25] N.D.E. : cf. N.D.E. (12).

De même, soient M et N deux A-modules pseudocompacts. On rappelle (cf. 0.2.2) que $\mathrm{M}^\dagger$ désigne $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}, \mathrm{A})$. Considérons l'application

$$\varphi : \mathrm{M}^\dagger \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}^\dagger \longrightarrow (\mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}} \mathrm{N})^\dagger$$

qui associe à un élément $f \otimes g$ de $\mathrm{M}^\dagger \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}^\dagger$ l'application $m \mathbin{\widehat{\otimes}} n \mapsto f(m)g(n)$ de $\mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}} \mathrm{N}$ dans A. Cette application φ est bijective lorsque M est isomorphe à A.

Corollaire. — *Lorsque* A *est* artinien*, φ est un isomorphisme chaque fois que* M *est topologiquement libre* (*ou plus généralement projectif*).

En effet, pour N fixé, le foncteur $\mathrm{M} \mapsto (\mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}} \mathrm{N})^\dagger$ (resp. $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M}^\dagger \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N}^\dagger$) transforme tout produit direct en somme directe, d'après ce qui précède et 0.2.F.

Remarque 0.3.6.A. — [26] En utilisant 0.2.F de façon similaire, on obtient aussi le résultat suivant : *Soient* A *un anneau artinien,* M, Q *des objets de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$*, et* N *un objet de* $\mathbf{LF}(\mathrm{A})$*. On suppose* Q projectif*; alors on a des isomorphismes naturels :*

$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}, \mathrm{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{A}}(\mathrm{Q}^\dagger, \mathrm{M}^\dagger) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q}^\dagger \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{N} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_c(\mathrm{Q}, \mathrm{N}).$$

0.3.7. — Pour tout $\mathfrak{m} \in \Upsilon(\mathrm{A})$, le foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{A}_{\mathfrak{m}} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ est évidemment exact.
485 Comme tout A-module pseudocompact projectif P est un produit de modules de la forme $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$, il en résulte que le foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{P} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ est exact lorsque P est projectif. La réciproque est vraie :

Proposition. — *Soient* A *un anneau pseudocompact,* P *un* A*-module pseudocompact. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) P *est un objet projectif de* $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$.

(ii) *Chaque composante locale* $\mathrm{P}_{\mathfrak{m}}$ *est un* $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$*-module topologiquement libre.*

(iii) *Le foncteur* $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{P} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ *est exact.*

En effet, l'équivalence de (i) et (ii) résulte de 0.2.F (iii) et 0.2.1, et l'on vient de voir que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Supposons le foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{P} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ exact. Comme $\mathrm{P} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}} \mathrm{M}$ est le produit de ses composantes locales :

$$(\mathrm{P} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}} \mathrm{M})_{\mathfrak{m}} \simeq \mathrm{P}_{\mathfrak{m}} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}} \mathrm{M}_{\mathfrak{m}} ,$$

on est ramené au cas où l'anneau A est local. On va prouver alors que P est *topologiquement libre.*

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A ; alors $\mathrm{P}/\overline{\mathfrak{m}\mathrm{P}}$ est un espace vectoriel linéairement compact sur $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$, donc un produit d'exemplaires de $\mathrm{A}/\mathfrak{m}$ (cf. 0.2.2). Il y a donc une

[26] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, qui sera utile en 2.3.1.

famille $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'exemplaires de A et un isomorphisme $\varphi : \prod_{i\in\mathrm{I}}(\mathrm{A}_i/\mathfrak{m}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{P}/\overline{\mathfrak{m}\mathrm{P}}$. Comme $\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i$ est projectif, il y a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{P} \arrow[d, "q"] \\
\prod_{i\in\mathrm{I}}(\mathrm{A}_i/\mathfrak{m}) \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] & \mathrm{P}/\overline{\mathfrak{m}\mathrm{P}}
\end{tikzcd}$$

où p et q désignent les projections canoniques. Appliquant le lemme de Nakayama à $\operatorname{Coker}\psi$ et notant que $(\mathrm{A}/\mathfrak{m})\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\psi$ n'est autre que φ, on voit que ψ est surjectif. [27]

Posant alors $\mathrm{B} = \prod_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i$ et $\mathrm{N} = \operatorname{Ker}\psi$, on a le diagramme commutatif et exact suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] \arrow[dddll, dashed, rounded corners] & \\
 & \mathfrak{m}\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{N} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{m}\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{B} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{m}\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{P} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{N} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{B} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{P} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & (\mathrm{A}/\mathfrak{m})\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{N} \arrow[r] & (\mathrm{A}/\mathfrak{m})\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{B} \arrow[r, "\varphi"] & (\mathrm{A}/\mathfrak{m})\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{P} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}\quad .$$

Le « lemme du serpent » appliqué aux deux premières lignes montre alors que, dans **486**
la ligne du bas, le morphisme $(\mathrm{A}/\mathfrak{m})\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{N} \to (\mathrm{A}/\mathfrak{m})\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ est un monomorphisme. Mais alors, comme φ est un isomorphisme, $(\mathrm{A}/\mathfrak{m})\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{N}$ est nul ; d'où $\mathrm{N} = 0$ (0.3.3) et ψ un isomorphisme. [28]

0.3.8. Corollaire. — *Soient* A *un anneau local, noethérien, complet et* P *un* A-*module pseudocompact. Alors* P *est topologiquement libre si et seulement si* P *est plat sur* A.

En effet, l'application canonique de $\mathrm{M}\otimes_{\mathrm{A}}\mathrm{P}$ dans $\mathrm{M}\mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{A}}\mathrm{P}$ est bijective lorsque M est égal à A, donc aussi lorsque M est noethérien (prendre une présentation finie de M et utiliser l'exactitude à droite du produit tensoriel et du produit tensoriel complété).

---

[27] N.D.E. : Ceci montre le résultat annoncé dans la N.D.E. (22) : *tout* A-*module pseudocompact* M *est quotient d'un* A-*module topologiquement libre*. (Comme les produits sont exacts dans $\mathbf{PC}(\mathrm{A})$, on se ramène au cas où A est local, traité ci-dessus.)

[28] N.D.E. : Une démonstration tout-à-fait analogue, utilisant le « lemme de Nakayama nilpotent », montre que si A est *artinien* et P un A-module plat, chaque composante locale de P est un A-module libre (cf. [**BAC**], II § 3.2, cor. 2 de la prop. 5).

Or P est plat si et seulement si le foncteur $M \mapsto M \otimes_A P$ est exact quand M parcourt les modules noethériens. De même, on a vu dans la démonstration de la proposition 0.3.7 que P est topologiquement libre si la suite

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m} \mathbin{\widehat{\otimes}_A} P \longrightarrow A \mathbin{\widehat{\otimes}_A} P \longrightarrow (A/\mathfrak{m}) \mathbin{\widehat{\otimes}_A} P \longrightarrow 0$$

est exacte. Donc P est topologiquement libre si et seulement si le foncteur $M \mapsto$
487 $M \mathbin{\widehat{\otimes}_A} P$ est exact quand M parcourt les modules noethériens. Le corollaire résulte donc de l'égalité $M \otimes_A P = M \mathbin{\widehat{\otimes}_A} P$ établie ci-dessus.

0.4. Soit k un anneau pseudocompact ; une k-algèbre topologique est un anneau topologique A (commutatif), muni d'un morphisme d'anneaux topologiques $k \to A$. On dit que A est une k-algèbre *profinie* si le k-module topologique sous-jacent est pseudocompact.

Dans ce cas, soit $\mathfrak{l}$ un k-sous-module ouvert de A. L'application composée

$$\varphi : \ A \times A \xrightarrow{\text{mult.}} A \xrightarrow{\text{can.}} A/\mathfrak{l}$$

est continue, donc, d'après le lemme 0.3.1, il existe un k-sous-module ouvert $\mathfrak{n}$ de A tel que $\varphi(A \times \mathfrak{n}) = 0$. Cela signifie que $\mathfrak{l}$ contient l'idéal ouvert $A\mathfrak{n}$ et entraîne que A est *un anneau pseudocompact.*

De même, soit M un A-module topologique dont le k-module sous-jacent est pseudocompact. Si M' est un k-sous-module ouvert de M, le lemme 0.3.1 appliqué à l'application

$$A \times M \xrightarrow{\text{mult.}} M \xrightarrow{\text{can.}} M/M'$$

montre que M' contient un A-sous-module ouvert, donc que M est aussi un A-*module pseudocompact.* [29] Réciproquement :

Lemme. — *Soient* A *une k-algèbre profinie et* M *un* A*-module pseudocompact. Alors, le k-module* $M_{|k}$ *obtenu par restriction des scalaires est pseudocompact.*

En effet, tout A-module pseudocompact de longueur finie est isomorphe à un quotient A^n/L (où L est un sous-module ouvert de A^n), donc est un k-module pseudocompact. Comme $M_{|k}$ est une limite projective de tels modules, c'est un k-module pseudocompact.

0.4.1. — Si A et B sont deux k-algèbres profinies, un *morphisme* de A dans B est, par définition, un homomorphisme continu de k-algèbres. On notera $\mathbf{Alp}_{/k}$ la catégorie des k-algèbres profinies.

Elle possède évidemment des limites projectives : l'algèbre sous-jacente à une limite
488 projective est la limite projective des algèbres sous-jacentes ; la topologie est celle de la limite projective.

Elle possède aussi des *limites inductives finies* [30] : par exemple, si $f : A \to B$ et $g : A \to C$ sont deux morphismes de k-algèbres profinies, la somme amalgamée de B et C sous A a $B \mathbin{\widehat{\otimes}_A} C$ pour A-module topologique sous-jacent (d'après 0.4, f et g

[29] N.D.E. : On a ajouté le lemme qui suit, cf. la N.D.E. (36) dans la proposition 0.5.

[30] N.D.E. : On verra en 0.4.2 qu'elle possède des limites inductives arbitraires.

munissent B et C de structures de A-module pseudocompact) ; la multiplication de $\mathrm{B}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{C}$ est évidemment telle que $(b\,\widehat{\otimes}\,c)(b'\,\widehat{\otimes}\,c') = (bb')\,\widehat{\otimes}\,(cc')$ si $b, b' \in \mathrm{B}$ et $c, c' \in \mathrm{C}$.

0.4.2. Définition. — Une k-algèbre profinie C sera dite de *longueur finie* si le k-module sous-jacent est de longueur finie (donc discret) ; nous noterons $\mathbf{Alf}_{/k}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Alp}_{/k}$ formée des k-algèbres de longueur finie. [31]

Pour toute k-algèbre profinie A, on notera $\mathbf{h}^{\mathrm{A}}$ le foncteur :

$$\mathbf{Alf}_{/k} \longrightarrow (\mathbf{Ens}), \qquad \mathrm{C} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(\mathrm{A}, \mathrm{C}).$$

Il est clair que $\mathbf{h}^{\mathrm{A}}$ est un foncteur exact à gauche [32]. De plus, les projections canoniques $\mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathfrak{l}$ (où $\mathfrak{l}$ parcourt les idéaux ouverts de A), induisent, pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$ un isomorphisme canonique

$$\varinjlim_{\mathfrak{l}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alf}_{/k}}(\mathrm{A}/\mathfrak{l}, \mathrm{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(\mathrm{A}, \mathrm{C}),$$

fonctoriel en C. Cela signifie que $\mathbf{h}^{\mathrm{A}}$ est la limite inductive des foncteurs représentables $\mathbf{h}^{\mathrm{A}/\mathfrak{l}}$, c.-à-d.,

$$(*) \qquad \mathbf{h}^{\mathrm{A}} \simeq \varinjlim_{\mathfrak{l}} \mathbf{h}^{\mathrm{A}/\mathfrak{l}}.$$

Si B est une autre k-algèbre profinie, les propriétés générales du bifoncteur Hom et l'isomorphisme $\mathrm{Hom}(\mathbf{h}^{\mathrm{C}}, \mathbf{h}^{\mathrm{B}}) = \mathbf{h}^{\mathrm{B}}(\mathrm{C})$ pour C de longueur finie, donnent des isomorphismes :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(\mathrm{B}, \mathrm{A}) &\simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(\mathrm{B}, \mathrm{A}/\mathfrak{l})\\ &\simeq \varprojlim \mathrm{Hom}(\mathbf{h}^{\mathrm{A}/\mathfrak{l}}, \mathbf{h}^{\mathrm{B}})\\ &\simeq \mathrm{Hom}(\varinjlim_{\mathfrak{l}} \mathbf{h}^{\mathrm{A}/\mathfrak{l}}, \mathbf{h}^{\mathrm{B}});\end{aligned}$$

combiné avec $(*)$ ceci montre que le foncteur contravariant $\mathrm{A} \mapsto \mathbf{h}^{\mathrm{A}}$ est *pleinement* 489
fidèle. En fait :

Proposition. — *Le foncteur* $\mathrm{A} \mapsto \mathbf{h}^{\mathrm{A}}$ *est une* anti-équivalence *de* $\mathbf{Alp}_{/k}$ *sur la catégorie des foncteurs exacts à gauche de* $\mathbf{Alf}_{/k}$ *dans* $(\mathbf{Ens})$.

Il suffit en effet, d'après ce qui précède, de montrer que tout foncteur exact à gauche $\mathbf{F} : \mathbf{Alf}_{/k} \to (\mathbf{Ens})$ est isomorphe à un foncteur du type $\mathbf{h}^{\mathrm{A}}$; pour cela, on peut construire A comme suit (cf. TDTE II, § 3).

Comme $\mathbf{F}$ est exact à gauche, il y a, pour toute k-algèbre de longueur finie C et pour tout élément ξ de $\mathbf{F}(\mathrm{C})$, une plus petite sous-algèbre C' de C telle que ξ appartienne à l'image de $\mathbf{F}(\mathrm{C}')$ dans $\mathbf{F}(\mathrm{C})$. Si l'on a $\mathrm{C}' = \mathrm{C}$, on dit que le couple (C, ξ) est *minimal.*

Les couples minimaux forment une catégorie si l'on prend pour morphismes de (C, ξ) dans (D, η) les homomorphismes φ de C dans D tels que $(\mathbf{F}\varphi)(\xi) = \eta$; il est clair qu'un tel φ est une surjection et que la catégorie des couples minimaux est

[31] N.D.E. : Attention, k n'est un objet de $\mathbf{Alf}_{/k}$ que si k est artinien, cf. 1.2.2 plus loin.

[32] N.D.E. : c.-à-d., qui commute aux limites projectives finies.

« filtrante à gauche ». De plus, on peut se restreindre aux couples (C, ξ) tels que C appartienne à un ensemble contenant des k-algèbres de longueur finie de chaque type d'isomorphisme [33]. Donc, le foncteur $(\mathrm{C}, \xi) \mapsto \mathrm{C}$, qui a pour catégorie de départ celle des couples minimaux et pour catégorie d'arrivée celle des k-algèbres profinies, possède une limite projective ; on prend pour A cette limite projective.

Corollaire. — *La catégorie* $\mathbf{Alp}_{/k}$ *possède des limites inductives infinies.*

En effet, la catégorie des foncteurs exacts à gauche de $\mathbf{Alf}_{/k}$ vers $(\mathbf{Ens})$ possède des limites projectives, qui sont définies « argument par argument », c.-à-d., si $(\mathbf{F}_i)$ est un système projectif de tels foncteurs, on a, pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$:

$$(\varprojlim \mathbf{F}_i)(\mathrm{C}) = \varprojlim \mathbf{F}_i(\mathrm{C}) \,. \qquad {}^{(34)}$$

490 **0.5.** [35] Soit $\varphi : k \to \ell$ un homomorphisme d'anneaux pseudocompacts (cf. 0.1.3). On peut généraliser la construction de 0.3 comme suit.

Définition 0.5.A. — Pour tout objet M de $\mathbf{PC}(k)$ (resp. N de $\mathbf{PC}(\ell)$), nous noterons $\mathrm{M} \widehat{\otimes}_k \mathrm{N}$ le séparé complété de $\mathrm{M} \otimes_k \mathrm{N}$ pour la topologie linéaire définie par les noyaux des projections :

$$\mathrm{M} \otimes_k \ell \longrightarrow (\mathrm{M}/\mathrm{M}') \otimes_k (\mathrm{N}/\mathrm{N}') \,,$$

où M' (resp. N') est un sous-module ouvert de M (resp. de N). Alors, $\mathrm{M} \widehat{\otimes}_k \mathrm{N}$ est un *ℓ-module pseudocompact.* Si $m \in \mathrm{M}$ et $x \in \mathrm{N}$, nous noterons $m \widehat{\otimes}_k x$ l'image canonique de $m \otimes_k x$ dans $\mathrm{M} \widehat{\otimes}_k \mathrm{N}$.

Ceci s'applique en particulier lorsque $\mathrm{N} = \ell$, dans ce cas on dira que $\mathrm{M} \widehat{\otimes}_k \ell$ est le ℓ-module pseudocompact *déduit de* M *par le changement de base* $k \to \ell$.

Remarques 0.5.B. — (i) Lorsqu'on considérera un tel changement de base, ℓ ne sera pas en général une k-algèbre profinie : un exemple typique est le cas où k est un corps et ℓ est une extension arbitraire K de k.

(ii) Toutefois, si le k-module sous-jacent à N est pseudocompact (par exemple si ℓ est une k-algèbre profinie) alors, d'après 0.4, tout sous-k-module ouvert de N contient un sous-ℓ-module ouvert de N ; par conséquent, $\mathrm{M} \widehat{\otimes}_k \mathrm{N}$ coïncide dans ce cas avec le produit tensoriel complété (cf. 0.3) des k-modules pseudocompacts M et N, et la notation ne comporte donc pas d'ambiguïté.

---

[33] N.D.E. : En effet, tout k-module discret de longueur n est isomorphe à k^n/L, où L est un sous-module ouvert de k^n de colongueur n. Ensuite, on peut considérer *l'ensemble* des (classes d'isomorphisme de) structures de k-algèbre profinie sur chaque tel module.

[34] N.D.E. : Si $(\mathrm{A}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est un système inductif de $\mathbf{Alp}_{/k}$, sa limite inductive dans $\mathbf{Alp}_{/k}$ est le séparé complété de la k-algèbre B, limite inductive des k-algèbres sous-jacentes, pour la topologie définie par les idéaux I tels que $\mathrm{I} \cap \mathrm{A}_i$ soit un idéal ouvert de A_i pour tout i, et $\mathrm{long}_k(\mathrm{B}/\mathrm{I}) < \infty$. Noter que si, par exemple, K/k est une extension algébrique de corps, de degré infini, et si (k_i) désigne le système inductif filtrant des sous-extensions de degré fini, alors la limite inductive du système (k_i) dans $\mathbf{Alp}_{/k}$ est l'anneau nul !

[35] N.D.E. : On a détaillé ce paragraphe.

Le k-module $\mathrm{N}_{|_k}$ obtenu par restriction des scalaires est de toute façon un k-module topologique, i.e. l'application $k \times \mathrm{N} \to \mathrm{N}$, $(t, n) \mapsto \varphi(t)n$ est continue. On notera $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}, \mathrm{N}_{|_k})$ le groupe abélien des homomorphismes continus de k-modules de M dans $\mathrm{N}_{|_k}$.

Proposition 0.5.C. — *Pour tout* $\mathrm{M} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{PC}(k)$ *et* $\mathrm{N} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{PC}(\ell)$, *on a un isomorphisme fonctoriel*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{PC}(\ell)}(\mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell, \mathrm{N}) \simeq \mathrm{Hom}_c(\mathrm{M}, \mathrm{N}_{|_k}).$$ [36]

En effet, soit ϕ un homomorphisme continu $\mathrm{M} \to \mathrm{N}_{|_k}$, alors l'application ϕ' : $\mathrm{M} \times \ell \to \mathrm{N}$, $(m, \lambda) \mapsto \lambda\phi(m)$ est continue et « bilinéaire » (c.-à-d., k-linéaire en le premier facteur et ℓ-linéaire en le second). Si N' un sous-ℓ-module ouvert de N, on montre comme dans le lemme 0.3.1 qu'il existe un sous-module ouvert M' de M et un idéal ouvert ℓ' de ℓ tels que $\phi'(\mathrm{M}' \times \ell)$ et $\phi'(\mathrm{M} \times \ell')$ soient contenus dans N'. Il en résulte que ϕ induit un homomorphisme continu de ℓ-modules $\Phi : \mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell \to \mathrm{N}$, tel que $\Phi(m \mathbin{\widehat{\otimes}} \lambda) = \lambda\phi(m)$, pour tout $m \in \mathrm{M}$ et $\lambda \in \ell$.

Réciproquement, on associe à tout morphisme $f : \mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell \to \mathrm{N}$ le morphisme $f' : m \mapsto f(m \mathbin{\widehat{\otimes}_k} 1)$ de M dans $\mathrm{N}_{|_k}$.

On obtient alors, comme en 0.3.2, 0.3.5 et 0.3.1.2, le :

Corollaire 0.5.D. — *Le foncteur* $\mathbf{PC}(k) \to \mathbf{PC}(\ell)$, $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell$ *est exact à droite, et commute aux limites projectives filtrantes, c.-à-d., si* (M_i) *est un système projectif filtrant d'objets de* $\mathbf{PC}(k)$, *on a un isomorphisme canonique :*

$$(\varprojlim \mathrm{M}_i) \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell \simeq \varprojlim(\mathrm{M}_i \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell).$$

De plus, si M, N *sont des k-modules pseudocompacts, on a un isomorphisme canonique :*

$$(\mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{N}) \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell \cong (\mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell) \mathbin{\widehat{\otimes}_\ell} (\mathrm{N} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell).$$

Définition 0.5.E. — Enfin, si A est une k-algèbre profinie, il y a sur $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell$ une et une seule structure de ℓ-algèbre profinie telle que, si $a, b \in \mathrm{A}$ et $\lambda, \mu \in \ell$,

$$(a \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \lambda)(b \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mu) = (ab) \mathbin{\widehat{\otimes}_k} (\lambda\mu).$$

On dit que $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell$ est la ℓ-algèbre profinie déduite de A par *l'extension des scalaires* (ou le « changement de base ») $k \to \ell$.

1. Variétés formelles sur un anneau pseudocompact

491

1.1. On peut associer à tout anneau pseudocompact A un schéma formel (EGA I, 10.4.2) en procédant comme suit : l'espace topologique sous-jacent est l'ensemble $\Upsilon(\mathrm{A})$ des idéaux premiers ouverts (donc maximaux) de A, qu'on munit de la topologie discrète ; le faisceau structural a le produit cartésien $\prod_{\mathfrak{m} \in \mathrm{E}} \mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ pour espace des sections

[36] N.D.E. : Par conséquent, si ℓ est une k-algèbre *profinie*, le foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \ell$ est adjoint à gauche du foncteur de restriction des scalaires $\mathbf{PC}(\ell) \to \mathbf{PC}(k)$ (cf. lemme 0.4).

sur une partie E de $\Upsilon(\mathrm{A})$. Le schéma formel ainsi obtenu est noté $\mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ (le *spectre formel* de A). [37]

Si A et B sont deux anneaux pseudocompacts, un *morphisme* de $\mathrm{Spf}(\mathrm{B})$ dans $\mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ consiste en la donnée d'une application f de $\Upsilon(\mathrm{B})$ dans $\Upsilon(\mathrm{A})$ et d'une famille d'homomorphismes continus $f_y^\natural : \mathrm{A}_{f(y)} \to \mathrm{B}_y$, pour $y \in \Upsilon(\mathrm{B})$. Un tel morphisme induit un homomorphisme continu $f^\natural$ de $\mathrm{A} = \prod_{x\in\Upsilon(\mathrm{A})} \mathrm{A}_x$ dans $\mathrm{B} = \prod_{y\in\Upsilon(\mathrm{B})} \mathrm{B}_y$. La réciproque est vraie :

Proposition. — *Le foncteur contravariant* $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ *est pleinement fidèle.*

En effet, si $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un homomorphisme continu d'algèbres, l'image réciproque $\varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ d'un idéal maximal ouvert de B est un idéal premier ouvert de A, donc maximal dans A. On obtient donc une application $\mathfrak{n} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{n})$ de $\Upsilon(\mathrm{B})$ dans $\Upsilon(\mathrm{A})$, et φ induit un homomorphisme continu $\mathrm{A}_{\varphi^{-1}(\mathfrak{n})} \to \mathrm{B}_{\mathfrak{n}}$. Donc φ induit un morphisme de schémas formels $\mathrm{Spf}(\varphi) : \mathrm{Spf}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$. On vérifie facilement que $\mathrm{Spf}(\varphi)^\natural = \varphi$, et que $\mathrm{Spf}(f^\natural) = f$, pour tout morphisme $f : \mathrm{Spf}(\mathrm{B}) \to \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$, d'où la proposition.

Bien que nous ne parlions ici que de schémas formels de la forme $\mathrm{Spf}(\mathrm{A})$, nous utiliserons le langage des schémas formels plutôt que celui des anneaux pseudocompacts, afin d'appuyer nos assertions sur une intuition géométrique.

1.2. Soit k un anneau pseudocompact.

492 ***Définition 1.2.A***. — [38] Nous appellerons *variété formelle* sur k tout schéma formel X au-dessus de $\mathrm{Spf}(k)$ qui est isomorphe à un k-schéma formel $\mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ pour une certaine k-algèbre profinie A. L'algèbre A est alors isomorphe à *l'algèbre affine* de X, c'est-à-dire à l'algèbre des sections du faisceau structural $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ de X.

On notera $\mathbf{Vaf}_{/k}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des schémas formels sur $\mathrm{Spf}(k)$ dont les objets sont les k-variétés formelles. [39]

D'après 1.1, le foncteur $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ est une anti-équivalence de $\mathbf{Alp}_{/k}$ (0.4.1) sur $\mathbf{Vaf}_{/k}$. Donc, d'après le corollaire 0.4.2 :

Proposition 1.2.B. — *La catégorie* $\mathbf{Vaf}_{/k}$ *possède des limites projectives et inductives.* [40]

Par exemple, soient $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vaf}_{/k}$ et $f : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ et $g : \mathrm{Z} \to \mathrm{X}$ deux k-variétés formelles au-dessus de X et soient A, B, C les algèbres affines de X, Y, Z ; d'après

[37] N.D.E. : cf. Remarques 0.1.2.

[38] N.D.E. : On a ajouté la numérotation 1.2.A à 1.2.E, pour des références ultérieures.

[39] N.D.E. : Notons que, d'après la définition des morphismes (1.1), tout $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vaf}_{/k}$ est la *somme directe* dans $\mathbf{Vaf}_{/k}$ des variétés formelles ponctuelles $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x})$, pour $x \in \mathrm{X}$.

[40] N.D.E. : En particulier, les *conoyaux* existent dans $\mathbf{Vaf}_{/k}$, voir ci-dessous. Remarquons d'autre part qu'une limite projective filtrante dans $\mathbf{Vaf}_{/k}$, dont tous les morphismes de transition sont surjectifs, peut être vide, cf. N.D.E. (34).

0.4.1, l'algèbre affine du produit fibré $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Z}$ s'identifie à $\mathrm{B} \widehat{\otimes}_{\mathrm{A}} \mathrm{C}$, [41] de sorte que l'inclusion de $\mathbf{Vaf}_{/k}$ dans la catégorie de tous les k-schémas formels commute aux limites projectives finies (cf. EGA I, 10.7).

Les limites inductives de k-variétés formelles correspondent aux limites projectives de leurs algèbres affines.

***Exemple 1.2.C* (Conoyaux)**. — Soit, par exemple, $d, e : \mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{Y}$ une double-flèche de $\mathbf{Vaf}_{/k}$; l'algèbre affine de $\mathrm{Coker}(d, e)$ est isomorphe au noyau des homomorphismes induits sur les algèbres affines de X et Y, mais on peut aussi donner de $\mathrm{Coker}(d, e)$ la construction suivante : l'espace topologique sous-jacent à $\mathrm{Coker}(d, e)$ est le conoyau des espaces sous-jacents [42] ; si p est la projection canonique de l'ensemble sous-jacent à Y sur le conoyau et si z appartient au conoyau, l'algèbre locale de $\mathrm{Coker}(d, e)$ en z est le noyau de la double-flèche

$$d^{\natural}, e^{\natural} : \prod_{p(y)=z} \mathscr{O}_{\mathrm{Y},y} \rightrightarrows \prod_{q(x)=z} \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$$

où l'on a posé $q = p \circ d = p \circ e$ et où $d^{\natural}$ et $e^{\natural}$ sont induits par les homomorphismes $d^{\natural}_x$ **493**
et $e^{\natural}_x$ (notations de 1.1).

Définition 1.2.D. — Si $\varphi : k \to \ell$ est un homomorphisme d'anneaux pseudocompacts et X une k-variété formelle d'algèbre affine A, le schéma formel $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Spf}(k)} \mathrm{Spf}(\ell)$, obtenu par changement de base, est une ℓ-variété formelle, que nous noterons aussi $\mathrm{X} \widehat{\otimes}_k \ell$ et qui a pour algèbre affine le produit tensoriel complété $\mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \ell$ (cf. 0.5 et EGA I, § 10).

Remarque 1.2.E. — Comme toute variété formelle sur k se décompose en variétés formelles sur les composantes locales de k, *nous supposerons dans certaines démonstrations que k est un anneau pseudocompact local.*

Donnons maintenant quelques exemples, en même temps que nous fixons notre terminologie.

1.2.1. — Un *k-foncteur* sera, par définition, un foncteur *covariant* de $\mathbf{Alf}_{/k}$ dans (**Ens**). D'après 1.1 et 0.4.2, on peut identifier $\mathbf{Vaf}_{/k} \cong (\mathbf{Alp}_{/k})^0$ à une sous-catégorie pleine de la catégorie des k-foncteurs, en associant à toute k-variété formelle X le foncteur :

$$\mathbf{Alf}_{/k} \longrightarrow (\mathbf{Ens}), \qquad \mathrm{C} \mapsto \mathrm{X}(\mathrm{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{Spf}(\mathrm{C}), \mathrm{X}).$$

[41] N.D.E. : Notons que $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{X}} \mathrm{Z}$ est la somme directe, pour $x \in \mathrm{X}$, des variétés formelles $\mathrm{B}_x \widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}} \mathrm{C}_x$, où B_x est le produit des $\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}$ pour les $y \in \mathrm{Y}$ tels que $f(y) = x$, et C_x est défini de façon analogue. Ceci sera utilisé en 2.5.1.

[42] N.D.E. : c.-à-d., l'ensemble quotient de Y par les identifications $d(x) = e(x)$, pour tout $x \in \mathrm{X}$, muni de la topologie quotient, qui est ici la topologie discrète.

Nous rencontrerons plus loin des k-foncteurs $\mathbf{F}$ qui associent à tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$ un module $\mathbf{F}(\mathrm{C})$ sur C et à tout morphisme $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ de $\mathbf{Alf}_{/k}$ une application k-linéaire $\mathbf{F}(\varphi) : \mathbf{F}(\mathrm{C}) \to \mathbf{F}(\mathrm{D})$ telle que, si $x \in \mathbf{F}(\mathrm{C})$ et $\lambda \in \mathrm{C}$:

$$\mathbf{F}(\varphi)(\lambda x) = \varphi(\lambda)\mathbf{F}(\varphi)(x)\,.$$

D'après l'Exp. I, 3.1, un tel $\mathbf{F}$ est muni d'une structure de $\mathbf{O}_k$-module, si l'on note $\mathbf{O}_k$ le k-foncteur en anneaux qui associe à tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$ l'anneau sous-jacent à C .

494 ***Définitions***. — (i) Un $\mathbf{O}_k$-module $\mathbf{F}$ sera dit *admissible* si tout morphisme $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ de $\mathbf{Alf}_{/k}$ induit une bijection de $\mathrm{D} \otimes_{\mathrm{C}} \mathbf{F}(\mathrm{C})$ sur $\mathbf{F}(\mathrm{D})$. [43]

(ii) On dira que $\mathbf{F}$ est *plat* s'il est admissible et si, pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$, $\mathbf{F}(\mathrm{C})$ est un C-module plat. [44]

Par exemple, si M est un k-module (*pas nécessairement pseudocompact*), nous noterons (comme dans l'Exp. I, 4.6.1) $\mathbf{W}(\mathrm{M})$ le $\mathbf{O}_k$-module $\mathrm{C} \mapsto \mathrm{C} \otimes_k \mathrm{M}$; alors $\mathbf{W}(\mathrm{M})$ est plat lorsque M est plat sur k.

De plus, le foncteur $\mathrm{M} \mapsto \mathbf{W}(\mathrm{M})$ a pour adjoint à droite le foncteur qui associe à tout $\mathbf{O}_k$-module $\mathbf{F}$ le k-module $\varprojlim_{\mathfrak{l}} \mathbf{F}(k/\mathfrak{l})$, où $\mathfrak{l}$ parcourt les idéaux ouverts de k.

1.2.2. — Dans la suite, un $\mathbf{O}_k$-module sera toujours désigné par une lettre en caractères gras telle que $\mathbf{F}$; lorsque k est artinien, nous écrirons alors simplement F au lieu de $\mathbf{F}(k)$. Dans ce cas, il va de soi que le foncteur $\mathbf{F} \mapsto \mathrm{F}$ induit une équivalence de la catégorie des $\mathbf{O}_k$-modules plats sur celle des k-modules plats ! La terminologie que nous avons adoptée a donc seulement pour but de nous permettre de raisonner « comme si k était toujours artinien ».

Conformément à l'exposé I § 3.1, nous utiliserons des conventions analogues pour d'autres structures algébriques : ainsi, une $\mathbf{O}_k$-*algèbre* (resp. une $\mathbf{O}_k$-*coalgèbre*, resp. une $\mathbf{O}_k$-*algèbre de Lie*, resp. une $\mathbf{O}_k$-*p-algèbre de Lie*) consistera en la donnée d'un $\mathbf{O}_k$-module $\mathbf{M}$ et, pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$, d'une structure de C-algèbre (resp. de C-coalgèbre, resp. de C-algèbre de Lie, resp. de C-p-algèbre de Lie) sur $\mathbf{M}(\mathrm{C})$; on suppose de plus que, pour tout morphisme $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ de $\mathbf{Alf}_{/k}$, l'application de $\mathrm{D} \otimes_{\mathrm{C}} \mathbf{M}(\mathrm{C})$ dans $\mathbf{M}(\mathrm{D})$, qui est induite par $\mathbf{M}(\varphi)$, est un homomorphisme de D-algèbres (resp. de D-coalgèbres, etc.).

Notons enfin que, si $\mathbf{F}$ et $\mathbf{G}$ sont deux $\mathbf{O}_k$-modules, $\mathbf{F} \otimes_k \mathbf{G}$ désignera le $\mathbf{O}_k$-module $\mathrm{C} \mapsto \mathbf{F}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \mathbf{G}(\mathrm{C})$.

1.2.3. — [45] Commençons par le lemme suivant.

[43] N.D.E. : On a introduit cette terminologie, cf. la N.D.E. (47) dans 1.2.3.

[44] N.D.E. : et donc *projectif*, puisque C est artinien.

[45] N.D.E. : On a ajouté le lemme qui suit et l'on a introduit la numérotation 1.2.3.A à 1.2.3.F, pour des références ultérieures.

Lemme 1.2.3.A. — *Soit* $k \to \mathrm{K}$ *un morphisme d'anneaux pseudocompacts,* B *un* K-*module pseudocompact, et* M *un* k-*module* (*sans topologie*) projectif. *On a un isomorphisme canonique de* K-*modules pseudocompacts*

$$\theta: \ \mathrm{Hom}_k(\mathrm{M}, k) \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{B} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_k(\mathrm{M}, \mathrm{B}). \tag{2}$$

Ici, $\mathrm{M}^* = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{M}, k)$ est muni de la topologie définie en 0.2.2, qui en fait un k-module pseudocompact, et la topologie de $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{M}, \mathrm{B})$ est définie de façon analogue : une base de voisinages de 0 est formée par les sous-K-modules suivants, où $x \in \mathrm{M}$ et B' est un sous-K-module ouvert de B :

$$\mathscr{H}(x, \mathrm{B}') = \{f \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{M}, \mathrm{B}) \mid f(x) \in \mathrm{B}'\}.$$

Enfin, $\mathrm{M}^* \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{B}$ est le K-module pseudocompact déduit de M^* par changement de base, cf. 0.5.A.

Ceci étant, θ est évidemment un isomorphisme lorsque $\mathrm{M} = k$; de plus, les deux membres de (2), considérés comme foncteurs en M, transforment somme directes en produits (en particulier, commutent aux sommes directes finies). On obtient donc que (2) est un isomorphisme lorsque M est un k-module libre, puis lorsque M est projectif.

Définition 1.2.3.B. — Soit N un k-module *pseudocompact*. Nous notons $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{N})$ ou $\mathbf{N}^\dagger$ 495
[46] le $\mathbf{O}_k$-module qui associe à tout $\mathrm{C} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alf}_{/k}$ le C-module $(\mathrm{C} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{N})^\dagger$ dual de $\mathrm{C} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{N}$ (0.2.2), c.-à-d., le C-module

$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{C} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{N}, \mathrm{C}) \cong \mathrm{Hom}_c(\mathrm{N}, \mathrm{C}_{|k})\,,$$

où $\mathrm{C}_{|k}$ désigne le k-module C obtenu par restriction des scalaires. Ce $\mathbf{O}_k$-module $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{N})$ sera appelé *le dual* de N.

Si $k_{\mathfrak{m}}$ est une composante locale de k, alors, pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$,

$$\mathrm{Hom}_c(k_{\mathfrak{m}}, \mathrm{C}_{|k}) = \mathrm{C}_{\mathfrak{m}} = \mathrm{C} \otimes_k k_{\mathfrak{m}}$$

est un C-module projectif, et de plus on a $\mathrm{D} \otimes_{\mathrm{C}} \mathrm{C}_{\mathfrak{m}} = \mathrm{D}_{\mathfrak{m}}$, pour tout morphisme $\mathrm{C} \to \mathrm{D}$ de $\mathbf{Alf}_{/k}$; donc $\mathbf{V}_k^f(k_{\mathfrak{m}})$ est un $\mathbf{O}_k$-module plat (cf. 1.2.1). Comme tout k-module pseudocompact projectif est un produit de modules $k_{\mathfrak{m}}$ (cf. Prop. 0.2.1), on déduit du corollaire 0.2.F le :

Corollaire 1.2.3.C. — $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{N})$ *est un* $\mathbf{O}_k$-*module plat lorsque* N *est un* k-*module pseudocompact projectif.*

Définition 1.2.3.D. — Réciproquement, si $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_k$-module *admissible* (cf. 1.2.1), [47] nous appelons *dual de* $\mathbf{M}$ et nous notons $\Gamma^*(\mathbf{M})$ le k-module pseudocompact défini comme suit. Pour $\mathfrak{l}$ parcourant les idéaux ouverts de k, on munit chaque $k/\mathfrak{l}$-module

$$\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* = \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}), k/\mathfrak{l})$$

---

(46) N.D.E. : En fait, on n'utilisera pas cette seconde notation, voir la N.D.E. (47).

(47) N.D.E. : Les éditeurs ne comprennent pas la définition qui suit si $\mathbf{M}$ n'est pas supposé *admissible*, d'où l'ajout de cette hypothèse. D'autre part, on a noté $\Gamma^*(\mathbf{M})$ au lieu de $\mathbf{M}^*$, afin d'éviter des confusions entre $\mathbf{M}^*$, le *module* dual du foncteur $\mathbf{M}$, et $\mathbf{N}^\dagger$, le *foncteur* dual du module N, cf. N.D.E. (46). Enfin, on a détaillé la construction de $\Gamma^*(\mathbf{M})$.

de la topologie décrite en 0.2.2, qui en fait un k-module pseudocompact. Comme $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}) \simeq \mathbf{M}(k/\mathfrak{l}') \otimes (k/\mathfrak{l})$ pour $\mathfrak{l} \supset \mathfrak{l}'$, on a des morphismes de transition :

$$\mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}'}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}'), k/\mathfrak{l}') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}'}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}'), k/\mathfrak{l}) = \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}), k/\mathfrak{l})$$

et par définition $\Gamma^*(\mathbf{M})$ est la limite projective de ce système projectif (filtrant) de k-modules pseudocompacts.

Désormais, on suppose de plus que $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_k$-module *plat* (cf. 1.2.1), alors chaque $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}')$ est un $(k/\mathfrak{l}')$-module projectif, donc les morphismes de transition ci-dessus sont surjectifs, et donc il en est de même des projections $\Gamma^*(\mathbf{M}) \to \mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*$, puisque dans $\mathbf{PC}(k)$ les limites projectives filtrantes sont exactes.

Si $\tau : k \to \mathrm{K}$ est un morphisme d'anneaux pseudocompacts, on notera $\mathbf{M} \otimes_k \mathrm{K}$ ou simplement $\mathbf{M}_{\mathrm{K}}$ le $\mathbf{O}_{\mathrm{K}}$-foncteur défini comme suit. Si C est une K-algèbre de longueur finie, alors le noyau de $k \to \mathrm{C}$ est un idéal ouvert $\mathfrak{l}$, et l'on pose $\mathbf{M}_{\mathrm{K}}(\mathrm{C}) = \mathbf{M}(k/\mathfrak{l}) \otimes_k \mathrm{C}$; on a alors $\mathbf{M}_{\mathrm{K}}(\mathrm{C}) = \mathbf{M}(k/\mathfrak{l}') \otimes_k \mathrm{C}$ pour tout idéal ouvert $\mathfrak{l}'$ contenu dans $\mathfrak{l}$. On définit alors $\Gamma^*_{\mathrm{K}}(\mathrm{M}_{\mathrm{K}})$ comme la limite projective, pour I parcourant les idéaux ouverts de K, des K-modules pseudocompacts :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}/\mathrm{I}}(\mathbf{M}_{\mathrm{K}}(\mathrm{K}/\mathrm{I}), \mathrm{K}/\mathrm{I}) = \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}), \mathrm{K}/\mathrm{I}),$$

où dans le terme de droite $\mathfrak{l}$ est un quelconque idéal ouvert de k tel que $\tau(\mathfrak{l}) \subset \mathrm{I}$. De plus, d'après 1.2.3.A, le terme de droite s'identifie à $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* \mathbin{\widehat{\otimes}}_k (\mathrm{K}/\mathrm{I})$. Comme les projections $\Gamma^*(\mathbf{M}) \to \mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*$ sont surjectives, on voit que la limite projective des $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* \mathbin{\widehat{\otimes}}_k (\mathrm{K}/\mathrm{I})$ n'est autre que le K-module pseudocompact $\Gamma^*(\mathbf{M}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{K}$ (cf. 0.5.A). On a ainsi obtenu que, pour tout $\mathbf{O}_k$-module *plat* $\mathbf{M}$, la formation de $\Gamma^*(\mathbf{M})$ *commute à l'extension de la base*, i.e. on a

$$(\star) \qquad \Gamma^*_{\mathrm{K}}(\mathbf{M} \otimes_k \mathrm{K}) \simeq \Gamma^*(\mathbf{M}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{K}.$$

Proposition 1.2.3.E. — (i) *Les foncteurs* $\mathrm{N} \mapsto \mathbf{V}^f_k(\mathrm{N})$ *et* $\mathbf{M} \mapsto \Gamma^*(\mathbf{M})$ *définissent une anti-équivalence entre la catégorie des k-modules pseudocompacts projectifs et celle des $\mathbf{O}_k$-modules plats.* [48]

(ii) *De plus, si $k \to \mathrm{K}$ est un morphisme d'anneaux pseudocompacts, alors l'anti-équivalence précédente « commute au changement de base » au sens suivant : si* $\mathrm{N} \simeq \Gamma^*(\mathbf{M})$, *alors* $\mathrm{N} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{K} \simeq \Gamma^*_{\mathrm{K}}(\mathbf{M} \otimes_k \mathrm{K})$.

Démonstration. D'une part, on a une transformation naturelle $\phi_{\mathrm{N}} : \mathrm{N} \to \Gamma^*(\mathbf{V}^f_k(\mathrm{N}))$. Comme le foncteur $\Gamma^* \circ \mathbf{V}^f_k$ commute aux produits, d'après 0.3.5 et 0.2.F, il suffit de vérifier que ϕ_{N} est un isomorphisme lorsque N est une composante locale $k_{\mathfrak{m}}$ de k. Dans ce cas, pour tout idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de k contenu dans $\mathfrak{m}$, le morphisme naturel

$$(k/\mathfrak{l})_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}}\big(\mathrm{Hom}_c(k_{\mathfrak{m}} \mathbin{\widehat{\otimes}} k/\mathfrak{l},\ k/\mathfrak{l}),\ k/\mathfrak{l}\big)$$

est un isomorphisme, d'où le résultat.

(48) N.D.E. : On a ajouté le point (ii) ci-dessous, ainsi que la démonstration qui suit. L'original indiquait : « Si $\mathbf{M}$ est un $\mathbf{O}_k$-module plat, il est clair que $\mathbf{M}$ n'est autre que le dual de $\mathbf{M}^*$, donc *les foncteurs* $\mathrm{N} \mapsto \mathbf{N}^*$ *et* $\mathbf{M} \mapsto \mathbf{M}^*$ *définissent une anti-équivalence*... »

D'autre part, soit $\mathbf{M}$ un $\mathbf{O}_k$-module plat. Montrons que $\Gamma^*(\mathbf{M}) = \varprojlim \mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*$ est un objet projectif de $\mathbf{PC}(k)$. Soit $\mathrm{N} \to \mathrm{N}'$ un morphisme surjectif entre objets de $\mathbf{LF}(k)$. D'après 0.2.F (i) et (ii), il suffit de montrer que l'application naturelle

$$\varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*, \mathrm{N}) \longrightarrow \varinjlim \mathrm{Hom}_c(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*, \mathrm{N}')$$

est surjective. Mais ceci est clair, car N et N′ sont des $k/\mathfrak{l}_0$-modules, pour un certain idéal ouvert $\mathfrak{l}_0$; donc, si $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{l}_0$, tout morphisme $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* \to \mathrm{N}'$ se relève en un morphisme $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* \to \mathrm{N}$, puisque $\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^*$ est un objet projectif de $\mathbf{PC}(k/\mathfrak{l})$.

On a un morphisme $\psi : \mathbf{M} \to \mathbf{V}^f_k(\Gamma^*(\mathbf{M}))$ de foncteurs de $\mathbf{Alf}_{/k}$ dans $(\mathbf{Ens})$. Soit B un objet de $\mathbf{Alf}_{/k}$, montrons que

$$(1) \qquad \psi(\mathrm{B}) : \ \mathbf{M}(\mathrm{B}) \longrightarrow \mathbf{V}^f_k(\Gamma^*(\mathbf{M}))(\mathrm{B}) = \mathrm{Hom}_c\Big(\varprojlim_{\mathfrak{l}} \big(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l})^* \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{B}\big), \mathrm{B}\Big)$$

est une bijection (dans l'égalité ci-dessus, on a utilisé le fait que $\widehat{\otimes}$ commute aux limites projectives filtrantes). Soit $\mathfrak{l}_0$ un idéal ouvert de k contenu dans le noyau de $k \to \mathrm{B}$. D'après le lemme 1.2.3.A, pour tout $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{l}_0$, on a un isomorphisme canonique de B-modules pseudocompacts :

$$\mathbf{M}(k/l)^* \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{B} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}}(\mathbf{M}(k/\mathfrak{l}), \mathrm{B})$$

et, puisque $\mathbf{M}(\mathrm{B}) = \mathbf{M}(k/\mathfrak{l}) \otimes_{k/\mathfrak{l}} \mathrm{B}$, le terme de droite égale $\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathbf{M}(\mathrm{B}), \mathrm{B})$. Donc, le système projectif dans (1) est constant pour $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{l}_0$, et (1) se réduit au morphisme canonique

$$\mathbf{M}(\mathrm{B}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_c\big(\mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathbf{M}(\mathrm{B}), \mathrm{B}),\ \mathrm{B}\big),$$

qui est un isomorphisme d'après 0.2.2, puisque B est artinien et $\mathbf{M}(\mathrm{B})$ un B-module projectif. Ceci prouve le point (i) de la proposition, et le point (ii) découle de l'isomorphisme $(\star)$ établi plus haut.

Remarque 1.2.3.F. — Revenons à l'énoncé de la proposition, et supposons de plus que N soit un k-module pseudocompact *topologiquement libre*. Dans ce cas, on peut choisir « de manière cohérente » des bases pour les C-modules $\mathbf{V}^f_k(\mathrm{N})(\mathrm{C})$.

En effet, soient (n_i) une pseudobase de N (0.2.1) et n_i^{C} l'image canonique de n_i dans $\mathrm{C} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{N}$, pour $\mathrm{C} \in \mathbf{Alf}_{/k}$. Si l'on définit l'élément δ_i^{C} de $(\mathrm{C} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{N})^\dagger$ par les égalités $\delta_i^{\mathrm{C}}(n_i^{\mathrm{C}}) = 1$ et $\delta_i^{\mathrm{C}}(n_j^{\mathrm{C}}) = 0$ pour $i \neq j$, la famille (δ_i^{C}) est une base de $\mathbf{V}^f_k(\mathrm{N})(\mathrm{C})$; en outre, pour tout morphisme $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ de $\mathbf{Alf}_{/k}$, $\mathbf{V}^f_k(\mathrm{N})(\varphi)$ envoie δ_i^{C} sur δ_i^{D}.

1.2.4. — [49] Pour tout k-module pseudocompact E, soit $\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E})$ *l'algèbre symétrique complétée de* E, définie de la manière suivante. Soit $\mathrm{T}_k(\mathrm{E})$ la somme directe des k-modules pseudocompacts :

$$\widehat{\bigotimes}{}^n_k \mathrm{E} = \mathrm{E} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \cdots \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{E} \quad (n \geqslant 0\,; \quad \text{si } n = 0, \quad \widehat{\bigotimes}{}^0_k \mathrm{E} = k)\,;$$

on fait de $\mathrm{T}_k(\mathrm{E})$ une k-algèbre graduée en définissant la multiplication de la façon 496

[49] N.D.E. : Dans ce paragraphe, on a modifié l'ordre, en définissant d'abord $\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E})$ et énonçant ensuite que $\mathbb{V}^f_k(\mathrm{E})$ représente $\mathbf{V}^f_k(\mathrm{E})$.

habituelle ; soit alors $\mathrm{S}_k(\mathrm{E})$ le quotient de $\mathrm{T}_k(\mathrm{E})$ par l'idéal homogène qui a pour n-ième composante le k-sous-module fermé de $\widehat{\bigotimes}^n_k \mathrm{E}$ engendré par les éléments :

$$x_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} x_i \widehat{\otimes} x_{i+1} \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} x_n - x_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} x_{i+1} \widehat{\otimes} x_i \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} x_n.$$

Si l'on désigne par $\mathrm{S}^n_k(\mathrm{E})$ ce quotient, $\mathrm{S}_k(\mathrm{E})$ est évidemment une k-algèbre graduée de n-ième composante $\mathrm{S}^n_k(\mathrm{E})$.

On munit $\mathrm{S}_k(\mathrm{E})$ de la topologie linéaire définie par l'ensemble Υ des idéaux $\mathfrak{l}$ tels que $\mathrm{S}_k(\mathrm{E})/\mathfrak{l}$ soit un k-module de longueur finie et que $\mathrm{S}^n_k(\mathrm{E}) \cap \mathfrak{l}$ soit un sous-module ouvert de $\mathrm{S}^n_k(\mathrm{E})$ pour tout n. Alors, l'algèbre profinie $\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E})$ est le séparé complété de $\mathrm{S}_k(\mathrm{E})$ pour cette topologie. [50]

On note $\mathbb{V}^f_k(\mathrm{E})$ la k-variété formelle $\mathrm{Spf}(\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E}))$. *Elle représente le k-foncteur $\mathbf{V}^f_k(\mathrm{E})$, c.-à-d., pour tout objet* C *de* $\mathbf{Alf}_{/k}$, *on a un isomorphisme canonique :*

$$\mathbf{V}^f_k(\mathrm{E})(\mathrm{C}) = \mathrm{Hom}_c(\mathrm{E}, \mathrm{C}_{|k}) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E}), \mathrm{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{Spf}(\mathrm{C}), \mathbb{V}^f_k(\mathrm{E})).$$

Dans toute la suite, nous identifions $\mathbb{V}^f_k(\mathrm{E})$ au k-foncteur $\mathbf{V}^f_k(\mathrm{E})$.

1.2.5. — D'après 1.2.4, le morphisme nul de E dans k est associé à un morphisme d'algèbres profinies $\pi : \widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E}) \to k$; ce morphisme π induit l'application nulle sur $\mathrm{S}^n_k(\mathrm{E})$ pour $n \geqslant 1$ et définit une section du morphisme structural $\mathbb{V}^f_k(\mathrm{E}) \to \mathrm{Spf}(k)$.

Nous noterons $\mathbb{V}^{f,0}_k(\mathrm{E})$ la variété formelle qui a pour points les images des points de $\mathrm{Spf}(k)$ par la section $\mathrm{Spf}(\pi)$ et qui a les mêmes algèbres locales que $\mathbb{V}^f_k(\mathrm{E})$ en ces points.

[51] Alors, l'algèbre affine de $\mathbb{V}^{f,0}_k(\mathrm{E})$ est le séparé complété de $\mathrm{S}_k(\mathrm{E})$ pour la topologie définie par les idéaux $\mathfrak{l} \in \Upsilon$ (cf. 1.2.4) *qui contiennent* $\mathrm{S}^n_k(\mathrm{E})$ *pour n assez grand.* On en déduit que c'est le produit infini :

$$k[[\mathrm{E}]] = k \times \mathrm{E} \times \mathrm{S}^2_k(\mathrm{E}) \times \mathrm{S}^3_k(\mathrm{E}) \times \cdots$$

D'autre part, soient C un objet de $\mathbf{Alf}_{/k}$, u un élément de $\mathbb{V}^f_k(\mathrm{C}) = \mathrm{Hom}_c(\mathrm{E}, \mathrm{C})$, et $\phi : \widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E}) \to \mathrm{C}$ le morphisme de k-algèbres profinies correspondant à u. Alors $\mathrm{Ker}(\phi)$ est un idéal ouvert (i.e. ϕ appartient à $\mathbb{V}^{f,0}_k(\mathrm{C})$) si et seulement si $\mathrm{Ker}(\phi)$ contient

---

[50] N.D.E. : Par exemple, soient k un corps, E un k-espace vectoriel pseudocompact, $\mathrm{V} = \mathrm{Hom}_c(\mathrm{E}, k)$; on a $\mathrm{E} \simeq \mathrm{V}^*$ (cf. 0.2.2). Pour tout sous-espace de dimension finie W de V, soit $\mathscr{F}(\mathrm{W})$ l'ensemble des points fermés du k-schéma $\mathbb{V}(\mathrm{W}) = \mathrm{Spec}\,\mathrm{S}_k(\mathrm{W}^*)$. Notons $\mathscr{F}(\mathrm{V})$ la limite inductive des $\mathscr{F}(\mathrm{W})$. Alors $\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E})$ est le produit pour $x \in \mathscr{F}(\mathrm{V})$ des k-algèbres pseudocompactes

$$\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E})_x = \varprojlim_{\mathrm{W}} \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{W},x}$$

où W parcourt les sous-espaces de V de dimension finie tels que $x \in \mathscr{F}(\mathrm{W})$, et $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{W},x}$ désigne le séparé complété de l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathbb{V}(\mathrm{W}),x}$ pour la topologie définie par les idéaux de codimension finie (qui coïncide ici avec la topologie $\mathfrak{m}$-adique). Si k est algébriquement clos et $(v_i)_{i\in\mathrm{I}}$ une base de V, de sorte que E possède une pseudobase $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$, chaque composante locale $\widehat{\mathrm{S}}_k(\mathrm{E})_x$ est isomorphe à l'anneau des séries formelles $k[[e_i, i \in \mathrm{I}]]$, muni de la topologie définie par les idéaux de codimension finie.

[51] N.D.E. : On a détaillé la suite de ce paragraphe.

$\mathrm{S}_k^n(\mathrm{E})$ pour n assez grand, c.-à-d., si et seulement si $u(\mathrm{E})$ est contenu dans le radical $\mathfrak{r}(\mathrm{C})$ de C. Donc : *pour tout objet* C *de* $\mathbf{Alf}_{/k}$*, on a des isomorphismes canoniques :* 497

$$\mathbb{V}_k^{f,0}(\mathrm{E})(\mathrm{C}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(k[[\mathrm{E}]], \mathrm{C}) \simeq \mathrm{Hom}_c(\mathrm{E}, \mathfrak{r}(\mathrm{C})).$$

1.2.6. — Une k-variété formelle V est dite de *longueur finie* si son algèbre affine l'est. De même, si S est un schéma, un S-schéma X est dit *de longueur finie* si X est fini sur S et si l'image directe de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$ sur S est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module de longueur finie. [(52)] Donc, se donner un S-schéma de longueur finie X « est la même chose » que se donner un ensemble fini $\{s_1, \dots, s_n\}$ de points fermés de S, et en chacun de ces points une $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s_i}$-algèbre de longueur finie.

On voit donc que les S-schémas de longueur finie s'identifient aux variétés formelles de longueur finie sur le schéma formel $\widehat{\mathrm{S}}$ qui suit. L'espace topologique sous-jacent à $\widehat{\mathrm{S}}$ est l'ensemble des points fermés de S muni de la topologie discrète, si s est un tel point fermé, le faisceau structural $\mathscr{O}_{\widehat{\mathrm{S}}}$ a pour tige $\mathscr{O}_{\widehat{\mathrm{S}},s}$ en s le séparé complété $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{S},s}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ pour la topologie linéaire définie par les idéaux de colongueur finie ; on a donc $\widehat{\mathrm{S}} = \mathrm{Spf}\,\mathscr{A}(\widehat{\mathrm{S}})$, où $\mathscr{A}(\widehat{\mathrm{S}})$ est le produit des $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{S},s}$, pour s parcourant les points fermés de S, muni de la topologie produit.

Définition. — Si X est un S-schéma, on note $\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ la variété formelle sur $k = \mathscr{A}(\widehat{\mathrm{S}})$ définie comme suit. L'espace topologique sous-jacent est formé des points $x \in \mathrm{X}$ tels que $[\kappa(x) : \kappa(s)] < \infty$, où s est l'image de x dans S ; l'anneau local $\mathscr{O}_{\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}},x}$ est le séparé complété de $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ pour la topologie linéaire définie par les idéaux I de $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ tels que $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}/\mathrm{I}$ soit de longueur finie comme $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$-module (N. B. puisque $[\kappa(x) : \kappa(s)] < \infty$, ceci équivaut à dire que $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}/\mathrm{I}$ est de longueur finie comme $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$-module).

Soit $\mathbf{Vaf}^{\ell f}_{/\widehat{\mathrm{S}}}$ la catégorie des variétés formelles de longueur finie sur $\widehat{\mathrm{S}}$ (identifiée à celle des S-schémas de longueur finie). D'après 1.1 et 1.2.1, la catégorie $\mathbf{Vaf}_{/\widehat{\mathrm{S}}}$ des variétés formelles sur $\widehat{\mathrm{S}}$ est équivalente à celle des foncteurs contravariants exacts à gauche de $\mathbf{Vaf}^{\ell f}_{/\widehat{\mathrm{S}}}$ dans (**Ens**). En particulier, pour tout S-schéma X, le foncteur $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})}(\mathrm{T}, \mathrm{X})$, de $\mathbf{Vaf}^{\ell f}_{/\widehat{\mathrm{S}}}$ vers (**Ens**), est un tel foncteur exact à gauche, donc correspond à une variété formelle sur $\widehat{\mathrm{S}}$. Celle-ci n'est autre que $\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$: [(53)]

Proposition. — *Pour tout* S*-schéma* X*, les foncteurs*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/\widehat{\mathrm{S}}}}(-, \widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}) \qquad \textit{et} \qquad \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})}(-, \mathrm{X})$$

ont même restriction à $\mathbf{Vaf}^{\ell f}_{/\widehat{\mathrm{S}}}$*. On obtient ainsi un* foncteur $\mathrm{X} \mapsto \widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ *de* $(\mathbf{Sch}_{/\mathrm{S}})$ *vers* $\mathbf{Vaf}_{/\widehat{\mathrm{S}}}$*,* qui commute aux limites projectives finies.

[(52)] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[(53)] N.D.E. : On a amplifié la proposition qui suit, en y insérant le fait que le foncteur $\mathrm{X} \mapsto \widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ commute aux limites projectives finies (dans l'original, ceci figurait dans la démonstration de 1.3.4 – la démonstration donnée ici est plus directe que l'originale). De plus, ce résultat sera utile dans la Section 2 et dans 3.3.1.

En effet, on voit facilement que la variété formelle $\widehat{X}/\widehat{S}$ a la propriété requise, et que la correspondance $X \mapsto \widehat{X}/\widehat{S}$ est fonctorielle. Prouvons la seconde assertion.

Posons $\mathscr{S} = (\mathbf{Sch}_{/S})$ et $\mathscr{V} = \mathbf{Vaf}_{/\widehat{S}}$, et notons $\widehat{X}$ au lieu de $\widehat{X}/\widehat{S}$. On sait (1.2.B) que $\mathscr{V}$ possède des limites projectives arbitraires. Soit $(X_i)_{i\in I}$ un système projectif dans $\mathscr{S}$ et supposons que $X = \varprojlim X_i$ existe dans $\mathscr{S}$ (ce qui est le cas si I est fini). Comme le foncteur qui associe à tout objet Y de $\mathscr{S}$ (resp. V de $\mathscr{V}$) le foncteur $\mathbf{h}_Y = \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(-, Y)$ (resp. $\mathbf{h}_V = \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(-, V)$) commute aux limites projectives, on a, pour tout S-schéma T de longueur finie, des isomorphismes fonctoriels :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(T, X) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(T, X_i) \simeq \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(T, \widehat{X}_i) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{V}}(T, \varprojlim \widehat{X}_i).$$

Par conséquent, le foncteur $X \mapsto \widehat{X}/\widehat{S}$ commute aux limites projectives lorsqu'elles existent dans $(\mathbf{Sch}_{/S})$; en particulier, il commute aux limites projectives finies.

498 ***1.3. Proposition***. — *Soient $f : X \to Y$ un morphisme de variétés formelles sur k,* A *et* B *les algèbres affines de* X *et* Y, *$g : B \to A$ le morphisme induit par f. Alors f est un* monomorphisme *de* $\mathbf{Vaf}_{/k}$ *si et seulement si g est une* surjection.

[54] D'après 1.1, $A \mapsto \mathrm{Spf}(A)$ est une anti-équivalence de $\mathbf{Alp}_{/k}$ sur $\mathbf{Vaf}_{/k}$, donc f est un monomorphisme si et seulement si g est un épimorphisme, et ceci est bien le cas si g est surjectif.

Réciproquement, supposons que g soit un épimorphisme et montrons qu'il est surjectif. Pour tout $\mathfrak{n} \in \Upsilon(B)$, posons $A_{\mathfrak{n}} = A \mathbin{\widehat{\otimes}}_B B_{\mathfrak{n}}$; d'après 0.4, A est un B-module pseudocompact, donc est le produit des $A_{\mathfrak{n}}$ (cf. 0.3.6). Alors, g est le produit des morphismes $g_{\mathfrak{n}} : B_{\mathfrak{n}} \to A_{\mathfrak{n}}$ déduits de g par changement de base. Ceux-ci sont encore des épimorphismes, ce qui nous ramène à démontrer le résultat lorsque B est local, d'idéal maximal $\mathfrak{n}$. Posons $K = B/\mathfrak{n}$.

D'après le lemme de Nakayama 0.3.3, il suffit de montrer que le morphisme $g \mathbin{\widehat{\otimes}}_B K$ est surjectif ; il est déduit de g par changement de base, donc est un épimorphisme de $\mathbf{Alp}_{/K}$. On peut donc supposer que $B = K$ est un corps. Or f est un monomorphisme si et seulement si le morphisme diagonal $X \to X \times_Y X$ est un isomorphisme, c'est-à-dire si l'homomorphisme $x \mathbin{\widehat{\otimes}}_K x' \to x\,x'$ est un isomorphisme de $A \mathbin{\widehat{\otimes}}_K A$ sur A. Comme K est un corps, cela implique $A = K$.

Remarque. — [55] Il résulte de la proposition que tout *monomorphisme* $f : X \to Y$ de variétés formelles est un *isomorphisme* de X *sur une sous-variété formelle* (nécessairement fermée !) de Y.

1.3.1. — La proposition précédente entraîne en particulier que *tout monomorphisme* $f : X \to Y$ *de* $\mathbf{Vaf}_{/k}$ *est effectif* (cf. IV 1.3). [56] Il n'en va pas de même pour les épimorphismes, comme on le voit facilement en modifiant un peu le contrexemple

[54] N.D.E. : On a détaillé le début de la démonstration.

[55] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

[56] N.D.E. : c.-à-d., dans la catégorie opposée $(\mathbf{Vaf}_{/k})^0 = \mathbf{Alp}_{/k}$, le morphisme $g : B \to A$ correspondant à f est un épimorphisme effectif. Ceci est bien le cas, car g est surjectif, donc induit (cf. la démonstration de 0.2.B) un *isomorphisme* de k-algèbres profinies $B/I \xrightarrow{\sim} A$, où $I = \mathrm{Ker}\, g$. Par

de l'Exp. V, § 2.c) ; [57] c'est pourquoi nous allons considérer une classe sympathique d'épimorphismes effectifs.

Lemme. — [58] *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme de* k*-variétés formelles et soient* A, B *les algèbres affines de* X, Y *et* $f^\natural : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ *le morphisme induit par* f*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout* $x \in \mathrm{X}$*, l'homomorphisme* $f^\natural_x : \mathscr{O}_{\mathrm{Y},f(x)} \to \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *fait de* $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{Y},f(x)}$*-module pseudocompact* topologiquement libre*.*

(ii) *Pour tout* $y \in \mathrm{Y}$*, la composante locale* $\mathrm{A}_y = \prod_{f(x)=y} \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *est un* B_y*-module pseudocompact* topologiquement libre*.*

(iii) $f^\natural : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ *fait de* A *un* B*-module pseudocompact projectif.*

(iv) *Le foncteur* $\mathbf{PC}(\mathrm{B}) \to \mathbf{PC}(\mathrm{A})$*,* $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{M} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} \mathrm{A}$ *est exact.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que f *est* topologiquement plat*.*

Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) découlent de 0.2.F (iii) et 0.3.7. Réciproquement, supposons (ii) vérifié et soient $x \in \mathrm{X}$ et $y = f(x)$. Comme $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est un facteur direct de A_y, c'est un B_y-module pseudocompact projectif, donc topologiquement libre d'après 0.2.1 (puisque B_y est local).

D'autre part, un morphisme $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ de k-variétés formelles est dit *surjectif* s'il induit une surjection des ensembles sous-jacents.

Proposition. — *Soit* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un morphisme* surjectif et topologiquement plat *de* 499
k*-variétés formelles. Alors* f *est un* épimorphisme effectif (cf. IV 1.3).

En effet, soient A, B les algèbres affines de X, Y et $g : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ le morphisme induit par f. Il s'agit de montrer que Y s'identifie au conoyau de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{X}$, c.-à-d., que pour tout $\mathfrak{n} \in \Upsilon(\mathrm{B})$, $\mathrm{B}_{\mathfrak{n}}$ s'identifie au sous-anneau de $\mathrm{A}_{\mathfrak{n}} = \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} \mathrm{B}_{\mathfrak{n}}$ formé des a tels que $a \mathbin{\widehat{\otimes}} 1 = 1 \mathbin{\widehat{\otimes}} a$.

On peut donc supposer B local, d'idéal maximal $\mathfrak{n}$. Notre hypothèse signifie alors que g fait de A un B-module topologiquement libre et non nul. D'après le lemme de Nakayama 0.3.3, $\mathrm{A}/\overline{\mathfrak{n}\mathrm{A}}$ n'est pas nul, de sorte que le morphisme $g' : \mathrm{B}/\mathfrak{n} \to \mathrm{A}/\overline{\mathfrak{n}\mathrm{A}}$ déduit de g est injectif. D'après le lemme 1.3.2 ci-dessous, B est un facteur direct de A comme B-module, disons $\mathrm{A} = \mathrm{B} \oplus \mathrm{A}'$; il en résulte que B s'identifie à la partie de A formée des a tels que $a \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} 1 = 1 \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} a$.

---

conséquent, tout morphisme $\phi : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ de $\mathbf{Alp}_{/k}$, nul sur I, descend en un morphisme $\overline{\phi} : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$ tel que $\phi = \overline{\phi} \circ g$.

[57] N.D.E. : i.e. soient k un corps, $\mathrm{X} = \mathrm{Spf}(k[[\mathrm{T}]])$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{Spf}(\mathrm{B})$, où B est la sous-$k$-algèbre de $\mathrm{A} = k[[\mathrm{T}]]$ engendrée topologiquement par T^3 et T^4 (c.-à-d., B est formée des séries formelles $\sum a_n \mathrm{T}^n$ telles que $a_n = 0$ pour $n = 1, 2, 5$). Alors $\mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est un épimorphisme qui n'est pas effectif ; en effet, le conoyau de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X} \rightrightarrows \mathrm{X}$ est $\mathrm{Spf}(\mathrm{B}')$, où B′ est la sous-algèbre de A formée des a tels que $a \mathbin{\widehat{\otimes}} 1 = 1 \mathbin{\widehat{\otimes}} a$, et B′ contient T^5.

[58] N.D.E. : On a ajouté ce lemme, qui explique la terminologie « topologiquement plat ».

1.3.2. Lemme. — *Soient* B *un anneau pseudocompact* local*,* $\mathfrak{n}$ *son idéal maximal,* M *et* N *deux* B*-modules pseudocompacts* projectifs *et* g *un morphisme* $\mathrm{M} \to \mathrm{N}$*. Si* $(\mathrm{B}/\mathfrak{n}) \,\widehat{\otimes}_{\mathrm{B}}\, g$ *est injectif,* g *est un isomorphisme de* M *sur un facteur direct de* N*.*

En effet, supposons que $g' = (\mathrm{B}/\mathfrak{n}) \,\widehat{\otimes}_{\mathrm{B}}\, g$ soit injectif. Comme $\mathrm{B}/\mathfrak{n}$ est un corps, g' possède alors une rétraction r'. Notons p et q les projections canoniques de M et N sur $\mathrm{M}/\overline{\mathfrak{n}\mathrm{M}}$ et $\mathrm{N}/\overline{\mathfrak{n}\mathrm{N}}$; comme N est projectif, il existe un morphisme $r : \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ tel que $p \circ r = r' \circ q$; par conséquent, r' est déduit de r par passage au quotient. Alors, puisque $r' \circ g'$ est un isomorphisme, il en est de même de $r \circ g$, d'après 0.3.4 (puisque M est projectif). Soit s l'isomorphisme réciproque de $r \circ g$, alors $s \circ r$ est une rétraction de g.

1.3.3. Proposition. — *Soient* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *et* $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ *des morphismes de k-variétés formelles.*

500 (i) *Si* f *et* g *sont topologiquement plats,* $g \circ f$ *l'est aussi.*

(ii) *Si* f *et* $g \circ f$ *sont topologiquement plats et si* f *est surjectif,* g *est topologiquement plat.*

(iii) *Si* f *est topologiquement plat,* $f \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{Y}'$ *l'est pour tout changement de base* $\mathrm{Y}' \to \mathrm{Y}$*.*

Les assertions (i) et (iii) sont claires. Pour prouver (ii), appelons $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ les algèbres affines de $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$, et $f' : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ et $g' : \mathrm{C} \to \mathrm{B}$ les morphismes induits par f et g. Comme $g \circ f$ est topologiquement plat, $f' \circ g'$ fait de A un C-module pseudocompact projectif ; de même, f' fait de A un B-module pseudocompact projectif et fidèle. Lorsque P parcourt les C-modules pseudocompacts et N les B-modules pseudocompacts, les foncteurs $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P} \,\widehat{\otimes}_{\mathrm{C}}\, \mathrm{A}$ et $\mathrm{N} \mapsto \mathrm{N} \,\widehat{\otimes}_{\mathrm{B}}\, \mathrm{A}$ sont donc exacts ; comme le deuxième est en outre fidèle, le foncteur $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P} \,\widehat{\otimes}_{\mathrm{C}}\, \mathrm{B}$ est exact ; d'après 0.3.7, B est donc un C-module pseudocompact projectif.

1.3.4. Proposition. — *Soient* S *un schéma,* Y *un* S*-schéma* localement noethérien *et* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un* S*-morphisme* localement de type fini et fidèlement plat*, de sorte que* f *est un* épimorphisme effectif*, i.e. la suite ci-dessous est* exacte (cf. IV 6.3.1 (iv) et IV 1.3) *:*

$$(*) \qquad \mathrm{X} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X} \overset{\mathrm{pr}_1}{\underset{\mathrm{pr}_2}{\rightrightarrows}} \mathrm{X} \xrightarrow{\ f\ } \mathrm{Y}\,.$$

Alors le morphisme de $\widehat{\mathrm{S}}$*-variétés formelles* $\widehat{f} : \widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}} \to \widehat{\mathrm{Y}}/\widehat{\mathrm{S}}$ (cf. 1.2.6) *est* surjectif et topologiquement plat*, et la suite ci-dessous, déduite de* $(*)$*, est* exacte *:*

$$\widehat{(*)} \qquad \widehat{\mathrm{X} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}} \overset{\widehat{\mathrm{pr}_1}}{\underset{\widehat{\mathrm{pr}_2}}{\rightrightarrows}} \widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}} \xrightarrow{\ \widehat{f}\ } \widehat{\mathrm{Y}}/\widehat{\mathrm{S}}\,.$$

501 Soit en effet y un point de Y de projection s sur S et tel que $\kappa(y)$ soit une extension finie du corps résiduel $\kappa(s)$ de s. Comme f est surjectif et localement de type fini, $f^{-1}(y)$ est non vide et localement de type fini sur $\kappa(y)$; les points fermés de $f^{-1}(y)$ sont alors les points de $\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ se projetant sur y. Ceci montre que $\widehat{f}$ est surjectif.

[59] Soit x un point fermé de $f^{-1}(y)$. Comme Y est localement noethérien et f localement de type fini, l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}$ (resp. $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$) est noethérien, donc les puissances de l'idéal maximal sont de colongueur finie, de sorte que l'anneau local de $\widehat{\mathrm{Y}}/\widehat{\mathrm{S}}$ en y (resp. de $\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ en x) est le complété $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{Y},y}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}$ (resp. $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$) pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Alors, comme f est plat, $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$ est plat sur $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{Y},y}$, d'après SGA 1, IV 5.8. Donc, d'après 0.3.8, $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$ est un $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{Y},y}$-module topologiquement libre. Ceci montre que $\widehat{f}$ est topologiquement plat.

Donc, d'après la proposition 1.3.1, $\widehat{f}$ est un épimorphisme effectif, i.e. la suite ci-dessous (où l'on a noté $\widehat{\mathrm{X}}$ au lieu de $\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$) est exacte :

$$\widehat{\mathrm{X}} \underset{\widehat{\mathrm{Y}}}{\times} \widehat{\mathrm{X}} \underset{\widehat{\mathrm{pr}_2}}{\overset{\widehat{\mathrm{pr}_1}}{\rightrightarrows}} \widehat{\mathrm{X}} \xrightarrow{\ \widehat{f}\ } \widehat{\mathrm{Y}}\ .$$

De plus, d'après 1.2.6, on a un isomorphisme naturel (en particulier, qui commute avec les projections sur $\widehat{\mathrm{X}}$) :

$$\widehat{\mathrm{X} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X}} \simeq \widehat{\mathrm{X}} \underset{\widehat{\mathrm{Y}}}{\times} \widehat{\mathrm{X}}.$$

Par conséquent, la suite $\widehat{(*)}$ est exacte.

1.3.5. — Soit k un anneau pseudocompact. Une variété formelle X sur k est dite *topologiquement plate* si son algèbre affine A est un k-module pseudocompact *projectif*, c.-à-d., si le morphisme structural $\mathrm{X} \to \mathrm{Spf}(k)$ est topologiquement plat.

[60] Notons d'abord que 0.2.2 et 0.3.6 entraînent le résultat suivant (analogue à $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$, 3.1.1).

Lemme 1.3.5.A. — *Supposons k* artinien. *Les foncteurs* $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{A}^{\dagger} = \mathrm{Hom}_c(\mathrm{A}, k)$ *et* $\mathrm{C} \mapsto \mathrm{C}^{*} = \mathrm{Hom}_k(\mathrm{C}, k)$ *définissent une* anti-équivalence *entre la catégorie des k*-algèbres profinies topologiquement plates, *et celle des k*-coalgèbres plates.

En effet, si A est une k-algèbre profinie topologiquement plate, alors, d'après 0.3.6, on a un *isomorphisme* de k-modules :

$$\mathrm{A}^{\dagger} \otimes_k \mathrm{A}^{\dagger} \xrightarrow{\ \sim\ } (\mathrm{A} \widehat{\otimes} \mathrm{A})^{\dagger},$$

de sorte que la multiplication $\mathrm{A} \widehat{\otimes} \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ induit par dualité une structure de k-coalgèbre sur $\mathrm{A}^{\dagger}$. Le reste découle alors de la proposition 0.2.2.

Revenons au cas d'un anneau pseudocompact k arbitraire.

Définition 1.3.5.B. — À toute k-variété formelle X dont l'anneau affine A est un k-module pseudocompact *projectif*, on associe une $\mathbf{O}_k$-coalgèbre plate $\mathbf{H}(\mathrm{X})$, définie comme suit.

Notons $\mathbf{H}(\mathrm{X})$ le $\mathbf{O}_k$-module $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{A})$ « dual de A » ; c'est un $\mathbf{O}_k$-module plat, puisque le k-module pseudocompact sous-jacent à A est projectif (cf. 1.2.3.C). De plus, d'après **502**

[59] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit ; ensuite, on a tiré profit de l'ajout fait en 1.2.6.

[60] N.D.E. : On a ajouté le lemme suivant, utilisé implicitement dans l'original ; d'autre part, on a introduit la numérotation 1.3.5.A à 1.3.5.D, pour des références ultérieures.

0.3.6, l'on a :

$$\mathbf{V}_k^f(\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathrm{A}) \simeq \mathbf{V}_k^f(\mathrm{A}) \otimes \mathbf{V}_k^f(\mathrm{A}),$$

et donc la multiplication de A induit par transposition un morphisme diagonal :

$$\mathbf{H}(\mathrm{X}) = \mathbf{V}_k^f(\mathrm{A}) \longrightarrow \mathbf{V}_k^f(\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathrm{A}) = \mathbf{H}(\mathrm{X}) \otimes \mathbf{H}(\mathrm{X})$$

qui fait de $\mathbf{H}(\mathrm{X})$ une $\mathbf{O}_k$-coalgèbre plate. Nous dirons que $\mathbf{H}(\mathrm{X})$ est *la coalgèbre de* X *sur* $\mathbf{O}_k$.

Définition 1.3.5.C. — Réciproquement, à toute $\mathbf{O}_k$-coalgèbre $\mathbf{C}$ on peut associer un k-foncteur (cf. 1.2.1) $\mathrm{Spf}^*(\mathbf{C})$, défini comme suit. Pour tout objet B de $\mathbf{Alf}_{/k}$, on pose (avec les notations de $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ 3.1) :

$$\begin{aligned}\mathrm{Spf}^*(\mathbf{C})(\mathrm{B}) &= \mathrm{Hom}_{\text{B-coalg.}}(\mathrm{B},\mathbf{C}(\mathrm{B}))\\ &= \{x\in\mathbf{C}(\mathrm{B}) \mid \varepsilon_{\mathbf{C}(\mathrm{B})}(x)=1 \quad\text{et}\quad \Delta_{\mathbf{C}(\mathrm{B})}(x) = x\otimes x\}.\end{aligned}\tag{1}$$

[61] Supposons de plus que le $\mathbf{O}_k$-module sous-jacent à $\mathbf{C}$ soit *admissible* (cf. 1.2.1), et posons

$$\mathrm{A} = \Gamma^*(\mathbf{C}) = \varprojlim_{\mathfrak{l}} \mathbf{C}(k/\mathfrak{l})^*\,.\tag{2}$$

Alors, les structures d'algèbres sur chaque $\mathbf{C}(k/\mathfrak{l})^*$ munissent A d'une structure de k-algèbre profinie. Pour tout objet B de $\mathbf{Alf}_{/k}$, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{Spf}(\mathrm{B}),\mathrm{Spf}(\mathrm{A})) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(\mathrm{A},\mathrm{B}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/\mathrm{B}}}(\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathrm{B},\mathrm{B}).\tag{3}$$

Supposons enfin que $\mathbf{C}$ soit un $\mathbf{O}_k$-module *plat*. Alors, d'après 1.2.3.E, $\mathrm{A} = \Gamma^*(\mathbf{C})$ est un k-module pseudocompact *projectif*. De plus, on a vu dans la démonstration de *loc. cit.* que, si $\mathfrak{l}_0$ est un idéal ouvert de k contenu dans le noyau de $k \to \mathrm{B}$, on a des isomorphismes

$$\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}\mathrm{B} = \varprojlim_{\mathfrak{l}} \mathbf{C}(k/\mathfrak{l})^* \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{B} \simeq \mathrm{Hom}_{k/\mathfrak{l}_0}(\mathbf{C}(k/\mathfrak{l}_0),\mathrm{B}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{B}}(\mathbf{C}(\mathrm{B}),\mathrm{B})\tag{4}$$

et nous noterons $\mathbf{C}(\mathrm{B})^*$ le terme de droite. Enfin, d'après le lemme 1.3.5.A appliqué à l'anneau artinien B, on a un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\text{B-coalg.}}(\mathrm{B},\mathbf{C}(\mathrm{B})) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/\mathrm{B}}}(\mathbf{C}(\mathrm{B})^*,\mathrm{B}).\tag{5}$$

Alors, en combinant (1), (5), (4), (3) et (2), on obtient, lorsque $\mathbf{C}$ est une $\mathbf{O}_k$-coalgèbre *plate*, un isomorphisme de foncteurs :

$$\mathrm{Spf}^*(\mathbf{C}) \simeq \mathrm{Spf}(\mathrm{A}) = \mathrm{Spf}(\Gamma^*(\mathbf{C})).\tag{$\star$}$$

Par conséquent, si l'on note $\mathscr{A}(\mathrm{X})$ l'algèbre affine d'une k-variété formelle X, on obtient, en tenant-compte de 1.2.3.E :

Proposition 1.3.5.D. — (i) *Les foncteurs* $\mathrm{X}\mapsto\mathbf{H}(\mathrm{X}) = \mathbf{V}_k^f(\mathscr{A}(\mathrm{X}))$ *et* $\mathbf{C}\mapsto\mathrm{Spf}^*(\mathbf{C}) = \mathrm{Spf}(\Gamma^*(\mathbf{C}))$ *définissent une* équivalence *entre la catégorie des* k-variétés formelles topologiquement plates *et celle des* $\mathbf{O}_k$-coalgèbres plates.

(ii) *De plus, cette équivalence* « commute au changement de base » *: si* $k\to\mathrm{K}$ *est un morphisme d'anneaux pseudocompacts, alors* $\mathrm{X}\mathbin{\widehat{\otimes}}_k\mathrm{K}$ *correspond à* $\mathbf{H}(\mathrm{X})\otimes_k\mathrm{K}$.

[61] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

1.3.6. — Dans la suite de cet exposé, nous définirons plusieurs fois une k-variété formelle topologiquement plate X en exhibant la coalgèbre $\mathbf{H}(\mathrm{X})$. Il nous faudra alors interpréter au moyen de $\mathbf{H}(\mathrm{X})$ certaines propriétés géométriques de X. Nous donnons ici un exemple de cette situation : supposons donnée une section σ du morphisme structural $\mathrm{X} \to \mathrm{Spf}(k)$ et demandons-nous sous quelle condition σ induit un isomorphisme des espaces topologiques sous-jacents. [62]

Pour commencer, supposons k artinien. Soient $(\mathrm{H}, \Delta, \varepsilon)$ une k-coalgèbre plate, $\mathrm{H}^+ = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$ et $\mathrm{A} = \mathrm{H}^*$ la k-algèbre profinie duale de H. Supposons donné un morphisme de k-coalgèbres $k \to \mathrm{H}$, c.-à-d., un élément ϕ de H tel que $\varepsilon(\phi) = 1$ et $\Delta(\phi) = \phi \otimes \phi$. D'une part, ϕ définit un morphisme continu d'algèbres $\Phi : \mathrm{A} \to k$, et donc une section $\sigma : \mathrm{Spf}(k) \to \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ de la projection $\mathrm{Spf}(\mathrm{A}) \to \mathrm{Spf}(k)$.

D'autre part, on définit des sous-k-modules de H en posant $\mathrm{H}_0 = k\phi$ et, pour $n \geqslant 1$, **503**

$$\mathrm{H}_n = \{x \in \mathrm{H} \mid \Delta(x) - x \otimes \phi \in \mathrm{H}_{n-1} \otimes \mathrm{H}^+\};$$

ceci vaut aussi pour $n = 0$ si l'on pose $\mathrm{H}_{-1} = (0)$. On voit, par récurrence sur n, que $\mathrm{H}_{n-1} \subset \mathrm{H}_n$. On dira que $\mathrm{H}_0 \subset \mathrm{H}_1 \subset \cdots$ est la *filtration de* H *définie par* ϕ.

Remarque. — Comme $\Delta(\mathrm{H}_n) \subset \mathrm{H}_n \otimes \mathrm{H}_0 \oplus \mathrm{H}_{n-1} \otimes \mathrm{H}^+$, on a $\Delta(\mathrm{H}_n) \subset \mathrm{H}_n \otimes \mathrm{H}$. Puisque Δ est cocommutative (i.e. $\sigma \circ \Delta = \Delta$, où $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$), on a également $\Delta(\mathrm{H}_n) \subset \mathrm{H} \otimes \mathrm{H}_n$. Lorsque H/H_n est *plat* sur k, il en résulte que H_n est une sous-coalgèbre de H (voir aussi 1.3.6.A (iii) ci-dessous). Mais en général, $\Delta : \mathrm{H}_n \to \mathrm{H}_n \otimes \mathrm{H}$ ne se factorise pas à travers $\mathrm{H}_n \otimes \mathrm{H}_n$. [63]

Lemme 1.3.6.A. — *Soient k un anneau* artinien, H *une k-coalgèbre* plate, $\mathrm{A} = \mathrm{H}^*$ *la k-algèbre profinie duale, ϕ un élément de* H *tel que $\varepsilon(\phi) = 1$ et $\Delta(\phi) = \phi \otimes \phi$. Soient $\Phi : \mathrm{A} \to k$ le morphisme continu d'algèbres, $\sigma : \mathrm{Spf}(k) \to \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ la section de $\mathrm{Spf}(\mathrm{A}) \to \mathrm{Spf}(k)$, et (H_n) la filtration de* H *définis par ϕ. Notons $\mathrm{I} = \mathrm{Ker}\,\Phi$.*

(i) *Pour tout $n \geqslant 1$, H_{n-1} est l'orthogonal dans* H *de l'adhérence $\overline{\mathrm{I}^n}$ de I^n.*

(ii) *Par conséquent, σ induit une bijection des ensembles sous-jacents si et seulement si $\mathrm{H} = \bigcup_n \mathrm{H}_n$.* [64]

(iii) *Si de plus chaque H/H_n est* plat *sur k, alors, pour tout $n \geqslant 0$,*

$$(*) \qquad \Delta(\mathrm{H}_n) \subset \sum_{i=0}^{n} \mathrm{H}_i \otimes \mathrm{H}_{n-i}\,;$$

en particulier, chaque H_n est alors une sous-coalgèbre *de* H.

---

[62] N.D.E. : Dans le lemme 1.3.6.A qui suit, on a détaillé la démonstration des points (i) et (ii), et l'on a ajouté le point (iii).

[63] N.D.E. : Par exemple, soient k_0 un corps, $k = k_0[\mathrm{T}]/(\mathrm{T}^n)$, où $n \geqslant 4$, $\mathrm{H} = k\,\phi \oplus k\,x$, avec $\varepsilon(x) = 0$ et $\Delta(x) = x \otimes \phi + \phi \otimes x + t\,x \otimes x$, où t est l'image de T dans k. Alors, $\mathrm{H}_i = k\,\phi \oplus t^{n-i}\,x$ pour $i = 0, \ldots, n$ mais, pour $2 \leqslant i \leqslant n-2$, $\Delta(t^{n-i}\,x)$ n'appartient pas à l'image de $\mathrm{H}_i \otimes \mathrm{H}_i$ dans $\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}$.

[64] N.D.E. : Dans ce cas, on dit que la coalgèbre H est *connexe*, cf. l'ajout 2.9.

Démonstration. Notons que, pour tout $x \in \mathrm{H}$, l'application $\mathrm{A} \to k$, $f \mapsto f(x)$ est continue, donc si I^n est annulé par x, il en est de même de son adhérence $\overline{\mathrm{I}^n}$. On pose alors, pour tout $n \geqslant 1$,

$$(\overline{\mathrm{I}^n})^{\perp} = \{x \in \mathrm{H} \mid f(x) = 0, \quad \text{pour tout } f \in \overline{\mathrm{I}^n}\}.$$

Supposons que $\sigma : \mathfrak{m} \mapsto \Phi^{-1}(\mathfrak{m})$ soit une bijection de $\mathrm{Spf}(k)$ sur $\mathrm{Spf}(\mathrm{A})$. Comme I est contenu dans l'intersection des $\Phi^{-1}(\mathfrak{m})$, il résulte de 0.1.2 que la suite des idéaux (I^n) tend vers 0. Soit alors $x \in \mathrm{H}$; comme $\mathrm{J}(x) = \{f \in \mathrm{A} \mid f(x) = 0\}$ est un sous-k-module ouvert et fermé de A, il contient $\overline{\mathrm{I}^n}$ pour n assez grand, autrement dit, $x \in (\overline{\mathrm{I}^n})^{\perp}$ pour n assez grand.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{H} = \bigcup_n (\overline{\mathrm{I}^n})^{\perp}$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier ouvert de A ; d'après la définition de la topologie de A (0.2.2), $\mathfrak{p}$ contient un sous-k-module ouvert de la forme

$$\mathscr{V}(x_1, \ldots, x_s) = \{f \in \mathrm{A} \mid f(x_1) = \cdots = f(x_s) = 0\}.$$

D'après l'hypothèse, il existe un entier n tel que $x_1, \ldots, x_s \in (\overline{\mathrm{I}^n})^{\perp}$, et donc $\mathrm{I}^n \subset \mathfrak{p}$. De plus, comme k est artinien, $\mathrm{Spf}(k)$ est un ensemble fini $\{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r\}$ et il existe un entier $t \geqslant 1$ tel que $(\prod_i \mathfrak{m}_i)^t = 0$, d'où

$$\prod_i \Phi^{-1}(\mathfrak{m}_i)^t \subset \mathrm{I}.$$

Donc $\mathfrak{p}$ contient le produit des $\Phi^{-1}(\mathfrak{m}_i)^{tn}$; puisque $\mathfrak{p}$ est premier, il en résulte que $\mathfrak{p}$ contient, donc égale, l'un des $\Phi^{-1}(\mathfrak{m}_i)$. On a ainsi démontré que :

$$\sigma \text{ est une bijection } \iff \mathrm{H} = \bigcup_n (\overline{\mathrm{I}^n})^{\perp}. \qquad [65]$$

D'autre part, on a $\mathrm{H} = k\phi \oplus \mathrm{H}^+$; notons π la projection $\mathrm{H} \to \mathrm{H}^+$ de noyau $k\phi$. Pour tout $n \geqslant 0$, soient Δ^n la comultiplication « itérée » $\mathrm{H} \to \mathrm{H}^{\otimes(n+1)}$, $\overline{\Delta^n}$ la composée de Δ^n avec la projection $\pi^{\otimes(n+1)} : \mathrm{H}^{\otimes(n+1)} \to (\mathrm{H}^+)^{\otimes(n+1)}$, et

$$\mathrm{H}'_n = \mathrm{Ker}(\overline{\Delta^n}) = \big\{x \in \mathrm{H} \mid \Delta^n(x) \in \sum_{i=0}^{n} \mathrm{H}^{\otimes(n-i)} \otimes \mathrm{H}_0 \otimes \mathrm{H}^{\otimes i}\big\}.$$

(On pose $\Delta^0 = \mathrm{id}_{\mathrm{H}}$, d'où $\mathrm{H}'_0 = \mathrm{H}_0$). On voit facilement, par récurrence sur n, que

$$(*) \qquad \mathrm{H}_n \subset \mathrm{H}'_n \subset (\overline{\mathrm{I}^{(n+1)}})^{\perp}.$$

Jusqu'à présent, on n'a pas utilisé l'hypothèse que H soit plat sur k. Supposons maintenant H plat, donc *projectif* sur k, de sorte que $\mathrm{A}^{\dagger} = \mathrm{H}$, d'après 0.2.2, et montrons que $\mathrm{H}_n = (\overline{\mathrm{I}^{(n+1)}})^{\perp}$. C'est clair pour $n = 0$. Supposons-le donc vérifié pour $n < r$. Alors H_{r-1} est le noyau du morphisme $\mathrm{H} \to (\overline{\mathrm{I}^r})^{\dagger}$ et donc, puisque H^+ est plat, le morphisme

$$(\mathrm{H}/\mathrm{H}_{r-1}) \otimes \mathrm{H}^+ \longrightarrow (\overline{\mathrm{I}^r})^{\dagger} \otimes \mathrm{H}^+$$

[65] N.D.E. : Ceci vaut également sans supposer H *cocommutative* (k restant un anneau commutatif artinien) : dans ce cas, une base de voisinages de 0 dans $\mathrm{A} = \mathrm{H}^*$ est donnée par les idéaux bilatères J tels que A/J soit de longueur finie sur k, et la démonstration précédente montre que $\mathrm{H} = \bigcup_n (\overline{\mathrm{I}^n})^{\perp}$ si et seulement si les $\Phi^{-1}(\mathfrak{m}_i)$ sont les seuls idéaux premiers ouverts de A.

est injectif. D'autre part, l'hypothèse entraîne que I est un k-module pseudocompact projectif (car facteur direct de $\mathrm{A} = \mathrm{H}^*$), d'où, d'après 0.3.6,

$$(\overline{\mathrm{I}^r} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{I})^\dagger \simeq (\overline{\mathrm{I}^r})^\dagger \otimes \mathrm{I}^\dagger = (\overline{\mathrm{I}^r})^\dagger \otimes \mathrm{H}^+.$$

Alors, la suite exacte :

$$\overline{\mathrm{I}^r} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}/\overline{\mathrm{I}^{r+1}} \longrightarrow 0$$

donne par dualité la suite exacte : **504**

$$(\overline{\mathrm{I}^r})^\dagger \otimes \mathrm{H}^+ \xleftarrow{\;\delta\;} \mathrm{H} \longleftarrow (\mathrm{A}/\overline{\mathrm{I}^{r+1}})^\dagger \longleftarrow 0, \tag{1}$$

où δ est obtenu en composant Δ_{H} avec la projection :

$$\mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H} \otimes \mathrm{H}^+ \longrightarrow (\mathrm{H}/\mathrm{H}_{r-1}) \otimes \mathrm{H}^+ \hookrightarrow (\overline{\mathrm{I}^r})^\dagger \otimes \mathrm{H}^+. \tag{2}$$

Or, pour tout $u \in \mathrm{H}$, la projection de $\Delta(u)$ sur $\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}^+$ est $\Delta(u) - u \otimes \phi$. Alors, (1) et (2) montrent que si u appartient à $(\mathrm{A}/\overline{\mathrm{I}^{r+1}})^\dagger = (\overline{\mathrm{I}^{r+1}})^\perp$, alors $\Delta(u) - u \otimes \phi$ appartient au noyau de l'application $\mathrm{H} \otimes \mathrm{H}^+ \to (\mathrm{H}/\mathrm{H}_{r-1}) \otimes \mathrm{H}^+$, c'est-à-dire à $\mathrm{H}_{r-1} \otimes \mathrm{H}^+$, et donc $u \in \mathrm{H}_r$. Ceci achève la démonstration des points (i) et (ii), et montre aussi que $\mathrm{H}_n = \mathrm{Ker}(\overline{\Delta^n})$.

Démontrons (iii). Pour tout $i \geqslant 0$, posons $\mathrm{H}_i^+ = \mathrm{H}_i \cap \mathrm{H}^+$. Soit $n \geqslant 1$. Pour tout $x \in \mathrm{H}_n$, $\overline{x} = x - \varepsilon(x)\phi$ appartient à H_n^+ et l'on a :

$$\Delta(x) = \varepsilon(x)\, \phi \otimes \phi + \overline{x} \otimes \phi + \phi \otimes \overline{x} + \overline{\Delta}(\overline{x}).$$

Donc, il suffit de montrer que :

$$\overline{\Delta}(\mathrm{H}_n^+) \subset \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{H}_i^+ \otimes \mathrm{H}_{n-i}^+.$$

Pour tout $i = 0, \ldots, n-1$, $\overline{\Delta^n}$ se factorise en :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^+ \arrow[r, "\overline{\Delta}"] & \mathrm{H}^+ \otimes \mathrm{H}^+ \arrow[r, "\overline{\Delta^i} \otimes \overline{\Delta^{n-i-1}}"] \arrow[d] & (\mathrm{H}^+)^{\otimes(i+1)} \otimes (\mathrm{H}^+)^{\otimes(n-i)} \\
& \dfrac{\mathrm{H}^+}{\mathrm{H}_i^+} \otimes \dfrac{\mathrm{H}^+}{\mathrm{H}_{n-i-1}^+} \arrow[r, "f"] & \dfrac{\mathrm{H}^+}{\mathrm{H}_i^+} \otimes (\mathrm{H}^+)^{\otimes(n-i)}. \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

De plus, comme $\mathrm{H}^+/\mathrm{H}_i^+$ et $(\mathrm{H}^+)^{\otimes(n-i)}$ sont plats, les applications f et g ci-dessus sont injectives. Il en résulte que $\overline{\Delta(\mathrm{H}_n^+)}$ est contenu dans $\mathrm{H}_i^+ \otimes \mathrm{H}^+ + \mathrm{H}^+ \otimes \mathrm{H}_{n-i-1}^+$, pour tout $i = 0, \ldots, n-1$. Le point (iii) découle alors du lemme ci-dessous, appliqué à $\mathrm{M} = \mathrm{H}^+$ et $\mathrm{E}_i = \mathrm{H}_{i-1}^+$.

Lemme 1.3.6.B. — *Soient k un anneau,* $0 = \mathrm{E}_0 \subset \mathrm{E}_1 \subset \cdots \mathrm{E}_n \subset \mathrm{M}$ *des k-modules. On suppose* M/E_i plat *pour tout i. Alors on a l'égalité :*

$$\bigcap_{i=0}^{n} (\mathrm{E}_i \otimes \mathrm{M} + \mathrm{M} \otimes \mathrm{E}_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i \otimes \mathrm{E}_{n-i+1}.$$

Notons K (resp. S) le terme de gauche (resp. droite). On voit facilement que $\mathrm{S} \subset \mathrm{K}$; montrons la réciproque. Pour $i = 0, \ldots, n$, posons $\mathrm{K}_i = \mathrm{K} \cap (\mathrm{E}_i \otimes \mathrm{M})$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, comme $\mathrm{M}/\mathrm{E}_{n-i+1}$ et $\mathrm{E}_i/\mathrm{E}_{i-1}$ sont plats, l'application τ_i ci-dessous est injective, et l'application composée :

$$(\mathrm{E}_i/\mathrm{E}_{i-1}) \otimes \mathrm{M} \longrightarrow (\mathrm{E}_i/\mathrm{E}_{i-1}) \otimes (\mathrm{M}/\mathrm{E}_{n-i+1}) \overset{\tau_i}{\hookrightarrow} (\mathrm{M}/\mathrm{E}_{i-1}) \otimes (\mathrm{M}/\mathrm{E}_{n-i+1})$$

a pour noyau $(\mathrm{E}_i/\mathrm{E}_{i-1}) \otimes \mathrm{E}_{n-i+1}$. Comme l'image de K_i dans $(\mathrm{E}_i \otimes \mathrm{M})/(\mathrm{E}_{i-1} \otimes \mathrm{M})$ est contenue dans, et contient, ce noyau, on en déduit que

$$\mathrm{K}_i = \mathrm{K}_{i-1} + \mathrm{E}_i \otimes \mathrm{E}_{n-i+1}\,,$$

d'où le lemme.

(66) Pour terminer ce paragraphe, revenons à un anneau pseudocompact arbitraire k. Soient $(\mathbf{H}, \Delta, \varepsilon)$ une $\mathbf{O}_k$-coalgèbre plate, $\mathbf{H}^+ = \mathrm{Ker}(\varepsilon)$, $\mathrm{A} = \Gamma^*(\mathbf{H})$ la k-algèbre profinie duale, $\mathrm{X} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$, de sorte que $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathrm{X})$ (cf. 1.3.5). Supposons donné un morphisme de $\mathbf{O}_k$-coalgèbres $\phi : \mathbf{O}_k \to \mathbf{H}$; il définit une morphisme continu de k-algèbres $\mathrm{A} \to k$, et donc une section σ du morphisme structural $\mathrm{X} \to \mathrm{Spf}(k)$.

Pour tout objet B de $\mathbf{Alf}_{/k}$, on note $\mathbf{H}_0(\mathrm{B}) = \phi(\mathrm{B}) = \mathrm{B}\phi_{\mathrm{B}}$, où ϕ_{B} est l'élément $\phi(1_{\mathrm{B}})$ de $\mathbf{H}(\mathrm{B})$ et l'on définit des sous-$\mathbf{O}_k$-modules $\mathbf{H}_n$ de $\mathbf{H}$, en posant, pour $n \geqslant 1$,

$$\mathbf{H}_n(\mathrm{B}) = \{u \in \mathbf{H}(\mathrm{B}) \mid \Delta(u) - u \otimes \phi_{\mathrm{B}} \in \mathbf{H}_{n-1}(\mathrm{B}) \otimes \mathbf{H}^+(\mathrm{B})\}.$$

On obtient ainsi une filtration $\mathbf{H}_0 \subset \mathbf{H}_1 \subset \cdots$ de $\mathbf{H}(\mathrm{X})$. D'après ce qui précède, on a :

Proposition. — *Pour que σ induise un isomorphisme sur les espaces topologiques sous-jacents, il faut et il suffit que $\mathbf{H}(\mathrm{X})$ soit la réunion des $\mathbf{H}_n$.*

1.4. Théorème. — *Soient k un anneau pseudocompact et $d_0, d_1 : \mathrm{X}_1 \rightrightarrows \mathrm{X}$ un couple d'équivalence de $\mathbf{Vaf}_{/k}$* (cf. Exp. V, § 2.b) *tel que d_1 soit* topologiquement plat.

(i) *La projection canonique de* X *sur* X/X_1 $(= \mathrm{Coker}(d_0, d_1))$ *est* surjective et topologiquement plate, *et le morphisme* $\mathrm{X}_1 \to \mathrm{X} \times_{\mathrm{X}/\mathrm{X}_1} \mathrm{X}$ *de composantes d_0 et d_1 est un* isomorphisme.

(ii) *Si* X *est topologiquement plat sur k, il en est de même de* X/X_1.

Notons d'abord que (ii) découle de (i), d'après 1.3.3 (ii). La démonstration de (i) occupe les paragraphes 1.4.1, 1.4.2 et 1.4.3.

1.4.1. — *Montrons d'abord qu'on peut se ramener au cas où* X *a un seul point.* Comme nous avons affaire à un couple d'équivalence, on voit comme dans l'Exp. V, § 3.e), qu'on
505 définit une relation d'équivalence dans l'ensemble sous-jacent à X en déclarant que deux points x, y sont équivalents s'il existe un point z de X_1 tel que $d_0(z) = y$ et $d_1(z) = x$. On peut évidemment supposer sans inconvénient que X contient une seule classe d'équivalence pour cette relation, autrement dit que X/X_1 a un seul point (voir la construction de X/X_1 donnée en 1.2).

(66) N.D.E. : On a ajouté ce qui suit ; l'original se limitait au cas où k est artinien.

Dans ce cas, soient x un point quelconque de X et U la variété formelle qui a x pour seul point et qui a même anneau local que X en x. On voit alors comme dans l'Exp. V, § 6, que la relation d'équivalence induite par (d_0, d_1) sur U vérifie encore les hypothèses du théorème et qu'il suffit de faire la preuve pour cette dernière relation d'équivalence (U est une « quasi-section »).

Rappelons brièvement le principe de la démonstration faite dans l'Exp. V, § 6. Posons $\mathrm{V} = d_0^{-1}(\mathrm{U}) = \mathrm{U} \times_{i,d_0} \mathrm{X}_1$, où i est l'inclusion de U dans X ; soient u et v les morphismes de source V induits respectivement par d_0 et d_1 :

$$\mathrm{X} \xleftarrow{\;v\;} \mathrm{V} \xrightarrow{\;u\;} \mathrm{U}\,.$$

Il est clair que u et v sont topologiquement plats et que u est surjectif ; comme X contient une seule classe d'équivalence, v est surjectif. Si (v_0, v_1) est l'image réciproque du couple d'équivalence (d_0, d_1) par v (cf. V, 3.a)), il résulte de V, 3.c) et 3.d), que X/X_1 et le quotient de U par la relation d'équivalence induite par (d_0, d_1) s'identifient tous deux à $\mathrm{Coker}(v_0, v_1)$. On voit alors, comme dans la démonstration de V, 6.1, que si la conclusion du théorème 1.4 est vérifiée pour U, elle l'est aussi pour X.

1.4.2. — On se trouve ainsi ramené au cas où X a un seul point. [67] Considérons alors le diagramme commutatif suivant (cf. V, § 1, (0,1,2)) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{X}_2 \arrow[r, shift left, "d_1'"] \arrow[r, shift right, "d_0'"'] \arrow[d, "d_2'"'] & \mathrm{X}_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "d_1"] & \mathrm{X} \arrow[d] \\
\mathrm{X}_1 \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & \mathrm{X} \arrow[r] & \mathrm{X}/\mathrm{X}_1
\end{tikzcd}$$

où X_2 est le produit fibré $\mathrm{X}_1 \underset{d_1,d_0}{\times} \mathrm{X}_1$, et où d_0', d_1' et d_2' sont respectivement les **506**
morphismes « $(x,y,z) \mapsto (x,y)$ », « $(x,y,z) \mapsto (x,z)$ » et « $(x,y,z) \mapsto (y,z)$ ». [68]

Si B, A, A_1 et A_2 désignent respectivement les algèbres affines de X/X_1, X, X_1 et X_2, le diagramme précédent induit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_1 \arrow[l, shift right, "j_1"'] \arrow[l, shift left, "j_0"] & \mathrm{A} \arrow[l, "i_0"'] \\
\mathrm{A}_1 \arrow[u, "j_2"] & \mathrm{A} \arrow[l, shift right, "i_1"'] \arrow[l, shift left, "i_0"] \arrow[u, "i_1"'] & \mathrm{B} \arrow[l, "i"'] \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

dans lequel les deux lignes sont exactes et les carrés déterminés par (i_0, j_0) et (i_1, j_1) cocartésiens. Comme le morphisme $\mathrm{X}_1 \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ de composantes d_0 et d_1 est un

(67) N.D.E. : On peut donc supposer k *local*.
(68) N.D.E. : cf. Exp. V, § 2.b).

monomorphisme par hypothèse, le morphisme $\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}_k}\mathrm{A}\to\mathrm{A}_1$ de composantes i_0 et i_1 est surjectif, d'après la proposition 1.3.

Cela signifie que i_1 fait de A_1 un A-module pseudocompact (supposé topologiquement libre), engendré par $i_0(\mathrm{A})$. Comme A est local, le lemme 1.4.3 ci-dessous entraîne l'existence d'un k-module topologiquement libre V et d'un morphisme de k-modules pseudocompacts $f:\mathrm{V}\to\mathrm{A}$ tels que le morphisme

$$\alpha_1:\ \mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}_k}\mathrm{V}\longrightarrow\mathrm{A}_1,\qquad a\mathbin{\widehat{\otimes}}v\mapsto i_1(a)\cdot i_0(f(v))$$

507 soit inversible. Soient $\alpha:\mathrm{B}\widehat{\otimes}_k\mathrm{V}\to\mathrm{A}$ et $\alpha_2:\mathrm{A}_1\widehat{\otimes}_k\mathrm{V}\to\mathrm{A}_2$ les morphismes :

$$b\mathbin{\widehat{\otimes}}v\mapsto i(b)\cdot f(v)\qquad\text{et}\qquad a_1\mathbin{\widehat{\otimes}}v\mapsto j_2(a_1)\cdot j_0i_0(f(v)).$$

Dans le diagramme commutatif suivant, les deux lignes sont donc exactes et les deux carrés de gauche sont cocartésiens. Comme α_1 est inversible, il en va de même pour α_2, donc pour α.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_1 \arrow[l, shift right, "j_1"'] \arrow[l, shift left, "j_0"] & \mathrm{A} \arrow[l, "i_0"'] \\
\mathrm{A}_1\mathbin{\widehat{\otimes}_k}\mathrm{V} \arrow[u, "\alpha_2"] & \mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}_k}\mathrm{V} \arrow[u, "\alpha_1"'] \arrow[l, shift right, "i_1\widehat{\otimes}\mathrm{V}"'] \arrow[l, shift left, "i_0\widehat{\otimes}\mathrm{V}"] & \mathrm{B}\mathbin{\widehat{\otimes}_k}\mathrm{V}. \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[l, "i\widehat{\otimes}\mathrm{V}"']
\end{tikzcd}$$

Ceci montre d'une part que A est topologiquement libre sur B, de pseudobase $f(\mathrm{V})$ (cf. 0.2.1), et qu'on obtient une pseudobase de A_1 sur A (où A_1 est considéré comme A-module au moyen de i_1) en prenant l'image par i_0 de $f(\mathrm{V})$; cela entraîne que le morphisme $\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{B}}}\mathrm{A}\to\mathrm{A}_1$ de composantes i_1 et i_0 est inversible :

$$\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{B}}}\mathrm{A}\simeq\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}_{\mathrm{B}}}\mathrm{B}\mathbin{\widehat{\otimes}_k}\mathrm{V}\simeq\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}_k}\mathrm{V}\simeq\mathrm{A}_1\,.$$

Ceci prouve le théorème 1.4, modulo le lemme 1.4.3 qui suit.

1.4.3. Lemme. — *Soient k un anneau pseudocompact,* A *une k-algèbre profinie* locale*,* A_1 *un* A*-module* topologiquement libre *et* $i_0:\mathrm{M}\to\mathrm{A}_1$ *un morphisme de k-modules pseudocompacts. On suppose que l'application*

$$\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}_k}\mathrm{M}\longrightarrow\mathrm{A}_1,\qquad a\mathbin{\widehat{\otimes}}m\mapsto a\cdot i_0(m)$$

est surjective*. Il existe alors un k-module* topologiquement libre V *et un morphisme de k-modules pseudocompacts* $f:\mathrm{V}\to\mathrm{M}$*, tels que l'application*

$$\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}_k}\mathrm{V}\longrightarrow\mathrm{A}_1,\qquad a\mathbin{\widehat{\otimes}}v\mapsto a\cdot i_0(f(v))$$

soit bijective.

Comme tout k-module pseudocompact est le quotient d'un k-module topologi-
508 quement libre (cf. N.D.E. (27)), on peut supposer sans inconvénient que M est topologiquement libre ; prenons donc pour M le produit direct d'une famille $(\mathrm{M}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'exemplaires de k. Dans ce cas, $\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}_k}\mathrm{M}$ n'est autre que le produit $\prod_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}_k}\mathrm{M}_i$. Comme l'application $a\mathbin{\widehat{\otimes}}m\mapsto a\cdot i_0(m)$ est surjective et que A_1 est projectif, le noyau de cette application est un facteur direct de $\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}_k}\mathrm{M}$; comme A est local, il

résulte du théorème d'échange (0.3.4) que ce noyau a pour supplémentaire un produit partiel $\prod_{i\in \mathrm{J}} \mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \mathrm{M}_i$, où J désigne une certaine partie de I. On peut donc prendre $\mathrm{V} = \prod_{i\in \mathrm{J}} \mathrm{M}_i$.

1.5. Soit k un anneau pseudocompact.

Définition. — Nous dirons qu'une famille de morphismes $f_i : \mathrm{X}_i \to \mathrm{X}$ de $\mathbf{Vaf}_{/k}$ est une *famille surjective topologiquement plate* si le morphisme $\coprod_i \mathrm{X}_i \to \mathrm{X}$, induit par les f_i, est surjectif et topologiquement plat ; cela signifie que chaque f_i est topologiquement plat et que tout point de X appartient à l'image d'au moins l'un des X_i.

Il résulte de 1.3.3 que les familles surjectives, topologiquement plates définissent une *prétopologie* sur $\mathbf{Vaf}_{/k}$ (IV 4.2.5) ; la topologie correspondante sera appelée la *topologie plate* sur $\mathbf{Vaf}_{/k}$.

D'après IV, 4.3.5, un foncteur $\mathrm{F} : (\mathbf{Vaf}_{/k})^0 \to (\mathbf{Ens})$ est un faisceau pour la topologie plate si et seulement si F transforme toute somme directe en produit direct et si la suite

$$\begin{tikzcd} \mathrm{F}(\mathrm{Y}) \arrow[r, "\mathrm{F}(f)"] & \mathrm{F}(\mathrm{X}) \arrow[r, shift left, "\mathrm{F}(\mathrm{pr}_1)"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{F}(\mathrm{pr}_2)"'] & \mathrm{F}(\mathrm{X}\times_{\mathrm{Y}}\mathrm{X}) \end{tikzcd}$$

est exacte pour tout morphisme surjectif topologiquement plat $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$.

(69) D'après IV, 4.5, la proposition 1.3.1 entraîne que la topologie plate est *moins* 509
fine que la topologie canonique, c.-à-d., pour tout objet X de $\mathbf{Vaf}_{/k}$, le foncteur $\mathbf{h}_{\mathrm{X}} : \mathrm{T} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{T},\mathrm{X})$ est un *faisceau* pour la topologie plate. (Dans la suite, on identifiera, comme d'habitude (cf. Exp. I), X à $\mathbf{h}_{\mathrm{X}}$.)

D'après IV, 4.6.5, on peut reformuler le théorème 1.4 comme suit.

Théorème. — *Soient k un anneau pseudocompact, $d_0, d_1 : \mathrm{X}_1 \rightrightarrows \mathrm{X}$ un couple d'équivalence dans $\mathbf{Vaf}_{/k}$, et X/X_1 la variété formelle quotient* (i.e. $\mathrm{Coker}(d_0, d_1)$, cf. 1.2). *Si d_1 est* topologiquement plat*, alors X/X_1 représente le* faisceau quotient *pour la topologie plate.*

1.6. Pour terminer ces généralités sur les variétés formelles, il nous reste à définir brièvement les variétés formelles étales sur k. (70)

(69) N.D.E. : On a modifié l'original dans ce qui suit. En particulier, on a remplacé l'énoncé : « si $d_0, d_1 : \mathrm{X}_1 \rightrightarrows \mathrm{X}$ est une relation d'équivalence telle que d_1 soit topologiquement plat, la formation du quotient commute avec $\mathbf{h}$ » par le théorème ci-dessous.

(70) N.D.E. : L'original continuait ainsi : « Une variété formelle X sur k est dite *étale*, si le morphisme diagonal $\Delta_{\mathrm{X}} : \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ est un isomorphisme local, c'est-à-dire si Δ_{X} induit un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}\times\mathrm{X},\Delta_{\mathrm{X}}(x)}$ sur $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ pour tout point x de X. On voit facilement à l'aide de SGA I, que cette formulation est équivalente aux deux suivantes : la variété formelle X est topologiquement plate, et, pour tout point $x \in \mathrm{X}$, de projection $s \in \mathrm{Spf}(k)$, $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \widehat{\otimes}_k \kappa(s)$ est une extension finie séparable du corps résiduel $\kappa(s)$ de s ; ou encore, si A désigne l'algèbre affine de X, les composantes locales (0.1) de $\mathrm{A} \widehat{\otimes}_k (k/\mathfrak{l})$ sont des algèbres finies et étales sur $k/\mathfrak{l}$, quel que soit l'idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de k. » Dans ce qui suit, on a rectifié l'omission de l'hypothèse de platitude dans la première condition ci-dessus, et détaillé l'équivalence desdites conditions.

Rappels 1.6.A. — (i) Rappelons d'abord (cf. EGA 0_{IV}, 19.10.2) qu'une k-algèbre topologique A est dite *formellement étale* sur k (pour les topologies données sur k et A, resp. pour les topologies discrètes) si, pour toute k-algèbre topologique *discrète* C (pas nécessairement artinienne), et tout idéal nilpotent J de C, tout morphisme continu de k-algèbres $\mathrm{A} \to \mathrm{C}/\mathrm{J}$ se relève de façon unique en un morphisme continu $\mathrm{A} \to \mathrm{C}$ (A étant munie de la topologie donnée, resp. de la topologie discrète). On voit aussitôt que cette propriété est préservée par changement de base, c.-à-d., pour tout morphisme $k \to k'$ d'anneaux pseudocompacts, $\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_k\, k'$ est alors formellement étale sur k'. D'autre part, on voit facilement qu'il suffit de vérifier la condition de relèvement pour tout idéal J de carré nul, cf. EGA IV_4, 17.1.2 (ii). On dit que A est *étale* sur k si elle est formellement étale sur k pour les topologies discrètes, et si de plus A est une k-algèbre de présentation finie (cf. EGA IV_4, 17.3.2 (ii)). Dans la suite, k étant un anneau pseudocompact et A une k-algèbre profinie, on utilisera « formellement étale » au sens des topologies données (sauf mention du contraire).

(ii) Rappelons aussi que si $\mathrm{F} \in k[\mathrm{T}]$ est un polynôme polynôme unitaire de degré $d \geqslant 1$, *séparable* (i.e. tel que l'idéal engendré par F et son polynôme dérivé F' soit $k[\mathrm{T}]$), alors la k-algèbre $\mathrm{B} = k[\mathrm{T}]/(\mathrm{F})$ (qui est libre de rang d sur k, et munie de la topologie produit) est formellement étale sur k. En effet, soient C une k-algèbre discrète (de sorte que le noyau de $k \to \mathrm{C}$ est un idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de k), J un idéal de C de carré nul, et $\phi : \mathrm{B} \to \mathrm{C}/\mathrm{J}$ un morphisme continu de k-algèbres. Notons que, B étant un k-module libre de rang fini, $\mathfrak{l}\mathrm{B}$ est un idéal ouvert de B, donc tout relèvement $\Phi : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ de ϕ est automatiquement continu. Soient t l'image de T dans B et u_0 un relèvement arbitraire de $\phi(t)$ dans C, alors $\mathrm{F}(u_0) \in \mathrm{J}$ (puisque $\phi(t)$ est racine de F) ; d'autre part il existe $\mathrm{G}, \mathrm{H} \in k[\mathrm{T}]$ tels que $\mathrm{GF} + \mathrm{HF}' = 1$, d'où $\mathrm{H}(u_0)\mathrm{F}'(u_0) = 1 - \mathrm{G}(u_0)\mathrm{F}(u_0)$, et le terme de droite est inversible, puisque $\mathrm{F}(u_0)$ est de carré nul, donc $\mathrm{F}'(u_0)$ est inversible. Cherchons $h \in \mathrm{J}$ tel que $x = x_0 + h$ soit racine de F ; ceci équivaut à $0 = \mathrm{F}(u) = \mathrm{F}(u_0) + \mathrm{F}'(u_0)h$, et comme $\mathrm{F}'(u_0)$ est inversible, ceci a pour unique solution $h = -\mathrm{F}'(u_0)^{-1}\mathrm{F}(u_0) \in \mathrm{J}$. Bien entendu, la même démonstration (sans faire d'hypothèses de continuité pour les morphismes $k \to \mathrm{C}$, ϕ et Φ) montre que B est aussi une k-algèbre étale.

(iii) Rappelons enfin que si A est un produit fini $\mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_n$, alors A est formellement étale sur k si et seulement si les A_i le sont. [71] En effet, il suffit de le voir pour $n = 2$, dans ce cas soit $e = 1_{\mathrm{A}_1}$ l'idempotent tel que $\mathrm{A}_1 = \mathrm{A}e$ et $\mathrm{A}_2 = \mathrm{A}(1-e)$, et supposons donné un morphisme continu $\mathrm{A} \to \mathrm{C}/\mathrm{J}$, où J est un idéal de carré nul. Comme le polynôme $\mathrm{F} = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X}$ est séparable (on a $\mathrm{F}' = 2\mathrm{X} - 1$ et $(\mathrm{F}')^2 - 4\mathrm{F} = 1$), l'idempotent $\phi(e)$ de C/J se relève de façon unique en un idempotent f de C, d'où $\mathrm{C} = \mathrm{C}f \oplus \mathrm{C}(1-f)$, et alors se donner un relèvement de Φ équivaut à se donner deux morphismes $\Phi_1 : \mathrm{A}_1 \to \mathrm{C}f$ et $\Phi_2 : \mathrm{A}_2 \to \mathrm{C}(1-f)$, relevant les restrictions de ϕ à A_1 et A_2. Le même argument montre que si e est un idempotent de k tel que $\mathrm{A} = \mathrm{A}e$, alors A est formellement étale sur k si et seulement si elle l'est sur le localisé k_e (qui s'identifie à ke).

[71] N.D.E. : Signalons au passage que la démonstration donnée dans EGA 0_{IV}, 19.3.5 (v) est erronée.

Soient maintenant X une k-variété formelle et A son algèbre affine. Si x est un point de X (i.e. un idéal maximal ouvert $\mathfrak{m}$ de A), d'image s dans $\mathrm{Spf}(k)$, on notera $k_{\mathfrak{m}}$ ou k_s la composante locale de k correspondant à s.

Définition 1.6.B. — Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) A est *formellement étale* sur k.

(b) Pour tout $\mathfrak{m} \in \Upsilon(\mathrm{A})$, $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ est *formellement étale* sur k (ou sur $k_{\mathfrak{m}}$).

(c) Pour tout idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de k, $\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_k(k/\mathfrak{l}) = \mathrm{A}/\overline{\mathrm{A}\mathfrak{l}}$ est formellement étale sur $k/\mathfrak{l}$.

(d) Pour tout $\mathfrak{m} \in \Upsilon(\mathrm{A})$ et tout idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de $k_{\mathfrak{m}}$, $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}/\overline{\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}\mathfrak{l}}$ est formellement étale sur $k_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{l}$.

On dira que X est *étale* sur k si elle vérifie ces conditions, et on notera $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Vaf}_{/k}$ formée des variétés formelles étales sur k. [72]

Remarquons que si $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{C}/\mathrm{J}$ un morphisme continu de k-algèbres, où C est une k-algèbre discrète et J un idéal de carré nul, alors $\mathrm{I} = \mathrm{Ker}(\phi)$ est un idéal ouvert de A, donc A/I est artinien, donc I n'est contenu que dans un nombre fini d'idéaux maximaux ouverts $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$, donc contient le produit des composantes $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}}$ pour $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_i$, qui égale $\mathrm{A}(1-e)$ où e désigne l'idempotent de A tel que $\mathrm{A}e = \prod_{i=1}^r \mathrm{A}_{\mathfrak{m}_i}$. Donc $\phi(e) = 1_{\mathrm{C}/\mathrm{J}}$ et il revient au même de se donner un relèvement continu de ϕ ou du morphisme de $\mathrm{A}e \simeq \mathrm{A}/\mathrm{A}(1-e)$ vers C/J, induit par ϕ.

D'autre part, on sait (cf. N.D.E. (24)) que $\mathrm{A} \simeq \varprojlim_{\mathfrak{l}} \mathrm{A}/\overline{\mathrm{A}\mathfrak{l}}$. Compte-tenu de ces remarques et des rappels précédents, on obtient facilement l'équivalence des conditions indiquées.

Définitions 1.6.C. — Notons $\kappa(k) = \prod_{s \in \mathrm{Spf}(k)} \kappa(s)$, muni de la topologie produit, i.e. la variété formelle $\mathrm{Spf}(\kappa(k))$ est la somme directe des $\mathrm{Spec}\,\kappa(s)$, pour $s \in \mathrm{Spf}(k)$. D'autre part, on notera $\mathrm{S}_{\kappa(k)}$ le *schéma* somme directe des $\mathrm{Spec}\,\kappa(s)$, pour $s \in \mathrm{Spf}(k)$.

Pour toute variété formelle X sur k, on notera $\mathrm{X}_\kappa = \mathrm{X}\,\widehat{\otimes}_k\,\kappa(k)$ la variété formelle sur $\kappa(k)$ obtenue par changement de base, i.e. X_κ a les même points que X et pour tout $x \in \mathrm{X}$, de projection s sur $\mathrm{Spf}(k)$, on a $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_\kappa,x} = \mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \otimes_k \kappa(s)$. Ce foncteur de changement de base $\mathbf{Vaf}_{/k} \to \mathbf{Vaf}_{/\kappa(k)}$ envoie $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k}$ dans $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/\kappa(k)}$ (cf. 1.6.A (i)).

On a alors (cf. SGA 1, I 6.2) :

Lemme 1.6.D. — *Pour tout* $\mathrm{Y} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k}$ *et* $\mathrm{X} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vaf}_{/k}$, *l'application canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/\kappa(k)}}(\mathrm{X}_\kappa,\mathrm{Y}_\kappa)$$

est bijective. *En particulier, le foncteur* $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k} \to \mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/\kappa(k)}$ *est* pleinement fidèle (*et on verra plus bas que c'est une équivalence*).

En effet, notons A (resp. B) l'algèbre affine de X (resp. Y) et $\mathfrak{r}$ le radical de k, supposons donné un morphisme $\mathrm{B}\,\widehat{\otimes}_k\,\kappa(k) \to \mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_k\,\kappa(k)$ ou, ce qui revient au même, un morphisme $\phi : \mathrm{B} \to \mathrm{A}/\overline{\mathfrak{r}\mathrm{A}}$.

[72] N.D.E. : Notons que $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k}$ est stable par limites projectives *finies*.

Pour tout idéal ouvert $\mathfrak{l}$ de k, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathfrak{r}^n \subset \mathfrak{l}$, d'où $(\mathfrak{r}\mathrm{A})^n \subset \mathfrak{l}\mathrm{A} \subset \overline{\mathfrak{l}\mathrm{A}}$, et comme l'application de multiplication $m_{n-1} : \mathrm{A}^n \to \mathrm{A}$ est continue, on a donc aussi $(\overline{\mathfrak{r}\mathrm{A}})^n \subset \overline{\mathfrak{l}\mathrm{A}}$, i.e. $\overline{\mathfrak{r}\mathrm{A}}/\overline{\mathfrak{l}\mathrm{A}}$ est un idéal nilpotent de $\mathrm{A}/\overline{\mathfrak{l}\mathrm{A}}$. Par conséquent, ϕ se relève de façon unique en un morphisme $\phi_{\mathfrak{l}} : \mathrm{B} \to \mathrm{A}/\overline{\mathfrak{l}\mathrm{A}}$. Par unicité, ces morphismes forment un système projectif, donc donnent un morphisme continu $\Phi : \mathrm{B} \to \varprojlim_{\mathfrak{l}} \mathrm{A}/\overline{\mathfrak{l}\mathrm{A}} = \mathrm{A}$. De plus, Φ est unique car si Φ' est un second relèvement de ϕ, alors Φ' et Φ coïncident modulo $\overline{\mathfrak{l}\mathrm{A}}$ pour tout $\mathfrak{l}$, donc sont égaux.

Proposition 1.6.E. — (a) *Soient* X *une variété formelle sur* k *et* A *son algèbre affine. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) X *est étale sur* k.

(ii) X *est topologiquement plate sur* k *et le morphisme diagonal* $\Delta : \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ *est un* isomorphisme local, *i.e.* Δ_{X} *induit un isomorphisme* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}\times\mathrm{X},\Delta(x)} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *pour tout point* x *de* X.

(iii) *Pour tout* $x \in \mathrm{X}$, *de projection* s *sur* $\mathrm{Spf}(k)$, $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ *est isomorphe à* $k_s[\mathrm{T}]/(\mathrm{F})$, *où* $\mathrm{F} \in k_s[\mathrm{T}]$ *est un polynôme unitaire* séparable (cf. 1.6.A (ii)).

(iv) X *est topologiquement plate sur* k, *et, pour tout point* $x \in \mathrm{X}$, *de projection* s *sur* $\mathrm{Spf}(k)$, $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \widehat{\otimes}_k \kappa(s)$ *est une extension finie séparable de* $\kappa(s)$.

(v) *Pour tout idéal ouvert* $\mathfrak{l}$ *de* k, *chaque composante locale de* $\mathrm{A} \widehat{\otimes}_k (k/\mathfrak{l})$ *est une algèbre* étale finie *sur l'anneau artinien* $k/\mathfrak{l}$.

(b) $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/\kappa(k)}$ *s'identifie à la catégorie des schémas étales sur* $\mathrm{S}_{\kappa(k)}$ (*cf.* 1.6.C), *et le foncteur* $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_\kappa$ *induit une* équivalence de catégories $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/\kappa(k)}$ (cf. SGA 1, I 6.1).

Démonstration. (a) Notons I le noyau du morphisme de multiplication $m : \mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A} \to \mathrm{A}$. Supposons X étale sur k, i.e. A formellement étale sur k. Alors, d'après EGA 0_{IV}, 20.7.4, le séparé complété de I/I^2, pour la topologie quotient de celle de I, est nul, i.e. on a $\mathrm{I} = \overline{\mathrm{I}^2}$. Or, pour tout $x \in \mathrm{X}$, I est contenu dans l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{\Delta(x)}$ de $\mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A}$, donc le localisé $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}_{\Delta(x)}}$ est contenu dans l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{\mathrm{X}\times\mathrm{X},\Delta(x)}$, et donc, d'après le lemme de Nakayama 0.3, on a $\mathrm{I}_{\mathfrak{m}_{\Delta(x)}} = 0$, et donc $\Delta : \mathrm{X} \to \mathrm{X} \times \mathrm{X}$ est un isomorphisme local.

Supposons maintenant que Δ soit un isomorphisme local et que k soit un *corps* κ, et montrons que chaque $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est une κ-algèbre étale de dimension finie. Remplaçant X par $\mathrm{Spf}(\mathscr{O}_{\mathrm{X},x})$, on peut supposer que $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ est locale. On procède alors comme dans la démonstration de EGA IV_4, 17.4.1, (b) $\Rightarrow$ (d$''$). Soit K une extension normale finie de κ contenant le corps résiduel $\kappa(x)$, et soient $\mathrm{B} = \mathrm{A} \otimes_\kappa \mathrm{K} = \mathrm{A} \widehat{\otimes}_\kappa \mathrm{K}$ (comme $[\mathrm{K} : \kappa] < \infty$ alors $- \widehat{\otimes}_\kappa \mathrm{K}$ et $- \otimes_\kappa \mathrm{K}$ coïncident) et $\mathrm{X}_{\mathrm{K}} = \mathrm{Spf}(\mathrm{B}) = \mathrm{X} \widehat{\otimes}_\kappa \mathrm{K}$. Alors $\Delta_{\mathrm{K}} : \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \to \mathrm{X}_{\mathrm{K}} \widehat{\otimes}_{\mathrm{K}} \mathrm{X}_{\mathrm{K}}$ est encore un isomorphisme local, donc pour tout $y \in \mathrm{X}_{\mathrm{K}}$, la multiplication $\mathrm{B}_y \widehat{\otimes}_{\mathrm{K}} \mathrm{B}_y \to \mathrm{B}_y$ induit un isomorphisme $(\mathrm{B}_y \widehat{\otimes}_{\mathrm{K}} \mathrm{B}_y)_{\mathfrak{m}_{\Delta_{\mathrm{K}}(y)}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}_y$. Or, comme le corps résiduel de B_y est K (cf. par exemple VI_{A}, 1.1.1, N.D.E. (11)), $\mathrm{C} = \mathrm{B}_y \widehat{\otimes}_{\mathrm{K}} \mathrm{B}_y$ est déjà un anneau local (en effet, $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_y \widehat{\otimes}_{\mathrm{K}} \mathrm{B}_y + \mathrm{B}_y \widehat{\otimes}_{\mathrm{K}} \mathfrak{m}_y$ est formé d'éléments topologiquement nilpotents, donc est contenu dans le radical de C, et $\mathrm{C}/\mathfrak{n} = \mathrm{K} \widehat{\otimes}_{\mathrm{K}} \mathrm{K} = \mathrm{K}$ est un corps) donc on obtient que le morphisme de multiplication

$\mathrm{B}_y \widehat{\otimes}_{\mathrm{K}} \mathrm{B}_y \to \mathrm{B}_y$ est un isomorphisme. Prenant une pseudobase de B_y sur K contenant l'élément unité 1, on en déduit que $\mathrm{B}_y = \mathrm{K}$. Comme de plus B est finie sur A, X_{K} est un ensemble fini, donc $\mathrm{B} = \mathrm{A} \otimes_\kappa \mathrm{K}$ est le produit d'un nombre fini de copies de K, et ceci entraîne que A est une κ-algèbre étale finie.

On obtient ainsi que, si κ est un corps, toute κ-algèbre profinie A étale sur κ est le produit d'extensions finies séparables K_i de κ, muni de la topologie produit, donc la variété formelle Spf(A) est la somme directe des $\mathrm{Spf}(\mathrm{K}_i) = \mathrm{Spec}(\mathrm{K}_i)$, et l'on en déduit que $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/\kappa}$ s'identifie à la catégorie des κ-schémas étales.

Ce qui précède montre l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iv) (puisque $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \widehat{\otimes}_k \kappa(s)$ est formellement étale sur $\kappa(s)$), et entraîne le point (b) de 1.6.E. En effet, soit à nouveau k un anneau pseudocompact arbitraire. D'après ce qui précède, $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/\kappa(k)}$ s'identifie à la catégorie des schémas étales sur $\mathrm{S}_{\kappa(k)}$. Montrons que $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_\kappa$ induit une équivalence $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/\kappa(k)}$. Compte-tenu de 1.6.D, il suffit de montrer que pour tout $s \in \mathrm{Spf}(k)$ et toute extension finie séparable K de $\kappa(s)$, il existe une k_s-algèbre étale A telle que $\mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \kappa(s) \simeq \mathrm{K}$. Soient ξ un élément primitif de l'extension $\mathrm{K}/\kappa(s)$, n son degré, et $\mathrm{F} \in k_s[\mathrm{T}]$ un polynôme unitaire de degré n dont l'image $\overline{\mathrm{F}}$ dans $\kappa(s)[\mathrm{T}]$ est le polynôme minimal de ξ. Comme $\overline{\mathrm{F}}'$ est inversible dans $\kappa(s)[\mathrm{T}]/(\overline{\mathrm{F}})$, il résulte du lemme de Nakayama que F' est inversible dans $k_s[\mathrm{T}]/(\mathrm{F})$, donc F est un polynôme séparable et donc, d'après 1.6.A (ii), $\mathrm{A} = k_s[\mathrm{T}]/(\mathrm{F})$ est une k_s-algèbre étale telle que $\mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \kappa(s) \simeq \mathrm{K}$. On obtient ainsi que toute k_s-algèbre profinie étale locale est libre de rang fini sur k_s (donc a fortiori topologiquement libre sur k), et donc toute k-algèbre profinie étale est topologiquement libre sur k.

Par ailleurs, la condition (v) implique la condition (d) de 1.6.B, donc implique (i). On a donc obtenu que (i), (iii) et (v) sont équivalentes, et impliquent (ii), qui implique (iv). Enfin, soit A une k-algèbre profinie vérifiant (iv), montrons que A est formellement étale sur k. Pour cela, on peut supposer A et k locaux, notons κ le corps résiduel de k ; par hypothèse, $\mathrm{K} = \mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \kappa$ est une extension finie séparable de κ, disons de degré n. D'après ce qu'on a vu plus haut (et tenant compte du lemme 1.6.D), il existe alors une k-algèbre B libre de rang n, formellement étale sur k, et un morphisme continu $\phi : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ tel que $\phi \widehat{\otimes}_k \kappa$ soit un isomorphisme. Comme A est topologiquement plate sur k, ceci entraîne que $\mathrm{Coker}(\phi) \widehat{\otimes}_k \kappa = 0$ et aussi $\mathrm{Ker}(\phi) \widehat{\otimes}_k \kappa = 0$; d'après le lemme de Nakayama 0.3, on a donc $\mathrm{Coker}(\phi) = 0 = \mathrm{Ker}(\phi)$, donc ϕ est un isomorphisme (cf. la démonstration de 0.2.B). Ceci achève la démonstration de 1.6.E.

[73] Soit X une variété formelle sur k. Pour tout $x \in \mathrm{X}$, de projection s sur $\mathrm{Spf}(k)$, le corps résiduel $\kappa(x)$ est une extension finie de $\kappa(s)$ et l'on note $\kappa_e(x)$ la clôture séparable de $\kappa(s)$ dans $\kappa(x)$.

Proposition 1.6.F. — (i) *L'inclusion de* $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k}$ *dans* $\mathbf{Vaf}_{/k}$ *possède un adjoint à gauche* $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_e$ *: la variété* X_e *a les mêmes points que* X, *pour tout* $x \in \mathrm{X}$, *de projection s sur* $\mathrm{Spf}(k)$, *soient ξ un élément primitif de* $\kappa_e(x)$, *n son degré, u un relèvement arbitraire*

[73] N.D.E. : Dans ce qui suit, on a utilisé les ajouts précédents pour détailler la contruction du foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_e$, et montrer qu'il commute aux produits finis (ceci est utilisé dans 2.5.1).

510 *de* ξ *dans* $\mathscr{O}_{X,x}$, *et* $F \in k[T]$ *unitaire de degré* n *annulant* u *; on pose* $\mathscr{O}_{X_e,x} = k[T]/(F)$. *Alors pour tout* $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k}$, *les applications canoniques ci-dessous sont bijectives :*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(X, Y) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/\kappa(k)}}(X_\kappa, Y_\kappa) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(X_e, Y) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/\kappa(k)}}((X_e)_\kappa, Y_\kappa),
\end{tikzcd}$$

la flèche verticale étant induite par les inclusions $\kappa_e(x) \hookrightarrow \kappa(x)$ *pour tout* $x \in X$. *Ceci définit, en particulier, un morphisme* $p : X \to X_e$, *et tout morphisme de* k*-variétés formelles* $\phi : X \to Y$, *avec* Y étale *sur* k, *se factorise de façon unique à travers* p.

(ii) *Le foncteur* $X \mapsto X_e$ *commute aux produits finis.*

En effet, (i) découle de 1.6.E (b) et 1.6.D. Prouvons (ii). Compte-tenu de l'équivalence de catégories 1.6.E (b), on peut supposer que k est un corps. Dans ce cas, on voit facilement que si X est une k-variété formelle semi-locale, i.e. dont l'algèbre affine A est semi-locale, alors l'algèbre affine de X_e est la plus grande sous-algèbre de A qui soit étale sur k, notons-la A_e. On se ramène ainsi à voir que si K, L sont deux extensions de degré fini de k, alors l'inclusion $K_e \otimes L_e \subset (K \otimes L)_e$ est une égalité. Soit p l'exposant caractéristique de k (i.e. $p = 1$ si $\mathrm{car}(k) = 0$ et $p = \mathrm{car}(k)$ sinon), alors pour tout $x \in K \otimes L$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^{p^n} \in K_e \otimes L_e$, donc toute sous-algèbre B de $K \otimes L$ est radicielle sur $K_e \otimes L_e$, et il en résulte que $K_e \otimes L_e = (K \otimes L)_e$.

Remarquons, en conservant les notations précédentes, que $\mathscr{O}_{X_e,x}$ n'est pas nécessairement une sous-algèbre de $\mathscr{O}_{X,x}$, mais c'est le cas lorsque X est topologiquement plate sur k, d'après la proposition suivante.

1.6.1. — Soient Y une k-variété formelle *étale* et $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathbf{Vaf}_{/k}$. On a alors le carré cartésien ci-dessous, où Γ_f est le morphisme graphe $X \to X \times Y$, de composantes id_X et f,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Gamma_f"] \arrow[d, "f"'] & X \times Y \arrow[d, "f \boxtimes \mathrm{id}_Y"] \\
Y \arrow[r, "\Delta_Y"] & Y \times Y.
\end{tikzcd}$$

Il s'ensuit que Γ_f est un isomorphisme local, donc que $f = \mathrm{pr}_Y \circ \Gamma_f$ est topologiquement plat si pr_Y l'est, par exemple si X est topologiquement plat sur k.

Réciproquement, comme $Y \to k$ est topologiquement plat, $X \to k$ le sera aussi si f l'est (cf. 1.3.3). Prenant en particulier pour f le morphisme canonique $p : X \to X_e$ de 1.6, on obtient :

Proposition. — *Soit* X *une variété formelle sur* k. *Le morphisme* $X \to X_e$ *est topologiquement plat si et seulement si* X *est topologiquement plate sur* k.

Remarque 1.6.2. — [74] Lorsque k est un corps *parfait*, le foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_e$ est aussi *adjoint à droite* de l'inclusion $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k} \hookrightarrow \mathbf{Vaf}_{/k}$. En effet, dans ce cas on a $\mathscr{O}_{\mathrm{X}_e,x} = \kappa(x)$ pour tout $x \in \mathrm{X}$, et les projections canoniques $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \to \kappa(x)$ définissent un morphisme $s : \mathrm{X}_e \to \mathrm{X}$, qui est une section de $p : \mathrm{X} \to \mathrm{X}_e$. Pour tout morphisme $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ les diagrammes ci-dessous sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_{\mathrm{Y},f(x)} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \arrow[d] \\ \kappa(f(x)) \arrow[r] & \kappa(x) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{X} \arrow[r, "f"] & \mathrm{Y} \\ \mathrm{X}_e \arrow[u, "s_{\mathrm{X}}"] \arrow[r, "f_e"] & \mathrm{Y}_e \arrow[u, "s_{\mathrm{Y}}"'] \end{tikzcd}$$

donc s est fonctoriel en X, et il en résulte que $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_e$ est adjoint à droite de l'inclusion $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k} \hookrightarrow \mathbf{Vaf}_{/k}$. Donc, étant un adjoint à droite, $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_e$ commute aux limites projectives lorsqu'elles existent dans $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k}$ [75], donc en particulier aux produits finis. (Ceci se vérifie aussi directement : pour toute k-variété formelle X, d'algèbre affine A, X_e a pour algèbre affine le quotient de A par son radical $\mathfrak{r}(\mathrm{A})$, et puisque k est parfait, le quotient de $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}$ par son radical est l'algèbre $\kappa(x) \otimes_k \kappa(y)$, puisque cette dernière est semi-simple.)

2. Généralités sur les groupes formels 511

2.1. Soient k un anneau pseudocompact et G un *k-groupe formel*, c'est-à-dire un groupe de la catégorie $\mathbf{Vaf}_{/k}$ des variétés formelles sur k. Soit A l'algèbre affine de G. La loi de composition de G définit évidemment un *morphisme diagonal*, c.-à-d., un homomorphisme de k-algèbres profinies $\Delta_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{A}$; cet homomorphisme vérifie les conditions suivantes :

(i) le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A} \arrow[r, "\Delta_{\mathrm{A}}"] \arrow[d, "\Delta_{\mathrm{A}}"'] & \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{A} \arrow[d, "\Delta_{\mathrm{A}} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{id}_{\mathrm{A}}"] \\ \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{A} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathrm{A}} \mathbin{\widehat{\otimes}} \Delta_{\mathrm{A}}"] & \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{A} \end{tikzcd}$$

est commutatif.

(ii) il existe une *augmentation* (nécessairement unique), c'est-à-dire un homomorphisme de k-algèbres profinies $\varepsilon_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to k$ tel que les applications composées

$$\mathrm{A} \xrightarrow{\Delta_{\mathrm{A}}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{A} \xrightarrow{\varepsilon_{\mathrm{A}} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{id}_{\mathrm{A}}} k \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{A} \simeq \mathrm{A}$$

$$\text{et} \qquad \mathrm{A} \xrightarrow{\Delta_{\mathrm{A}}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{A} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathrm{A}} \mathbin{\widehat{\otimes}} \varepsilon_{\mathrm{A}}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k k \simeq \mathrm{A}$$

soient les applications identiques de A.

---

[74] N.D.E. : On a inséré ici cette remarque, qui dans l'original apparaissait en 2.5.2.

[75] N.D.E. : c'est le cas pour les limites projectives finies.

(iii) il existe un *antipodisme* (nécessairement unique), c'est-à-dire un homomorphisme de k-algèbres profinies $c_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ tel que l'application composée

$$\mathrm{A} \xrightarrow{\Delta_{\mathrm{A}}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A} \xrightarrow{c_{\mathrm{A}} \widehat{\otimes} \mathrm{id}_{\mathrm{A}}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A} \xrightarrow{m_{\mathrm{A}}} \mathrm{A}$$

512 soit égale à $\eta_{\mathrm{A}} \circ \varepsilon_{\mathrm{A}}$, si l'on note m_{A} l'application linéaire qui envoie $a \mathbin{\widehat{\otimes}} b$ sur ab et η_{A} l'application $\lambda \mapsto \lambda 1_{\mathrm{A}}$ de k dans A.

Réciproquement, la donnée de $(\Delta_{\mathrm{A}}, \varepsilon_{\mathrm{A}}, c_{\mathrm{A}})$ vérifiant (i)–(iii) munit G d'une structure de k-groupe formel. [76] Explicitement, pour toute k-algèbre profinie B, l'ensemble $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ des morphismes continus de *k-modules* $\phi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est muni d'une structure de groupe, fonctorielle en B, définie par

$$\phi \cdot \phi' = m_{\mathrm{B}} \circ (\phi \mathbin{\widehat{\otimes}} \phi') \circ \Delta_{\mathrm{A}},$$

l'élément neutre étant $\eta_{\mathrm{B}} \circ \varepsilon_{\mathrm{A}}$ (où m_{B} est la multiplication de B et η_{B} l'application $\lambda \mapsto \lambda 1_{\mathrm{B}}$ de k dans B), et $\phi \circ c_{\mathrm{A}}$ étant l'inverse de ϕ ; et l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ des morphismes continus de *k-algèbres* $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ en est un sous-groupe (car l'algèbre B est commutative).

Définition. — Un *morphisme* de k-groupes formels $\theta : \mathrm{K} \to \mathrm{G}$ est, par définition, un morphisme de k-variétés formelles qui respecte les structures de groupe. Si B (resp. A) est l'algèbre affine de K (resp. G) et si $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est le morphisme correspondant à θ, ceci équivaut à dire que f est compatible avec les comultiplications, c.-à-d.,

$$(f \mathbin{\widehat{\otimes}} f) \circ \Delta_{\mathrm{A}} = \Delta_{\mathrm{B}} \circ f$$

(les conditions $\varepsilon_{\mathrm{B}} \circ f = \varepsilon_{\mathrm{A}}$ et $c_{\mathrm{B}} \circ f = f \circ c_{\mathrm{A}}$ étant alors automatiquement vérifiées). On notera $\mathbf{Grf}_{/k}$ la catégorie des k-groupes formels.

Notations. — Dans la suite, nous appellerons *idéal d'augmentation* de A l'idéal $\mathrm{I}_{\mathrm{A}} = \mathrm{Ker}(\varepsilon_{\mathrm{A}})$, et nous noterons $\omega_{\mathrm{G}/k}$ le k-module pseudocompact $\mathrm{I}_{\mathrm{A}}/\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^2}$, c'est-à-dire le quotient de I_{A} par l'idéal fermé engendré par les produits xy, pour $x, y \in \mathrm{I}_{\mathrm{A}}$.

2.2. Soit **H** un groupe de la catégorie des coalgèbres sur $\mathbf{O}_k$, i.e. pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$, $\mathbf{H}(\mathrm{C})$ est muni d'une structure de C-coalgèbre en groupes (cf. $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ 3.2 ; à la suite de Manin, nous dirons *bialgèbre* [77] au lieu de coalgèbre en groupes) ; de plus, si $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ est un morphisme de $\mathbf{Alf}_{/k}$, l'application $\mathrm{D} \otimes_{\mathrm{C}} \mathbf{H}(\mathrm{C}) \to \mathbf{H}(\mathrm{D})$ est un homomorphisme de D-bialgèbres.

Définition. — Nous résumerons les propriétés ci-dessus en disant que **H** est une *bialgèbre* sur $\mathbf{O}_k$.

---

(76) N.D.E. : On dira aussi que A est un *cogroupe* dans la catégorie des k-algèbres profinies. D'autre part, on a détaillé ce qui suit ; en particulier, on a explicité ce qu'est un morphisme de groupes formels $\mathrm{K} \to \mathrm{G}$, cf. la proposition 2.3.1.

(77) N.D.E. : On dit aussi « bigèbre » (cf. [**BAlg**], III § 11.4) ; rappelons (cf. $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$, 3.1, N.D.E. (26)) que toutes les « bialgèbres » considérées ici sont supposées cocommutatives et munies d'une antipode, i.e. ce sont en fait des *algèbres de Hopf cocommutatives*.

Il est clair que le foncteur $\mathbf{H} \mapsto \mathrm{Spf}^*(\mathbf{H})$ de 1.3.5 commute aux produits finis. Il transforme donc une bialgèbre sur $\mathbf{O}_k$ en un *k-foncteur en groupes*, c'est-à-dire, un foncteur (covariant) de $\mathbf{Alf}_{/k}$ dans la catégorie des groupes.

Et en effet, pour toute k-algèbre de longueur finie C, les éléments de

$$\mathrm{Spf}^*(\mathbf{H})(\mathrm{C}) = \mathrm{Spf}^*(\mathbf{H}(\mathrm{C})) = \{x \in \mathbf{H}(\mathrm{C}) \mid \varepsilon(x) = 1 \quad \text{et} \quad \Delta(x) = x \otimes x\}$$

forment un groupe pour la multiplication de l'algèbre $\mathbf{H}(\mathrm{C})$ (cf. $\mathrm{VII_A}$ 3.2.2). Notons d'ailleurs que la condition $\Delta(x) = x \otimes x$ entraîne l'égalité $\varepsilon(x) = \varepsilon(x)^2$, donc aussi $\varepsilon(x) = 1$ si C est locale et $x \neq 0$. [78]

2.2.1. — Une bialgèbre $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{O}_k$ est dite *plate* si le module sous-jacent est plat 513
(cf. 1.2.1). [79] Si $\mathbf{H}$ est plate alors, d'après 1.3.5, $\mathrm{A} = \Gamma^*(\mathbf{H})$ est une k-algèbre profinie topologiquement plate, et $\mathrm{Spf}^*(\mathbf{H})$ est isomorphe, comme foncteur de $(\mathbf{Alf}_{/k})^0 = \mathbf{Vaf}_{/k}$ vers $(\mathbf{Ens})$, au foncteur

$$\mathrm{Spf}(\mathrm{A}) : \ \mathrm{C} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{Spf}(\mathrm{C}), \mathrm{Spf}(\mathrm{A})).$$

La structure de groupe de $\mathrm{Spf}^*(\mathbf{H})$ munit donc $\mathscr{G}(\mathbf{H}) = \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ d'une structure de groupe formel, qui est décrite explicitement comme suit.

Pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$, comme le C-module sous-jacent à $\mathbf{H}(\mathrm{C})$ est projectif, on déduit du lemme 1.2.3.A, par récurrence sur n, des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{H}(\mathrm{C})^*\big)^{\widehat{\otimes}(n+1)} &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}\big(\mathbf{H}(\mathrm{C}), (\mathbf{H}(\mathrm{C})^*)^{\widehat{\otimes}\, n}\big) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}\big(\mathbf{H}(\mathrm{C}), (\mathbf{H}(\mathrm{C})^{\otimes n})^*\big) \simeq \big(\mathbf{H}(\mathrm{C})^{\otimes(n+1)}\big)^*.\end{aligned}$$

On déduit de ceci (pour $n = 1, 2$) que la structure de C-algèbre de $\mathbf{H}(\mathrm{C})$ munit $\mathbf{H}(\mathrm{C})^*$ d'une application diagonale vérifiant les conditions 2.1 (i)–(iii), tout ceci de manière fonctorielle en C.

Par conséquent, $\mathrm{A} = \Gamma^*(\mathbf{H}) = \varprojlim \mathbf{H}(k/\mathfrak{l})^*$ est munie d'une structure de cogroupe dans $\mathbf{Alp}_{/k}$, qui définit sur $\mathscr{G}(\mathbf{H})$ la structure de groupe formel annoncée.

Réciproquement, soit G un k-groupe formel topologiquement plat, d'algèbre affine A, et notons $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ la $\mathbf{O}_k$-coalgèbre $\mathbf{V}^f_k(\mathrm{A})$ (cf. 1.2.3). Le morphisme diagonal Δ_{A} : $\mathrm{A} \to \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A}$ induit alors, pour toute k-algèbre de longueur finie C, une application C-linéaire

$$\mathbf{V}^f_k(\mathrm{A})(\mathrm{C}) \underset{\mathrm{C}}{\otimes} \mathbf{V}^f_k(\mathrm{A})(\mathrm{C}) \longrightarrow \mathbf{V}^f_k(\mathrm{A})(\mathrm{C})$$

qui fait de la coalgèbre $\mathbf{V}^f_k(\mathrm{A})(\mathrm{C})$ une C-bialgèbre. On dira que $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ est *la bialgèbre* covariante *du groupe formel* G. [80] Donc, d'après la proposition 1.3.5.D :

Proposition. — (i) *Les foncteurs* $\mathrm{G} \mapsto \mathbf{H}(\mathrm{G})$ *et* $\mathbf{H} \mapsto \mathscr{G}(\mathbf{H})$ *définissent une* équivalence *entre la catégorie des k-groupes formels* topologiquement plats *et celle des* $\mathbf{O}_k$*-bialgèbres* plates. [81]

[78] N.D.E. : Puisque $\Delta(x) = x \otimes x$ on a $x = \varepsilon(x)x$, donc $\varepsilon(x) = 0$ ne peut se produire que si $x = 0$.

[79] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[80] N.D.E. : On a ajouté l'adjectif « *covariant* » pour faire voir que le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \mathbf{H}(\mathrm{G})$ est covariant ; cette terminologie est utilisée dans [**Di73**], I § 2.14.

[81] N.D.E. : On rappelle que dans cet exposé, « bialgèbre » signifie « algèbre de Hopf cocommutative ».

(ii) *Cette équivalence* « commute au changement de base » *: si $k \to \mathrm{K}$ est un morphisme d'anneaux pseudocompacts, alors* $\mathbf{H}(\mathrm{G}\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{K}) = \mathbf{H}(\mathrm{G})\otimes_k\mathrm{K}$ *et* $\mathscr{G}(\mathbf{H}\otimes_k\mathrm{K}) = \mathscr{G}(\mathbf{H})\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{K}$.

Lorsque k est un anneau artinien et G un k-groupe formel topologiquement plat, le foncteur $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ est évidemment déterminé par sa valeur $\mathrm{H}(\mathrm{G}) = \mathbf{H}(\mathrm{G})(k)$ en k. On dira aussi que H(G) est la *bialgèbre* (covariante) *de* G. [82] Par conséquent, notant $\mathcal{H}_k$ la catégorie des k-algèbres de Hopf et $\mathcal{H}^{\mathrm{cocom}}_{\mathrm{plat}/k}$ la sous-catégorie pleine formée des k-algèbres de Hopf plates sur k et cocommutatives, on obtient donc :

Corollaire. — *Soit k un anneau* artinien.

(i) *Les foncteurs* $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{H}(\mathrm{G})$ *et* $\mathrm{H} \mapsto \mathscr{G}(\mathrm{H}) = \mathrm{Spf}^*\,\mathrm{H}(\mathrm{G})$ *définissent une* équivalence *entre la catégorie des k-groupes formels* topologiquement plats *et* $\mathcal{H}^{\mathrm{cocom}}_{\mathrm{plat}/k}$.

(ii) *Cette équivalence* « commute au changement de base » *: si $k \to \mathrm{K}$ est un morphisme d'anneaux artiniens, alors* $\mathrm{H}(\mathrm{G}\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{K}) = \mathrm{H}(\mathrm{G})\otimes_k \mathrm{K}$ *et* $\mathscr{G}(\mathrm{H}\otimes_k\mathrm{K}) = \mathscr{G}(\mathrm{H})\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{K}$.

D'autre part, notons aussi $\mathcal{H}^{\mathrm{com}}_{\mathrm{plat}/k}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}_k$ formée des k-algèbres de Hopf plates sur k et commutatives, et rappelons que le foncteur $\mathrm{K} \mapsto \mathscr{O}(\mathrm{K})$ est une *anti-équivalence* de la catégorie des k-schémas en groupes affines sur $\mathcal{H}^{\mathrm{com}}_{\mathrm{plat}/k}$.

514 ***2.2.2***. — Supposons pour simplifier k artinien et soit G un k-groupe formel topologiquement plat. [83] Alors G est *commutatif* si et seulement si son algèbre affine $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ a une comultiplication cocommutative, ce qui équivaut à dire que la bialgèbre H(G) a une multiplication commutative. Dans ce cas, H(G) est une algèbre de Hopf commutative et cocommutative, plate sur k, donc si l'on pose $\mathrm{D}'(\mathrm{G}) = \mathrm{Spec}\,\mathrm{H}(\mathrm{G})$, alors $\mathrm{D}'(\mathrm{G})$ est un *k-schéma en groupes commutatifs, affine et plat* sur k. Réciproquement, si T est un tel k-schéma en groupes, son algèbre affine $\mathscr{O}(\mathrm{T})$ est un groupe commutatif dans la catégorie des k-coalgèbres cocommutatives plates sur k et donc, d'après 1.3.5.C, on obtient un k-groupe formel topologiquement plat D(T) en posant :

$$\mathrm{D}(\mathrm{T}) = \mathrm{Spf}^*\,\mathscr{O}(\mathrm{T}) = \mathrm{Spf}(\mathscr{A}), \qquad \text{où} \qquad \mathscr{A} = \mathscr{O}(\mathrm{T})^*.$$

Comme, d'après 1.3.5.D, on a des isomorphismes canoniques $\mathrm{G} = \mathrm{Spf}^*\,\mathrm{H}(\mathrm{G})$ et $\mathrm{H}(\mathrm{D}(\mathrm{T})) = \mathscr{O}(\mathrm{T})$, on obtient des isomorphismes canoniques :

$$\mathrm{D}(\mathrm{D}'(\mathrm{G})) = \mathrm{Spf}^*\,\mathscr{O}(\mathrm{D}'(\mathrm{G})) = \mathrm{Spf}^*\,\mathrm{H}(\mathrm{G}) = \mathrm{G},$$
$$\mathrm{D}'(\mathrm{D}(\mathrm{T})) = \mathrm{Spec}\,\mathrm{H}(\mathrm{D}(\mathrm{T})) = \mathrm{Spec}\,\mathscr{O}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}.$$

De plus, notant k-Gr. la catégorie des k-schémas en groupes, on a, d'après le corollaire 2.2.1, des isomorphismes fonctoriels :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grf}_{/k}}(\mathrm{G}, \mathrm{D}(\mathrm{T})) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_k}(\mathrm{H}(\mathrm{G}), \mathscr{O}(\mathrm{T})) \simeq \mathrm{Hom}_{k\text{-Gr.}}(\mathrm{T}, \mathrm{D}'(\mathrm{G})),$$

On obtient donc la :

---

[82] N.D.E. : On a introduit ici la notation $\mathcal{H}^{\mathrm{cocom}}_{\mathrm{plat}/k}$, qui sera utile plus bas.

[83] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, afin d'introduire les notations $\mathrm{D}'(\mathrm{G})$ et D(K), cf. [**Ca62**], § 14.

Proposition (Dualité de Cartier). — *Soit k un anneau* artinien.

(i) *Les foncteurs* $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{D}'(\mathrm{G}) = \operatorname{Spec} \mathrm{H}(\mathrm{G})$ *et* $\mathrm{T} \mapsto \mathrm{D}(\mathrm{T}) = \operatorname{Spf}^* \mathscr{O}(\mathrm{T})$ *induisent une* anti-équivalence *entre la catégorie* $\mathcal{FC}_k$ *des k-groupes formels* commutatifs topologiquement plats *et la catégorie* $\mathcal{AC}_k$ *des k-schémas en groupes* commutatifs, affines et plats, *i.e.* G *et* $\mathrm{D}'(\mathrm{G})$ (*resp.* T *et* $\mathrm{D}(\mathrm{T})$) *sont reliés par les égalités :* [84]

$$\mathrm{H}(\mathrm{G}) = \mathscr{O}(\mathrm{D}'(\mathrm{G})) \qquad \textit{et} \qquad \mathscr{O}(\mathrm{T}) = \mathrm{H}(\mathrm{D}(\mathrm{T})).$$

(ii) *Cette anti-équivalence* « commute au changement de base » *: si $k \to \mathrm{K}$ est un morphisme d'anneaux artiniens, alors* $\mathrm{D}'(\mathrm{G} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{K}) = \mathrm{D}'(\mathrm{G}) \otimes_k \mathrm{K}$ *et* $\mathrm{D}(\mathrm{T} \otimes_k \mathrm{K}) = \mathrm{D}(\mathrm{T}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{K}$.

(iii) *En particulier, si k est un* corps*, on obtient une anti-équivalence entre la catégorie des k-groupes formels commutatifs et celle des k-schémas en groupes commutatifs affines, qui commute à l'extension du corps de base.*

2.3. Considérons maintenant un k-groupe formel arbitraire [85] G, d'algèbre affine A. Notons toujours $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ le $\mathbf{O}_k$-module $\mathbf{V}_k^f(\mathrm{A})$ dual de A et désignons par φ_{G} l'homomorphisme fonctoriel

$$\varphi_{\mathrm{G}} : \ \mathbf{H}(\mathrm{G}) \underset{k}{\otimes} \mathbf{H}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathbf{H}(\mathrm{G} \times \mathrm{G})$$

qui est induit par l'application naturelle (0.3.6), pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$:

$$(\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{C})^\dagger \otimes_{\mathrm{C}} (\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{C})^\dagger \longrightarrow \big((\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{C}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{C}} (\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{C})\big)^\dagger .$$

Si $m : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ est la multiplication de G, l'application composée :

$$\mathbf{H}(\mathrm{G}) \underset{k}{\otimes} \mathbf{H}(\mathrm{G}) \xrightarrow{\varphi_{\mathrm{G}}} \mathbf{H}(\mathrm{G} \times \mathrm{G}) \xrightarrow{\mathbf{H}(m)} \mathbf{H}(\mathrm{G})$$

fait de $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ une algèbre sur $\mathbf{O}_k$; pour tout $\mathrm{C} \in \mathbf{Alf}_{/k}$, l'élément unité de $\mathbf{H}(\mathrm{G})(\mathrm{C}) = (\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{C})^\dagger$ est l'augmentation de $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{C}$ (cf. 2.1). [86] Si G n'est pas topologiquement plat sur k, φ_{G} n'est pas nécessairement un isomorphisme, et donc le morphisme $\delta_{\mathrm{G}} : \mathbf{H}(\mathrm{G}) \to \mathbf{H}(\mathrm{G} \times \mathrm{G})$ induit par le morphisme diagonal « $x \mapsto (x, x)$ » de G dans $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$, ne se factorise pas nécessairement à travers $\mathbf{H}(\mathrm{G}) \otimes_k \mathbf{H}(\mathrm{G})$, i.e. $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ n'est pas nécessairement une $\mathbf{O}_k$-bialgèbre.

Pour cette raison nous dirons simplement, dans le cas général, que $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ est « *l'algèbre covariante* » du groupe formel G. **515**

Bien entendu, lorsque G est *topologiquement plat* sur k, φ_{G} est un isomorphisme, et l'on retrouve la structure de $\mathbf{O}_k$-bialgèbre sur $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ définie en 2.2.1.

---

[84] N.D.E. : Si l'on note $\mathcal{FC}_k^f$ (resp. $\mathcal{AC}_k^f$) la sous-catégorie pleine de $\mathcal{FC}_k$ (resp. $\mathcal{AC}_k$) formée des objets G (resp. T) tels que H(G) (resp. $\mathscr{O}$(T)) soit un k-module *fini* (et donc fini localement libre), alors $\mathcal{FC}_k^f$ et $\mathcal{AC}_k^f$ ont toutes deux les mêmes objets que la catégorie $\mathscr{C}$ des k-algèbres de Hopf commutatives et cocommutatives, finies et plates sur k, la correspondance $\mathrm{G} \mapsto \mathrm{H}(\mathrm{G})$ (resp. $\mathrm{T} \mapsto \mathscr{O}(\mathrm{T})$) étant covariante (resp. contravariante), et l'on retrouve ainsi la « dualité de Cartier » de la catégorie $\mathcal{AC}_k$, déjà vue en $\mathrm{VII_A}$, 3.3.1.

[85] N.D.E. : c.-à-d., pas nécessairement topologiquement plat sur k

[86] N.D.E. : On a modifié l'ordre des phrases dans ce qui suit.

2.3.1 Proposition. — *Soient* K *et* G *deux k-groupes formels, d'algèbres affines* B *et* A. *On suppose* K topologiquement plat *sur k. Il existe alors une bijection canonique de* $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grf}_{/k}}(\mathrm{K},\mathrm{G})$ *sur l'ensemble des homomorphismes de $\mathbf{O}_k$-algèbres unitaires* $h : \mathbf{H}(\mathrm{K}) \to \mathbf{H}(\mathrm{G})$ *tels que le diagramme*

$(*)$
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}(\mathrm{K}) \otimes_k \mathbf{H}(\mathrm{K}) \arrow[r, "h\otimes h"] & \mathbf{H}(\mathrm{G}) \otimes_k \mathbf{H}(\mathrm{G}) \arrow[dr, "\varphi_{\mathrm{G}}"] & \\
& & \mathbf{H}(\mathrm{G}\times\mathrm{G}) \\
\mathbf{H}(\mathrm{K}) \arrow[uu, "\Delta_{\mathbf{H}(\mathrm{K})}"] \arrow[r, "h"] & \mathbf{H}(\mathrm{G}) \arrow[ur, "\delta_{\mathrm{G}}"'] &
\end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Comme K est topologiquement plat, $\mathbf{H}(\mathrm{K})$ est muni d'une structure de bialgèbre (cf. 2.2) et $\Delta_{\mathbf{H}(\mathrm{K})}$ en est le morphisme diagonal ; autrement dit, avec les notations de 2.3, on a $\Delta_{\mathbf{H}(\mathrm{K})} = \varphi_{\mathrm{K}}^{-1} \circ \delta_{\mathrm{K}}$. Lorsque G est aussi topologiquement plat sur k, notre proposition résulte de l'équivalence de catégories établie en 2.2.1.

516 Dans le cas général, on peut supposer k artinien et raisonner sur les algèbres $\mathrm{H}(\mathrm{K}) = \mathrm{B}^\dagger$ et $\mathrm{H}(\mathrm{G}) = \mathrm{A}^\dagger$. Soient $\mathrm{Hom}_c(\mathrm{A},\mathrm{B})$ l'ensemble des applications k-linéaires continues de A dans B et $\mathrm{Hom}_k(\mathrm{B}^\dagger,\mathrm{A}^\dagger)$ l'ensemble des applications k-linéaires de $\mathrm{B}^\dagger$ dans $\mathrm{A}^\dagger$.

[87] D'après 0.3.6.A, on sait que si M,P sont des k-modules pseudocompacts, et si P est *projectif*, l'application canonique
$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{M},\mathrm{P}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\mathrm{P}^\dagger,\mathrm{M}^\dagger), \qquad f \mapsto {}^t f$$
(où ${}^t f$ désigne la transposée de f) est bijective. (On appliquera ceci à $\mathrm{M} = \mathrm{A}\widehat{\otimes}\mathrm{A}$ et $\mathrm{P} = \mathrm{B}$, ou bien $\mathrm{M} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{P} = \mathrm{B}\widehat{\otimes}\mathrm{B}$).

Soit $f \in \mathrm{Hom}_c(\mathrm{A},\mathrm{B})$. Considérons les diagrammes ci-dessous, où les carrés (0) sont commutatifs, et où les deux flèches verticales non nommées sont ${}^t(f\widehat{\otimes} f)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}\widehat{\otimes}\mathrm{A} \arrow[r, "m_{\mathrm{A}}"] \arrow[d, "f\widehat{\otimes}f"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & \mathrm{A} \arrow[r, "\Delta_{\mathrm{A}}"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \mathrm{A}\widehat{\otimes}\mathrm{A} \arrow[d, "f\widehat{\otimes}f"] \\
\mathrm{B}\widehat{\otimes}\mathrm{B} \arrow[r, "m_{\mathrm{B}}"'] & \mathrm{B} \arrow[r, "\Delta_{\mathrm{B}}"'] & \mathrm{B}\widehat{\otimes}\mathrm{B}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}^\dagger\otimes\mathrm{A}^\dagger \arrow[r, "\varphi_{\mathrm{G}}"] & (\mathrm{A}\widehat{\otimes}\mathrm{A})^\dagger & \mathrm{A}^\dagger \arrow[l, "\delta_{\mathrm{G}}=m_{\mathrm{A}}^t"'] & (\mathrm{A}\widehat{\otimes}\mathrm{A})^\dagger \arrow[l, "\Delta_{\mathrm{A}}^t"'] & \mathrm{A}^\dagger\otimes\mathrm{A}^\dagger \arrow[l, "\varphi_{\mathrm{G}}"'] \\
\mathrm{B}^\dagger\otimes\mathrm{B}^\dagger \arrow[u, "{}^tf\otimes{}^tf"] \arrow[r, equal] \arrow[ur, phantom, "(0)"] & (\mathrm{B}\widehat{\otimes}\mathrm{B})^\dagger \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "(1')"] & \mathrm{B}^\dagger \arrow[l, "\delta_{\mathrm{K}}=m_{\mathrm{B}}^t"] \arrow[u, "{}^tf"'] \arrow[ur, phantom, "(2')"] & (\mathrm{B}\widehat{\otimes}\mathrm{B})^\dagger \arrow[l, "\Delta_{\mathrm{B}}^t"] \arrow[u] \arrow[r, equal] \arrow[ur, phantom, "(0)"] & \mathrm{B}^\dagger\otimes\mathrm{B}^\dagger \arrow[u, "{}^tf\otimes{}^tf"']
\end{tikzcd}$$

[87] N.D.E. : On a détaillé la suite de la démonstration.

Si $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ correspond à un morphisme de groupes formels $\mathrm{K} \to \mathrm{G}$, alors les carrés (1) et (2) sont commutatifs, et $\varepsilon_{\mathrm{B}} \circ f = \varepsilon_{\mathrm{A}}$; par conséquent, les carrés (1′) et (2′) sont commutatifs et ${}^t f$ envoie l'unité de $\mathrm{B}^\dagger = \mathrm{H}(\mathrm{K})$ sur celle de $\mathrm{A}^\dagger = \mathrm{H}(\mathrm{G})$, i.e. ${}^t f$ est un morphisme de k-algèbres unitaires $\mathrm{H}(\mathrm{K}) \to \mathrm{H}(\mathrm{G})$ tel que le diagramme $(*)$ de la proposition soit commutatif.

Réciproquement, si ${}^t f$ vérifie ces conditions, alors $\varepsilon_{\mathrm{B}} \circ f = \varepsilon_{\mathrm{A}}$ et les carrés (1′) et (2′) sont commutatifs. Comme, pour $\mathrm{M} = \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A}$ et $\mathrm{P} = \mathrm{B}$ (resp. $\mathrm{M} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{P} = \mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{B}$), l'application $g \mapsto {}^t g$ est injective, on en déduit que les carrés (1) et (2) sont commutatifs, donc f est compatible avec les multiplications et les morphismes diagonaux de A et B. Il reste à voir que $f(1_{\mathrm{A}}) = 1_{\mathrm{B}}$. Or, il résulte de ce qui précède que $\varepsilon_{\mathrm{B}} f(1) = 1$, $\Delta_{\mathrm{B}} f(1) = f(1) \mathbin{\widehat{\otimes}} f(1)$ et $f(1) \cdot f(1) = f(1)$. Les deux premières conditions entraînent, d'après 2.1 (iii), que $f(1)$ admet $c_{\mathrm{B}} f(1)$ pour inverse dans B ; par conséquent $f(1) \cdot f(1) = f(1)$ entraîne $f(1) = 1$. Donc $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un morphisme de $\mathbf{Alp}_{/k}$, compatible avec les comultiplications de A et B.

2.3.2. — *Supposons maintenant* pour simplifier *l'anneau k artinien.* Lorsque G est topologiquement plat sur k, l'algèbre $\mathrm{H}(\mathrm{G}) = \mathbf{H}(\mathrm{G})(k)$ peut être caractérisée par une propriété universelle (due à Cartier). Rappelons (cf. 1.2.1) que si U est un k-module, on note $\mathbf{W}(\mathrm{U})$ le foncteur qui à toute k-algèbre de longueur finie C associe le C-module $\mathrm{U} \otimes_k \mathrm{C}$. [88] Si U est une k-algèbre (associative, avec élément unité), il en est de même de $\mathrm{U} \otimes_k \mathrm{C}$; nous noterons $\mathbf{W}(\mathrm{U})^\times$ le k-foncteur en groupes qui associe à tout $\mathrm{C} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alf}_{/k}$ le groupe multiplicatif des éléments inversible de l'algèbre $\mathrm{U} \otimes_k \mathrm{C}$: 517

$$\mathbf{W}(\mathrm{U})^\times(\mathrm{C}) = (\mathrm{U} \otimes_k \mathrm{C})^\times.$$

De plus, identifions G au k-foncteur en groupes $\mathrm{C} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Vaf}_{/k}}(\mathrm{Spf}(\mathrm{C}), \mathrm{G})$ et notons $\mathrm{Hom}_{k\text{-Gr.}}(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathrm{U})^\times)$ l'ensemble des homomorphismes de k-foncteurs en groupes de G dans $\mathbf{W}(\mathrm{U})^\times$. On a la

Proposition. — *Soit k un anneau artinien. Pour tout groupe formel* G *topologiquement plat sur k et pour toute k-algèbre* U*, il y a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-Gr.}}(\mathrm{G}, \mathbf{W}(\mathrm{U})^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{k\text{-Alg.}}(\mathrm{H}(\mathrm{G}), \mathrm{U}).$$

Notons A l'algèbre affine de G, par hypothèse c'est un objet projectif de $\mathbf{PC}(k)$, et $\mathrm{H}(\mathrm{G}) = \mathrm{A}^\dagger$. Pour tout objet P de $\mathbf{PC}(k)$, notons $\mathrm{U} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{P}$ la limite projective des k-modules $\mathrm{U} \otimes_k (\mathrm{P}/\mathrm{N})$, où N parcourt les sous-modules ouverts de P. On a des applications linéaires

$$\mathrm{U} \otimes_k (\mathrm{P}/\mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k((\mathrm{P}/\mathrm{N})^*, \mathrm{U})$$

qui envoient $u \otimes x$ sur l'application k-linéaire $f \mapsto f(x)u$ et qui forment un système projectif filtrant. On obtient donc, par passage à la limite projective, un morphisme 518

$$\mathrm{U} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{P} \xrightarrow{\psi_{\mathrm{P}}} \mathrm{Hom}_k(\mathrm{P}^\dagger, \mathrm{U}) \,. \tag{1}$$

[88] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui précède, et dans ce qui suit on a noté $\mathbf{W}(\mathrm{U})^\times$ au lieu de U_m. Rappelons d'autre part (cf. 1.2.1) qu'on appelle « k-foncteur » un foncteur covariant $\mathbf{Alf}_{/k} \to (\mathbf{Ens})$.

Lorsque $P = k$, ψ_k est évidemment un isomorphisme; de plus, les deux membres de (1), considérés comme foncteurs en P, commutent aux produits infinis (tout produit étant limite projective filtrante de produits finis). On obtient donc que (1) est un isomorphisme lorsque P est un produit de copies de k, puis lorsque P est un objet projectif de $\mathbf{PC}(k)$ (les deux membres de (1) commutant aux sommes directes finies).

Notons maintenant $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(G, \mathbf{W}(U))$ l'ensemble des morphismes de k-foncteurs de G dans $\mathbf{W}(U)$. Comme $G = \mathrm{Spf}(A) = \varinjlim \mathrm{Spf}(A/\mathfrak{l})$, où $\mathfrak{l}$ parcourt les idéaux ouverts de A, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}\big(G, \mathbf{W}(U)\big) = \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}\big(\mathrm{Spf}(A/\mathfrak{l}), \mathbf{W}(U)\big) = \varprojlim U \otimes_k (A/\mathfrak{l}) = U \mathbin{\widehat{\otimes}_k} A.$$

D'après ce qui précède, on obtient donc un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}\big(G, \mathbf{W}(U)\big) = U \mathbin{\widehat{\otimes}_k} A \xrightarrow{\psi_A} \mathrm{Hom}_k(H(G), U)\ . \tag{2}$$

Pour toute k-algèbre de longueur finie C, la multiplication fait de $U\otimes_k C$ un monoïde à élément unité, et tout morphisme de monoïdes à élément unité $G(C) \to U \otimes_k C$ est nécessairement un morphisme de *groupes* $G(C) \to (U \otimes_k C)^\times$. Par conséquent, on obtient que $\mathrm{Hom}_{k\text{-Gr.}}(G, \mathbf{W}(U)^\times)$ est la partie de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}(G, \mathbf{W}(U))$ formée des morphismes de k-foncteurs en monoïdes à élément unité.

Il reste à voir que ces morphismes correspondent aux applications k-linéaires de H(G) dans U qui préservent la multiplication et les éléments unité. [89] Pour simplifier l'écriture, $H(G) = A^\dagger$ sera noté H et l'on écrira $\widehat{\otimes}$ au lieu de $\widehat{\otimes}_k$. Notons Δ_A, m_A et ε_A (resp. Δ_H, m_H et ε_H) la comultiplication, la multiplication et l'augmentation de A (resp. H). Soit $\theta \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{F}}\big(G, \mathbf{W}(U)\big)$, notons γ son image dans $U \mathbin{\widehat{\otimes}} A$ et $\phi : H \to U$ l'application k-linéaire associée. Alors θ envoie la section unité $s \in G(k)$ sur un élément u de U, et comme s correspond à l'augmentation $\varepsilon : A \to k$, qui est l'élément unité 1_H de H, on voit que $\theta(s) = 1_U$ si et seulement si $\phi(1_H) = 1_U$.

Par ailleurs, le morphisme $\theta \circ m_G : G \times G \to \mathbf{W}(U)$ correspond à l'élément $(\mathrm{id}_U \mathbin{\widehat{\otimes}} \Delta_A)(\gamma)$, et celui-ci correspond, par dualité, à l'application $\phi \circ m_H : H \otimes H \to U$.

D'autre part, le morphisme $\theta \circ \mathrm{pr}_1 : G \times G \to \mathbf{W}(U)$ correspond à l'élément $\gamma \mathbin{\widehat{\otimes}} 1_A$ de $U \mathbin{\widehat{\otimes}} A \mathbin{\widehat{\otimes}} A$, qui correspond par dualité à $\phi \circ (\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon) : H \otimes H \to U$. De même, $\theta \circ \mathrm{pr}_2$ correspond à l'élément $\tau(\gamma \mathbin{\widehat{\otimes}} 1_A)$ de $U \mathbin{\widehat{\otimes}} A \mathbin{\widehat{\otimes}} A$ (où $\tau(u \mathbin{\widehat{\otimes}} a \mathbin{\widehat{\otimes}} b) = u \mathbin{\widehat{\otimes}} b \mathbin{\widehat{\otimes}} a$), qui correspond par dualité à $\phi \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H) : H \otimes H \to U$. Enfin, l'application de multiplication $\mu = m_{U \widehat{\otimes} A \widehat{\otimes} A}$ ci-dessous :

$$(U \mathbin{\widehat{\otimes}} A \mathbin{\widehat{\otimes}} A) \times (U \mathbin{\widehat{\otimes}} A \mathbin{\widehat{\otimes}} A), \qquad (u \mathbin{\widehat{\otimes}} a_1 \mathbin{\widehat{\otimes}} a_2,\ u' \mathbin{\widehat{\otimes}} a_3 \mathbin{\widehat{\otimes}} a_4) \mapsto uu' \mathbin{\widehat{\otimes}} a_1a_3 \mathbin{\widehat{\otimes}} a_2a_4$$

peut être vue comme la composée de l'endomorphisme σ_{23} de $(U \otimes U) \mathbin{\widehat{\otimes}} A^{\widehat{\otimes}\, 4}$ qui « échange les facteurs a_2 et a_3 », et de l'application

$$(U \otimes U) \mathbin{\widehat{\otimes}} A^{\widehat{\otimes}\, 2} \mathbin{\widehat{\otimes}} A^{\widehat{\otimes}\, 2} \xrightarrow{m_U \widehat{\otimes} m_A \widehat{\otimes} m_A} U \mathbin{\widehat{\otimes}} A \mathbin{\widehat{\otimes}} A\ .$$

[89] N.D.E. : L'original indiquait que : « (cela) résulte du caractère fonctoriel de ψ_A ». On a détaillé cela dans ce qui suit.

On en déduit que l'application $\mu \circ (\phi \circ \mathrm{pr}_1, \phi \circ \mathrm{pr}_2) : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathbf{W}(\mathrm{U})$ correspond à l'application composée β ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \arrow[r, "\beta"] \arrow[dl, "\mathrm{id}_{\mathrm{H}} \circ \sigma_{23} \circ \mathrm{id}_{\mathrm{H}}"'] & \mathrm{U} \\
\mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \arrow[dr, "(\mathrm{id}_{\mathrm{H}} \otimes \varepsilon_{\mathrm{H}}) \otimes (\varepsilon_{\mathrm{H}} \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{H}})"'] & & \mathrm{U} \otimes \mathrm{U} \arrow[u, "m_{\mathrm{U}}"'] \\
 & \mathrm{H} \otimes \mathrm{H} \arrow[ur, "\phi \otimes \phi"'] & .
\end{tikzcd}$$

Enfin, θ est compatible avec les lois de G et de $\mathbf{W}(\mathrm{U})^{\times}$ si et seulement si $\theta \circ m_{\mathrm{G}}$ égale $\mu \circ (\phi \circ \mathrm{pr}_1, \phi \circ \mathrm{pr}_2)$ ce qui équivaut, d'après ce qui précède, à $\phi \circ m_{\mathrm{H}} = \beta$. Or il est clair que $(\phi \circ m_{\mathrm{H}})(x \otimes y) = \phi(xy)$, et l'on voit facilement que $\beta(x \otimes y) = \phi(x)\phi(y)$.

2.4. Revenons maintenant à un anneau pseudocompact quelconque k pour appliquer aux groupes formels les résultats de 1.4–1.5 sur le passage au quotient par une relation d'équivalence topologiquement plate.

[(90)] Soient $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ un *monomorphisme* de k-groupes formels, $\mu : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ le morphisme « multiplication » de G et λ le morphisme composé **519**

$$\lambda : \quad \mathrm{G} \times \mathrm{H} \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathrm{G}} \times u} \mathrm{G} \times \mathrm{G} \xrightarrow{\mu} \mathrm{G}.$$

Comme u est un monomorphisme, le couple

$$\mathrm{G} \times \mathrm{H} \underset{\lambda}{\overset{\mathrm{pr}_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{G}$$

est un couple d'équivalence dans $\mathbf{Vaf}_{/k}$ (cf. V, 2.b)). Rappelons (cf. 1.2.C) que le conoyau G/H de ce couple est défini comme suit.

Soient $\mathscr{O}(\mathrm{G})$ et $\mathscr{O}(\mathrm{H})$ les algèbres affines de G et H, $\Delta : \mathscr{O}(\mathrm{G}) \to \mathscr{O}(\mathrm{G}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathscr{O}(\mathrm{G})$ le morphisme diagonal de $\mathscr{O}(\mathrm{G})$, et I le noyau du morphisme $u^{\natural} : \mathscr{O}(\mathrm{G}) \to \mathscr{O}(\mathrm{H})$. (On sait, d'après la proposition 1.3, que $u^{\natural}$ induit un isomorphisme $\mathscr{O}(\mathrm{G})/\mathrm{I} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}(\mathrm{H})$). Alors, l'algèbre affine $\mathscr{O}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$ de G/H est le noyau du couple de morphismes :

$$\mathscr{O}(\mathrm{G}) \underset{(\mathrm{id} \mathbin{\widehat{\otimes}} u^{\natural})\Delta}{\overset{\tau_1}{\rightrightarrows}} \mathscr{O}(\mathrm{G}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathscr{O}(\mathrm{H}),$$

où $\tau_1(x) = x \mathbin{\widehat{\otimes}} 1$, c.-à-d.,

$$\mathscr{O}(\mathrm{G}/\mathrm{H}) = \{x \in \mathscr{O}(\mathrm{G}) \mid \Delta(x) - x \mathbin{\widehat{\otimes}} 1 \in \mathscr{O}(\mathrm{G}) \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{I}\}.$$

Si, de plus, H est *topologiquement plat* sur k, alors pr_1 est topologiquement plat et l'on déduit du théorème 1.4 le théorème suivant.

[(90)] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

Théorème. — *Soit* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un* monomorphisme *de* k*-groupes formels. On suppose* H topologiquement plat *sur* k*. Alors, la projection* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{H}$ *est surjective et topologiquement plate, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{G} \times \mathrm{H} \xrightarrow{\sim} \mathrm{G} \underset{\mathrm{G}/\mathrm{H}}{\times} \mathrm{G} \tag{$*$}$$

et G/H *représente le* faisceau-quotient *pour la topologie plate.*

Par conséquent, G/H *est muni d'une structure canonique d'objet à groupe d'opérateurs* G*, telle que* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{H}$ *soit un morphisme d'objets à opérateurs. Si de plus* u *identifie* H *à un sous-groupe* invariant *de* G*, alors* G/H *est muni d'une structure canonique de* k-groupe formel, *telle que* $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{H}$ *soit un morphisme de* k*-groupes formels, et* H *est le noyau de* p*.*

En effet, la première assertion découle de 1.4 ; les deux autres de IV, corollaires 5.2.2 et 5.2.4.

Corollaire. — [91] *Soient* G *un* k*-groupe formel,* H *un sous-groupe formel de* G*,* A (*resp.* A/J, B) *l'algèbre affine de* G (*resp.* H, G/H)*,* $\mathrm{I_A}$ *l'idéal d'augmentation de* A*, et* $\mathrm{I_B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{I_A}$*. On suppose* H topologiquement plat *sur* k*. Alors* J *égale* $\overline{\mathrm{AI_B}}$*, l'idéal fermé engendré par* $\mathrm{I_B}$*.*

En effet, la projection $\mathrm{B} \to \mathrm{B}/\mathrm{I_B}$ correspond à la « section unité » $e : \mathrm{Spf}(k) \to \mathrm{G}/\mathrm{H}$ de G/H. D'après ($*$), H s'identifie au produit fibré $\mathrm{Spf}(k) \times_{\mathrm{G}/\mathrm{H}} \mathrm{G}$, et donc son algèbre affine A/J s'identifie à $(\mathrm{B}/\mathrm{I_B}) \widehat{\otimes}_{\mathrm{B}} \mathrm{A} \simeq \mathrm{A}/\overline{\mathrm{AI_B}}$.

2.4.A. — [92] Soient G, Q des k-groupes formels topologiquement plats ; on suppose qu'il existe des homomorphismes $\sigma : \mathrm{Q} \to \mathrm{G}$ et $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{Q}$ tels que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id_Q}$. En particulier, σ est un monomorphisme, donc Q est un sous-groupe formel de G (cf. la remarque 1.3). Soient $\mathrm{N} = \mathrm{Ker}(\pi)$ et σ' l'inclusion $\mathrm{N} \hookrightarrow \mathrm{G}$. Alors G est le *produit semi-direct* de N par Q (cf. I, 2.3.8), i.e. pour tout $\mathrm{B} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alf}_{/k}$, identifiant N(B) et Q(B) à leurs images dans G(B) par σ' et σ, N(B) est un sous-groupe invariant de G(B) et l'application

$$\mu : \quad \mathrm{N(B)} \times \mathrm{Q(B)} \longrightarrow \mathrm{G(B)}, \qquad (x, q) \mapsto xq \tag{1}$$

est bijective. Alors le morphisme de k-variétés formelles

$$\theta : \quad \mathrm{G(B)} \longrightarrow \mathrm{N(B)}, \qquad g \mapsto g \cdot \sigma\pi(g^{-1}) \tag{2}$$

est une rétraction de σ', l'inverse de μ est l'application

$$g \mapsto (\theta(g), \pi(g)) \tag{3}$$

et $\theta \circ \sigma' : \mathrm{N} \to \mathrm{G}/\mathrm{Q}$ est un isomorphisme de k-variétés formelles. En particulier, N est topologiquement plat sur k, d'après 1.4 (ii). Notons α (resp. β) l'application de

[91] N.D.E. : On a explicité ce corollaire, qui est utilisé, par exemple, en 5.2.1/5.2.3.

[92] N.D.E. : On a ajouté les paragraphes 2.4.A et 2.4.B, qui seront utiles en 5.1.3, resp. en 2.9.

$Q \times N$ (resp. $G \times N = N \times Q \times N$) vers N définie ensemblistement par $\alpha(q, y) = qyq^{-1}$ (resp. $\beta(x, q, y) = x\alpha(q, y)$). Alors on a le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "\mathrm{id} \times \theta"] \arrow[d, "m_G"'] & G \times N \arrow[r, "\theta \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\beta"] & N \times N \arrow[dl, "m_N"] \\
G \arrow[r, "\theta"] & N &
\end{tikzcd} \tag{4}$$

Ceci peut s'exprimer comme suit en termes des algèbres affines A, A_0 et A' de G, Q et N (cf. 5.1.3 plus loin). Soient $\rho' : A \to A'$, $\rho : A \to A_0$ et $\tau : A_0 \to A$ les homomorphismes de k-bialgèbres correspondant à σ', σ et π, et soit $I = \mathrm{Ker}(\rho)$. Alors, d'après le corollaire précédent, A' s'identifie à $A/\overline{A\tau(J_0)}$, où J_0 désigne l'idéal d'augmentation de A_0.

D'autre part, soit B l'algèbre affine de G/Q, c'est le noyau du couple de morphismes :

$$A \underset{(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\rho)\Delta_A}{\overset{\tau_1}{\rightrightarrows}} A \,\widehat{\otimes}_k\, A_0,$$

i.e. $B = \{x \in A \mid \Delta_A(x) - x \,\widehat{\otimes}\, 1 \in A \,\widehat{\otimes}\, I\}$. Notons γ le morphisme continu de k-algèbres $\theta^\natural : A' \to A$; c'est une section de ρ' et un isomorphisme de k-algèbres profinies de A' sur B. D'autre part, $\tau = \pi^\natural$ identifie A_0 à une sous-bialgèbre de A, qui n'est autre que l'algèbre affine du quotient $N\backslash G$. On déduit alors de (1) et (3) que l'on a un isomorphisme de k-algèbres profinies

$$A' \,\widehat{\otimes}_k\, A_0 \xrightarrow{\sim} A, \qquad a' \,\widehat{\otimes}\, a_0 \mapsto \gamma(a')\tau(a_0), \tag{$*$}$$

dont l'inverse est l'application $a \mapsto (\rho' \otimes \rho)\Delta_A(a)$.

Enfin, identifions A' à son image dans A par γ, de sorte que la projection $A \to A'$ est alors $\gamma\rho'$. Notant $\Delta_{A'}$ la comultiplication de A', on déduit alors de (4) que $\Delta_A(A') \subset A \,\widehat{\otimes}\, A'$ et que le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\Delta_A"] \arrow[d, equal] & A \,\widehat{\otimes}\, A' \arrow[d, "\gamma\rho' \otimes \mathrm{id}"] \\
A' \arrow[r, "\Delta_{A'}"] & A' \,\widehat{\otimes}\, A'
\end{tikzcd}$$

(on a donc aussi $\gamma\rho' \circ c_A = c_{A'}$, où c_A (resp. $c_{A'}$) est l'antipode de A (resp. A')). D'autre part, notant m_A la multiplication de A, on déduit de (2) que, pour tout $a \in A$,

$$\gamma\rho'(a) = (m_A \circ (\mathrm{id} \otimes \tau\rho\, c_A) \circ \Delta_A)(a).$$

2.4.B. — [92] Supposons, pour simplifier, k *artinien.* Alors ce qui précède s'exprime plus simplement en termes des bialgèbres covariantes de G, Q, N. En effet, comme

$G = N \times Q$ comme k-variétés formelles, alors $H(G) = H(N) \otimes_k H(Q)$ comme k-coalgèbres. De plus, comme la multiplication de G est donnée par

$$(x,q)\cdot(x',q') = (x\alpha(q,x'), qq'), \qquad \text{où} \quad \alpha(q,x') = qxq^{-1},$$

alors la multiplication de H(G) est donnée comme suit : pour tout $x \in H(N)$, $q \in H(Q)$,

$$(x\otimes q)\cdot(x'\otimes q') = x\phi(q,x')\otimes qq',$$

où $\phi : H(Q) \otimes_k H(N)$ est le morphisme de k-coalgèbres induit par α. Comme α est le morphisme composé ci-dessous (où δ_G (resp. m_G) est le morphisme diagonal (resp. la multiplication) de G, c_Q le morphisme d'inversion de Q et $v(q\otimes q'\otimes x) = q\otimes x\otimes q')$:

$$Q\times N \xrightarrow{v\circ(\delta_G\times \mathrm{id})} Q\times N\times Q \xrightarrow{\mathrm{id}\times\mathrm{id}\times c_Q} Q\times N\times Q \xrightarrow{m_G} G\,,$$

on obtient, notant encore c_Q l'antipode de H(Q), que

$$(\star) \qquad \phi(q\otimes x') = \sum_i q_i\, x' c_Q(q_i') \qquad \text{si} \qquad \Delta_{H(Q)}(q) = \sum_i q_i\otimes q_i'.$$

En particulier, si M est un groupe abstrait et si H(Q) est l'algèbre de groupe kM (i.e. $Q = \mathrm{Spf}^*\, k\mathrm{M}$ est le *k-groupe formel constant* M_k), alors pour tout $\gamma \in M$ et $x' \in H(N)$ on a $\phi(\gamma\otimes x') = \gamma x'\gamma^{-1}$, et ceci définit une action de M sur H(N) par automorphismes d'algèbre de Hopf.

2.4.1 Proposition. — *Soit $f : G \to K$ un morphisme de k-groupes formels. Si* $H =$
520 $\mathrm{Ker}(f)$ *est* topologiquement plat *sur k, l'homomorphisme $f' : G/H \to K$, qui est induit par f, est un* monomorphisme.

C'est une conséquence des résultats de l'exposé IV [93] ; nous en donnons cependant une démonstration directe. Soient T une variété formelle de longueur finie sur k et t un élément de (G/H)(T) tel que $f'\circ t$ soit l'élément unité de K(T). Nous devons montrer que t est l'élément unité de (G/H)(T). Notons p la projection $G \to G/H$ et X le produit fibré $T\times_{G/H} G$.

D'après 2.4, p est surjectif et topologiquement plat, donc il en est de même du morphisme $\mathrm{pr}_1 : X \to T$, donc pr_1 est un épimorphisme d'après la proposition 1.3.1, donc il suffit de montrer que $t\circ\mathrm{pr}_1$ est l'élément unité de (G/H)(X). Notons pr_2 la projection $X \to G$, on a $t\circ\mathrm{pr}_1 = p\circ\mathrm{pr}_2$, d'où l'égalité $1 = f'\circ t\circ\mathrm{pr}_1 = f'\circ p\circ\mathrm{pr}_2 = f\circ\mathrm{pr}_2$; alors la suite exacte

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \xrightarrow{f} K$$

montre que pr_2 se factorise à travers H, donc $p\circ\mathrm{pr}_2$ est le morphisme nul. Comme $p\circ\mathrm{pr}_2 = t\circ\mathrm{pr}_1$, ceci prouve la proposition.

On déduit de la proposition le corollaire suivant. Notons $\mathscr{O}(G)$, $\mathscr{O}(K)$ et $\mathscr{O}(G/H)$ les algèbres affines de G, K et G/H ; on a vu (2.4) que p induit une injection de $\mathscr{O}(G/H)$ dans $\mathscr{O}(G)$. De plus, d'après la proposition 1.3, comme $f' : G/H \to K$ est un monomorphisme, le morphisme $\mathscr{O}(K) \to \mathscr{O}(G/H)$ est surjectif, d'où :

[93] N.D.E. : cf. IV, 5.2.6.

Corollaire. — *Soient* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{K}$ *un morphisme de* k*-groupes formels et* $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(f)$. *Si* H *est topologiquement plat sur* k*, alors* $\mathscr{O}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$ *est l'image de* $\mathscr{O}(\mathrm{K})$ *dans* $\mathscr{O}(\mathrm{G})$.

2.4.2. — Gardons les notations précédentes et supposons H *et* G *topologiquement plats sur* k. Alors G est topologiquement plat sur k et sur G/H, donc, d'après 1.3.3, G/H est topologiquement plat sur k. Par conséquent, d'après 2.4, la projection canonique q de K sur $\mathrm{Coker}(f')$ est topologiquement plate et f' est un isomorphisme de G/H sur $\mathrm{Ker}(q)$. Il est clair d'autre part qu'on a $\mathrm{Coker}(f) = \mathrm{Coker}(f')$. Donc, sous l'hypothèse que G et $\mathrm{H} = \mathrm{Ker}(f)$ soient topologiquement plats sur k, on a obtenu un isomorphisme entre $\mathrm{Ker}(q)$, *l'image* de f, et $\mathrm{G}/\mathrm{Ker}(f)$, la *coïmage* de f. Ceci entraîne le théorème ci-dessous.

Théorème. — *Soit* k *un corps. Les* k*-groupes formels* commutatifs *forment une catégorie abélienne.* 521

Corollaire. — *Soit* k *un corps. Les* k*-schémas en groupes* affines commutatifs *forment une catégorie abélienne.* [94]

Ceci résulte du théorème et de l'équivalence de catégories 2.2.2.

2.5. Un k-groupe formel est dit *étale* si la variété formelle sous-jacente est étale (cf. 1.6) ; ces groupes formels ont une structure très simple. En effet, *supposons* k *local* ; soient κ le corps résiduel de k, κ_s une clôture séparable de κ et Γ le groupe de Galois topologique de κ_s sur κ. Appelons Γ-*ensemble* la donnée d'un ensemble E et d'une opération *continue* de Γ sur E (i.e. le groupe d'isotropie de tout élément $x \in \mathrm{E}$ est un sous-groupe ouvert de Γ).

Pour toute k-variété formelle X, on pose :

$$\mathrm{X}(\kappa_s) = \varinjlim_{\ell} \mathrm{X}(\ell),$$

où ℓ parcourt les extensions finies de κ contenues dans κ_s. [95] Alors Γ opère continûment sur chaque $\mathrm{X}(\ell)$, donc aussi sur $\mathrm{X}(\kappa_s)$. De plus, soit $\mathrm{X}_\kappa = \mathrm{X}\,\widehat{\otimes}_k\,\kappa$ (cf. 1.6.C) ; pour tout ℓ on a $\mathrm{X}(\ell) = \mathrm{X}_\kappa(\ell)$, d'où $\mathrm{X}(\kappa_s) = \mathrm{X}_\kappa(\kappa_s)$.

Supposons maintenant X *étale* sur k, alors X_κ est la κ-variété formelle somme directe des $\mathrm{Spec}\,\kappa(x)$, pour $x \in \mathrm{X}$, et si l'on note X'_κ le κ-*schéma* somme directe des $\mathrm{Spec}\,\kappa(x)$, on voit que $\mathrm{X}_\kappa(\kappa_s)$ n'est autre que $\mathrm{X}'_\kappa(\kappa_s) = \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Sch}_{/\kappa})}(\mathrm{Spec}\,\kappa_s, \mathrm{X}'_\kappa)$.

Notons $\mathscr{C} = (\mathbf{Sch}^{\text{ét}}_{/\kappa})$ la sous-catégorie pleine de $(\mathbf{Sch}_{/\kappa})$ formée des κ-schémas étales. On sait que le foncteur $\mathrm{X}' \mapsto \mathrm{X}'(\kappa_s)$ est une *équivalence* de $\mathscr{C}$ sur la catégorie $\mathscr{C}'$ des Γ-ensembles (cf. SGA 1, V §§ 7-8 ou [**DG70**], § I.4 6.4), il induit donc une équivalence entre la catégorie des $\mathscr{C}$-groupes et celle des $\mathscr{C}'$-groupes, or on voit aussitôt qu'un $\mathscr{C}'$-groupe est la même chose qu'un groupe abstrait G muni d'une opération continue de Γ par automorphismes de groupes (on dira alors que G est un Γ-*groupe*).

(94) N.D.E. : voir aussi les remarques suivant VI_{A}, 5.4.3.

(95) N.D.E. : Noter que si $[\kappa_s : \kappa] = \infty$, κ_s n'est *pas* une κ-algèbre profinie, donc l'écriture précédente est un abus de notation. D'autre part, on a détaillé l'original dans ce qui suit.

Compte-tenu des équivalences $\mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/k} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Vaf}^{\text{ét}}_{/\kappa} \xrightarrow{\sim} (\mathbf{Sch}^{\text{ét}}_{/\kappa})$ de 1.6.E, on obtient donc la :

Proposition. — *Soient k un anneau pseudocompact* local*, κ son corps résiduel, κ_s une clôture séparable de κ et $\Gamma = \mathrm{Gal}(\kappa_s/\kappa)$.*

(i) *Le foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}(\kappa_s)$ est une* équivalence *de la catégorie des k*-variétés formelles étales *sur celle des* Γ-ensembles*.*

(ii) *Il induit une* équivalence *de la catégorie des k*-groupes formels étales *sur celle des* Γ-groupes*.*

Remarque 2.5.A. — [96] Soient k un corps, k_s une clôture séparable de k, G un k-groupe formel étale et M le groupe abstrait $\mathrm{G}(k_s)$. Notons X un ensemble de représentants des orbites de $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$ dans M, et pour tout $x \in \mathrm{X}$ soient Γ_x son stabilisateur, qui est un sous-groupe de Γ d'indice fini, et $\mathrm{L}_x = k_s^{\Gamma_x}$, qui est une extension de k de degré $[\Gamma : \Gamma_x]$ (voir, par exemple, [**BAlg**], V § 10.10). Alors, d'après l'équivalence de catégories ci-dessus, l'algèbre affine $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ de G est le produit des L_x, muni de la topologie produit, et donc les L_x sont exactement les quotients simples $\mathscr{A}(\mathrm{G})/\mathfrak{m}$, où $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal ouvert de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$. Comme ceux-ci correspondent par dualité aux sous-cogèbres de H(G), on obtient que H(G) est *pointée* (i.e. $\dim_k(\mathrm{C}) = 1$ pour toute sous-cogèbre simple C) si et seulement si $\mathrm{L}_x = k$ pour tout x, et dans ce cas $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ est l'algèbre topologique k^{M}, donc H(G) est l'algèbre de groupe $k\mathrm{M}$, et l'on a donc $\mathrm{M} = \{x \in \mathrm{H}(\mathrm{G}) \mid \varepsilon(x) = 1 \text{ et } \Delta(x) = x \otimes x\} = \mathrm{G}(k)$.

2.5.1. — Supposons de nouveau l'anneau pseudocompact k quelconque. Comme le
522 foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_e$ de 1.6.F commute aux produits finis, il transforme tout groupe formel G en un groupe formel étale G_e, et comme le morphisme $p : \mathrm{X} \to \mathrm{X}_e$ de *loc. cit.* est fonctoriel en X, alors $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}_e$ est dans ce cas un morphisme de groupes formels.

[97] Considérons le noyau $\mathrm{Ker}(p)$, c'est le produit fibré du diagramme :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{G} \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{Spf}(k) \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathrm{G}_e \end{tikzcd}$$

où ε est la section unité de G_e. Comme p induit une bijection sur les ensembles sous-jacents, on en déduit (cf. 1.2, N.D.E. (41)) que $\mathrm{Ker}(p)$ a pour ensemble sous-jacent l'image de $\mathrm{Spf}(k)$ par ε et que pour tout point s de $\mathrm{Spf}(k)$, l'algèbre locale de $\mathrm{Ker}(p)$ au point $\varepsilon(s)$ est $\mathscr{O}_{\mathrm{G},\varepsilon(s)} \widehat{\otimes}_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}_e,\varepsilon(s)}} k_s$. De plus, en chaque point $\varepsilon(s)$, le corps résiduel de $\mathscr{O}_{\mathrm{G},\varepsilon(s)}$ est $\kappa(s)$, et donc $\mathscr{O}_{\mathrm{G}_e,\varepsilon(s)} = k_s$, d'où $\mathscr{O}_{\mathrm{Ker}(p),\varepsilon(s)} = \mathscr{O}_{\mathrm{G},\varepsilon(s)}$. Pour ces raisons

[96] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.
[97] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

nous dirons que $\mathrm{Ker}(p)$ est *le voisinage infinitésimal de l'origine* de G et nous écrirons $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{G}_0$, obtenant ainsi une suite exacte :

$$1 \longrightarrow \mathrm{G}_0 \xrightarrow{\text{incl.}} \mathrm{G} \xrightarrow{p} \mathrm{G}_e \,.$$

Dans la suite, nous dirons que G est *infinitésimal* si $\mathrm{G} = \mathrm{G}_0$. [98] Ceci équivaut à dire que pour tout $s \in \mathrm{Spf}(k)$, ou encore pour tout morphisme continu $k \to \kappa$, où κ est un corps muni de la topologie discrète, l'élément unité est l'unique élément de $\mathrm{G}(\kappa(s))$ resp. de $\mathrm{G}(\kappa)$.

Supposons de plus que G soit *topologiquement plat* sur k. [99] Alors, d'après 1.6.1, le morphisme $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}_e$ est topologiquement plat, et comme il est bijectif, c'est donc un épimorphisme effectif d'après la proposition 1.3.1. Par conséquent, G_e s'identifie au quotient G/G_0. On a donc obtenu :

Corollaire. — *Soit* G *un groupe formel* topologiquement plat *sur k. Alors G_e s'identifie au quotient* G/G_0 *; c.-à-d., on a une suite exacte de groupes formels :*

$$1 \longrightarrow \mathrm{G}_0 \xrightarrow{\text{incl.}} \mathrm{G} \xrightarrow{p} \mathrm{G}_e \longrightarrow 1.$$

2.5.2. — Supposons que k soit un *corps parfait*. Dans ce cas, on a vu (cf. 1.6.2) que le morphisme $p : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}_e$ possède une section $s : \mathrm{X}_e \to \mathrm{X}$ qui dépend fonctoriellement 523
de X ; cette section est donc un morphisme de groupes formels lorsque X est un groupe formel. On obtient donc la :

Proposition. — *Lorsque k est un corps* parfait*, tout k-groupe formel* G *est canoniquement isomorphe au* produit semi-direct *d'un groupe infinitésimal* G_0 *et d'un groupe étale* G_e *opérant sur* G_0*.* [100]

Si, de plus, G est *commutatif*, alors G est le produit de G_0 et de G_e. D'après 2.2.2, cette décomposition canonique des k-groupes formels commutatifs correspond à une décomposition analogue des k-schémas affines en groupes commutatifs, voir le paragraphe 2.5.3 ci-dessous.

Remarque 2.5.2.A. — [101] La suite exacte $1 \to \mathrm{G}_0 \to \mathrm{G} \to \mathrm{G}_e \to 1$ n'est pas nécessairement scindée lorsque k n'est pas parfait : donnons l'exemple suivant, tiré de [**DG70**], § III.6, 8.6. Soit k un corps non parfait, de caractéristique $p > 0$. Soit $\lambda \in k - k^p$, soit L_λ la p-algèbre de Lie abélienne de base (x, y), la puissance p-ième symbolique (cf. $\mathrm{VII_A}$, 5.2) étant donnée par $x^{(p)} = x$ et $y^{(p)} = \lambda x$, soit $\mathrm{U}_p(\mathrm{L}_\lambda) = k[x, y]/(x^p - x, y^p - \lambda x)$ l'algèbre enveloppante restreinte de L_λ (cf. $\mathrm{VII_A}$, 5.3), et soit G_λ le k-groupe formel

[98] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.
[99] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.
[100] N.D.E. : Le même argument montre aussi que, pour un corps k *arbitraire*, si tous les corps résiduels de G égalent k, alors G_e est le k-groupe *constant* $(\mathrm{M})_k$, où $\mathrm{M} = \mathrm{G}(k) = \mathrm{Spf}^* \mathrm{H}(\mathrm{G})$, et $\mathrm{H}(\mathrm{G})$ est le produit semi-direct de $\mathrm{H}(\mathrm{G}_0)$ par l'algèbre de groupe $k\mathrm{M}$, cf. l'ajout 2.9 plus loin.
[101] N.D.E. : On a ajouté cette remarque.

commutatif d'algèbre affine $\mathrm{U}_p(\mathrm{L}_\lambda)$. Alors G_λ est une extension non-scindée du k-groupe étale constant $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k$ par le k-groupe infinitésimal $\boldsymbol{\alpha}_{p,\,k} = \operatorname{Spf} k[x]/(x^p - x)$, i.e. on a une suite exacte non-scindée de k-groupes formels commutatifs : [102]

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{\alpha}_{p,\,k} \longrightarrow \mathrm{G}_\lambda \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k \longrightarrow 0\ .$$

Elle correspond par dualité à une suite exacte non-scindée de k-groupes algébriques commutatifs :

$$0 \longrightarrow \boldsymbol{\mu}_{p,\,k} \longrightarrow \mathrm{D}'(\mathrm{G}_\lambda) \longrightarrow \boldsymbol{\alpha}_{p,\,k} \longrightarrow 0$$

où $\boldsymbol{\mu}_{p,\,k} = \operatorname{Spec} k[t]/(t^p - 1)$ (et l'on obtient ainsi toutes les extensions de $\boldsymbol{\alpha}_{p,\,k}$ par $\boldsymbol{\mu}_{p,\,k}$, cf. [**DG70**], § III.6, 8.6).

2.5.3. — [103] Soit k un corps.

Définition 2.5.3.A. — On dira qu'un k-schéma en groupes commutatifs est *unipotent* s'il est isomorphe à $\operatorname{Spec} \mathrm{H}(\mathrm{G})$, où G est un k-groupe formel commutatif *infinitésimal.* [104]

[105] D'autre part, suivant l'Exp. IX, Définition 1.1, on dit qu'un k-schéma en groupes H est *de type multiplicatif* s'il existe un schéma S, fidèlement plat et quasi-compact au-dessus de $\operatorname{Spec} k$, tel que H_S soit un S-groupe diagonalisable, i.e. soit isomorphe à $\mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$ pour un certain groupe abélien « abstrait » M. Par descente (fpqc), ceci entraîne que H est *affine* et commutatif. D'autre part, comme on peut remplacer S par le corps résiduel d'un de ses points, on voit que H est de type multiplicatif si et seulement si il existe une extension K de k telle que H_K soit un K-groupe diagonalisable.

Proposition 2.5.3.B. — *Soit* T *un k-schéma en groupes commutatifs affine et soit k_s une clôture séparable de k.*

(i) *Pour que* T *soit* de type multiplicatif*, il faut et il suffit que son dual* D(T) *soit un k-groupe formel commutatif* étale.

(ii) *Par conséquent,* T *est de type multiplicatif si et seulement si* $\mathrm{T} \otimes_k k_s$ *est diagonalisable.*

Démonstration. Notons $\mathscr{A}$ l'algèbre affine de D(T) et $\mathscr{A}_0$ sa composante locale en l'élément neutre ; alors D(T) est étale sur k si et seulement si $\mathscr{A}_0 = k$. Si K est une extension de k, alors l'algèbre $\mathscr{A}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{K}$ est locale (car limite projective d'anneaux artiniens locaux), donc coïncide avec la composante locale $(\mathscr{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{K})_0$; de plus, comme

[102] N.D.E. : $\boldsymbol{\alpha}_{p,\,k}$, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_k$ et G_λ sont aussi des k-groupes algébriques finis et plats sur k, cf. la N.D.E. (84) dans 2.2.2.

[103] N.D.E. : On a introduit la numérotation 2.5.3 et 2.5.3.A à 2.5.3.C.

[104] N.D.E. : Cela coïncide avec la notion « usuelle » de k-schéma en groupes unipotent, cf. l'ajout 2.8 à la fin de la Section 2.

[105] N.D.E. : L'original indiquait : « disons qu'un k-schéma en groupes commutatifs est de type multiplicatif s'il est isomorphe à $\operatorname{Spec} \mathrm{H}(\mathrm{G})$, où G est un k-groupe formel commutatif étale ». On a donné ici la définition « usuelle », tirée de l'Exp. IX, 1.1, et l'on a montré l'équivalence avec la condition précédente ; voir aussi [**DG70**], § IV.1, Th. 2.2.

la formation de D(T) commute au changement de base (cf. 2.2.2), on a aussi $\mathscr{A}\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{K} \simeq \mathrm{D}(\mathrm{T}_{\mathrm{K}})$.

Supposons T de type multiplicatif, alors il existe une extension K de k telle que $\mathscr{O}(\mathrm{T})\otimes_k \mathrm{K}$ soit isomorphe, comme K-algèbre de Hopf, à l'algèbre de groupe KM, pour un certain groupe abélien M. Alors $\mathscr{A}\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{K}$ est isomorphe à l'algèbre K^{M}, munie de la topologie produit, donc on a $\mathrm{K} = (\mathscr{A}\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{K})_0 = \mathscr{A}_0\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{K}$ et ceci entraîne que $\mathscr{A}_0 = k$, donc D(T) est étale.

Réciproquement, supposons que D(T) soit étale. Alors $\mathrm{D}(\mathrm{T})\,\widehat{\otimes}_k\,k_s = \mathrm{D}(\mathrm{T}_{k_s})$ est un k_s-groupe constant M, donc sa bigèbre covariante est l'algèbre de groupe $k_s\mathrm{M}$ (cf. la remarque 2.5.A), donc $\mathscr{O}(\mathrm{T}) \otimes_k k_s = k_s\mathrm{M}$, ce qui prouve que T est de type multiplicatif, et déployé par l'extension $k \to k_s$. La proposition en découle.

D'après 2.2.2, 2.5.1, et 2.5, on obtient :

Corollaire 2.5.3.C. — *Soit k un corps et soit* G *un k-schéma en groupes commutatifs affine.*

(i) G *contient un sous-groupe de type multiplicatif* G_m *tel que* G/G_m *soit unipotent.*

(ii) *Lorsque k est* parfait*, il existe en outre une rétraction canonique de* G *sur* G_m*, de sorte que* G *est le produit d'un groupe unipotent et d'un groupe de type multiplicatif.*

(iii) [(106)] *Soient k_s une clôture séparable de k et $\Gamma = \mathrm{Gal}(k_s/k)$. La catégorie des k-schémas en groupes de type multiplicatif est anti-équivalente à la catégorie des Γ-modules continus.*

2.6. Nous allons maintenant étudier les groupes formels infinitésimaux, auxquels sont consacrés les paragraphes suivants. Dans cette étude, les *algèbres de Lie* jouent un rôle primordial.

Supposons d'abord *l'anneau de base k artinien* et soit G un groupe formel sur k. On peut donner de l'algèbre de Lie de G trois interprétations différentes que nous utiliserons toutes :

a) Soient D l'algèbre $k[d]/(d^2)$ des nombres duaux sur k et δ l'homomorphisme de D dans k qui annule d. Pour tout groupe formel G sur k, Lie(G) est le noyau de $\mathrm{G}(\delta)$, de sorte qu'on a par définition une *suite exacte de groupes* **524**

$$1 \longrightarrow \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{G}(\mathrm{D}) \xrightarrow{\mathrm{G}(\delta)} \mathrm{G}(k) \longrightarrow 1\ .$$

b) Soit A l'algèbre affine de G et $\mathrm{I}_{\mathrm{A}} = \mathrm{Ker}\,\varepsilon_{\mathrm{A}}$ son idéal d'augmentation. Le groupe G(D) a pour éléments les morphismes de k-algèbres profinies $f : \mathrm{A} \to \mathrm{D}$. La condition $\mathrm{G}(\delta)(f) = 1$ équivaut à $\delta\circ f = \varepsilon_{\mathrm{A}}$. Comme $x - \varepsilon_{\mathrm{A}}(x)\cdot 1_{\mathrm{A}} \in \mathrm{I}_{\mathrm{A}}$, pour tout $x \in \mathrm{A}$, ceci équivaut à $f(\mathrm{I}_{\mathrm{A}}) \subset k\cdot d$, donc $\mathrm{Ker}(f)$ contient $\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^2$ et donc aussi $\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^2}$, donc f induit une application linéaire continue f' de $\mathrm{I}_{\mathrm{A}}/\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^2} = \omega_{\mathrm{G}/k}$ dans k telle que, pour tout $x \in \mathrm{A}$, on ait l'égalité

$$f(x) = \varepsilon_{\mathrm{A}}(x)\cdot 1_{\mathrm{D}} + f'(\overline{x})\cdot d,$$

(106) N.D.E. : On a ajouté le point (iii), conséquence de la proposition 2.5.

où $\overline{x}$ désigne l'image de $x-\varepsilon_{\mathrm{A}}(x)\cdot 1_{\mathrm{A}}$ dans $\mathrm{I}_{\mathrm{A}}/\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^2}$. On voit alors que *l'application* $f \mapsto f'$ *définit une bijection de* Lie(G) *sur le dual topologique* $\omega^{\dagger}_{\mathrm{G}/k}$ *de* $\omega_{\mathrm{G}/k}$ (cf. 0.2.2).

Cette bijection respecte les structures de groupe. En effet, soient f et g deux éléments de Lie(G) ; leur produit $f \cdot g$ est l'application composée $h \circ \Delta_{\mathrm{A}}$, où h : $\mathrm{A} \widehat{\otimes} \mathrm{A} \to \mathrm{D}$ est tel que $h(b \widehat{\otimes} b') = f(b)g(b')$. Or, si $a \in \mathrm{I}_{\mathrm{A}}$ on a, d'après 2.1 (ii), $\Delta_{\mathrm{A}}(a) - a \widehat{\otimes} 1 - 1 \widehat{\otimes} a \in \mathrm{I}_{\mathrm{A}} \widehat{\otimes} \mathrm{I}_{\mathrm{A}}$, d'où $(f \cdot g)(a) = f(a) + g(a)$ (cf. aussi II 3.10).

Dans la suite, nous identifions Lie(G) à $\omega^{\dagger}_{\mathrm{G}/k}$ au moyen de la bijection $f \mapsto f'$ décrite ci-dessus. *Le groupe* Lie(G) *est donc muni d'une structure de k-module.*

525 **c)** Soient $\mathrm{A}^{\dagger}$ et $\mathrm{D}^{\dagger}$ les k-modules duaux de A et D, $\{1^{\dagger}_{\mathrm{D}}, d^{\dagger}\}$ la base duale de la base $\{1_{\mathrm{D}}, d\}$ de D sur k (on a $1^{\dagger}_{\mathrm{D}} = \delta$). Comme D est libre de rang fini sur k, l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_c(\mathrm{A}, \mathrm{D}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_k(\mathrm{D}^{\dagger}, \mathrm{A}^{\dagger}), \qquad f \mapsto {}^t f$$

est bijective. D'un autre côté, ${}^t f$ est déterminé par les valeurs ${}^t f(1^*_{\mathrm{D}})$ et ${}^t f(d^*) = x$. La condition $\mathrm{G}(\delta)(f) = 1$ équivaut à l'égalité ${}^t f(1^*_{\mathrm{D}}) = \varepsilon_{\mathrm{A}}$. On voit aisément d'autre part que f est compatible avec la multiplication si et seulement si l'on a (cf. 2.3) :

$$(*) \qquad \delta_{\mathrm{G}}(x) = \varphi_{\mathrm{G}}(x \otimes 1 + 1 \otimes x).$$

Enfin, il est clair qu'une application linéaire continue $f : \mathrm{A} \to \mathrm{D}$, qui est compatible avec la multiplication et telle que $\delta \circ f = \varepsilon_{\mathrm{A}}$, envoie l'élément unité de A sur celui de D. [107] L'application $f \mapsto x$ nous permet donc d'identifier Lie(G) à l'ensemble des « éléments primitifs » de H(G) (i.e. les $x \in \mathrm{H(G)}$ vérifiant la relation $(*)$). Si x et y sont deux tels éléments, on a

$$\begin{aligned}\delta_{\mathrm{G}}(xy) = \delta_{\mathrm{G}}(x)\delta_{\mathrm{G}}(y) &= \varphi_{\mathrm{G}}\big((x \otimes 1 + 1 \otimes x)(y \otimes 1 + 1 \otimes y)\big)\\ &= \varphi_{\mathrm{G}}(xy \otimes 1 + x \otimes y + y \otimes x + 1 \otimes xy),\end{aligned}$$

d'où $\delta_{\mathrm{G}}(xy - yx) = \varphi_{\mathrm{G}}\big((xy-yx) \otimes 1 + 1 \otimes (xy - yx)\big)$.

Ceci montre que le k-module Lie(G) est identifié à une sous-algèbre de Lie de H(G) : nous dirons que Lie(G) *est l'algèbre de Lie de* G. [108]

526 ***2.6.1***. — Lorsque k est un anneau pseudocompact arbitraire et G un groupe formel sur k, nous appelons $\mathbf{O}_k$*-algèbre de Lie de* G le foncteur **Lie**(G) qui associe à tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$ la C-algèbre de Lie du C-groupe formel $\mathrm{G}' = \mathrm{G}\widehat{\otimes}_k\mathrm{C}$: [109] posons $\mathrm{A}' = \mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \mathrm{C}$, comme I_{A} est facteur direct de A, alors $\mathrm{I}_{\mathrm{A}'}$ égale $\mathrm{I}_{\mathrm{A}} \widehat{\otimes}_k \mathrm{C} = \mathrm{I}_{\mathrm{A}} \widehat{\otimes}_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$,

(107) N.D.E. : En effet, $\delta \circ f = \varepsilon_{\mathrm{A}}$ entraîne que $f(1) = 1 + \lambda d$, avec $\lambda \in k$, et alors $f(1) = f(1)^2 = 1 + 2\lambda d$ donne $\lambda = 0$.

(108) N.D.E. : En comparant avec $\mathrm{VII_A}$ 2.5, on voit que si K est un k-schéma en groupes *de type fini* et si G est le complété formel de K à l'origine (i.e. $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ est le complété de l'anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{K},e}$ pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, où $\mathfrak{m}$ est le noyau de l'augmentation $\varepsilon : \mathscr{O}_{\mathrm{K},e} \to k$) alors H(G) s'identifie à l'algèbre des distributions U(K), et Lie(G) à Lie(K). (La condition que K soit de type fini sur k est utilisée pour assurer que $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est un k-module de longueur finie, donc discret, de sorte que son dual topologique coïncide avec son dual ordinaire.) En particulier, lorsque G est un k-groupe formel *fini* (i.e. tel que $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ soit un k-module fini), auquel cas G peut aussi être considéré comme le k-schéma en groupes $\mathrm{Spec}\,\mathscr{A}(\mathrm{G})$, les deux définitions de Lie(G) coïncident.

(109) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

et puisque $\omega_{G/k} = I_A \widehat{\otimes}_A k$ et de même $\omega_{G'/C} = I_{A'} \widehat{\otimes}_{A'} C$, on obtient que $\omega_{G'/C} = \omega_{G/k} \widehat{\otimes}_A C$ et donc

$$\mathbf{Lie}(G)(C) = \mathrm{Hom}_c(\omega_{G/k} \widehat{\otimes}_A C, C) \qquad \text{i.e.} \qquad \mathbf{Lie}(G) = \mathbf{V}_k^f(\omega_{G/k})$$

(avec les notations de 1.2.3.B). Donc, d'après la proposition 1.2.3.E, $\mathbf{Lie}(G)$ est plate sur $\mathbf{O}_k$ si et seulement si $\omega_{G/k}$ est un k-module pseudocompact projectif.

2.6.2. — Réciproquement, toute algèbre de Lie $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{O}_k$ définit un k-foncteur en groupes. Désignons en effet par $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ le foncteur qui associe à tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$ l'algèbre enveloppante $U(\mathbf{L}(C))$ de la C-algèbre de Lie $\mathbf{L}(C)$. D'après $\mathrm{VII_A}$, 3.2.2, $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ est une bialgèbre sur $\mathbf{O}_k$ et détermine donc, d'après 2.2, un k-foncteur en groupes $\mathrm{Spf}^* \mathbf{U}(\mathbf{L})$ que nous noterons désormais $\mathscr{G}(\mathbf{L})$. Ainsi, $\mathscr{G}(\mathbf{L})(C)$ est le groupe des éléments $z \in U(\mathbf{L}(C))$ d'augmentation 1 et tels que $\Delta_{U(\mathbf{L}(C))}(z) = z \otimes z$.

De plus, lorsque $\mathbf{L}$ est plate sur $\mathbf{O}_k$, on a la proposition suivante.

Proposition. — [110] *Soit* $\mathbf{L}$ *une* $\mathbf{O}_k$*-algèbre de Lie* plate.

(i) $\mathscr{G}(\mathbf{L})$ *est un groupe* formel topologiquement plat *sur k, qui a* $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ *pour* $\mathbf{O}_k$*-bialgèbre.*

(ii) $\mathscr{G}(\mathbf{L})$ *est* infinitésimal.

(iii) *Pour tout objet* C *de* $\mathbf{Alf}_{/k}$, $\mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L}))(C)$ *s'identifie à l'ensemble*

$$\mathrm{Prim}\, U(\mathbf{L}(C)) = \{x \in U(\mathbf{L}(C)) \mid \varepsilon(x) = 0 \quad \textit{et} \quad \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}$$

des éléments primitifs *de* $U(\mathbf{L}(C))$. *En particulier, on a un morphisme naturel de* $\mathbf{O}_k$*-algèbres de Lie* $\tau_{\mathbf{L}} : \mathbf{L} \to \mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L}))$.

En effet, l'hypothèse que $\mathbf{L}$ soit plate sur $\mathbf{O}_k$ signifie que pour tout morphisme $C \to D$ de $\mathbf{Alf}_{/k}$, on a $\mathbf{L}(D) = \mathbf{L}(C) \otimes_C D$, et que pour chaque composante locale C' de C, $\mathbf{L}(C')$ est un C'-module libre. La première condition entraîne que $U(\mathbf{L}(D)) = U(\mathbf{L}(C)) \otimes D$ (d'après la propriété universelle du produit tensoriel et celle du foncteur $L \mapsto U(L)$), et la seconde condition entraîne, d'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (cf. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, I 2.7), que $U(\mathbf{L}(C'))$ est un C'-module libre. Donc la bialgèbre $\mathbf{U}(\mathbf{L})$ est plate sur $\mathbf{O}_k$.

Pour démontrer (ii) et (iii), on peut supposer que k est artinien. Posons alors $L = \mathbf{L}(k)$, $U = U(L)$, $U_0 = k \cdot 1_U$ et soit U^+ l'idéal bilatère de U engendré par l'image de L. Posons en outre, pour tout $n \geqslant 1$,

$$U_n = \{u \in U \mid \Delta_U(u) - u \otimes 1 \in U_{n-1} \otimes U^+\}.$$

D'après 1.3.6, il suffit de montrer que U est la réunion des U_n. Or, si l'on identifie L à son image canonique dans U, L est évidemment contenu dans U_1. Si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments de L, on a donc $\Delta_U(x_1 \cdots x_n) = (x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1) \cdots (x_n \otimes 1 + 1 \otimes x_n)$, ce qui montre, par récurrence sur n, que le produit $x_1 \cdots x_n$ appartient à U_n, donc que $U = \bigcup_n U_n$. Ceci prouve (ii). 527

[110] N.D.E. : On a mis en évidence les points (i) et (ii), et l'on a ajouté le point (iii), qui sera utile en 2.6.3 et 3.3.2.

D'autre part, soit $\mathrm{D} = k[d]/(d^2)$ l'algèbre des nombres duaux sur k. Par hypothèse, on a $\mathbf{L}(\mathrm{D}) \simeq \mathrm{L} \otimes \mathrm{D}$, d'où $\mathrm{U}(\mathbf{L}(\mathrm{D})) \simeq \mathrm{U} \otimes \mathrm{D}$, d'après les propriétés universelles du produit tensoriel et de l'algèbre enveloppante. Il en résulte que $\mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L}))(k)$ s'identifie à l'ensemble des éléments $z = 1 + xd$ de $\mathrm{U} \oplus \mathrm{U}d$ (où $x \in \mathrm{U}$) tels que $\varepsilon(z) = 1$ et $\Delta(z) = z \otimes z$, ce qui équivaut à $\varepsilon(x) = 0$ et $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$, c.-à-d., à $x \in \operatorname{Prim} \mathrm{U}$. En particulier, l'application $\tau_{\mathrm{L}} : x \mapsto 1 + dx$ est un morphisme de $\mathbf{O}_k$-algèbres de Lie, de $\mathbf{L}$ vers $\mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L}))$.

2.6.3. — Si $\mathbf{L}$ est une algèbre de Lie plate sur $\mathbf{O}_k$, le groupe formel $\mathscr{G}(\mathbf{L})$ peut être caractérisé par une propriété universelle. [111] En effet, tout morphisme ϕ de $\mathscr{G}(\mathbf{L})$ dans un groupe formel G induit un morphisme $\mathbf{Lie}(\phi) : \mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L})) \to \mathbf{Lie}(\mathrm{G})$; composant celui-ci avec le morphisme $\tau_{\mathbf{L}} : \mathbf{L} \to \mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L}))$ (cf. 2.6.2), on obtient un morphisme $\phi' : \mathbf{L} \to \mathbf{Lie}(\mathrm{G})$, et l'on a :

Proposition. — *Si* G *est un k-groupe formel et* $\mathbf{L}$ *une* $\mathbf{O}_k$*-algèbre de Lie* plate*, l'application $\phi \mapsto \phi'$ définie ci-dessus est une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grf}_{/k}}(\mathscr{G}(\mathbf{L}), \mathrm{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}}(\mathbf{L}, \mathbf{Lie}(\mathrm{G}))$$

où le terme de droite désigne l'ensemble des morphismes de $\mathbf{O}_k$*-algèbres de Lie de* $\mathbf{L}$ *dans* $\mathbf{Lie}(\mathrm{G})$.

On se ramène en effet tout de suite au cas où k est artinien. Posons $\mathrm{L} = \mathbf{L}(k)$. D'après 2.3.1, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grf}_{/k}}(\mathscr{G}(\mathbf{L}), \mathrm{G})$ est en bijection avec l'ensemble des morphismes d'algèbres unitaires $\phi : \mathrm{U}(\mathrm{L}) \to \mathrm{H}(\mathrm{G})$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U}(\mathrm{L}) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\Delta_{\mathrm{U}(\mathrm{L})}"'] & \mathrm{H}(\mathrm{G}) \arrow[dr, "\delta_{\mathrm{G}}"] & \\
& & \mathrm{H}(\mathrm{G} \times \mathrm{G}) \\
\mathrm{U}(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{U}(\mathrm{L}) \arrow[r, "h \otimes h"] & \mathrm{H}(\mathrm{G}) \otimes \mathrm{H}(\mathrm{G}) \arrow[ur, "\varphi_{\mathrm{G}}"'] &
\end{tikzcd} .$$

528 Or h est défini par sa restriction à L, qui est un morphisme d'algèbres de Lie de L dans l'algèbre de Lie sous-jacente à H(G), et la commutativité du diagramme signifie que h applique L dans la partie de H(G) formée des x tels que $\delta_{\mathrm{G}}(x) = \varphi_{\mathrm{G}}(x \otimes 1 + 1 \otimes x)$, qui n'est autre que Lie(G), cf. 2.6 c).

2.7. Nous terminons ces généralités sur un énoncé qui remonte à S. Lie et qui nous servira au paragraphe 5.1. *Un monoïde formel sur k* est par définition un couple (M, m) formé d'une variété formelle M et d'un morphisme $m : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ tel que $m(\mathrm{C})$ fasse de M(C) un monoïde pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$. [112] En particulier, la « section unité », qui associe à tout objet C l'élément unité de M(C), définit une

[111] N.D.E. : On a modifié ce qui suit, en tirant profit de l'ajout fait dans 2.6.2.

[112] N.D.E. : Ici et dans ce qui suit, on a écrit « monoïde » au lieu de « monoïde à élément unité » (on rappelle qu'un monoïde est par définition un ensemble muni d'une loi de composition associative et possédant un élément unité).

section ε_{M} de la projection canonique $\mathrm{M} \to \mathrm{Spf}(k)$. Nous dirons que le monoïde formel M est *infinitésimal* si ε_{M} induit une bijection des ensembles sous-jacents.

Proposition. — *Tout k-monoïde formel* M *topologiquement plat et infinitésimal est un k-groupe formel.* [113]

Nous devons montrer que M(C) est un groupe pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$. On se ramène donc de suite au cas où k est artinien. Soit alors $\mathrm{U} = \mathrm{H}(\mathrm{M})$ la coalgèbre de M (1.3.5) ; la multiplication $m : \mathrm{M} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M}$ induit un morphisme de coalgèbres $m_{\mathrm{U}} : \mathrm{U} \otimes \mathrm{U} \to \mathrm{U}$, qui fait de U une algèbre associative sur k ; cette algèbre a pour élément unité l'image de l'élément unité de k par l'application de k dans U qui est 529
induite par la section unité ε_{M} de M. De même, la projection $\mathrm{M} \to \mathrm{Spf}(k)$ induit un homomorphisme ε_{U} de U dans k ; nous noterons U^+ le noyau de ε_{U}.

Nous devons montrer qu'il existe un antipodisme, c'est-à-dire un morphisme de coalgèbres $c_{\mathrm{U}} : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ tel qu'on ait, pour tout $u \in \mathrm{U}$:

$$(*) \qquad (m_{\mathrm{U}} \circ (c_n \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{U}}) \circ \Delta_{\mathrm{U}})(x) = \varepsilon_{\mathrm{U}}(u) \cdot 1_{\mathrm{U}}.$$

Soit (U_n) la filtration de U définie en 1.3.6, posons $\mathrm{U}_n^+ = \mathrm{U}^+ \cap \mathrm{U}_n$. Comme M est infinitésimal, U^+ est la réunion des sous-modules U_n^+. [114] On pose alors $c_0(1) = 1$ et $c_1(x) = -x$ si $x \in \mathrm{U}_1^+$, i.e. si x est un élément primitif. Supposons $c_{n-1} : \mathrm{U}_{n-1} \to \mathrm{U}$ construite de façon à vérifier $(*)$ pour tout $x \in \mathrm{U}_{n-1}$, et soit $x \in \mathrm{U}_n^+$. D'après la démonstration du lemme 1.3.6.A, on a $\Delta_{\mathrm{U}}(x) - x \otimes 1 \in \mathrm{U}_{n-1} \otimes \mathrm{U}^+$ (c'est ici qu'intervient l'hypothèse que U soit plate sur k), donc on peut écrire $\Delta_{\mathrm{U}}(x) = x \otimes 1 + \sum_i y_i \otimes z_i$, avec $y_i \in \mathrm{U}_{n-1}$; on pose alors $c_n(x) = -\sum_i c_{n-1}(y_i) z_i$. On obtient ainsi une application k-linéaire $c : \mathrm{U} \to \mathrm{U}$, qui est l'inverse à gauche de id_{U} pour la loi de monoïde sur $\mathrm{End}_k(\mathrm{U})$, définie par $f \cdot g = m_{\mathrm{U}} \circ (f \otimes g) \circ \Delta_{\mathrm{U}}$ (l'élément unité étant l'application $\eta : u \mapsto \varepsilon(u) \cdot 1_{\mathrm{U}}$). Il en résulte que c est uniquement déterminé, et est aussi l'inverse à droite de id_{U}, i.e. on a aussi $m_{\mathrm{U}} \circ (c_n \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{U}}) \circ \Delta_{\mathrm{U}} = \eta$ (sans supposer U cocommutative).

2.8. Schémas en groupes unipotents sur un corps. — [115] Soit k un corps. « Rappelons » qu'un k-schéma en groupes G est dit *unipotent* s'il vérifie les deux conditions suivantes (cf. [**DG70**], § IV.2, Prop. 2.5) :

---

[113] N.D.E. : D'après l'équivalence de catégories de 1.3.5.D, un monoïde dans la catégorie des k-variétés formelles topologiquement plates « est la même chose » qu'un monoïde dans la catégorie des $\mathbf{O}_k$-coalgèbres cocommutatives plates, c.-à-d.une $\mathbf{O}_k$-bigèbre cocommutative (au sens usuel, c.-à-d., pas nécessairement munie d'une antipode). De plus, d'après 1.3.6, l'hypothèse que M soit *infinitésimal* équivaut à dire que la bigèbre correspondante est *connexe*. Donc, si k est un anneau artinien, la proposition équivaut à dire que : *toute k-bigèbre cocommutative connexe, plate sur k, est une k-algèbre de Hopf, i.e. possède une antipode* (et l'hypothèse de cocommutativité est en fait superflue, cf. la démonstration).

[114] N.D.E. : L'original continuait ainsi : « on montre alors facilement, par récurrence sur n, qu'il existe une et une seule application linéaire $c_n : \mathrm{U}_n \to \mathrm{U}_n$ telle que l'application composée $m_{\mathrm{U}} \circ (c_n \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{U}}) \circ \Delta_{\mathrm{U}} : \mathrm{U}_n^+ \to \mathrm{U}$ soit nulle » ; on a détaillé la démonstration, qui repose sur celle du lemme 1.3.6.A.

[115] N.D.E. : On a ajouté cette sous-section.

(a) G est affine.

(b) Tout $\mathscr{O}(\mathrm{G})$-comodule simple est trivial, c.-à-d., si $\rho : \mathrm{V} \to \mathrm{V} \otimes_k \mathscr{O}(\mathrm{G})$ est une structure de $\mathscr{O}(\mathrm{G})$-comodule sur un k-espace vectoriel $\mathrm{V} \neq 0$, et s'il n'existe pas de sous-espace non nul $\mathrm{W} \neq \mathrm{V}$ tel que $\rho(\mathrm{W}) \subset \mathrm{W} \otimes_k \mathscr{O}(\mathrm{G})$, alors V est de dimension 1 et $\rho(v) = v \otimes 1$ pour tout $v \in \mathrm{V}$.

D'après *loc. cit.*, lorsque G est de type fini sur k, ceci équivaut à la définition donnée dans l'Exp. XVII, § 1, à savoir que G possède une suite de composition finie dont les quotients successifs sont isomorphes à des k-sous-groupes de $\mathbb{G}_{a,\,k}$.

Or, pour tout k-schéma en groupes affine G, la comultiplication de $\mathscr{O}(\mathrm{G})$ munit le k-module pseudocompact $\mathrm{A} = \mathscr{O}(\mathrm{G})^*$ d'une structure de k-algèbre profinie, non nécessairement commutative, l'élément unité 1_{A} étant l'augmentation $\varepsilon : \mathscr{O}(\mathrm{G}) \to k$. D'autre part, soit $\mathrm{I} = \{f \in \mathrm{A} \mid f(1_{\mathscr{O}(\mathrm{G})}) = 0\}$; c'est un idéal bilatère de A, et l'on a $\mathrm{A} = k \cdot 1_{\mathrm{A}} \oplus \mathrm{I}$, cf. 1.3.6.

Soit V un sous-espace de A de codimension finie, considérons l'application k-bilinéaire continue $\varphi : \mathrm{A} \times \mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathrm{V}$, $(a, b) \mapsto ab + \mathrm{V}$; d'après le lemme 0.3.1, il existe deux sous-espaces $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2$ de codimension finie dans A tels que V contienne AL_2 et $\mathrm{L}_1\mathrm{A}$, alors $\mathrm{L} = \mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$ est un sous-espace de codimension finie de A, et V contient l'idéal bilatère ALA, qui est de codimension finie. Ceci montre que les idéaux bilatères de codimension finie forment une base de voisinages de 0. On en déduit qu'un $\mathscr{O}(\mathrm{G})$-comodule « est la même chose » qu'un A-*module continu*, i.e. un A-module V tel que l'application $\mathrm{A} \times \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ soit continue, V étant muni de la topologie discrète. Un tel module est évidemment réunion de sous-modules V_i de dimension finie sur k, chacun étant un module sur une k-algèbre quotient A_i de A, de dimension finie sur k. Il en résulte que si M est un module continu simple, il est de dimension finie sur k, et est un module fidèle simple sur la k-algèbre de dimension finie $\mathrm{A}/\operatorname{Ann}(\mathrm{M})$; cette dernière est donc une k-algèbre de dimension finie simple, i.e. $\operatorname{Ann}(\mathrm{M})$ est un idéal maximal ouvert de A. Réciproquement, soit P un idéal premier [116] ouvert de A, alors A/P est une k-algèbre de dimension finie dans laquelle l'idéal (0) est premier, donc c'est une k-algèbre de dimension finie simple, donc il existe à isomorphisme près un unique A-module continu simple dont l'annulateur est P. Il en résulte que l'application $\mathrm{M} \mapsto \operatorname{Ann}(\mathrm{M})$ définit une bijection entre les classes d'isomorphisme de A-modules continus simples et les idéaux premiers ouverts de A. En particulier, on appelle « module trivial » le A-module A/I, qui est de dimension 1 sur k ; il correspond au $\mathscr{O}(\mathrm{G})$-comodule V de dimension 1 trivial, i.e. tel que $\rho(v) = v \otimes 1_{\mathscr{O}(\mathrm{G})}$ pour tout $v \in \mathrm{V}$. On obtient donc la proposition suivante :

Proposition 2.8.1. — *Soient k un corps,* G *un k-schéma en groupes affine et* $\mathrm{A} = \mathscr{O}(\mathrm{G})^*$.

[116] N.D.E. : On rappelle qu'un idéal bilatère P d'un anneau A est dit premier si dans A/P le produit de deux idéaux bilatères non nuls est non nul.

(i) *Alors* G *est unipotent si et seulement si* I *est l'unique idéal premier ouvert de* A. [117]

(ii) *En particulier, si* G *est* commutatif*, de sorte que* $\mathscr{O}(\mathrm{G}) = \mathrm{H}(\mathrm{D}(\mathrm{G}))$*, où* $\mathrm{D}(\mathrm{G}) = \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$ *désigne le dual de Cartier de* G*, alors* G *est unipotent si et seulement si* D(G) *est infinitésimal.*

2.9. Algèbres de Hopf cocommutatives pointées sur un corps. — [118] Soient k un corps, C une k-cogèbre, A l'algèbre C^* munie de la structure de k-algèbre profinie, non nécessairement commutative, décrite en 2.8 ; d'après 0.2.2, on a $\mathrm{C} = \mathrm{A}^\dagger = \mathrm{Hom}_c(\mathrm{A}, k)$. On en déduit que l'application $\mathrm{D} \mapsto \mathrm{D}^\perp = \{f \in \mathrm{A} \mid f(\mathrm{D}) = 0\}$ est une bijection de l'ensemble des sous-cogèbres de C sur celui des idéaux bilatères (dans la suite, on dira simplement « idéaux ») fermés de A ; la bijection réciproque étant donnée par $\mathrm{I} \mapsto \mathrm{I}^\perp = \{x \in \mathrm{C} = \mathrm{A}^\dagger \mid x(\mathrm{I}) = 0\}$. Comme tout idéal fermé maximal est un idéal maximal ouvert (cf. 0.2.1), toute sous-cogèbre contient donc une sous-cogèbre simple, nécessairement de dimension finie.

Rappelons qu'une sous-cogèbre D de C est dite *irréductible* si elle ne contient qu'une seule sous-cogèbre simple S_0, ce qui équivaut à dire que $\mathfrak{m}_0 = \mathrm{S}_0^\perp$ est l'unique idéal maximal ouvert contenant $\mathrm{D}^\perp$, i.e. que $\mathrm{D}^\perp + \mathfrak{m} = \mathrm{A}$ pour tout idéal maximal ouvert $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_0$. C'est en particulier le cas si $\mathrm{D} = \mathrm{S}_0$. Alors la somme Σ_0 de toutes les sous-cogèbres irréductibles C_i contenant S_0 est évidemment une sous-cogèbre, et elle est irréductible car, pour tout $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}_0$, on a, d'après 0.2.D :

$$\mathfrak{m} + \bigcap_i \mathrm{C}_i^\perp = \bigcap_i (\mathfrak{m} + \mathrm{C}_i^\perp) = \mathrm{A}.$$

On dit que Σ_0 est la *composante irréductible* de C correspondant à C_0.

D'autre part, on dit que C est *pointée* si toute sous-k-cogèbre simple de C est de dimension 1 ; ceci équivaut à dire que pour tout idéal maximal ouvert $\mathfrak{m}$ de A, on a $\mathrm{A}/\mathfrak{m} = k$. Rappelons aussi que C est dite *connexe* si elle est irréductible et pointée. (Remarquons au passage que si C est une bigèbre, elle est connexe si et seulement si elle est irréductible, puisque $k \cdot 1_{\mathrm{C}}$ est une sous-cogèbre simple.)

Supposons désormais que C soit *cocommutative.* Alors A est commutative et est donc le produit de ses composantes locales $\mathrm{A}_\mathfrak{m}$, pour $\mathfrak{m} \in \Upsilon(\mathrm{A})$ (cf. 0.1.1) ; notons $\mathrm{S}_\mathfrak{m}$ la sous-cogèbre simple $\mathfrak{m}^\perp \simeq (\mathrm{A}/\mathfrak{m})^*$ et $\Sigma_\mathfrak{m}$ sa composante irréductible. On peut décrire $\Sigma_\mathfrak{m}$ comme suit. Notons $\mathrm{J}_\mathfrak{m}$ le noyau de la projection $\mathrm{A} \to \mathrm{A}_\mathfrak{m}$, il est contenu dans $\mathfrak{m}$ et c'est le plus petit idéal fermé I de $\mathfrak{m}$ tel que $\mathrm{I} + \mathfrak{m}' = \mathrm{A}$ pour tout $\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}$. En effet, si I a cette propriété, alors I contient $\mathrm{A}_{\mathfrak{m}'}$ pour tout $\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}$, donc contient $\mathrm{J}_\mathfrak{m}$. Comme $\mathrm{A} = \mathrm{J}_\mathfrak{m} \oplus \mathrm{A}_\mathfrak{m}$, il en résulte que $\Sigma_\mathfrak{m} = \mathrm{J}_\mathfrak{m}^\perp$ s'identifie à $\mathrm{A}_\mathfrak{m}^\dagger$. On peut maintenant démontrer la :

Proposition 2.9.1. — *Soit* k *un corps.*

[117] N.D.E. : Ceci équivaut aussi à dire que $k \cdot 1_{\mathscr{O}(\mathrm{G})}$ est l'unique k-sous-cogèbre simple de $\mathscr{O}(\mathrm{G})$; voir par exemple [**Ab80**], 3.1.4 ; signalons au passage une coquille dans *loc. cit.*, p. 130, ligne 4 : $\mathrm{M} \simeq \mathrm{C}^*/\operatorname{ann} \mathrm{M}$ est à remplacer par $\mathrm{C}^*/\operatorname{ann} \mathrm{M} \simeq \mathrm{End}_k(\mathrm{M})$.

[118] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe, pour traduire dans le langage des algèbres de Hopf cocommutatives la proposition 2.5.2, ainsi que la variante signalée dans la N.D.E. (100).

(i) *Soit* G *un k-groupe formel tel que tous les corps résiduels de* G *égalent k. Alors* G_e *est le k-groupe constant* M_k*, où* $\mathrm{M} = \mathrm{G}(k) = \{x \in \mathrm{H}(\mathrm{G}) \mid \varepsilon(x) = 1$ *et* $\Delta(x) = x \otimes x\}$*, et* $\mathrm{H}(\mathrm{G})$ *est le produit semi-direct de* $\mathrm{H}(\mathrm{G}_0)$ *par* $k\mathrm{M}$ (*cf.* 2.4.B).

(ii) *De façon équivalente : soit* H *une k-algèbre de Hopf cocommutative pointée. Alors* H *est le produit semi-direct de la composante irréductible* H_0 *de l'élément unité* 1_{H} *par* $k\mathrm{M}$*, où* $\mathrm{M} = \{x \in \mathrm{H} \mid \varepsilon(x) = 1$ *et* $\Delta(x) = x \otimes x\}$.

Démontrons (i). Comme tous les corps résiduels de G égalent k, alors la projection $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}_e$ admet la section $s : \mathrm{G}_e \to \mathrm{G}$ définie par $\mathscr{O}_{\mathrm{G},g} \to \kappa(g) = k$, pour tout $g \in \mathrm{G}$; de plus, pour tout $g, h \in \mathrm{G}$, $\mathscr{O}_{\mathrm{G},g} \widehat{\otimes}_k \mathscr{O}_{\mathrm{G},h}$ est local de corps résiduel k, et l'on obtient donc que $s \times s$ est une section de la projection $\pi \times \pi : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to (\mathrm{G} \times \mathrm{G})_e = \mathrm{G}_e \times \mathrm{G}_e$. Comme π est un morphisme de groupes, il en résulte que $\pi \circ m_{\mathrm{G}} \circ (s \times s) = m_{\mathrm{G}_e} = \pi \circ s \circ m_{\mathrm{G}_e}$, et comme π est un épimorphisme ceci entraîne que s est un morphisme de groupes. On obtient donc que $\mathrm{G} = \mathrm{G}_0 \rtimes \mathrm{G}_e$, et donc H(G) est le produit semi-direct de $\mathrm{H}(\mathrm{G}_0)$ par $\mathrm{H}(\mathrm{G}_e)$. De plus, comme tous les corps résiduels de G égalent k, alors $\mathrm{H}(\mathrm{G}_e)$ est l'algèbre de groupe $k\mathrm{M}$, où $\mathrm{M} = \mathrm{G}_e(k)$ (cf. 2.5.A). Enfin, comme G_0 est infinitésimal, le morphisme $\mathrm{G}(k) \to \mathrm{G}_e(k)$ est injectif ; il est donc bijectif (puisqu'il admet une section), donc $\mathrm{M} = \mathrm{G}(k)$. Le point (i) en découle.

Pour prouver (ii), il reste juste à voir que H_0 égale $\mathrm{H}(\mathrm{G}_0)$. Or l'élément unité 1_{H} de H n'est autre que l'augmentation $\varepsilon_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to k$, qui est la section unité de $\mathrm{G}(k)$, donc la composante locale de $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ correspondant à H_0 n'est autre que $\mathscr{A}(\mathrm{G}_0)$ et donc, d'après ce qu'on a vu plus haut, on a $\mathrm{H}_0 = \mathscr{A}(\mathrm{G}_0)^{\dagger} = \mathrm{H}(\mathrm{G}_0)$. Ceci prouve la proposition.

Remarques 2.9.2. — (a) La proposition ci-dessus, contenue implicitement dans 2.5.2, a été obtenue indépendamment par B. Kostant (cf. [**Sw69**], Preface). Combiné avec le théorème de Cartier 3.3 plus bas (cf. [**Ca62**], § 12, Th. 3), aussi obtenu par Kostant (cf. [**Sw69**], *loc. cit.*), ce résultat est souvent appelé « théorème de Cartier-Gabriel-Kostant ».

(b) Sous la forme (ii), 2.9.1 a été étendu par R. G. Heyneman et M. E. Sweedler au cas où l'on suppose que H est pointée et somme directe de ses composantes irréductibles (mais n'est pas nécessairement cocommutative), cf. [**HS69**], Th. 3.5.8.

3. Phénomènes particuliers à la caractéristique 0

530 Dans toute la Section 3, nous supposons que l'anneau pseudocompact k contient le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

3.1. Lemme. — *Soient* C *une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative unitaire,* L *une algèbre de Lie sur* C *dont le* C*-module sous-jacent est libre. Alors l'application canonique* $\mathrm{L} \to \mathrm{U}(\mathrm{L})$ *est un* isomorphisme *de* L *sur l'ensemble des éléments primitifs de* U(L).

En effet, identifions L à son image canonique dans U(L) ; soient I un ensemble totalement ordonné et $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une base de L indexée par I ; désignons par $\mathbb{N}^{(\mathrm{I})}$ l'ensemble des familles $n = (n_i)_{i \in \mathrm{I}}$ d'entiers naturels telles que n_i soit nul sauf peut-être pour un nombre fini d'indices $i_1 < i_2 < \cdots < i_s$ (ces indices dépendent de n) ; posons enfin $x^n = x_{i_1}^{n_{i_1}} x_{i_2}^{n_{i_2}} \cdots x_{i_s}^{n_{i_s}}$ et $n! = (n_{i_1}!)(n_{i_2}!)\cdots(n_{i_s}!)$.

On sait alors que les x^n forment une base de U(L) (théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt) et on voit facilement qu'on a

$$(*) \qquad \Delta_{\mathrm{U(L)}}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \sum \frac{x^m}{m!} \otimes \frac{x^{n-m}}{(n-m)!}$$

la somme étant étendue à tous les éléments m de $\mathbb{N}^{(\mathrm{I})}$ tels que $0 \leqslant m \leqslant n$ (i.e. tels que $0 \leqslant m_i \leqslant n_i$ pour tout i). Il s'ensuit évidemment qu'on a $\Delta_{\mathrm{U(L)}}(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u$ si et seulement si u est une combinaison linéaire des x_i.

3.2. Supposons maintenant C *artinien*, de radical $\mathfrak{r}$. Pour toute C-algèbre U (associative, unitaire), l'idéal $\mathfrak{r}$U est donc formé d'éléments nilpotents ; si x appartient à $\mathfrak{r}$U, nous poserons **531**

$$\exp_{\mathrm{U}} x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \quad .$$ (119)

On obtient ainsi une bijection de $\mathfrak{r}$U sur $1 + \mathfrak{r}$U ; la bijection réciproque applique un élément $1 + y$ de $1 + \mathfrak{r}$U sur

$$\log_{\mathrm{U}}(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \cdots \quad .$$

De plus, il est clair que l'application $\exp_{\mathrm{U}}$ est fonctorielle en U. (120)

L'anneau C étant toujours artinien, supposons U muni d'une structure de bialgèbre sur C (cf. 2.2). Pour tout élément primitif x de $\mathfrak{r}$U (cf. $\mathrm{VII_A}$ 3.2.3), on a alors

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathrm{U}}(\exp_{\mathrm{U}} x) &= \exp_{\mathrm{U}\otimes\mathrm{U}}(\Delta_{\mathrm{U}}(x)) \\
&= \exp_{\mathrm{U}\otimes\mathrm{U}}(x \otimes 1 + 1 \otimes x) \\
&= \exp_{\mathrm{U}\otimes\mathrm{U}}(x \otimes 1) \cdot \exp_{\mathrm{U}\otimes\mathrm{U}}(1 \otimes x) \\
&= \big((\exp_{\mathrm{U}} x) \otimes 1\big) \cdot \big(1 \otimes (\exp_{\mathrm{U}} x)\big) \\
&= (\exp_{\mathrm{U}} x) \otimes (\exp_{\mathrm{U}} x).
\end{aligned}$$

On voit donc que la bijection $\exp_{\mathrm{U}}$ transforme un élément primitif de $\mathfrak{r}$U en un élément z de $1+\mathfrak{r}$U tel que $\Delta_{\mathrm{U}}(z) = z \otimes z$. Réciproquement, si z vérifie ces conditions alors, posant $x = \log_{\mathrm{U}}(z)$, le calcul précédent montre que $\exp_{\mathrm{U}\otimes\mathrm{U}}(x \otimes 1 + 1 \otimes x)$ égale $z \otimes z = \Delta(\exp_{\mathrm{U}} x) = \exp_{\mathrm{U}\otimes\mathrm{U}}(\Delta_{\mathrm{U}}(x))$, d'où $x \otimes 1 + 1 \otimes x = \Delta_{\mathrm{U}}(x)$. (121) Notons de plus que si $z \in 1 + \mathfrak{r}$U vérifie $\Delta_{\mathrm{U}}(z) = z \otimes z$, alors $\varepsilon_{\mathrm{U}}(z)^2 = \varepsilon_{\mathrm{U}}(z)$ et comme $\varepsilon_{\mathrm{U}}(z)$ est inversible (puisque z l'est, $\mathfrak{r}$ étant nilpotent), il en résulte que $\varepsilon_{\mathrm{U}}(z) = 1$.

Considérons en particulier une algèbre de Lie L *plate* sur C, prenons pour U l'algèbre enveloppante U(L) de L sur C et identifions L à son image canonique dans U. D'après le lemme 3.1, L est donc l'ensemble des éléments primitifs de U (en effet L est un produit de modules libres sur les composantes locales de C). Considérons alors **532**

(119) N.D.E. : Si $x, x' \in \mathfrak{r}$U *commutent*, on a donc $\exp_{\mathrm{U}}(x + x') = (\exp_{\mathrm{U}} x)(\exp_{\mathrm{U}} x')$.
(120) N.D.E. : c.-à-d., pour tout morphisme $\phi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ de C-algèbres, on a $\phi(\exp_{\mathrm{U}}(x)) = \exp_{\mathrm{V}} \phi(x)$.
(121) N.D.E. : On a détaillé ce qui précède et ajouté la phrase qui suit.

le C-groupe formel $\mathscr{G}(\mathrm{L}) = \mathrm{Spf}^* \mathrm{U}(\mathrm{L})$, qui a $\mathrm{U} = \mathrm{U}(\mathrm{L})$ pour bialgèbre covariante (cf. 2.6.2). Soient $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de C et $\overline{\mathrm{C}} = \mathrm{C}/\mathfrak{m}$. Comme $\mathscr{G}(\mathrm{L})$ est infinitésimal (*loc. cit.*), l'élément unité de $\overline{\mathrm{U}} = \mathrm{U} \otimes_{\mathrm{C}} \overline{\mathrm{C}}$ est le seul élément $\overline{z}$ de $\overline{\mathrm{U}}$ tel que [122] $\varepsilon_{\overline{\mathrm{U}}}(\overline{z}) = 1$ et $\Delta_{\overline{\mathrm{U}}}(\overline{z}) = \overline{z} \otimes \overline{z}$. Il s'ensuit que les éléments z de U tels que $\varepsilon_{\mathrm{U}}(z) = 1$ et $\Delta_{\mathrm{U}}(z) = z \otimes z$ appartiennent nécessairement à $1 + \mathfrak{r}\mathrm{U}$.

Enfin, comme $\mathrm{L} \cap \mathfrak{r}\mathrm{U}$ s'identifie à $\mathfrak{r}\mathrm{L} = \mathrm{L} \otimes_{\mathrm{C}} \mathfrak{r}$, on voit finalement que : $\exp_{\mathrm{U}}$ *définit une bijection de* $\mathrm{L} \otimes_{\mathrm{C}} \mathfrak{r}$ *sur le groupe* $\mathscr{G}(\mathrm{L})(\mathrm{C})$. Nous résumons :

Proposition. — *Soient k un anneau pseudocompact contenant $\mathbb{Q}$ et* $\mathbf{L}$ *une* $\mathbf{O}_k$*-algèbre de Lie* plate.

(i) *Pour tout objet* C *de* $\mathbf{Alf}_{/k}$, *notons* $\mathfrak{r}(\mathrm{C})$ *son radical ; alors l'application*

$$\exp_{\mathrm{U}(\mathbf{L}(\mathrm{C}))} : \quad \mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \mathfrak{r}(\mathrm{C}) \longrightarrow \mathscr{G}(\mathbf{L})(\mathrm{C})$$

est bijective et fonctorielle *en* C *et* $\mathbf{L}$.

(ii) *Le morphisme naturel* $\mathbf{L} \to \mathbf{Lie}(\mathscr{G}(\mathbf{L}))$ (*cf.* 2.6.2) *est un* isomorphisme *de* $\mathbf{O}_k$*-algèbres de Lie.* [123]

3.2.1. — La bijection $\exp_{\mathrm{U}(\mathbf{L}(\mathrm{C}))}$ permet de définir par transport de structure une loi de groupe sur l'ensemble $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \mathfrak{r}(\mathrm{C})$ (qu'on identifie à une partie de $\mathrm{U}(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$ comme en 3.2). Si x et y sont deux éléments de $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \mathfrak{r}(\mathrm{C})$, cette loi est telle que

$$x \cdot y = \log\big((\exp x)(\exp y)\big) = \log(1 + \sum_{p+q>0} \frac{x^p}{p!}\frac{y^q}{q!}) =$$
$$= \sum_{m \geqslant 1} \sum_{p_i + q_i > 0} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \frac{x^{p_1}}{p_1!}\frac{y^{q_1}}{q_1!} \cdots \frac{x^{p_m}}{p_m!}\frac{y^{q_m}}{q_m!} = \sum_{\ell \geqslant 1} \mathrm{P}_\ell(x, y)$$

533 où $\mathrm{P}_\ell(x,y)$ désigne la somme des monômes de degré total ℓ en x et y. On a par exemple :

$$\mathrm{P}_1(x,y) = x + y$$
$$\mathrm{P}_2(x,y) = \underbrace{\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}}_{m=1} - \underbrace{\frac{1}{2}(x^2 + xy + yx + y^2)}_{m=2} = \frac{1}{2}(xy - yx) = \frac{1}{2}[x,y]$$

et $\mathrm{P}_3(x,y)$ est la somme des trois termes suivants :

$$\underbrace{\frac{x^3}{6} + \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{6}}_{m=1} - \underbrace{\frac{1}{2}\Big(x^3 + \frac{3}{2}x^2y + \frac{1}{2}yx^2 + xyx + yxy + \frac{1}{2}y^2x + \frac{3}{2}xy^2 + y^3\Big)}_{m=2}$$
$$\underbrace{+ \frac{1}{3}(x^3 + x^2y + yx^2 + xyx + yxy + y^2x + xy^2 + y^3)}_{m=3}$$

[122] N.D.E. : On a ajouté la condition $\varepsilon_{\overline{\mathrm{U}}}(\overline{z}) = 1$, omise dans l'original.
[123] N.D.E. : On a ajouté le point (ii), conséquence immédiate de 3.1.

d'où $\mathrm{P}_3(x,y) = \dfrac{1}{12}(x^2y+yx^2-2xyx-2yxy+y^2x+xy^2) = \dfrac{1}{12}\big([[y,x],x] + [y,[y,x]]\big)$.

On peut montrer plus généralement qu'on a la *formule de Campbell-Hausdorff* : (124)

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_\ell(x,y) &= \sum_{m=1}^{\ell} \frac{(-1)^{m-1}}{m\cdot\ell} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_m\\ q_1,\dots,q_{m-1}}} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{(\operatorname{ad} x)^{p_i}}{p_i!}\frac{(\operatorname{ad} y)^{q_i}}{q_i!}\right)\frac{(\operatorname{ad} x)^{p_m}}{p_m!}(y)\\ &+ \sum_{m=1}^{\ell} \frac{(-1)^{m-1}}{m\cdot\ell} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_{m-1}\\ q_1,\dots,q_{m-1}}} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{(\operatorname{ad} x)^{p_i}}{p_i!}\frac{(\operatorname{ad} y)^{q_i}}{q_i!}\right)(x)\end{aligned}$$

où les $p_j, q_i \in \mathbb{N}$ vérifient $p_i+q_i \geqslant 1$ pour $i = 1,\dots,m-1$ et $p_m+\sum_{i=1}^{m-1}(p_i+q_i) = \ell-1$ (i.e. dans les sommes ci-dessus, chaque « monôme de Lie » non nul est de degré total ℓ) ; pour une démonstration, voir N. Jacobson, *Lie Algebras* (Interscience, 1962), § V.5, ou [**BLie**], II § 6.4, Th. 2.

3.3. Si G est un k-groupe formel d'algèbre affine A, rappelons qu'on note $\mathrm{I_A}$ l'idéal d'augmentation de A et $\omega_{\mathrm{G}/k}$ le k-module pseudocompact $\mathrm{I_A}/\overline{\mathrm{I_A^2}} \simeq \mathrm{I_A}\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}}\, k$.

Théorème (Cartier). — *Soient k un anneau pseudocompact* (125) *contenant* $\mathbb{Q}$ *et* G *un k-groupe formel. Les assertions suivantes sont équivalentes :* 534

(i) *Il existe une* $\mathbf{O}_k$*-algèbre de Lie* plate $\mathbf{L}$ *telle que* G *soit isomorphe à* $\mathscr{G}(\mathbf{L})$ (*et dans ce cas* $\mathbf{L} = \mathbf{Lie}(\mathrm{G})$ *d'après* 3.2).

(ii) *Il existe un k-module pseudocompact* projectif ω *tel que la variété formelle sous-jacente à* G *soit isomorphe à la variété formelle* $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)$ (*cf.* 1.2.5) *d'algèbre affine* $k[[\omega]]$ (*et dans ce cas* $\omega \simeq \omega_{\mathrm{G}/k}$).

(iii) G *est* infinitésimal *et* $\omega_{\mathrm{G}/k}$ *est un k-module pseudocompact* projectif.

(iv) G *est* infinitésimal et topologiquement plat *sur k.*

(i) ⇒ (ii) : Soit $\omega = \Gamma^*(\mathbf{L})$ le k-module pseudocompact dual de $\mathbf{L}$ (cf. 1.2.3.D). Pour tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$, nous devons exhiber un isomorphisme de $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)(\mathrm{C})$ sur $\mathscr{G}(\mathbf{L})(\mathrm{C})$ qui soit fonctoriel en C. D'après 1.2.5, $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)(\mathrm{C})$ s'identifie à l'ensemble $\mathrm{Hom}_c(\omega, \mathfrak{r}(\mathrm{C}))$ des applications k-linéaires continues de ω dans le radical de C. Cet ensemble est naturellement isomorphe à l'ensemble $\mathrm{Hom}_c(\omega\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{C}, \mathfrak{r}(\mathrm{C}))$ des applications C-linéaires continues de $\omega\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{C}$ dans $\mathfrak{r}(\mathrm{C})$; enfin, comme $\omega\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{C}$ est un C-module pseudocompact projectif, l'application canonique

$$(\omega\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{C})^\dagger \otimes_{\mathrm{C}} \mathfrak{r}(\mathrm{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_c(\omega\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{C}, \mathfrak{r}(\mathrm{C}))$$

est bijective (cf. 0.3.6.A). Comme, d'après 1.2.3.E, $\mathbf{L}(\mathrm{C})$ s'identifie à $\mathbf{V}_k^f(\Gamma^*(\mathbf{L}))(\mathrm{C}) = (\omega\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{C})^\dagger$, on obtient que $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)(\mathrm{C})$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \mathfrak{r}(\mathrm{C})$, lequel est canoniquement isomorphe à $\mathscr{G}(\mathbf{L})(\mathrm{C})$ d'après la proposition 3.2. Ceci prouve 535

(124) N.D.E. : On a corrigé la formule donnée, qui était erronée, et ajouté la référence [**BLie**].

(125) N.D.E. : On a supprimé l'hypothèse que k soit *local* (la *démonstration* se ramène à ce cas).

l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : Soient ω un objet projectif de $\mathbf{PC}(k)$ et h un isomorphisme de $k[[\omega]]$ sur l'algèbre affine A de G. Composant h avec l'augmentation $\varepsilon_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to k$, on obtient un homomorphisme $\varepsilon_{\mathrm{A}} \circ h : k[[\omega]] \to k$, qui est déterminé par sa restriction λ à ω ; celle-ci envoie ω dans le radical $\mathfrak{r}$ de k. Donc l'application $x \mapsto x - \lambda(x)$, de ω dans le radical de $k[[\omega]]$, se prolonge d'après la propriété universelle de $k[[\omega]]$ (cf. 1.2.5) en un endomorphisme ℓ_λ de $k[[\omega]]$. Les égalités $\ell_\lambda \circ \ell_{-\lambda} = \ell_{-\lambda} \circ \ell_\lambda = \mathrm{id}$ montrent que ℓ_λ est un automorphisme de $k[[\omega]]$. Par conséquent, $h \circ \ell_\lambda$ est, comme h, un isomorphisme de $k[[\omega]]$ sur A et de plus $\varepsilon_{\mathrm{A}} \circ h \circ \ell_\lambda$ applique ω sur 0. Quitte à remplacer h par $h \circ \ell_\lambda$, on peut donc supposer que $\varepsilon_{\mathrm{A}} \circ h$ s'annule sur l'idéal fermé I de $k[[\omega]]$ qui est engendré par ω. Dans ce cas, h induit un isomorphisme de $\mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$ sur $\mathrm{I}_{\mathrm{A}}/\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^2}$; comme $\mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2} \simeq \omega$, il en résulte que $\omega_{\mathrm{G}/k} = \mathrm{I}_{\mathrm{A}}/\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^2}$ est isomorphe à ω, donc projectif. Il est clair d'autre part que $\mathbb{V}_k^{f,0}(\omega)$ est infinitésimal, de même que G.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Supposons que G soit infinitésimal et que $\omega_{\mathrm{G}/k}$ soit projectif. Soit $\mathbf{L}$ la $\mathbf{O}_k$-algèbre de Lie de G ; le $\mathbf{O}_k$-module sous-jacent est $\mathbf{V}_k^f(\omega_{\mathrm{G}/k})$, d'après 2.6.1. Par conséquent, $\mathbf{L}$ est plate sur $\mathbf{O}_k$, et $\Gamma^*(\mathbf{L}) \simeq \omega_{\mathrm{G}/k}$, d'après la proposition 1.2.3.E. Donc, d'après la démonstration de (i) $\Rightarrow$ (ii), l'algèbre affine du k-groupe formel $\mathscr{G}(\mathbf{L})$ s'identifie à $k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]$. D'autre part, d'après 2.6.3, le morphisme identique de $\mathbf{L}$ est associé canoniquement à un morphisme de groupes formels $\mathscr{G}(\mathbf{L}) \to \mathrm{G}$, donc à un morphisme continu de k-algèbres

$$\phi : \quad \mathrm{A} \longrightarrow k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]].$$

Soit I l'idéal fermé de $k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]$ engendré par $\omega_{\mathrm{G}/k}$, filtrons $k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]$ (resp. A) par les adhérences des idéaux I^n (resp. $\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^n$). Il s'agit de montrer que ϕ, qui induit par définition l'identité sur $\omega_{\mathrm{G}/k} = \mathrm{I}_{\mathrm{A}}/\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^2} = \mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$, est un isomorphisme.

536 Comme $\omega_{\mathrm{G}/k}$ est un objet projectif de $\mathbf{PC}(k)$, il existe une section τ de la projection canonique $\mathrm{I}_{\mathrm{A}} \to \omega_{\mathrm{G}/k}$. D'après la propriété universelle de $k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]$ (cf. 1.2.5), τ définit un morphisme continu d'algèbres

$$\psi : \quad k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]] \longrightarrow \mathrm{A}$$

et $\phi \circ \psi$ induit l'application identique sur $\omega_{\mathrm{G}/k}$, donc aussi sur le gradué associé à $k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]$. Il en résulte que $\phi \circ \psi$ est un isomorphisme, d'après [**CA**], § V.7, Lemme 1. [126]

De plus, ψ induit un isomorphisme de $\mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$ sur $\mathrm{I}_{\mathrm{A}}/\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^2}$, donc une *surjection* des gradués associés à $k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]$ et A. D'autre part, comme G est radiciel, I_{A} est contenu dans le radical de A, de sorte que l'intersection des $\overline{\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^n}$ est nulle. Donc, d'après *loc. cit.*, ψ est surjectif. Alors, comme $\phi \circ \psi$ est un isomorphisme et ψ une surjection, ψ et ϕ sont des isomorphismes. Ceci prouve que (iii) $\Rightarrow$ (i).

Notons enfin qu'il est clair que (i) ou (ii) entraînent (iv), de sorte qu'il reste à prouver l'implication (iv) $\Rightarrow$ (ii). Pour cela, on peut supposer k local, de corps résiduel

[126] N.D.E. : cf. 5.1.5 plus loin ; voir aussi [**BAC**], III, § 2.8, Th. 1 et corollaires. D'autre part, on a détaillé l'original dans ce qui suit.

k_0. Posons alors $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G}\,\widehat{\otimes}_k\, k_0$, $\omega = \omega_{\mathrm{G}/k}$, $\omega_0 = \omega\,\widehat{\otimes}_k\, k_0$, etc. [127] Comme k_0 est un corps, le k_0-module pseudocompact ω_0 possède une pseudobase $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$; notant ω' le k-module topologiquement libre produit de copies k_λ de k, pour $\lambda \in \Lambda$, et relevant chaque y_λ en un élément x_λ de ω, on obtient une application k-linéaire continue $f : \omega' \to \omega$ telle que $f_0 = f\,\widehat{\otimes}_k\, k_0$ soit inversible. [128] Comme ω' est un k-module pseudocompact projectif, f se relève en une application k-linéaire continue $g : \omega' \to \mathrm{I}_\mathrm{A}$ telle que $\pi \circ g = f$, où π est la projection $\mathrm{I}_\mathrm{A} \to \omega$. D'après la propriété universelle de $k[[\omega']]$ (cf. 1.2.5), g induit un morphisme d'algèbres topologiques $\phi : k[[\omega']] \to \mathrm{A}$. **537**

Or $\omega'\,\widehat{\otimes}_k\, k_0$ s'identifie à $\omega\,\widehat{\otimes}_k\, k_0 = \omega_{\mathrm{G}_0/k_0}$ et donc $k[[\omega']]\,\widehat{\otimes}_k\, k_0$ s'identifie à $k_0[[\omega_{\mathrm{G}_0/k_0}]]$. Comme les hypothèses (iii) sont vérifiées pour k_0 et G_0, la démonstration de (iii) $\Rightarrow$ (i) montre que $\phi_0 = \phi\,\widehat{\otimes}_k\, k_0$ est inversible. Comme, d'autre part, $k[[\omega']]$ et A sont des k-modules pseudocompacts projectifs, alors ϕ est inversible d'après 0.3.4. (En particulier, notant I l'idéal d'augmentation de $k[[\omega']]$, ϕ induit un isomorphisme de $\omega' = \mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$ sur $\mathrm{I}_\mathrm{A}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{A}^2} = \omega$.)

3.3.1. Corollaire. — *Soient* S *un schéma* localement noethérien *sur* $\mathbb{Q}$ *et* G *un* S-*schéma en groupes* plat et localement de type fini. [129] *Si* $\omega_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}$ *est un* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-*module localement libre,* G *est* lisse sur S en tout point de la section unité.

En effet, soient x un point de la section unité, s son image dans S, $\mathscr{O}_x$ et $\mathscr{O}_s$ les algèbres locales de x et s. [130] Comme, par hypothèse, $\mathscr{O}_s$ et $\mathscr{O}_x$ sont des anneaux locaux *noethériens*, alors la topologie $\mathfrak{m}$-adique sur chacun de ces anneaux coïncide avec la topologie « pseudocompacte » définie par les idéaux de codimension finie. Notons alors $\widehat{\mathscr{O}}_x$ et $\widehat{\mathscr{O}}_s$ les complétés pour cette topologie. D'après EGA IV_4, 17.5.3, G est lisse sur S au point x si et seulement si $\widehat{\mathscr{O}}_x$ est formellement lisse sur $\widehat{\mathscr{O}}_s$, ces deux algèbres étant munies de la topologie $\mathfrak{m}$-adique ; il suffit donc de montrer cette dernière propriété. Or $\widehat{\mathscr{O}}_x$ et $\widehat{\mathscr{O}}_s$ sont les anneaux locaux de x et s dans les variétés formelles $\widehat{\mathrm{G}}/\widehat{\mathrm{S}}$ et $\widehat{\mathrm{S}}$ définies en 1.2.6. Posons $k = \widehat{\mathscr{O}}_s$ et $\mathrm{H} = \mathrm{Spf}(\widehat{\mathscr{O}}_x)$, alors H est une k-variété formelle infinitésimale et, comme la formation de $\widehat{\mathrm{G}}/\widehat{\mathrm{S}}$ commute au produit (*loc. cit.*), H est un k-*groupe formel* infinitésimal. Notons I l'idéal d'augmentation de $\mathscr{O}_x$. D'après les hypothèses, $\omega_{\mathrm{G}/\mathrm{S},x} = \mathrm{I}/\mathrm{I}^2$ est un $\mathscr{O}_s$-module localement libre de rang fini n. Comme $\mathscr{O}_s$ est noethérien, il en résulte que $\omega_{\mathrm{H}/k}$, qui est le complété de $\omega_{\mathrm{G}/\mathrm{S},x}$, s'identifie à $\omega_{\mathrm{G}/\mathrm{S}} \otimes_{\mathscr{O}_\mathrm{S}} \widehat{\mathscr{O}}_s$, donc est un k-module topologiquement libre de rang n. Donc, d'après l'implication (iv) $\Rightarrow$ (ii) de 3.3, $\widehat{\mathscr{O}}_x$ est isomorphe à $k[[\omega_{\mathrm{H}/k}]]$, i.e. à une algèbre de séries formelles $k[[t_1, \dots, t_n]]$. Enfin, celle-ci est formellement lisse sur k, d'après EGA 0_{IV}, 19.3.3. Ceci prouve le corollaire.

Nous retrouvons donc ainsi un résultat obtenu par ailleurs pour les schémas en groupes *localement de présentation finie* sur un schéma *arbitraire* S, cf. VI_B, 1.6.

---

(127) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

(128) N.D.E. : On ne sait pas *a priori* que ω est un k-module pseudocompact *projectif*, mais cela va résulter de ce qui suit : comparer avec la démonstration de (iv) $\Rightarrow$ (iii) dans VII_A, 7.4.

(129) N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse de platitude, omise dans l'original.

(130) N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

3.3.2. Corollaire. — *Soit k un corps de caractéristique* 0. *Le foncteur* $\mathrm{L} \mapsto \mathscr{G}(\mathrm{L})$ *est une* équivalence *de la catégorie des k-algèbres de Lie sur celle des k-groupes formels infinitésimaux.* (131)

538 En effet, quand G parcourt les k-groupes formels infinitésimaux, le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \mathscr{G}(\mathrm{Lie}\,\mathrm{G})$ est isomorphe, d'après le théorème 3.3, au foncteur identique de la catégorie des k-groupes infinitésimaux. De même, d'après 3.2 (ii), le foncteur $\mathrm{L} \mapsto \mathrm{Lie}(\mathscr{G}(\mathrm{L})) = \mathrm{Prim}\,\mathrm{U}(\mathrm{L})$ est isomorphe au foncteur identique de la catégorie des k-algèbres de Lie.

3.3.3. — Supposons toujours que k est un corps de caractéristique 0. Soient $\overline{k}$ une clôture algébrique de k et Γ le groupe de Galois topologique de $\overline{k}$ sur k.

Pour tout k-groupe formel G, nous notons $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{G})$ le k-foncteur en groupes qui associe à toute k-algèbre commutative de dimension finie C le groupe des automorphismes du C-groupe formel $\mathrm{G}\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{C}$. (132) Comme G est topologiquement plat sur k (puisque k est un corps), i.e. son algèbre affine $\mathrm{A} = \mathrm{A}(\mathrm{G})$ est topologiquement plate sur k, ou, de façon équivalente, sa bialgèbre covariante $\mathrm{H} = \mathrm{H}(\mathrm{G})$ est plate sur k, alors ce k-foncteur est un *k-groupe formel*. En effet, comme $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{G})$ s'identifie au produit fibré du diagramme suivant (cf. Exp. I, 1.7.3) :

$$\begin{tikzcd} & \underline{\mathrm{End}}_k(\mathrm{G}) \times \underline{\mathrm{End}}_k(\mathrm{G}) \arrow[d] \\ \mathrm{Spf}(k) \arrow[r] & \underline{\mathrm{End}}_k(\mathrm{G}) \times \underline{\mathrm{End}}_k(\mathrm{G}) \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale (resp. horizontale) est donnée par $(\phi,\psi) \mapsto (\phi\circ\psi, \psi\circ\phi)$ (resp. est la section unité), il suffit de voir que le k-foncteur $\underline{\mathrm{End}}_k(\mathrm{G})$ est représenté par un élément de $\mathbf{Vaf}_{/k}$, c.-à-d., (cf. 1.1 et 0.4.2) qu'il est est *exact à gauche*, i.e. commute aux produits fibrés de k-algèbres. Or se donner un élément de $\underline{\mathrm{End}}_k(\mathrm{G})(\mathrm{C})$ équivaut à se donner, disons, un morphisme de k-algèbres $\phi : \mathrm{H} \to \mathrm{H} \otimes_k \mathrm{C}$ qui respecte aussi la structure de coalgèbre, i.e. tel que les diagrammes bien connus soient commutatifs ; comme H est plat sur k, alors $\mathrm{H} \otimes_k -$ commute aux produits fibrés de k-algèbres, et

(131) N.D.E. : Comme, d'après 2.7, 2.2.1 et 1.3.6, un k-groupe formel *infinitésimal* G est « la même chose » qu'une k-bigèbre cocommutative *connexe* H (cf. 2.9), cet énoncé est équivalent au théorème ci-dessous, obtenu indépendamment par Kostant (cf. 2.9.2). Ce théorème avait été obtenu auparavant par J. W. Milnor et J. C. Moore ([**MM65**]), sous l'hypothèse additionnelle que H soit engendrée comme algèbre par ses éléments primitifs (bien que paru en 1965, ce texte avait circulé avant 1960, cf. l'analyse [**Ja65**]), de sorte qu'il est souvent appelé « théorème de Cartier-Kostant-Milnor-Moore ».

Théorème (Cartier-Kostant-Milnor-Moore). — *Soit k un corps de caractéristique* 0. *Les foncteurs* $\mathrm{L} \mapsto \mathrm{U}(\mathrm{L})$ *et* $\mathrm{H} \mapsto \mathrm{Prim}(\mathrm{H})$ *définissent une* équivalence *entre la catégorie des k-algèbres de Lie et celle des k-bigèbres cocommutatives connexes.*

D'autre part, si k est un anneau artinien contenant $\mathbb{Q}$, alors 3.2 (ii) et 3.3 (combinés avec 2.7, 2.2.1 et 1.3.6) montrent de même que le foncteur $\mathrm{L} \mapsto \mathscr{G}(\mathrm{L})$ (resp. $\mathrm{L} \mapsto \mathrm{U}(\mathrm{L})$) est une équivalence de la catégorie des k-algèbres de Lie *plates* sur celle des k-groupes formels infinitésimaux *topologiquement plats* (resp. sur celle des k-bigèbres cocommutatives connexes *plates*).

(132) N.D.E. : L'original indiquait : « Ce k-foncteur est manifestement exact à gauche (H est topologiquement plat sur k !) ». On a détaillé cela dans ce qui suit.

on en déduit que le k-foncteur $\underline{\mathrm{End}}_k(\mathrm{G})$ est exact à gauche, de sorte que nous pouvons le traiter comme un k-groupe formel.

Si L est une k-algèbre de Lie et G le groupe formel $\mathscr{G}(\mathrm{L})$, le théorème 3.3 montre que $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{G})$ est isomorphe au k-foncteur en groupes $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{L})$ qui associe à une k-algèbre de dimension finie C le groupe des automorphismes de la C-algèbre de Lie $\mathrm{C} \otimes_k \mathrm{L}$.

Si G est un k-groupe formel arbitraire, nous avons vu en 2.5.2 que G se décompose canoniquement en un produit semi-direct d'un groupe formel étale G_e et d'un groupe formel infinitésimal G_0. Ce produit semi-direct est déterminé par la donnée de $\mathrm{L} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_0)$, du Γ-groupe $\mathrm{M} = \mathrm{G}_e(\overline{k}) = \mathrm{G}(\overline{k})$ et d'un morphisme de k-groupes formels

$$\Phi : \quad \mathrm{G}_e \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{G}_0) \simeq \underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{L}).$$

Un tel morphisme envoie G_e dans la « partie étale » $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{L})_e$ de $\underline{\mathrm{Aut}}_k(\mathrm{L})$, cf. 2.5.1. Il est donc déterminé par la donnée d'un morphisme de Γ-groupes :

$$\phi = \Phi(\overline{k}) : \quad \mathrm{M} \longrightarrow (\underline{\mathrm{Aut}}_k \mathrm{L})(\overline{k}) = \mathrm{Aut}_k(\mathrm{L} \otimes_k \overline{k}).$$

Si l'on fait opérer Γ dans $\mathrm{L} \otimes_k \overline{k}$ au moyen de la formule $\gamma(\ell \otimes t) = \ell \otimes \gamma(t)$, alors **539**
ϕ fait opérer M dans $\mathrm{L} \otimes_k \overline{k}$ par automorphismes de k-algèbre de Lie de telle façon qu'on ait $\phi(\gamma(m)) = \gamma \circ \phi(m) \circ \gamma^{-1}$, c.-à-d. :

$$\gamma(m)(\ell \otimes t) = \gamma\big(m(\ell \otimes \gamma^{-1}(t))\big)$$

pour tout $m \in \mathrm{M}$, $\gamma \in \Gamma$ et $\ell \otimes t \in \mathrm{L} \otimes_k \overline{k}$. Nous exprimons cette dernière condition en disant que M *opère dans* $\mathrm{L} \otimes_k \overline{k}$ *de manière compatible avec* Γ.

On peut résumer la situation à l'aide d'un énoncé « savant » : appelons Γ-*algèbre de Lie* sur k la donnée d'un triplet $(\mathrm{L}, \mathrm{M}, \phi)$ formé d'une k-algèbre de Lie L, d'un Γ-groupe M et d'une opération ϕ de M dans $\mathrm{L} \otimes_k \overline{k}$ qui soit « compatible avec l'action de Γ dans M et dans $\mathrm{L} \otimes_k \overline{k}$ ».

Si $(\mathrm{L}, \mathrm{M}, \phi)$ et $(\mathrm{L}', \mathrm{M}', \phi')$ sont deux telles Γ-algèbres de Lie, un morphisme de la première dans la seconde est un couple (f, θ) formé d'un morphisme $f : \mathrm{L} \to \mathrm{L}'$ de k-algèbres de Lie et d'un morphisme $\theta : \mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ de Γ-groupes tels que

$$(f \otimes 1)(m \cdot x) = \theta(m) \cdot (f \otimes 1)(x)$$

pour tout $x \in \mathrm{L} \otimes_k \overline{k}$ et $m \in \mathrm{M}$. On obtient alors :

Théorème. — *Soit k un corps de caractéristique* 0. *Alors le foncteur qui associe à* G *le triplet* $(\mathrm{Lie}(\mathrm{G}), \mathrm{G}(\overline{k}), \Phi(\overline{k}))$ *est une* équivalence *de la catégorie des k-groupes formels sur celle des Γ-algèbres de Lie.* [133]

4. Phénomènes particuliers à la caractéristique $p > 0$

540

Dans toute la Section 4, nous désignons par p un nombre premier, par k un anneau pseudocompact de caractéristique p, par π l'endomorphisme continu $x \mapsto x^p$ de k.

[133] N.D.E. : En particulier, lorsque $k = \overline{k}$, on retrouve ainsi le « théorème de Cartier-Gabriel-Kostant » signalé en 2.9.2.

4.1. Soit X une k-variété formelle d'algèbre affine A, on note $\mathrm{X}^{(p/k)}$ ou $\mathrm{X}^{(p)}$ la k-variété formelle $\mathrm{X}\,\widehat{\otimes}_\pi\, k$ obtenue par le changement de base $\pi : k \to k$ (cf. 1.2.D), elle a pour algèbre affine le produit tensoriel complété $\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_\pi\, k$. Alors, le morphisme continu $\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_\pi\, k \to \mathrm{A}$ qui applique $a\,\widehat{\otimes}_\pi\,\lambda$ sur $a^p\lambda$ induit un morphisme de k-variétés formelles

$$\mathrm{Fr}(\mathrm{X}/k): \quad \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}^{(p/k)}.$$

Dans la suite, nous dirons que $\mathrm{Fr}(\mathrm{X}/k)$ est *le morphisme de Frobenius de* X *relativement à* k et nous écrirons souvent Fr au lieu de $\mathrm{Fr}(\mathrm{X}/k)$.

4.1.1. — [134] Considérons maintenant un schéma S sur le corps premier $\mathbb{F}_p$ et un S-schéma $\eta : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$; soit fr(S) le morphisme de Frobenius « absolu » de S (il induit l'identité sur l'espace topologique sous-jacent et applique toute section f du faisceau structural sur f^p ; cf. $\mathrm{VII_A}$ 4.1) et soit $\mathrm{X}^{(p)}$ le S-schéma $\mathrm{X} \times_{\mathrm{fr(S)}} \mathrm{S}$ ($\mathrm{VII_A}$, *loc. cit.*), i.e. le morphisme structural $\mathrm{X}^{(p)} \to \mathrm{S}$ est $\mathrm{fr(S)} \circ \eta$.

Soit $\widehat{\mathrm{S}}$ le schéma formel dont l'espace topologique sous-jacent est l'ensemble des points fermés de S, muni de la topologie discrète, l'anneau local $\mathscr{O}_{\widehat{\mathrm{S}},s}$ en un tel point fermé s étant le séparé complété $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{S},s}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ pour la topologie linéaire définie par les idéaux de colongueur finie (cf. 1.2.6) ; son algèbre affine $k = \mathscr{A}(\widehat{\mathrm{S}})$ est donc le produit des $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{S},s}$, pour s parcourant les points fermés de S. Rappelons (*loc. cit.*) qu'on note $\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ la k-variété formelle formée des points $x \in \mathrm{X}$ tels que $[\kappa(x) : \kappa(s)] < \infty$, où s est l'image de x dans S, l'anneau local $\mathscr{O}_{\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}},x}$ étant le séparé complété $\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}$ de $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$ pour la topologie linéaire définie par les idéaux I tels que $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}/\mathrm{I}$ soit de longueur finie comme $\mathscr{O}_{\mathrm{X},x}$-module (et donc aussi comme $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$-module). On peut donc former, par changement de base, la k-variété formelle $(\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}})^{(p)} = (\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}})\,\widehat{\otimes}_\pi\, k$.

On peut considérer aussi la k-variété formelle $\widehat{\mathrm{X}^{(p)}}/\widehat{\mathrm{S}}$: l'ensemble sous-jacent est formé des $x \in \mathrm{X}^{(p)} = \mathrm{X}$ tels que, notant s l'image de x dans S, le morphisme

$$\kappa(s) \xrightarrow{\mathrm{fr}} \kappa(s) \xrightarrow{\eta^\natural} \kappa(x)$$

fasse de $\kappa(x)$ une extension de degré fini de $\kappa(s)$; dans ce cas, il en est de même de $\eta^\natural : \kappa(s) \to \kappa(x)$, i.e. x est un point de $\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$, et l'on a alors

$$\mathscr{O}_{\widehat{\mathrm{X}^{(p)}}/\widehat{\mathrm{S}},x} = \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X},x}\,\widehat{\otimes}_\pi\,\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{S},s} = \widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{X}^{(p)},x}$$

541 (la deuxième égalité puisque $\mathrm{X} \mapsto \widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}}$ commute aux produits, cf. 1.2.6). On voit donc que : $\widehat{\mathrm{X}^{(p)}}/\widehat{\mathrm{S}}$ *s'identifie à une sous-variété formelle* de $(\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}})^{(p)}$. De plus, on a l'égalité si et seulement si pour tout point fermé s de S, $\kappa(s)$ est de degré fini sur $\kappa(s)^p$, ce qui est le cas par exemple si S est un schéma localement de type fini sur un corps κ tel que $[\kappa : \kappa^p] < +\infty$.

[134] N.D.E. : On a corrigé l'original, qui donnait l'inclusion $(\widehat{\mathrm{X}}/\widehat{\mathrm{S}})^{(p)} \subset \widehat{\mathrm{X}^{(p)}}/\widehat{\mathrm{S}}$ au lieu de l'inclusion inverse. Signalons d'autre part que ce paragraphe n'est pas utilisé dans la suite.

4.1.2. — Soit G un k-groupe formel. Comme le foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^{(p)} = \mathrm{X} \mathbin{\widehat{\otimes}_\pi} k$ commute aux produits finis, il transforme un k-groupe formel en un k-groupe formel. En outre, comme $\mathrm{Fr}(\mathrm{X}/k)$ est fonctoriel en X, le morphisme

$$\mathrm{Fr} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}^{(p)}$$

est un homomorphisme de k-groupes formels. Si l'on pose $\mathrm{G}^{(p^{n+1})} = (\mathrm{G}^{(p^n)})^{(p)}$ il en va de même pour le morphisme composé

$$\mathrm{Fr}^n = \mathrm{Fr}^n(\mathrm{G}/k) : \quad \mathrm{G} \xrightarrow{\mathrm{Fr}} \mathrm{G}^{(p)} \xrightarrow{\mathrm{Fr}} \mathrm{G}^{(p^2)} \xrightarrow{\mathrm{Fr}} \cdots \xrightarrow{\mathrm{Fr}} \mathrm{G}^{(p^n)}.$$

Notons A l'algèbre affine de G et $\mathrm{I_A}$ son idéal d'augmentation.

Définitions. — (a) Le noyau de Fr^n sera noté ${}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G}$. Il résulte directement des définitions que ${}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G}$ est *infinitésimal* et a pour algèbre affine le quotient $\mathrm{A}/\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^{\{p^n\}}$, où $\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^{\{p^n\}}$ désigne l'idéal fermé de A engendré par les puissances p^n-ièmes des éléments de $\mathrm{I_A}$.

(b) On dit que G est de *hauteur* $\leqslant n$ si $\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^{\{p^n\}} = 0$, c'est-à-dire si l'on a ${}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G} = \mathrm{G}$.

4.2. Il est clair que *l'algèbre de Lie* $\mathbf{Lie}(\mathrm{G})$ *d'un k-groupe formel* G *est une p-sous-algèbre de Lie de l'algèbre* $\mathbf{H}(\mathrm{G})$ (cf. 2.3). En effet, on se ramène tout de suite au cas où k est artinien ; dans ce cas, $\mathrm{Lie}(\mathrm{G})$ est la partie de $\mathrm{H}(\mathrm{G})$ formée des éléments x tels que $\varphi_{\mathrm{G}}(x \otimes 1 + 1 \otimes x) = \Delta_{\mathrm{G}}(x)$ avec les notations de 2.3 et 2.6 (c). On a alors **542**

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{G}}(x^p \otimes 1 + 1 \otimes x^p) &= \varphi_{\mathrm{G}}\big((x \otimes 1 + 1 \otimes x)^p\big)\\ &= \varphi_{\mathrm{G}}(x \otimes 1 + 1 \otimes x)^p = \Delta_{\mathrm{G}}(x)^p = \Delta_{\mathrm{G}}(x^p).\end{aligned}$$

4.2.1. — Réciproquement, toute p-algèbre de Lie $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{O}_k$ définit un k-foncteur en groupes. Désignons en effet par $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ le foncteur qui associe à tout objet C de $\mathbf{Alf}_{/k}$ l'algèbre enveloppante restreinte $\mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$ de la p-algèbre de Lie $\mathbf{L}(\mathrm{C})$ sur C ($\mathrm{VII_A}$ 5.3). D'après $\mathrm{VII_A}$ 5.4, $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ est une $\mathbf{O}_k$-bialgèbre et détermine donc, d'après 2.2, un k-foncteur en groupes $\mathrm{Spf}^* \mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ que nous noterons désormais $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})$.

Ainsi, $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C})$ est le groupe des éléments $z \in \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$ d'augmentation 1 et tels que $\Delta_{\mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C}))}(z) = z \otimes z$.

4.2.2. — Supposons que $\mathbf{L}$ soit une p-algèbre de Lie *plate* sur $\mathbf{O}_k$. Alors, tenant compte de $\mathrm{VII_A}$ 5.3.3, on montre comme dans le point (i) de la proposition 2.6.2 que $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ est plate sur $\mathbf{O}_k$; donc $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})$ est un k-groupe formel *topologiquement plat* qui a $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ pour $\mathbf{O}_k$-bialgèbre covariante.

[135] D'après la démonstration de 2.6.2 (iii), pour toute k-algèbre C de longueur finie, $\mathbf{Lie}(\mathscr{G}_p(\mathbf{L}))(\mathrm{C})$ est l'ensemble des éléments primitifs de $\mathbf{U}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C}) = \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$ (voir aussi $\mathrm{VII_A}$ 3.2.3) ; de plus, d'après $\mathrm{VII_A}$ 5.5.3, le morphisme canonique $\mathbf{L} \to \mathbf{U}_p(\mathbf{L})$ induit un isomorphisme de p-algèbres de Lie

$$\tau_{p,\mathbf{L}} : \mathbf{L} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Lie}(\mathscr{G}_p(\mathbf{L}))$$

(comparer avec 3.1 en caractéristique 0).

[135] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

Le groupe formel $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})$ peut être caractérisé par une propriété universelle. En effet, tout morphisme h de $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})$ dans un groupe formel G induit un morphisme $\mathbf{Lie}(h) : \mathbf{Lie}(\mathscr{G}_p(\mathbf{L})) \to \mathbf{Lie}(\mathrm{G})$. Composant celui-ci avec l'isomorphisme $\tau_{p,\mathbf{L}}$, on obtient un morphisme $h' : \mathbf{L} \to \mathbf{Lie}(\mathrm{G})$.

543 ***Proposition***. — *Si k est un anneau pseudocompact de caractéristique $p > 0$,* G *un k-groupe formel et* $\mathbf{L}$ *une p-algèbre de Lie* plate *sur $\mathbf{O}_k$, l'application $h \mapsto h'$ définie ci-dessus est une bijection*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grf}_{/k}}(\mathscr{G}_p(\mathbf{L}), \mathrm{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{p\text{-Lie}}(\mathbf{L}, \mathbf{Lie}(\mathrm{G}))$$

où le terme de droite désigne l'ensemble des morphismes de p-algèbres de Lie de $\mathbf{L}$ *dans* $\mathbf{Lie}(\mathrm{G})$.

[136] On se ramène en effet tout de suite au cas où k est artinien. Posons $\mathrm{L} = \mathbf{L}(k)$. D'après 2.3.1, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Grf}_{/k}}(\mathscr{G}_p(\mathbf{L}), \mathrm{G})$ est en bijection avec l'ensemble des morphismes d'algèbres unitaires $h : \mathrm{U}_p(\mathrm{L}) \to \mathrm{H}(\mathrm{G})$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{U}_p(\mathrm{L}) \arrow[rr, "h"] \arrow[d, "\Delta_{\mathrm{U}_p(\mathrm{L})}"'] & & \mathrm{H}(\mathrm{G}) \arrow[dr, "\delta_{\mathrm{G}}"] & \\
 & & & \mathrm{H}(\mathrm{G} \times \mathrm{G}) \\
\mathrm{U}_p(\mathrm{L}) \otimes \mathrm{U}_p(\mathrm{L}) \arrow[rr, "h \otimes h"] & & \mathrm{H}(\mathrm{G}) \otimes \mathrm{H}(\mathrm{G}) \arrow[ur, "\varphi_{\mathrm{G}}"'] &
\end{tikzcd}$$

.

Or h est défini par sa restriction à L, qui est un morphisme de p-algèbres de Lie de L dans la p-algèbre de Lie sous-jacente à H(G), et la commutativité du diagramme signifie que h applique L dans la partie de H(G) formée des x tels que $\delta_{\mathrm{G}}(x) = \varphi_{\mathrm{G}}(x \otimes 1 + 1 \otimes x)$, qui n'est autre que Lie(G), cf. 2.6 (c).

4.3. Nous nous proposons maintenant d'étudier de façon plus détaillée le k-groupe formel $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})$ lorsque $\mathbf{L}$ est une p-algèbre de Lie plate sur $\mathbf{O}_k$.

544 Pour cela, nous considérons d'abord un anneau C de caractéristique p et une p-algèbre de Lie L sur C dont le module sous-jacent est libre de base $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$. Désignons en outre par P l'ensemble des familles $n = (n_i)_{i \in \mathrm{I}}$ formées d'entiers naturels tels que $0 \leqslant n_i < p$ et que les n_i soient nuls hormis peut-être un nombre fini d'entre eux. Si nous munissons I d'un ordre total et si nous appelons $i_1, i_2, \ldots, i_r$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_r)$ les indices i tels que $n_i \neq 0$, nous pouvons donc poser $|n| = n_{i_1} + \cdots + n_{i_r}$ et

$$x^n = x_{i_1}^{n_{i_1}} \cdot x_{i_2}^{n_{i_2}} \cdots x_{i_r}^{n_{i_r}}, \qquad n! = (n_{i_1}!) \cdots (n_{i_r}!).$$

On sait que les monômes $x^n/n!$ forment une base de $\mathrm{U}_p(\mathrm{L})$ ($\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ 5.3.3) et il est clair qu'on a

$$(*) \qquad \Delta\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{m \leqslant n} \frac{x^m}{m!} \otimes \frac{x^{n-m}}{(n-m)!}$$

[136] N.D.E. : La démonstration est identique à celle de 2.6.3.

la somme étant étendue à tous les $m \in \mathrm{P}$ tels qu'on ait $m \leqslant n$ (i.e. $m_i \leqslant n_i$ pour tout $i \in \mathrm{I}$).

La formule $(*)$ permet une détermination aisée de la filtration naturelle de $\mathrm{U}_p(\mathrm{L})$ (cf. 1.3.6). Posons $\mathrm{U} = \mathrm{U}_p(\mathrm{L})$, soit U^+ l'idéal bilatère engendré par L et soit $\mathrm{U}_0 = \mathrm{C} \cdot 1_{\mathrm{U}}$. Comme en 1.3.6, on définit une filtration de U (par des sous-C-coalgèbres) en posant, pour $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{U}_n = \{u \in \mathrm{U} \mid \Delta_{\mathrm{U}}(u) - u \otimes 1 \in \mathrm{U}_{n-1} \otimes \mathrm{U}^+\}.$$

La formule $(*)$ entraîne alors que U_n *est le* C*-module libre qui a pour base les monômes* x^m *tels que* $|m| \leqslant n$.

4.3.1. — Avec les notations de 4.3, déterminons les éléments ξ de $\mathrm{U} = \mathrm{U}_p(\mathrm{L})$ tels que **545**
$\varepsilon_{\mathrm{U}}(\xi) = 1$ et $\Delta_{\mathrm{U}}(\xi) = \xi \otimes \xi$. Tout élément ξ de U s'écrit $\xi = \sum_{n \in \mathrm{P}} \xi_n (x^n/n!)$, avec $\xi_n \in \mathrm{C}$. La condition $\varepsilon_{\mathrm{U}}(\xi) = 1$ entraîne l'égalité $\xi_0 = 1$, où 0 désigne l'élément de P dont toutes les composantes sont nulles. La condition $\Delta_{\mathrm{U}_p(\mathrm{L})}(\xi) = \xi \otimes \xi$ entraîne :

$$\sum_{m \leqslant n} \xi_n \frac{x^m}{m!} \otimes \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} = \sum_{q,r} \xi_q \xi_r \frac{x^q}{q!} \otimes \frac{x^r}{r!}$$

c'est-à-dire

$$\xi_{q+r} = \xi_q \xi_r \quad \text{si} \quad q_i + r_i < p \quad \text{et} \quad \xi_q \xi_r = 0 \quad \text{sinon.}$$

Si l'on note ξ_i la valeur de ξ_n lorsque $n_i = 1$ et $n_j = 0$ pour $j \neq i$, ces conditions signifient que l'on a

$$\xi_n = \prod_i \xi_i^{n_i} \quad \text{si} \quad n \in \mathrm{P} \qquad \text{et} \quad \xi_i^p = 0 \quad \forall\, i \in \mathrm{I}.$$

On tire de là :

Proposition. — *Soient k un anneau pseudocompact local* [137] *de caractéristique $p > 0$,* $\mathbf{L}$ *une p-algèbre de Lie* plate *sur* $\mathbf{O}_k$, C *un objet de* $\mathbf{Alf}_{/k}$ *et* $\sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$ *l'idéal de* C *formé des éléments x tels que $x^p = 0$. Il existe une bijection « fonctorielle en* C *» :*

$$\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C})$$

D'après la remarque 1.2.3.F, on peut en effet choisir une base $({}^{\mathrm{C}}x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de $\mathbf{L}(\mathrm{C})$ sur **546**
C de telle façon que, pour tout morphisme $\varphi : \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ de $\mathbf{Alf}_{/k}$, $\mathbf{L}(\varphi)$ applique ${}^{\mathrm{C}}x_i$ sur ${}^{\mathrm{D}}x_i$. D'après ce qui précède, l'application

$$\sum_i {}^{\mathrm{C}}x_i \otimes \xi_i \mapsto \sum_{n \in \mathrm{P}} \left(\prod_i \xi_i^{n_i} \right) \frac{{}^{\mathrm{C}}x^n}{n!}$$

est une bijection fonctorielle de $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$ sur $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C})$.

[137] N.D.E. : On a ajouté l'hypothèse que k soit local, afin que tout k-module pseudocompact topologiquement plat soit topologiquement libre, cf. la démonstration.

4.3.2. — « *Il n'y a pas de formule de Campbell-Hausdorff en caractéristique* $p > 0$ ». Expliquons-nous : l'isomorphisme fonctoriel de 4.3.1 dépend du choix des bases $({}^{\mathrm{C}}x_i)_{i\in \mathrm{I}}$. À la différence de ce qui se passe en 3.2 (cas de la caractéristique 0), il n'y a pas, en général, de bijection de $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$ sur $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C})$ qui soit « fonctorielle à la fois en C et en $\mathbf{L}$ ». L'argument qui suit montre par exemple qu'un tel isomorphisme n'existe pas lorsque k est un corps contenant les racines (p^2-1)-ièmes de l'unité.

Choisissons en effet $\mathbf{L}$ de telle façon que, pour tout $\mathrm{C} \in \mathbf{Alf}_{/k}$, $\mathbf{L}(\mathrm{C})$ soit la p-algèbre de Lie abélienne sur C qui est engendrée par un élément x soumis à la relation $x^{(p^2)} = 0$. On a donc

$$\mathbf{L}(\mathrm{C}) = \mathrm{C}x \oplus \mathrm{C}x^{(p)}, \qquad \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C})) \cong k[x]/(x^{p^2}).$$

Nous allons montrer que le seul morphisme fonctoriel

$$\chi_{\mathrm{C}} : \mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}} \longrightarrow \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$$

qui soit compatible avec les endomorphismes de $\mathbf{L}$ et qui applique $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$ dans $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C})$, est le morphisme constant de valeur 1.

547 Soit en effet ψ_{C} la bijection de $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$ sur $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C}) = \mathrm{Prim}\, \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C}))$ donnée par 4.3.1, c.-à-d.,

$$x \otimes a + x^{(p)} \otimes b \mapsto \sum_{0 \leqslant i,j < p} a^i b^j \, x^{i+pj}.$$

En composant χ_{C} avec ψ_{C}^{-1}, on obtient un morphisme fonctoriel (en C) :

$$\begin{aligned} \theta_{\mathrm{C}} : \quad \mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}} &\to \mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}} \\ x \otimes a + x^{(p)} \otimes b &\mapsto x \otimes \mathrm{P}(a,b) + x^{(p)} \otimes \mathrm{Q}(a,b). \end{aligned}$$

La fonctorialité en C implique que $\mathrm{P}(a,b)$ et $\mathrm{Q}(a,b)$ sont les valeurs en (a,b) de deux polynômes P, $\mathrm{Q} \in k[x,y]$ qu'on peut supposer de degré $< p$ en X ainsi qu'en Y. [138] Soit α un élément de k et ℓ_α l'endomorphisme de p-algèbre de Lie de $\mathbf{L}$ qui applique x sur αx (et donc $x^{(p)}$ sur $\alpha^p x^{(p)}$). Alors $\mathrm{U}_p(\ell_\alpha)$ est l'endomorphisme d'algèbre qui envoie x sur αx (et donc chaque x^i sur $\alpha^i x^i$, pour $i < p^2$), et l'on voit facilement que le carré ci-dessous

$$\begin{tikzcd} \mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}} \arrow[r, "\psi_{\mathrm{C}}"] \arrow[d, "\ell_\alpha(\mathrm{C})\otimes_{\mathrm{C}}\mathrm{id}"] & \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C})) \arrow[d, "\mathrm{U}_p(\ell_\alpha)(\mathrm{C})"] \\ \mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}} \arrow[r, "\psi_{\mathrm{C}}"] & \mathrm{U}_p(\mathbf{L}(\mathrm{C})) \end{tikzcd}$$

est commutatif. L'hypothèse $\chi_{\mathrm{C}} \circ (\ell_\alpha(\mathrm{C}) \otimes \mathrm{id}) = \mathrm{U}_p(\ell_\alpha)(\mathrm{C}) \circ \chi_{\mathrm{C}}$ entraîne alors les égalités :

$$\mathrm{P}(\alpha a, \alpha^p b) = \alpha\, \mathrm{P}(a,b) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q}(\alpha a, \alpha^p b) = \alpha^p\, \mathrm{Q}(a,b).$$

Écrivant $\mathrm{P} = \sum_{i,j<p} \lambda_{ij} \mathrm{X}^i \mathrm{Y}^j$ et $\mathrm{Q} = \sum_{i,j<p} \mu_{ij} \mathrm{X}^i \mathrm{Y}^j$, et prenant pour C l'algèbre $k[\mathrm{X},\mathrm{Y}]/(\mathrm{X}^p, \mathrm{Y}^p)$, on en déduit que si $\lambda_{ij} \neq 0$ (resp. $\mu_{ij} \neq 0$) alors $\alpha^{i-1+pj} = 1$

[138] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

(resp. $\alpha^{i+p(j-1)} = 1$). Donc, prenant pour α une racine primitive de l'unité d'ordre $p^2 - 1$, on en déduit que $\mathrm{P} = \lambda \mathrm{X}$ et $\mathrm{Q} = \mu \mathrm{Y}$, avec $\lambda, \mu \in k$. Par conséquent, on a :

$$\chi_{\mathrm{C}}(x \otimes a + x^{(p)} \otimes b) = \sum_{0 \leqslant i,j < p} (\lambda a)^i (\mu b)^j x^{i+pj}.$$

(138) Considérons enfin l'endomorphisme f de $\mathbf{L}$ qui envoie x sur $x + x^{(p)}$; prenant $\mathrm{C} = k[a]/(a^3)$ et comparant les coefficients de x^p et x^{p+1} dans $(\chi_{\mathrm{C}} \circ f(\mathrm{C}))(x \otimes a)$ et dans $(\mathrm{U}_p(f)(\mathrm{C}) \circ \chi_{\mathrm{C}})(x \otimes a)$, on obtient que $\lambda = \mu$ et $\lambda^2 a^2 = 0$, d'où $\lambda = \mu = 0$.

4.4. Théorème. — *Soient k un anneau pseudocompact de caractéristique $p > 0$ et* G *un k-groupe formel. Les assertions suivantes sont équivalentes :* 548

(i) *Il existe une p-algèbre de Lie* $\mathbf{L}$ plate *sur* $\mathbf{O}_k$ *telle que* G *soit isomorphe à* $\mathscr{G}_p(\mathbf{L})$ (*et dans ce cas* $\mathbf{L} = \mathbf{Lie}(\mathrm{G})$ *d'après* 4.2.2).

(ii) *Il existe un k-module pseudocompact* projectif ω *tel que l'algèbre affine de* G *soit isomorphe au quotient de $k[[\omega]]$ par l'idéal fermé engendré par les x^p, pour $x \in \omega$* (*et dans ce cas* $\omega \simeq \omega_{\mathrm{G}/k}$).

(iii) G *est de hauteur* $\leqslant 1$ *et* $\omega_{\mathrm{G}/k}$ *est un k-module pseudocompact* projectif.

(iv) G *est de hauteur* $\leqslant 1$ *et est* topologiquement plat *sur k.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Soient $\omega = \Gamma^*(\mathbf{L})$ (cf. 1.2.3.D) et A le quotient de $k[[\omega]]$ par l'idéal fermé engendré par les x^p, pour $x \in \omega$. Tout morphisme continu $h : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$, où C est un objet de $\mathbf{Alf}_{/k}$, est déterminé par sa restriction h' à ω ; cette restriction h' envoie ω dans $\sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$. On obtient ainsi une bijection canonique de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alp}_{/k}}(\mathrm{A}, \mathrm{C})$ sur l'ensemble $\mathrm{Hom}_c(\omega, \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}})$ des applications k-linéaires continues de ω dans $\sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$. Ce dernier ensemble est canoniquement isomorphe à $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}}$ (voir la démonstration de 3.3). L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) résulte donc de la bijection fonctorielle $\mathbf{L}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \sqrt[p]{0_{\mathrm{C}}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{G}_p(\mathbf{L})(\mathrm{C})$ établie en 4.3.1.

Pour les autres implications, consulter les démonstrations des théorèmes 3.3 et $\mathrm{VII_A}$ 7.4.1, qui sont analogues.

Remarque 4.4.A. — (139) Soit G un k-groupe formel infinitésimal, d'algèbre affine A, tel que $\omega_{\mathrm{G}/k} = \mathrm{I_A}/\overline{\mathrm{I_A^2}}$ soit un k-module pseudocompact *projectif*. Alors il existe une section $\tau : \omega_{\mathrm{G}/k} \to \mathrm{I_A}$ de la projection $\mathrm{I_A} \to \omega_{\mathrm{G}/k}$, et τ induit un morphisme continu d'algèbres $\psi : k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]] \to \mathrm{A}$ qui est *surjectif*, cf. la démonstration de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) dans 3.3.

4.4.1 Corollaire. — *Si k est un corps de caractéristique $p > 0$, le foncteur* $\mathrm{L} \mapsto \mathscr{G}_p(\mathrm{L})$ *est une équivalence de la catégorie des p-algèbres de Lie sur k sur celle des k-groupes* 549
formels de hauteur $\leqslant 1$.

(139) N.D.E. : On a ajouté cette remarque, utilisée en 4.4.2.

En effet, quand G parcourt les groupes formels de hauteur $\leqslant 1$, le foncteur $\mathrm{G} \mapsto \mathscr{G}_p(\mathrm{Lie}\,\mathrm{G})$ est isomorphe au foncteur identique d'après le théorème 4.4 ; de même, nous avons vu en 4.2.2 que le foncteur $\mathrm{L} \mapsto \mathrm{Lie}\,\mathscr{G}_p(\mathrm{L})$ est isomorphe au foncteur identique (voir aussi $\mathrm{VII_A}$, 5.5.3). [140]

4.4.2. — Prenons toujours pour k un corps de caractéristique p. Soit G un k-groupe formel infinitésimal G, d'algèbre affine A. Comme G est infinitésimal, tout idéal ouvert de A contient $\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^{\{p^n\}}$ pour n assez grand, donc G est la limite projective des algèbres affines $\mathrm{A}/\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^{\{p^n\}}$ des groupes ${}_{\mathrm{Fr}^n}\mathrm{G}$ (cf. 4.1.2). *Tout k-groupe formel infinitésimal est donc une limite inductive de k-groupes formels de hauteur finie.*

Supposons G de hauteur $\leqslant n$ et notons $\mathrm{H} = \mathrm{G}/{}_{\mathrm{Fr}}\mathrm{G}$. [141] D'après 2.4 et 2.4.1, $\mathrm{Fr} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}^{(p)}$ se factorise en un épimorphisme $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ suivi d'un monomorphisme $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}^{(p)}$. On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\mathrm{Fr}"'] & \mathrm{H} \arrow[r, "\mathrm{Fr}^{n-1}"] \arrow[d, "i"] & \mathrm{H}^{(p^{n-1})} \arrow[d, "i^{(p^{n-1})}"] \\
& \mathrm{G}^{(p)} \arrow[r, "\mathrm{Fr}^{n-1}"] & \mathrm{G}^{(p^n)}
\end{tikzcd}$$

et comme le foncteur $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{X}^{(p)}$ commute aux produits fibrés, $i^{(p^{n-1})}$ est encore un monomorphisme. Comme $\mathrm{Fr}^n(\mathrm{G}/k)$ est nul et comme π est un épimorphisme, alors $\mathrm{Fr}^{n-1}(\mathrm{G}^{(p)}/k) \circ i = i^{(p^{n-1})} \circ \mathrm{Fr}^{n-1}(\mathrm{H}/k)$ est nul et donc, puisque $i^{(p^{n-1})}$ est un monomorphisme, $\mathrm{Fr}^{n-1}(\mathrm{H}/k)$ est nul, donc H est de hauteur $\leqslant n-1$. On voit donc que : *tout k-groupe formel de hauteur finie possède une suite de composition dont les quotients sont de hauteur* $\leqslant 1$, donc peuvent être décrits par des p-algèbres de Lie sur k.

Enfin, l'algèbre affine A de G est un quotient de $k[[\omega_{\mathrm{G}/k}]]$, cf. 4.4.A, donc si $\omega_{\mathrm{G}/k}$ est de dimension finie sur k, alors toutes les algèbres $\mathrm{A}/\mathrm{I}_{\mathrm{A}}^{\{p^n\}}$ sont des k-espaces vectoriels de dimension finie. On voit donc que : *tout groupe formel infinitésimal* G *sur un corps de caractéristique $p > 0$, tel que $\omega_{\mathrm{G}/k}$ soit de dimension finie sur k, est une limite inductive de groupes formels finis* (i.e. de longueur finie, cf. 1.2.6).

5. Espaces homogènes de groupes formels infinitésimaux sur un corps

550 **5.0.** [142] Supposons, pour simplifier, que k soit un corps. Soit G un k-groupe formel d'algèbre affine $\mathrm{A} = \mathscr{A}(\mathrm{G})$. Soit A^+ l'idéal d'augmentation de A ; pour tout $a \in \mathrm{A}$ on notera $\overline{a} = a - \varepsilon_{\mathrm{A}}(a)1_{\mathrm{A}}$ sa projection sur A^+. Soit F un sous-groupe formel de

---

[140] N.D.E. : Si k est un anneau artinien de caractéristique $p > 0$, la même démonstration donne une équivalence entre la catégorie des p-algèbres de Lie *plates* sur k et celle des k-groupes formels de hauteur $\leqslant 1$, *topologiquements plats* sur k.

[141] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[142] N.D.E. : On a ajouté la sous-section 5.0, pour exprimer dans le langage des algèbres de Hopf cocommutatives la proposition 5.1 qui va suivre, et citer les résultats obtenus depuis dans cette direction.

G, défini par l'idéal fermé J de A, et soit π (resp. $\overline{\pi}$) la projection $\mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathrm{J}$ (resp. la composée des projections $\mathrm{A} \to \mathrm{A}^+ \to \mathrm{A}^+/\mathrm{J}$). Remarquons que, pour tout $a \in \mathrm{A}$, la projection de $\Delta_\mathrm{A}(\mathrm{A})$ sur $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{A}^+$ est $\Delta_\mathrm{A}(a) - a \mathbin{\widehat{\otimes}} 1$.

D'après le théorème 2.4, on peut former la k-variété formelle quotient $\mathrm{X} = \mathrm{G}/\mathrm{F}$, son algèbre affine B est

$$\begin{aligned}\mathrm{B} &= \mathrm{Ker}\Big(\mathrm{A} \underset{(\mathrm{id}_\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \pi)\Delta_\mathrm{A}}{\overset{\tau_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k (\mathrm{A}/\mathrm{J}) \Big)\\ &= \big\{ a \in \mathrm{A} \mid (\mathrm{id}_\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \pi)\Delta_\mathrm{A}(a) = a \mathbin{\widehat{\otimes}} \pi(1) \big\}\\ &= \mathrm{Ker}\Big((\mathrm{id}_\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \overline{\pi}\,)\Delta_\mathrm{A} \Big).\end{aligned}$$

C'est aussi la sous-algèbre de A formée des éléments ϕ tels que, pour tout $\mathrm{C} \in \mathrm{Ob}\,\mathbf{Alf}_{/k}$ et $g \in \mathrm{G}(\mathrm{C})$, $h \in \mathrm{F}(\mathrm{C})$, on ait $\phi(gh) = \phi(g)$. Pour tout $g, g' \in \mathrm{G}(\mathrm{C})$ et $h \in \mathrm{F}(\mathrm{C})$, on a $\phi(gg'h) = \phi(gg')$, donc $\Delta(\phi)$ appartient au noyau de $\mathrm{id}_\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k (\mathrm{id}_\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \overline{\pi})\Delta_\mathrm{A}$, qui égale $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{B}$ puisque A est topologiquement plate sur k. On a donc $\Delta_\mathrm{A}(\mathrm{B}) \subset \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{B}$, i.e. la sous-algèbre fermée B est aussi un *coidéal à gauche*.

D'autre part, B détermine F puisque, d'après le corollaire 2.4.1, on a $\mathrm{J} = \overline{\mathrm{AB}^+}$, i.e. J est l'idéal fermé engendré par $\mathrm{B}^+ = \mathrm{B} \cap \mathrm{A}^+$. On obtient donc ainsi une application *injective* $\mathscr{Q}$ de l'ensemble $\mathscr{F}$ des sous-groupes formels de G dans l'ensemble $\mathscr{B}$ des sous-algèbres fermées B de A qui sont des coidéaux à gauche. Se pose alors la question de déterminer l'image de cette application, et la proposition 5.1 ci-dessous montre que $\mathscr{Q}$ est bijective lorsque G est *infinitésimal*. En fait, ceci est vrai pour *tout* k-groupe formel G.

En effet, rappelons (cf. 2.2.1) que le foncteur $\mathrm{G} \to \mathrm{H}(\mathrm{G})$ est une *équivalence* entre la catégorie des k-groupe formels et celle des k-algèbre de Hopf cocommutatives ; si F est un sous-groupe formel de G, défini par l'idéal fermé J de A, alors la sous-algèbre de Hopf H(F) de $\mathrm{H} = \mathrm{H}(\mathrm{G})$ est l'orthogonal de J pour la dualité entre $\mathrm{A} = \mathrm{H}^*$ et $\mathrm{H} = \mathrm{A}^\dagger$ (cf. 0.2.2). D'autre part, si B est une sous-algèbre fermée de A qui est aussi un coidéal à gauche, alors son orthogonal $\mathrm{I} = \mathrm{B}^\perp$ est un coidéal de H (i.e. $\Delta_\mathrm{H}(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I} \otimes \mathrm{H} + \mathrm{H} \otimes \mathrm{I}$ et $\varepsilon_\mathrm{H}(\mathrm{I}) = 0$) et un idéal à gauche. Notons $\mathscr{H}$ (resp. $\mathscr{I}$) l'ensemble des sous-algèbres de Hopf (resp. idéaux à gauche qui sont des coidéaux) de H. Pour tout $\mathrm{I} \in \mathscr{I}$, on notera π_I (resp. $\overline{\pi}_\mathrm{I}$) la projection $\mathrm{H} \to \mathrm{H}/\mathrm{I}$ (resp. la composée des projections $\mathrm{H} \to \mathrm{H}^+ \to \mathrm{H}^+/\mathrm{I}$), où H^+ est l'idéal d'augmentation de H.

Soient K une sous-algèbre de Hopf de H et $\mathrm{K}^+ = \mathrm{K} \cap \mathrm{H}^+$. Si F est le sous-groupe formel correspondant à K, alors $\mathrm{J} = \mathrm{K}^\perp$ et A^+/J s'identifie au dual de K^+, et comme $\mathrm{B} = \mathscr{Q}(\mathrm{F})$ est le noyau de l'application

$$\mathrm{A} \xrightarrow{\Delta_\mathrm{A}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{A} \xrightarrow{\mathrm{id} \mathbin{\widehat{\otimes}} \overline{\pi}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k (\mathrm{A}^+/\mathrm{J})$$

on obtient que $\mathscr{Q}$ correspond par dualité à l'application Φ qui à K associe l'image de

$$\mathrm{H} \xleftarrow{m_\mathrm{H}} \mathrm{H} \otimes_k \mathrm{H} \xleftarrow{\mathrm{id} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{can.}} \mathrm{H} \otimes_k \mathrm{K}^+$$

i.e. l'idéal à gauche HK^+, qui est aussi un coidéal. On voit de même que l'application qui à $\mathrm{B} \in \mathscr{B}$ associe $\overline{\mathrm{AB}^+}$ correspond par dualité à l'application Ψ qui à tout $\mathrm{I} \in \mathscr{I}$

associe le noyau de $(\mathrm{id}\otimes_k\overline{\pi}_{\mathrm{I}})\circ\Delta_{\mathrm{H}}$, i.e. on a

$$\Psi(\mathrm{I})=\{x\in\mathrm{H}\mid(\mathrm{id}\otimes_k\pi_{\mathrm{I}})\Delta_{\mathrm{H}}(x)=x\otimes\pi_{\mathrm{I}}(1)\}.$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 5.0.1. — *Soient k un corps et* H *une algèbre de Hopf cocommutative. Alors les applications* Φ *et* Ψ *ci-dessus sont des bijections réciproques entre l'ensemble des sous-algèbres de Hopf de* H *et celui des idéaux à gauche qui sont des coidéaux.*

Ce théorème a d'abord été démontré par K. Newman, cf. [**Ne75**], Th. 4.1 (où le mot « cocommutative » a été oublié). Sa démonstration utilise « le théorème de Cartier-Gabriel-Kostant » (cf. 2.9) pour se ramener au cas où H est connexe, puis l'existence dans ce cas d'une « base de Sweedler » (cf. [**Sw67**], Th. 3), un résultat dual du théorème de Dieudonné-Cartier 5.2.2 ci-dessous. Une autre démonstration, plus courte, a été donnée par H. J. Schneider [**Sch90**], Th. 4.15. Une généralisation a ensuite été obtenue par A. Masuoka lorsqu'on suppose seulement que le coradical H_0 de H (i.e. la somme des sous-cogèbres simples) est commutatif [**Ma91**], Th. 1.3 (3).

Signalons enfin que pour une k-algèbre de Hopf commutative, correspondant donc à un k-schéma en groupes affine G, on ne peut s'attendre à un analogue de 5.0.1 sans hypothèses additionnelles, puisque pour un k-sous-groupe F de G, le quotient G/F n'est pas nécessairement affine. Mais M. Takeuchi a établi dans [**Tak72**], Th. 4.3 (resp. [**Tak79**], Th. 3), une bijection analogue entre l'ensemble des k-sous-groupes F de G qui sont invariants (resp. tels que G/F soit affine), et celui des sous-algèbres B de $\mathscr{O}(\mathrm{G})$ telles que $\Delta(\mathrm{B})\subset\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$ et qui sont stables par l'antipode (resp. et telles que $\mathrm{B}\to\mathrm{A}$ soit fidèlement plat).

5.1. Soit k un anneau pseudocompact. [143] Soient G un k-groupe formel infinitésimal topologiquement plat, A son algèbre affine, B une sous-algèbre fermée de A, $\mathrm{X}=\mathrm{Spf}(\mathrm{B})$ et $r:\mathrm{G}\to\mathrm{X}$ l'épimorphisme induit par l'inclusion de B dans A. On se propose de voir sous quelle condition r fait de X le quotient à droite de G par un sous-groupe H (cf. 2.4). [144]

Proposition. — *Soient* G *un k-groupe formel* infinitésimal topologiquement plat*,* A *son algèbre affine,* $\mathrm{I_A}$ *l'idéal d'augmentation de* A*,* B *une sous-algèbre fermée de* A*, et* $\mathrm{J_B}=\overline{\mathrm{AI_B}}$*, où* $\mathrm{I_B}=\mathrm{B}\cap\mathrm{I_A}$*. On suppose que* A *est* topologiquement plate *sur k, ainsi que* $\overline{\mathrm{J}_{\mathrm{B}}^{n}}/\overline{\mathrm{J}_{\mathrm{B}}^{n+1}}$ *pour tout* $n\geqslant 0$*. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout* $x\in\mathrm{B}$, $\Delta_{\mathrm{A}}(x)-x\mathbin{\widehat{\otimes}}1$ *appartient à* $\mathrm{A}\mathbin{\widehat{\otimes}}_k\mathrm{J_B}$.

(143) N.D.E. : Dans l'original, il est supposé en 5.1 que k est un corps. En fait, cette hypothèse peut être remplacée par des hypothèses de platitude ; on a modifié en conséquence les n[os] 5.1 à 5.1.5.

(144) N.D.E. : On a remplacé « gauche » par « droite » et l'on a modifié l'énoncé de la proposition 5.1, afin de faire apparaître plus clairement, d'une part, les conditions équivalentes (i), (ii), et, d'autre part, la conclusion $\mathrm{Spf(B)}\simeq\mathrm{G/H}$.

(ii) *La suite ci-dessous (où* $\tau_1(a) = a \mathbin{\widehat{\otimes}} 1$ *et* π *est la projection* $\mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathrm{J}_\mathrm{B}$*) est exacte :*

$$(*) \qquad \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{A} \underset{(\pi \,\widehat{\otimes}\, \mathrm{id}_\mathrm{A})\Delta_\mathrm{A}}{\overset{\tau_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} (\mathrm{A}/\mathrm{J}_\mathrm{B})$$

c.-à-d., B *est l'ensemble de* tous *les* $x \in \mathrm{A}$ *tels que* $\Delta_\mathrm{A}(x) - x \mathbin{\widehat{\otimes}} 1$ *appartienne à* $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{J}_\mathrm{B}$.

Dans ce cas, $\mathrm{H} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A}/\mathrm{J}_\mathrm{B})$ *est un sous-groupe formel de* G*, et la suite ci-dessous (où* λ *est la restriction à* $\mathrm{G} \times \mathrm{H}$ *de la multiplication de* G*) est exacte :*

$$(**) \qquad \mathrm{G} \times \mathrm{H} \underset{\lambda}{\overset{\mathrm{pr}_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{Spf}(\mathrm{B})$$

c.-à-d., Spf(B) *est isomorphe à* G/H.

Posons $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}/\mathrm{J}_\mathrm{B}$ et $\mathrm{H} = \mathrm{Spf}(\overline{\mathrm{A}})$; alors H est une sous-variété formelle de G. Comme $\mathrm{J}_\mathrm{B} \subset \mathrm{I}_\mathrm{A}$, l'augmentation ε_A induit un morphisme continu de k-algèbres $\overline{\varepsilon} : \overline{\mathrm{A}} \to k$.

Si (i) est satisfaite, alors $\Delta_\mathrm{A}(\mathrm{I}_\mathrm{B}) \subset \mathrm{I}_\mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}} 1 + \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{J}_\mathrm{B}$, et donc Δ_A induit par passage au quotient un morphisme diagonal $\overline{\Delta}$. Alors $\overline{\Delta}$ et $\overline{\varepsilon}$ munissent H d'une structure de sous-monoïde formel de G. Comme G est infinitésimal, il en est de même de H ; donc, d'après la proposition 2.7, H est un sous-groupe formel de G. Il résulte alors de la définition de G/H (cf. 2.4), que (ii) entraîne la dernière assertion de la proposition.

D'autre part, il est clair que (ii) implique (i). La démonstration de la réciproque occupe les paragraphes 5.1.1 à 5.1.5.

5.1.1. — Considérons d'abord la catégorie $\mathscr{C}$ qui suit : un objet de $\mathscr{C}$ est un couple **551**
(A, J) formé d'une k-algèbre profinie A et d'un idéal fermé J de A ; un morphisme $\psi : (\mathrm{A}, \mathrm{J}) \to (\mathrm{A}', \mathrm{J}')$ de $\mathscr{C}$ est un homomorphisme continu de k-algèbres $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ qui applique J dans J′. Si l'on associe à (A, J) le couple (Spf(A/J), Spf(A)), on obtient évidemment une anti-équivalence de $\mathscr{C}$ sur la catégorie des couples (Z, Y) formés d'une k-variété formelle Y et d'une sous-variété formelle Z, un morphisme $\phi : (\mathrm{Z}, \mathrm{Y}) \to (\mathrm{Z}', \mathrm{Y}')$ étant un morphisme de k-variétés formelles $\mathrm{Y} \to \mathrm{Y}'$ qui applique Z dans Z′.

Une structure de *cogroupe* sur un objet (A, J) de $\mathscr{C}$ consiste en la donnée d'une structure de groupe formel sur Spf(A) telle que les conditions suivantes soient réalisées (notations de 2.1) :

(1) $\Delta_\mathrm{A}(\mathrm{J}) \subset \mathrm{J} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{A} + \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{J}$;

(2) $\varepsilon_\mathrm{A}(\mathrm{J}) = 0$;

(3) $c_\mathrm{A}(\mathrm{J}) \subset \mathrm{J}$.

Ces conditions signifient aussi que $\mathrm{H} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A}/\mathrm{J})$ est un sous-groupe formel de $\mathrm{G} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A})$. [145]

---

[145] N.D.E. : Notons que si (A′, J′) est un second cogroupe de $\mathscr{C}$, correspondant à un couple $\mathrm{H}' \subset \mathrm{G}'$ de k-groupes formels, alors se donner un morphisme de cogroupes $(\mathrm{A}', \mathrm{J}') \to (\mathrm{A}, \mathrm{J})$ équivaut à se donner un morphisme de k-groupes formels $\mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ qui applique H dans H′.

Supposons de plus que A soit *locale*, i.e. que Spf(A) soit un groupe formel *infinitésimal.* Alors, si $\mathrm{J} \neq \mathrm{A}$, les conditions (2) et (3) sont conséquence de (1). En effet, si J est un idéal fermé distinct de A, il est contenu dans l'idéal d'augmentation $\mathrm{I_A}$, donc (2) est vérifiée, et $\mathrm{M} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A}/\mathrm{J})$ est un sous-monoïde formel de G. Comme G est infinitésimal, il résulte de 2.7 que M est un sous-groupe formel de G, i.e. la condition (3) est vérifiée.

5.1.2. — Désignons par $\mathbf{Alpg}_{/k}$ la catégorie des k-algèbres « *profinies graduées* » :
552 un objet de cette catégorie consiste en la donnée d'une suite $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n, \ldots$ de k-modules pseudocompacts et d'une structure d'algèbre profinie sur le produit $\prod_{n\geqslant 0} \mathrm{A}_n$ telle qu'on ait $\mathrm{A}_n \cdot \mathrm{A}_m \subset \mathrm{A}_{m+n}$ (A_n est identifié à une partie de $\prod_{i\geqslant 0} \mathrm{A}_i$ au moyen de l'injection canonique) ; un morphisme $\psi : (\mathrm{A}_n) \to (\mathrm{B}_n)$ est une suite d'applications linéaires continues $\psi_n : \mathrm{A}_n \to \mathrm{B}_n$ telles qu'on ait $\psi_{m+n}(a \cdot a') = \psi_m(a) \cdot \psi_n(a')$ si $a \in \mathrm{A}_m$ et $a' \in \mathrm{A}_n$.

Définitions. — Il est clair que deux k-algèbres profinies graduées (A_n) et (B_n) ont un *coproduit* [146] dans $\mathbf{Alpg}_{/k}$, qui a pour n-ième composante le produit $\prod_{i=0}^n \mathrm{A}_i \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{B}_{n-i}$ des k-modules pseudocompacts $\mathrm{A}_i \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{B}_{n-i}$. Ce coproduit sera noté $(\mathrm{A}_n) \mathbin{\widehat{\otimes}}_k (\mathrm{B}_n)$.

Alors, une structure de cogroupe sur un objet (A_n) de $\mathbf{Alpg}_{/k}$ est la donnée d'applications k-linéaires continues $\Delta_n : \mathrm{A}_n \to \prod_{i=0}^n \mathrm{A}_i \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{A}_{n-i}$ et $\varepsilon : \mathrm{A}_0 \to k$, qui induisent sur $\prod_{n\geqslant 0} \mathrm{A}_n$ (posant $\varepsilon(\mathrm{A}_i) = 0$ pour $i \geqslant 1$) une structure de cogroupe dans $\mathbf{Alp}_{/k}$.

Enfin, pour tout objet (A, J) de $\mathscr{C}$, on note $\mathrm{Gr_J}(\mathrm{A})$ l'algèbre profinie graduée associée à la filtration de A par les adhérences $\overline{\mathrm{J}^n}$ des puissances de J ; on a donc $\mathrm{Gr_J}(\mathrm{A})_n = \overline{\mathrm{J}^n}/\overline{\mathrm{J}^{n+1}}$ et la multiplication de $\mathrm{Gr_J}(\mathrm{A})$ est induite par celle de A.

Lemme. — [147] *Soient* U, V *deux k-modules pseudocompacts, avec* U topologiquement plat*, et soient* $\mathrm{U} = \mathrm{U}_0 \supset \mathrm{U}_1 \supset \cdots$ *et* $\mathrm{V} = \mathrm{V}_0 \supset \mathrm{V}_1 \supset \cdots$ *deux suites décroissantes de sous-k-modules fermés. Filtrons le produit tensoriel complété* $\mathrm{W} = \mathrm{U} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}$ *à l'aide des sous-modules fermés*

$$\mathrm{W}_n = \mathrm{U}_n \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_0 + \mathrm{U}_{n-1} \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_1 + \cdots + \mathrm{U}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}}_k \mathrm{V}_n\,.$$

On suppose que chaque $\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1}$ *est* topologiquement plat *sur k* (*de sorte que* U/U_n
553 *et donc* U_n *le sont aussi, pour tout n*)*. Alors, pour tout n, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{W}_n/\mathrm{W}_{n+1} \simeq \bigoplus_{i+j=n} (\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_k (\mathrm{V}_j/\mathrm{V}_{j+1}).$$

Démonstration. Posons $\mathrm{W}_{i,j} = \mathrm{U}_i \mathbin{\widehat{\otimes}} \mathrm{V}_j$ et $\overline{\mathrm{W}}_{i,j} = (\mathrm{U}_i/\mathrm{U}_{i+1}) \mathbin{\widehat{\otimes}}_k (\mathrm{V}_j/\mathrm{V}_{j+1})$, pour tout $i, j \geqslant 0$. Montrons par récurrence sur n que l'application naturelle

$$\pi_n : \mathrm{W}_n \longrightarrow \bigoplus_{i+j=n} \overline{\mathrm{W}}_{i,j}$$

[146] N.D.E. : On a remplacé « *somme directe* » par « *coproduit* ».

[147] N.D.E. : Dans l'original, le lemme est énoncé lorsque k est un *corps*, la démonstration étant dans ce cas laissée au lecteur.

est surjective et que l'inclusion $\mathrm{W}_{n+1} \subset \mathrm{Ker}(\pi_n)$ est une égalité. Pour $n = 0$, la projection

$$\pi_0 : \mathrm{U}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{V}_0 \longrightarrow (\mathrm{U}_0/\mathrm{U}_1) \mathbin{\widehat{\otimes}_k} (\mathrm{V}_0/\mathrm{V}_1)$$

est surjective et, comme U_0, $\mathrm{U}_0/\mathrm{U}_1$ et donc U_1 sont topologiquement plats sur k, on voit que $\mathrm{Ker}(\pi_0) = \mathrm{U}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{V}_1 + \mathrm{U}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{V}_0$ et que, de plus, $\mathrm{U}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{V}_1 \cap \mathrm{U}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{V}_0 = \mathrm{U}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{V}_1$.

Supposons donc $n > 0$ et le résultat établi pour $n - 1$. Posons $\mathrm{M}_0 = \mathrm{U}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{V}_n$ et $\mathrm{S}_0 = \sum_{i=1}^n \mathrm{U}_i \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{V}_{n-i}$. On a $\mathrm{S}_0 \subset \mathrm{U}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{V}_0$ et donc, d'après ce qui précède appliqué à $\mathrm{V}_0 \supset \mathrm{V}_n$ au lieu de $\mathrm{V}_0 \supset \mathrm{V}_1$, on a

$$\mathrm{M}_0 \cap \mathrm{S}_0 \subset \mathrm{U}_0 \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{V}_n \cap \mathrm{U}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{V} = \mathrm{U}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{V}_n$$

d'où l'on déduit que $\mathrm{M}_0 \cap \mathrm{S}_0 = \mathrm{U}_1 \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{V}_n$. Comme $\mathrm{W}_n = \mathrm{M}_0 + \mathrm{S}_0$, on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes, où l'on a posé $\mathrm{U}'_i = \mathrm{U}_{i+1}$ et $\overline{\mathrm{W}}'_{i,n-1-i} = \overline{\mathrm{W}}_{i+1,n-1-i}$ pour $i = 0, \ldots, n-1$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{S}_0 \arrow[r] \arrow[d, "\pi'_{n-1}"'] & \mathrm{W}_n \arrow[r] \arrow[d, "\pi_n"'] & (\mathrm{U}_0/\mathrm{U}_1) \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{V}_n \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{i=0}^{n-1} \overline{\mathrm{W}}'_{i,n-1-i} \arrow[r] & \bigoplus_{i=0}^{n} \overline{\mathrm{W}}_{i,n-1} \arrow[r] & \overline{\mathrm{W}}_{0,n} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Alors p est surjectif, de noyau $(\mathrm{U}_0/\mathrm{U}_1) \mathbin{\widehat{\otimes}_k} \mathrm{V}_{n+1}$. De plus, d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à la suite (U'_i), π'_{n-1} est surjectif, de noyau égal à $\mathrm{W}'_n = \sum_{i=1}^n \mathrm{W}_{i,n+1-i}$. Il en résulte que π_n est surjectif, et que l'inclusion $\mathrm{W}_{n+1} \subset \mathrm{Ker}(\pi_n)$ est une égalité. Ceci prouve le lemme.

Revenons à un objet (A, J) de $\mathscr{C}$ et notons que, d'après 0.2.G, l'hypothèse que chaque $\overline{\mathrm{J}^n}/\overline{\mathrm{J}^{n+1}}$ soit topologiquement plat sur k équivaut à dire que $\mathrm{Gr}_{\mathrm{J}}(\mathrm{A})$ est topologiquement plate sur k.

Corollaire. — *Soit* $\mathscr{P}$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathscr{C}$ *formée des objets* (A, J) *tels que* A *et* $\mathrm{Gr}_{\mathrm{J}}(\mathrm{A})$ *soient topologiquement plats sur* k. *Alors le foncteur* $\mathscr{P} \to \mathbf{Alpg}_{/k}$, $(\mathrm{A}, \mathrm{J}) \mapsto \mathrm{Gr}_{\mathrm{J}}(\mathrm{A})$ *commute aux coproduits finis, donc transforme un cogroupe de* $\mathscr{P}$ *en un cogroupe de* $\mathbf{Alpg}_{/k}$.

En particulier, si k *est un* corps *alors, pour tout cogroupe* (A, J) *de* $\mathscr{C}$, $\mathrm{Gr}_{\mathrm{J}}(\mathrm{A})$ *est un cogroupe de* $\mathbf{Alpg}_{/k}$. [148]

5.1.3. — Identifions toute k-algèbre profinie Γ à la k-algèbre profinie graduée $(\Gamma_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\Gamma_0 = \Gamma$ et $\Gamma_n = 0$ si $n > 0$. En particulier, si $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant 0}$ est une k-algèbre profinie graduée, nous considérerons indifféremment A_0 comme une k-algèbre profinie ou bien comme une k-algèbre profinie graduée. Nous désignerons alors par $\rho : (\mathrm{A}_n) \to$

[148] N.D.E. : À un couple $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ de k-groupes formels, on associe donc le « complété formel $\widehat{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}$ de G le long de H », qui est un k-groupe formel ; de plus on va voir en 5.1.3–5.1.4 que l'inclusion $\sigma : \mathrm{H} \hookrightarrow \widehat{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}}$ possède une rétraction $\pi : \widehat{\mathrm{G}}_{\mathrm{H}} \to \mathrm{H}$ et que le k-groupe formel $\mathrm{N} = \mathrm{Ker}(\pi)$ s'identifie, comme variété formelle, au complété de l'espace homogène G/H le long de la section unité. Ceci sera utile en 5.2.2.

A_0 le morphisme de $\mathbf{Alpg}_{/k}$ tel que $\rho_0 = \mathrm{id}_{A_0}$ et $\rho_n = 0$ si $n > 0$. De même, $\tau : A_0 \to (A_n)$ désignera la section de ρ telle que $\tau_0 = \mathrm{id}_{A_0}$ et $\tau_n = 0$ si $n > 0$.

Toute structure de cogroupe sur $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induit une structure de cogroupe sur A_0 telle que ρ et τ soient des homomorphismes de cogroupes. Dans ce cas, notons I_0 l'idéal d'augmentation de A_0 et posons $A'_n = A_n/\overline{I_0A_n}$ pour tout $n \geqslant 0$ (de sorte que $A'_0 = k$).

Alors, $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un cogroupe dans $\mathbf{Alpg}_{/k}$ (noter que, comme $A_0 = I_0 \oplus k\cdot 1$, alors $I_0 \widehat{\otimes}_k A_n \simeq \overline{I_0A_n}$ est facteur direct de A_n, pour tout n). Puisque τ est une section de ρ alors, d'après 2.4.A, le cogroupe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le « coproduit semi-direct » de A_0 et du cogroupe $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De façon précise, $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est isomorphe, comme objet de $\mathbf{Alpg}_{/k}$, au noyau du couple :

$$(A_n) \underset{(\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\rho)\Delta}{\overset{\tau_1}{\rightrightarrows}} (A_n)\,\widehat{\otimes}_k\, A_0$$

(où $\Delta : (A_n) \to (A_n)\,\widehat{\otimes}(A_n)$ est la comultiplication de (A_n) et $\tau_1(x) = x\,\widehat{\otimes}\,1$), et, identifiant A'_n à son image dans A_n, l'application

$$(A'_n\,\widehat{\otimes}_k\, A_0) \longrightarrow (A_n), \qquad a'_n\,\widehat{\otimes}\,a_0 \mapsto a'_n a_0$$

est un isomorphisme de $\mathbf{Alpg}_{/k}$. (N. B. Ce n'est pas un isomorphisme de cogroupes, mais $\Delta(A') \subset A\,\widehat{\otimes}\,A'$ et $(\gamma\rho'\,\widehat{\otimes}\,\mathrm{id})\circ\Delta_{|A'} = \Delta'$, où Δ' est la comultiplication de A' et $\gamma\rho'$ la projection $A \to A'$, cf. 2.4.A.)

554 ***5.1.4***. — Soient (A, J) un objet de $\mathscr{C}$ et $(A_n) = \mathrm{Gr}_J(A)$ l'objet de $\mathbf{Alpg}_{/k}$ associé, i.e. $A_n = \overline{J^n}/\overline{J^{n+1}}$ pour tout $n \geqslant 0$. Il est clair que l'algèbre $\mathscr{A} = \prod_{n\geqslant 0} A_n$ est engendrée par A_0 et A_1, c'est-à-dire que, pour $n \geqslant 1$, l'application

$$A_1\,\widehat{\otimes}_{A_0}\,A_1\,\widehat{\otimes}_{A_0}\cdots\widehat{\otimes}_{A_0}\,A_1 \longrightarrow A_n \tag{1}$$

définie par la multiplication est surjective.

Supposons de plus que (A, J) soit un cogroupe de $\mathscr{C}$ et que A et les quotients $\overline{J^n}/\overline{J^{n+1}}$ soient plats sur k. Alors, d'après le corollaire 5.1.2, $\mathrm{Gr}_J(A)$ est un cogroupe de $\mathbf{Alpg}_{/k}$. Donc, d'après 5.1.3, si l'on pose

$$A'_n = \big\{x \in \overline{J^n}/\overline{J^{n+1}} \mid \Delta(x) - x\,\widehat{\otimes}\,1 \in \bigoplus_{i=1}^{n}(\overline{J^{n-i}}/\overline{J^{n-i+1}})\,\widehat{\otimes}(\overline{J^i}/\overline{J^{i+1}})\big\}, \tag{2}$$

alors l'application $(A'_n\,\widehat{\otimes}\,A_0) \to (A_n)$, $a'_n\,\widehat{\otimes}\,a'_n \mapsto a'_n a_0$ est un isomorphisme de $\mathbf{Alpg}_{/k}$. [149]

[149] N.D.E. : Soient G, H et $\widehat{G}_H$ les k-groupes formels correspondant à A, $A_0 = A/J$ et $\mathrm{Gr}_J(A)$; alors $\tau : A_0 \hookrightarrow \mathrm{Gr}_J(A)$ correspond à une rétraction $\pi : \widehat{G}_H \to H$ de l'inclusion $H \hookrightarrow \widehat{G}_H$, et ce qui précède signifie que $\widehat{G}_H$ est le produit semi-direct de $N = \mathrm{Ker}(\pi)$ par H.

Notant I_0 l'idéal d'augmentation de A_0, on déduit de (1) et du diagramme commutatif ci-dessous, où $\mathrm{A}_1'^{\widehat{\otimes}\, n}$ désigne $\mathrm{A}_1' \widehat{\otimes}_k \cdots \widehat{\otimes}_k \mathrm{A}_1'$ (n facteurs) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{A}_1 \widehat{\otimes}_{\mathrm{A}_0} \cdots \widehat{\otimes}_{\mathrm{A}_0} \mathrm{A}_1 \arrow[d, "m"'] & \mathrm{A}_1'^{\widehat{\otimes}\, n} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A}_0 \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "m' \widehat{\otimes}\, \mathrm{id}"] & (\mathrm{A}_1'^{\widehat{\otimes}\, n} \widehat{\otimes}_k \mathrm{I}_0) \bigoplus \mathrm{A}_1'^{\widehat{\otimes}\, n} \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "m' \widehat{\otimes}\, \mathrm{id}\ \oplus m'"] \\
\mathrm{A}_n & \mathrm{A}_n' \widehat{\otimes}_k \mathrm{A}_0 \arrow[l, "\sim"'] & (\mathrm{A}_n' \widehat{\otimes}_k \mathrm{I}_0) \bigoplus \mathrm{A}_n' \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

que l'application

$$m' : \mathrm{A}_1' \widehat{\otimes}_k \ldots \widehat{\otimes}_k \mathrm{A}_1' \longrightarrow \mathrm{A}_n' \tag{3}$$

induite par la multiplication est surjective ; autrement dit, la k-algèbre profinie $\mathscr{A}' = \prod_{n\geqslant 0} \mathrm{A}_n'$ est engendrée par ses termes de degré 1.

[150] Revenons maintenant à l'hypothèse (i) de la proposition 5.1 : soient G un k-groupe formel infinitésimal topologiquement plat, A son algèbre affine, I_A l'idéal d'augmentation de A, B une sous-algèbre fermée de A, et $\mathrm{J} = \overline{\mathrm{AI}_\mathrm{B}}$, où $\mathrm{I}_\mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{I}_\mathrm{A}$. On note H le sous-groupe formel $\mathrm{Spf}(\mathrm{A}/\mathrm{J})$ et π la projection $\mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathrm{J}$. On suppose que $\mathrm{A}/\overline{\mathrm{J}^n}$ est topologiquement plat sur k, pour tout $n \geqslant 1$, et que B est contenue dans le noyau $\widetilde{\mathrm{B}}$ du couple :

$$\mathrm{A} \underset{(\mathrm{id}_\mathrm{A} \widehat{\otimes}_k \pi)\Delta_\mathrm{A}}{\overset{\tau_1}{\rightrightarrows}} \mathrm{A} \widehat{\otimes}_k (\mathrm{A}/\mathrm{J}) \ .$$

Soit $(\mathrm{A}_n) = \mathrm{Gr}_\mathrm{J}(\mathrm{A})$, soit $\mathrm{I}_0 = \mathrm{I}_\mathrm{A}/\mathrm{J}$ l'idéal d'augmentation de $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}/\mathrm{J}$, et définissons $(\mathrm{A}_n')_{n\in\mathbb{N}}$ comme en (2) plus haut. On note $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(\widetilde{\mathrm{B}}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) l'objet de $\mathbf{Alpg}_{/k}$ associé à la filtration de B (resp. $\widetilde{\mathrm{B}}$) induite par celle de A, i.e. définie par les idéaux $\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{J}^n}$ (resp. $\widetilde{\mathrm{B}} \cap \overline{\mathrm{J}^n}$). Alors, il est clair que $\mathrm{B}_n \subset \widetilde{\mathrm{B}}_n \subset \mathrm{A}_n'$ pour tout n, et que

$$\mathscr{B} = \prod_{n\geqslant 0} \mathrm{B}_n \subset \widetilde{\mathscr{B}} = \prod_{n\geqslant 0} \widetilde{\mathrm{B}}_n$$

sont des sous-algèbres de $\mathscr{A}' = \prod_{n\geqslant 0} \mathrm{A}_n'$.

D'autre part, J (resp. $\overline{\mathrm{J}^2}$) est l'image dans A de $\mathrm{I}_\mathrm{B} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A}$ (resp. de $\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2} \widehat{\otimes}_k \mathrm{A}$). Par conséquent, l'application

$$(\mathrm{I}_\mathrm{B}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2}) \widehat{\otimes}_k \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{J}/\overline{\mathrm{J}^2} = \mathrm{A}_1 \simeq \mathrm{A}_1' \widehat{\otimes}_k \mathrm{A}_0$$

[150] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit, et l'on a mis à la fin le « supplément » $\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^n} = \mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{J}^n}$ (qui n'est pas nécessaire pour établir la proposition 5.1).

est surjective, et elle se factorise par $(\mathrm{I_B}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2})\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{A}_0$. Comme $\mathrm{A}_0 = k\cdot 1 \oplus \mathrm{I}_0$, on déduit du diagramme commutatif et exact :

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{I_B}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2})\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{A}_0 \arrow[d] & (\mathrm{I_B}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2})\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{I}_0 \bigoplus (\mathrm{I_B}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2}) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d] \\
\mathrm{J}/\overline{\mathrm{J}^2} \arrow[d] & \mathrm{A}'_1\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{I}_0 \bigoplus \mathrm{A}'_1 \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

que A'_1 est l'image de $\mathrm{I_B}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^2}$, de sorte qu'on a $\mathrm{B}_1 = \mathrm{A}'_1$. Comme $\mathscr{A}'$ est engendrée par A'_1, il en résulte que, pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\mathrm{A}'_n \subset \mathrm{B}_n \subset \widetilde{\mathrm{B}}_n \subset \mathrm{A}'_n,$$

555 d'où $\mathrm{B}_n = \widetilde{\mathrm{B}}_n = \mathrm{A}'_n$. (151)

Enfin, comme le groupe formel G est *infinitésimal*, on a $\mathfrak{r}(\mathrm{A}) = \mathrm{I_A}$ et donc les idéaux $\overline{\mathrm{I}_\mathrm{A}^n}$ tendent vers 0 (cf. 0.1.2) ; a fortiori, les idéaux $\overline{\mathrm{J}^n}$ tendent vers 0, et donc les filtrations induites sur $\widetilde{\mathrm{B}}$ et B sont séparées. De plus, comme B est une sous-algèbre *fermée* de A, elle est complète pour la topologie définie par les idéaux $\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{J}^n}$. Par conséquent, il résulte de [**CA**], § V.7, Lemme 1 (voir aussi 5.1.5 ci-dessous) que $\mathrm{B} = \widetilde{\mathrm{B}}$. Ceci achève la démonstration de la proposition 5.1.

On a de plus le supplément suivant. Pour tout n, $\overline{\mathrm{J}^n} = \overline{\mathrm{AI}_\mathrm{B}^n}$ est l'image dans A de $\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_\mathrm{B}\,\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^n}$ et aussi de $\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_\mathrm{B}(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{J}^n})$. Or, d'après hypothèse, l'algèbre affine A/J du sous-groupe formel H est topologiquement plate sur k. Donc, d'après le théorème 2.4, le morphisme $\mathrm{G} = \mathrm{Spf(A)} \to \mathrm{G/H} = \mathrm{Spf(B)}$ est *surjectif et topologiquement plat* ; on a donc

$$\mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_\mathrm{B}\,\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^n} = \overline{\mathrm{J}^n} = \mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_\mathrm{B}(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{J}^n}),$$

et ceci entraîne que $\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^n} = \mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{J}^n}$ pour tout n. Ceci découle aussi du fait que les applications

$$\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^n}/\overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^{n+1}} \longrightarrow \mathrm{A}'_i = (\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{J}^n})/(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{J}^{n+1}})$$

sont surjectives, et de 5.1.5 (ii) ci-dessous, appliqué à $\mathrm{B}'_n = \overline{\mathrm{I}_\mathrm{B}^n}$ et $\mathrm{B}_n = \mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{J}^n}$.

5.1.5. Lemme. — (152) (i) *Soient* M *et* N *deux groupes abéliens filtrés par des suites décroissantes de sous-groupes* $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *et* $(\mathrm{N}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$*. On suppose que la réunion des* M_n *(resp.* N_n*) égale* M *(resp.* N*), que l'intersection des* M_n *(resp.* N_n*) est nulle, et que* M *est* complet *pour la topologie définie par les* M_n*. Soit* $f : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *un morphisme de groupes filtrés.*

(151) N.D.E. : Avec les notations de la N.D.E. (149), ceci entraîne que le complété formel de G/H le long de la section unité (qui a $\prod_n \mathrm{B}_n$ pour algèbre affine) est isomorphe, comme variété formelle, au k-groupe formel N.

(152) N.D.E. : L'original énonçait uniquement le point (ii) ; pour la commodité du lecteur, on a énoncé en (i) le lemme 1 de [**CA**], § V.7.

a) *Si* f *induit une surjection des gradués associés, alors* f *est une surjection et* N *est complet pour la topologie définie par les* N_n.

b) *Si* f *induit une injection des gradués associés, alors* f *est une injection.*

(ii) *Soient* B *un groupe abélien,* $\mathrm{B} = \mathrm{B}'_0 \supset \mathrm{B}'_1 \supset \cdots$ *et* $\mathrm{B} = \mathrm{B}_0 \supset \mathrm{B}_1 \supset \cdots$ *deux filtrations séparées de* B *par des sous-groupes tels que* $\mathrm{B}'_n \subset \mathrm{B}_n$ *pour tout* n. *On suppose* B complet *pour la topologie définie par la filtration* (B'_n).

Si l'application $\mathrm{B}'_i/\mathrm{B}'_{i+1} \to \mathrm{B}_i/\mathrm{B}_{i+1}$ *est* surjective *pour tout* i, *alors* $\mathrm{B}'_n = \mathrm{B}_n$ *pour tout* n.

En effet, (i) est le lemme 1 de [**CA**], § V.7 (voir aussi [**BAC**], III, § 2.8), et (ii) en découle en prenant $\mathrm{M} = \mathrm{B}'_n \supset \mathrm{B}'_{n+1} \supset \cdots$ et $\mathrm{N} = \mathrm{B}_n \supset \mathrm{B}_{n+1} \supset \cdots$.

5.2. *Dans toute la suite de la Section 5,* k *désigne un corps parfait de caractéristique* $p > 0$.

Nous posons $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si B est une k-algèbre profinie et si $r \in \mathbb{N}$, nous notons $((x^{p^r}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$ l'idéal fermé de B qui est engendré par les éléments x^{p^r}, où x parcourt le radical $\mathfrak{r}(\mathrm{B})$ de B. Si $r = \infty$, nous utilisons la même notation en convenant que $((x^{p^\infty}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$ est l'idéal nul. Dans les deux cas, B_r désigne le quotient $\mathrm{B}/((x^{p^r}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$.

Nous disons que B *est de hauteur* $\leqslant r$ si $((x^{p^r}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$ est l'idéal nul ; si cela a lieu et si r est fini, nous disons que B est *de hauteur finie*.

Considérons en particulier le cas où B est de la forme $k[[\omega]]$, ω étant un k-espace vectoriel pseudocompact (cf. 1.2.5). [153] Nous disons alors que B est une *algèbre de* 556
séries formelles et que B_r est une *algèbre de séries formelles tronquée* ($r \in \overline{\mathbb{N}}$; nous convenons donc de dire que $\mathrm{B} = \mathrm{B}_\infty$ est également « tronquée »). Si $\mathrm{B} = k[[\omega]]$, nous écrivons aussi $((x^{p^r}))_{x\in\omega}$ au lieu de $((x^{p^r}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$.

Notations. — Soit ω un k-espace vectoriel pseudocompact filtré par une suite croissante de sous-espaces vectoriels fermés

$$0 = \omega_0 \subset \omega_1 \subset \omega_2 \subset \omega_3 \subset \cdots$$

(a) L'idéal fermé de $k[[\omega]]$ qui est engendré par les éléments x^{p^r}, où r parcourt $\mathbb{N}$ et x parcourt ω_r, sera noté $((x^{p^r}))_{r\in\omega_r}$.

(b) D'autre part, nous désignerons par ${}_r\omega$ l'espace vectoriel pseudocompact filtré tel que

$${}_r\omega_i = \omega_i \quad \text{si} \quad i < r \quad \text{et} \quad {}_r\omega_i = \omega \quad \text{si} \quad i \geqslant r.$$

Théorème (Dieudonné-Cartier). — *Soit* $\mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un monomorphisme de groupes formels* infinitésimaux *sur un* corps parfait k *de caractéristique* $p > 0$. *Soit* B *l'algèbre affine de l'espace homogène* G/H *et supposons vérifiée l'une des trois conditions suivantes :* [154]

[153] N.D.E. : Dans l'original, l'auteur utilise « espace vectoriel *linéairement compact* », ce qui équivaut à « espace vectoriel pseudocompact » (cf. [**BAC**], § III.2, Exercices 15 a), 19 a) et 20 d)). On a préféré conserver la terminologie « pseudocompact », utilisée jusqu'ici.

[154] N.D.E. : D'une part, on a remplacé H\G par G/H, et de même dans la démonstration ; d'autre part, on a ajouté la condition (iii).

(i) B *est de* hauteur finie (*ceci a lieu en particulier si* G *est de hauteur finie*).

(ii) B *est un anneau local* noethérien complet*.*

(iii) B *est un anneau* réduit*.*

Alors B *est isomorphe au produit tensoriel complété d'une famille finie d'algèbres de séries formelles tronquées.*

557 La démonstration de ce théorème occupe les paragraphes 5.2.1 à 5.2.5.

5.2.1. — Soient A l'algèbre affine de G, I_A son idéal d'augmentation, et $\mathrm{I} = \mathrm{B} \cap \mathrm{I}_\mathrm{A}$. D'après 2.4, on a $\mathrm{H} = \mathrm{Spf}(\mathrm{A}/\overline{\mathrm{AI}})$ et $\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{A} \mid \Delta(x) - 1 \widehat{\otimes} x \in \mathrm{A} \widehat{\otimes} \overline{\mathrm{AI}}\}$. Posons $\omega = \mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$. On désigne par I_r le sous-idéal fermé de I formé des x tels $x^{p^r} = 0$, par ω_r l'image canonique de I_r dans ω. Nous allons démontrer :

Proposition. — *S'il existe une section continue* $\sigma : \omega \to \mathrm{I}$ *de la projection* $\mathrm{I} \to \mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$*, telle que* $\sigma(\omega_r) \subset \mathrm{I}_r$ *pour tout* r*, alors* B *est isomorphe à* $k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x\in\omega_r}$*.*

Une telle section se prolonge en effet en un morphisme continu $k[[\omega]] \to \mathrm{B}$, qui se factorise à travers $\mathrm{B}' = k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x\in\omega_r}$. Nous prouvons de 5.2.2 à 5.2.5 que le morphisme

$$\phi :\ \mathrm{B}' = k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x\in\omega_r} \longrightarrow \mathrm{B}$$

ainsi obtenu est un isomorphisme.

5.2.1.A. — [155] Pour chaque $r \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{I}_r = \overline{\mathrm{I}^2} + \mathrm{I}_r$, de sorte que $\mathcal{I}_r/\overline{\mathrm{I}^2} \simeq \omega_r$; on a alors un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{I}_{r-1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I}_r \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I}_r/\mathcal{I}_{r-1} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \omega_{r-1} \arrow[r] & \omega_r \arrow[r] & \omega_r/\omega_{r-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et puisque k est un corps, les lignes sont scindées : on peut compléter une pseudobase $\mathscr{B}_{r-1}$ de $\mathcal{I}_{r-1}$ en une pseudobase $\mathscr{B}_{r-1} \cup \mathscr{B}'_r$ de $\mathcal{I}_r$, et alors le sous-espace fermé S_r de pseudobase $\mathscr{B}'_r$ est un supplémentaire de $\mathcal{I}_{r-1}$ dans $\mathcal{I}_r$, et la projection $\pi : \mathrm{I} \to \omega$ induit un isomorphisme de S_r sur un supplémentaire ω'_r de ω_{r-1} dans ω_r. Notons $\mathcal{I}_\infty$ l'idéal fermé $\overline{\bigcup_r \mathcal{I}_r}$, il admet de même un supplémentaire S_∞ dans I, et π induit un isomorphisme de $\mathcal{I}_\infty/\overline{\mathrm{I}^2}$ (resp. de S_∞) sur l'adhérence ω_∞ de la réunion des ω_r (resp. sur un supplémentaire ω'_∞ de ω_∞ dans ω). Notons η l'isomorphisme $\mathrm{S}_\infty \xrightarrow{\sim} \omega'_\infty$. On obtient alors des applications linéaires continues :

$$\begin{tikzcd}
\overline{\mathrm{I}^2} \times \mathrm{S}_\infty \times \widehat{\bigoplus}_r \mathrm{S}_r \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\eta"', "\times\theta"] & \mathrm{I} \\
\omega = \omega'_\infty \times \omega_\infty &
\end{tikzcd}$$

[155] N.D.E. : On a ajouté les paragraphes 5.2.1.A et 5.2.1.B.

où $\widehat{\bigoplus}_r \mathrm{S}_r$ est la somme directe des S_r dans $\mathbf{PC}(k)$, i.e. $(\prod_r \mathrm{S}_r^\dagger)^*$ (cf. N.D.E. (16) de 0.2.2) et où $\theta : \widehat{\bigoplus}_r \mathrm{S}_r \to \omega_\infty$ est induite par les applications $\mathrm{S}_r \xrightarrow{\sim} \omega'_r \hookrightarrow \omega_\infty$. On voit donc qu'une condition *suffisante* (mais non nécessaire, voir ci-dessous) pour obtenir une section $\sigma : \omega \to \mathrm{I}$ comme désiré, est que θ soit un *isomorphisme*. Par dualité (cf. 0.2.2), ceci équivaut à dire que l'application linéaire $\omega_\infty^\dagger \to \prod_r \mathrm{S}_r^\dagger$ est *bijective*.

5.2.1.B. — Notons comme précédemment $\omega_\infty = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \omega_n}$. Un second cas où une section $\sigma : \omega \to \mathrm{I}$ comme désiré existe, est le cas où ω_∞ possède une pseudobase $\mathscr{B}_\infty$ qui est réunion de pseudobases des ω_n/ω_{n-1}, pour $n \in \mathbb{N}^*$ (on peut alors la compléter par une pseudobase $\mathscr{B}'_\infty$ de ω/ω_∞ pour obtenir une pseudobase de ω compatible avec la filtration). Posant $\mathrm{V} = \omega_\infty^\dagger$ et notant V_n l'orthogonal dans V de ω_n, ceci équivaut à dire que, dans la catégorie des k-espaces vectoriels « ordinaires », la filtration décroissante séparée

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_0 \supset \mathrm{V}_1 \supset \mathrm{V}_2 \supset \cdots$$

est scindée, i.e. que V est la somme directe, pour $n \in \mathbb{N}$, de sous-espaces F_n tels que $\mathrm{F}_n \simeq \mathrm{V}_n/\mathrm{V}_{n+1}$. Ceci n'est pas nécessairement le cas : par exemple si V est l'espace $\mathscr{S} = k^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de k et $\mathscr{S}_n$ le sous-espace des suites (u_i) telles que $u_i = 0$ pour $i < n$, de sorte que $\dim \mathscr{S}_n/\mathscr{S}_{n+1} = 1$, alors $\mathscr{S}$ n'est pas isomorphe à la somme directe des $\mathscr{S}_n/\mathscr{S}_{n+1}$ puisque $\mathscr{S}$ n'est pas de dimension dénombrable (par contre, $\mathscr{S}$ est ici le *produit* des $\mathscr{S}_n/\mathscr{S}_{n+1}$, cf. 5.2.1.A). C'est cependant le cas si V est de dimension dénombrable. [156] En effet, soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de V, on va construire par récurrence sur n une fonction croissante $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et des sous-espaces F_i, pour $i = 0, \dots, g(n)$, tels que $\mathrm{F}_i \simeq \mathrm{V}_i/\mathrm{V}_{i+1}$ et que $\mathrm{F}_{\leqslant g(n)} = \bigoplus_{i=0}^{g(n)} \mathrm{F}_i$ soit un supplémentaire de $\mathrm{V}_{g(n)+1}$ contenant $e_0, \dots, e_n$; on aura alors $\mathrm{V} = \bigoplus_{i\geqslant 0} \mathrm{F}_i$. Soit $n+1 \in \mathbb{N}$, on peut supposer l'assertion établie pour n (l'assertion étant vide pour $n = -1$). Si $e_{n+1} \in \mathrm{F}_{\leqslant g(n)}$, on pose $g(n+1) = g(n)$, sinon on écrit $e_{n+1} = f + x$ avec $f \in \mathrm{F}_{\leqslant g(n)}$ et $x \in \mathrm{V}_{g(n)+1}$ non nul. Soit alors j le plus petit entier tel que $x \in \mathrm{V}_j - \mathrm{V}_{j+1}$; pour $i = g(n)+1, \dots, j$, choisissons un supplémentaire F_i de V_{i+1} dans V_i, de sorte que $e_{n+1} \in \mathrm{F}_j$, on pose alors $g(n+1) = j$.

5.2.1.C. — [157] En particulier, les deux conditions précédentes (5.2.1.A et B) sont vérifiées quand la filtration de ω est *stationnaire*, i.e. quand il existe un entier n_0 tel que $\omega_n = \omega_{n_0}$ pour $n_0 \leqslant n < +\infty$. Dans ce cas, on obtient un isomorphisme de $k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x\in\omega_r}$ sur le produit tensoriel complété :

$$\frac{k[[\omega_1]]}{((x^p))_{x\in\omega_1}} \mathbin{\widehat{\otimes}} \frac{k[[\omega'_2]]}{((x^{p^2}))_{x\in\omega'_2}} \mathbin{\widehat{\otimes}} \cdots \mathbin{\widehat{\otimes}} \frac{k[[\omega'_{n_0}]]}{((x^{p^{n_0}}))_{x\in\omega'_{n_0}}} \mathbin{\widehat{\otimes}} k[[\omega'_\infty]]$$

où ω'_n (resp. ω'_∞) est un supplémentaire de ω_{n-1} dans ω_n (resp. de $\omega_\infty = \omega_{n_0}$ dans ω). La filtration de ω est évidemment stationnaire dans le cas (i), i.e. si $\omega_r = \omega$ pour r assez grand, et dans le cas (ii), i.e. si ω est de dimension finie, et aussi dans le cas (iii), i.e. si $\mathrm{I}_r = 0$ pour tout r (et dans ce cas B sera isomorphe à l'algèbre de séries

[156] N.D.E. : Ce paragraphe est le fruit de discussions avec J.-M. Fontaine et E. Bouscaren ; en particulier Bouscaren nous a indiqué la démonstration qui suit.

[157] N.D.E. : On revient ici à l'original, qu'on a raccourci en tenant compte des ajouts précédents.

formelles $k[[\omega]]$). Les remarques ci-dessus impliquent donc notre théorème, modulo les points 5.2.2–5.2.5 ci-dessous.

558 ***5.2.2***. — *Supposons d'abord* B *de hauteur* $\leqslant 1$, c.-à-d., que $x^p = 0$ si $x \in \mathrm{I}$. D'après 5.1.4, le gradué $\mathrm{Gr}_{\mathrm{I}}(\mathrm{B})$ associé à B pour la filtration $\mathrm{I} \supset \overline{\mathrm{I}^2} \supset \overline{\mathrm{I}^3} \supset \cdots$ est muni d'une structure de cogroupe dans la catégorie $\mathbf{Alpg}_{/k}$, i.e. l'algèbre profinie $\mathrm{C} = \prod_{n\geqslant 0} \mathrm{Gr}_{\mathrm{I}}(\mathrm{B})_n$ est l'algèbre affine d'un k-groupe formel N. Il est clair qu'on a $\omega_{\mathrm{N}/k} = \mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$ et que N est infinitésimal de hauteur $\leqslant 1$. D'après 4.4, l'application identique de $\omega_{\mathrm{N}/k}$ induit donc un isomorphisme de $\mathrm{B}' = k[[\omega_{\mathrm{N}/k}]]/((x^p))_{x\in\omega_{\mathrm{N}/k}}$ sur C. Ceci implique en particulier que l'application ϕ de 5.2.1 induit un isomorphisme des gradués associés à B' et B lorsqu'on filtre B' et B par les puissances de l'idéal d'augmentation. Donc ϕ est un isomorphisme, d'après [**CA**], § V.7, Lemme 1 (voir aussi 5.1.5).

5.2.3. — *Supposons maintenant* B *de hauteur finie* $\leqslant r$. Soit π l'isomorphisme $x \mapsto x^p$ de k sur k. L'application linéaire de $\mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi k$ dans B qui envoie $b \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi x$ sur $b^p x = (bx^{1/p})^p$ a une image fermée qui n'est autre que la sous-algèbre fermée $\mathrm{B}^p = \{b^p \mid b \in \mathrm{B}\}$ de B. Posons $\mathrm{J} = \mathrm{B}^p \cap \mathrm{I} = \mathrm{B}^p \cap \mathrm{I}_{\mathrm{A}}$.

(158) Notons G_1 le noyau du morphisme de Frobenius $\mathrm{Fr} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}^{(p)}$ et HG_1 le sous-groupe formel de G image réciproque du sous-groupe formel $\mathrm{H}^{(p)}$ de $\mathrm{G}^{(p)}$. Alors HG_1 est défini par l'idéal fermé engendré par les puissances p-ièmes d'éléments de $\overline{\mathrm{AI}}$, qui égale $\overline{\mathrm{AJ}}$. D'autre part, comme la formation de G/H commute au changement de base (puisque G/H représente le *faisceau-quotient* pour la topologie plate, cf. 2.4), alors $(\mathrm{G}/\mathrm{H})^{(p)} = \mathrm{G}^{(p)}/\mathrm{H}^{(p)}$ et l'on a donc des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "\mathrm{Fr}"] \arrow[d] & \mathrm{G}^{(p)} \arrow[d] \\ \mathrm{G}/\mathrm{H} \arrow[r, "\mathrm{Fr}"] & \mathrm{G}^{(p)}/\mathrm{H}^{(p)} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{A} & \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi k \arrow[l, "a \widehat{\otimes} 1 \mapsto a^p"'] \\ \mathrm{B} \arrow[u] & \mathrm{B} \mathbin{\widehat{\otimes}}_\pi k \arrow[l, "b \widehat{\otimes} 1 \mapsto b^p"'] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

dont on déduit que B^p est l'algèbre affine du quotient G/HG_1. (159) Notons provisoirement C l'algèbre affine du quotient HG_1/H. Comme la formation de G/H commute au changement de base, on a un carré cartésien :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{HG}_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{G} \arrow[d] \\ \mathrm{HG}_1/\mathrm{H} \arrow[r] & \mathrm{G}/\mathrm{H} \end{tikzcd}$$

d'où un isomorphisme $\mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} \mathrm{C} \simeq \mathrm{A}/\overline{\mathrm{AJ}} = \mathrm{A} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathrm{B}} (\mathrm{B}/\overline{\mathrm{BJ}})$, et comme A est topologiquement libre sur B (d'après 2.4, puisque A et B sont locales), il en résulte que le

(158) N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

morphisme naturel $\mathrm{B}/\overline{\mathrm{BJ}} \to \mathrm{C}$ est un isomorphisme, donc $\mathrm{B}/\overline{\mathrm{BJ}}$ est l'algèbre affine de HG_1/H [159] et bien sûr $\mathrm{B}/\overline{\mathrm{BJ}} = \mathrm{B}_1$ est de hauteur $\leqslant 1$ puisque $\mathrm{J} = ((x^p))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$.

Soient $\mathrm{B}' = k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x\in\omega_r}$, $\phi : \mathrm{B}' \to \mathrm{B}$ le morphisme introduit en 5.2.1, B'^p la sous-algèbre $\{x^p \mid x \in \mathrm{B}'\}$, et J' l'idéal d'augmentation de B'^p. Alors, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}' \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathrm{B} \arrow[d] \\
\mathrm{B}'_1 = \mathrm{B}'/\overline{\mathrm{B}'\mathrm{J}'} \arrow[r, "\phi_1"] & \mathrm{B}_1 = \mathrm{B}/\overline{\mathrm{BJ}}
\end{tikzcd}$$

et, d'après 5.2.2, ϕ_1 est un isomorphisme. 559

D'autre part, d'après 2.4, A est topologiquement plat sur $\mathrm{B} = \mathscr{A}(\mathrm{G}/\mathrm{H})$ et sur $\mathrm{B}^p = \mathscr{A}(\mathrm{G}/\mathrm{HG}_1)$ donc, d'après 1.3.3, B est topologiquement plat sur B^p. De plus, d'après 5.2.4 ci-dessous, le morphisme $\mathrm{B}'^p \to \mathrm{B}^p$ induit par ϕ est un isomorphisme. On peut alors appliquer 0.3.4 à l'anneau pseudocompact $\mathrm{B}'^p = \mathrm{B}^p$ et aux B^p-modules pseudocompacts $\mathrm{M} = \mathrm{B}'$, $\mathrm{N} = \mathrm{B}$: d'après ce qui précède, $\phi_1 = \phi\,\widehat{\otimes}_{\mathrm{B}^p}\, k$ est un isomorphisme, et il en résulte que ϕ est un isomorphisme. Ceci prouve 5.2 lorsque B est de hauteur finie, modulo le point 5.2.4 ci-dessous.

5.2.4. — Pour tout espace vectoriel pseudocompact V sur k, nous notons ${}_\pi\mathrm{V}$ l'espace $\mathrm{V}\,\widehat{\otimes}_\pi\, k$ déduit de V par l'extension $x \mapsto x^p$ du corps des scalaires. [160] On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & {}_\pi\overline{\mathrm{I}^2} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "u"'] & {}_\pi\mathrm{I} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "v"'] & {}_\pi\omega \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \overline{\mathrm{J}^2} \arrow[r, "\gamma"] & \mathrm{J} \arrow[r, "\delta"] & \overline{\omega} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} ,$$

où l'on a posé $\overline{\omega} = \mathrm{J}/\overline{\mathrm{J}^2}$ et où les applications u, v, w sont induites par l'application linéaire $x\,\widehat{\otimes}\,a \mapsto x^p a$ de ${}_\pi\mathrm{B}$ dans B^p. Comme u et v sont des surjections, w est une surjection et a pour noyau l'image ${}_\pi\omega_1$ de ${}_\pi\mathrm{I}_1 = \mathrm{Ker}(v)$.

Alors, posant $\mathrm{J}_n = \{x \in \mathrm{J} \mid x^{p^n} = 0\}$ et $\overline{\omega}_n = \delta(\mathrm{I}_n)$, on a $\mathrm{J}_n = v({}_\pi\mathrm{I}_{n+1})$ et $\overline{\omega}_n = w({}_\pi\omega_{n+1})$, pour tout $n \geqslant 0$. La section ${}_\pi\sigma : {}_\pi\omega \to {}_\pi\mathrm{I}$, qui est induite par la section σ de 5.2.1, définit donc par passage au quotient une section $\tau : \overline{\omega} \to \mathrm{J}$ qui est compatible avec les filtrations de J et $\overline{\omega}$. Comme B^p est de hauteur $\leqslant r-1$, cette section induit, par hypothèse de récurrence, un isomorphisme

$$\psi : \quad \mathrm{B}'' = k[[\overline{\omega}]]/((x^{p^n}))_{x\in\overline{\omega}_n} \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}^p.$$

Or B'' s'identifie à B'^p et ψ au morphisme $\mathrm{B}'^p \to \mathrm{B}^p$ induit par ϕ, et donc *notre* 560

[159] N.D.E. : Comme indiqué dans l'original, ceci se déduit aussi de la proposition 5.1, mais on a préféré indiquer l'argument ci-dessus, qui n'utilise pas l'implication (i) ⇒ (ii) de *loc. cit.*.

[160] N.D.E. : Comme k est parfait, on peut identifier ${}_\pi\mathrm{V}$ au groupe abélien V sur lequel k agit par $\lambda \cdot v = \lambda^{1/p}\, v$.

théorème est démontré quand B *est de hauteur finie.*

Remarque 5.2.4.A. — [161] Supposons B de hauteur $\leqslant r+1$ (avec $r \in \mathbb{N}^*$), alors $\mathrm{I}_{r+1} = \mathrm{I}$ et l'on a un isomorphisme

$$\mathrm{B} \simeq \frac{k[[\mathrm{S}_1]]}{((x_1^{p}))_{x_1\in \mathrm{S}_1}} \widehat{\otimes}_k \cdots \widehat{\otimes}_k \frac{k[[\mathrm{S}_r]]}{((x_r^{p^r}))_{x_r\in \mathrm{S}_r}} \widehat{\otimes}_k \frac{k[[\mathrm{S}_{r+1}]]}{((x_{r+1}^{p^{r+1}}))_{x_{r+1}\in \mathrm{S}_{r+1}}} \tag{1}$$

où chaque S_n est un supplémentaire de $\overline{\mathrm{I}^2}+\mathrm{I}_{n-1}$ dans $\overline{\mathrm{I}^2}+\mathrm{I}_n$. Alors $\omega = \mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$ s'identifie à $\prod_{i=1}^{r+1}\mathrm{S}_i$, et l'on voit facilement que, pour $n=1,\dots,r+1$, l'image ω_n de I_n dans ω s'identifie à $\prod_{i=1}^{n}\mathrm{S}_i$.

Ceci a la conséquence suivante. Soit $\mathrm{B}_r = \mathrm{B}/\mathrm{J}_r$, où $\mathrm{J}_r = ((x^{p^r}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$, et soit $\mathfrak{m} = \mathrm{I}/\mathrm{J}_r$ l'idéal d'augmentation de B_r ; comme $\mathrm{J}_r \subset \overline{\mathrm{I}^2}$, alors $\omega(r) = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ s'identifie à ω. Pour $n=1,\dots,r$, notons $\omega(r)_n$ l'image dans $\omega(r)$ de $\mathfrak{m}_n$; c'est aussi l'image dans ω de $\{x\in \mathrm{I} \mid x^{p^n}\in \mathrm{J}_r\}$, donc $\omega(r)_n$ contient ω_n. D'autre part, il résulte de l'isomorphisme (1) que l'on a $\mathrm{J}_r = ((x_{r+1}^{p^r}))_{x_{r+1}\in\mathrm{S}_{r+1}}$, d'où

$$\mathrm{B}_r \simeq \frac{k[[\mathrm{S}_1]]}{((x_1^{p}))_{x_1\in \mathrm{S}_1}} \widehat{\otimes}_k \cdots \widehat{\otimes}_k \frac{k[[\mathrm{S}_r]]}{((x_r^{p^r}))_{x_r\in \mathrm{S}_r}} \widehat{\otimes}_k \frac{k[[\mathrm{S}_{r+1}]]}{((x_{r+1}^{p^{r}}))_{x_{r+1}\in \mathrm{S}_{r+1}}} \tag{2}$$

et donc, d'après ce qui précède, $\omega(r)_n$ s'identifie à $\prod_{i=1}^{n}\mathrm{S}_i$ pour $n=1,\dots,r-1$. On obtient donc que l'inclusion $\omega_n\subset\omega(r)_n$ est une *égalité*, pour $n=1,\dots,r-1$.

5.2.5. — *Il reste à considérer le cas où* B *est de hauteur infinie*, et où la projection $\mathrm{I}\to\omega$ possède une section σ compatible avec les filtrations de ω et I. Considérons le morphisme

$$\phi:\quad \mathrm{B}' = k[[\omega]]/((x^{p^n}))_{x\in\omega_n} \longrightarrow \mathrm{B}$$

induit par σ ; il suffit de montrer que pour tout $r\in\mathbb{N}$, l'application $\phi_r : \mathrm{B}'_r\to\mathrm{B}_r$ induite par ϕ est inversible. [162]

Pour tout $r\in\mathbb{N}^*$, notons G_r le noyau du morphisme de Frobenius itéré $\mathrm{G}\to\mathrm{G}^{(p^r)}$ et HG_r le sous-groupe formel de G image réciproque du sous-groupe formel $\mathrm{H}^{(p^r)}$ de $\mathrm{G}^{(p^r)}$, de sorte que HG_r est défini par l'idéal fermé engendré par les puissances p^r-ièmes d'éléments de $\overline{\mathrm{AI}}$, qui égale $\overline{\mathrm{AJ}_r}$, où $\mathrm{J}_r = \{x^{p^r}\mid x\in\mathrm{I}\}$. On obtient alors, exactement comme en 5.2.3, que $\mathrm{B}_r = \mathrm{B}/\overline{\mathrm{BJ}_r}$ est l'algèbre affine de HG_r/H (et est bien sûr de hauteur $\leqslant r$).

Notons $\mathfrak{m}(r) = \mathrm{I}/\overline{\mathrm{BJ}_r}$ l'idéal d'augmentation de B_r ; la projection canonique de B sur B_r induit évidemment un isomorphisme de $\omega=\mathrm{I}/\overline{\mathrm{I}^2}$ sur $\omega(r)=\mathfrak{m}(r)/\overline{\mathfrak{m}(r)^2}$, qui nous permet d'identifier ces deux espaces. Soit $\omega(r)_n$ l'image dans $\omega(r)$ de l'idéal fermé $\mathfrak{m}(r)_n = \{y\in\mathfrak{m}(r)\mid y^{p^n}=0\}$; c'est aussi l'image dans ω de l'idéal fermé

[161] N.D.E. : On a ajouté cette remarque, utilisée en 5.2.5.

[162] N.D.E. : En effet, B′ (resp. B) est la limite projective des B'_r (resp. B_r). D'autre part, on a modifié l'original dans ce qui suit, en tenant compte de l'ajout fait dans 5.2.3.

$\mathrm{I}(r)_n = \{x \in \mathrm{I} \mid x^{p^n} \in \overline{\mathrm{BJ}_r}\}$. [163] Il est clair que $\omega_n(r) = \omega$ si $n \geqslant r$; montrons que $\omega_n(r) = \omega_n$ si $n < r$. Pour tout r, n, la suite ci-dessous est exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{I}(r)_n \cap \overline{\mathrm{I}^2} \longrightarrow \mathrm{I}(r)_n \longrightarrow \omega(r)_n \longrightarrow 0.$$

De plus, pour n fixé, on a $\bigcap_r \mathrm{I}(r)_n = \mathrm{I}_n$, puisque $\bigcap_r \overline{\mathrm{BJ}_r} = 0$. Comme dans $\mathbf{PC}(k)$ les limites projectives filtrantes sont exactes (cf. 0.2), il en résulte que, pour tout n, on a

$$(*) \qquad \omega_n = \bigcap_r \omega(r)_n.$$

D'autre part, d'après la remarque 5.2.4.A, on a $\omega(r)_n = \omega(r+1)_n$ si $n < r$. Combiné avec $(*)$, ceci entraîne que $\omega(r)_n = \omega_n$ si $n < r$.

Par conséquent, l'espace vectoriel ω filtré par les sous-espaces $(\omega(r)_n)_{n\geqslant 0}$ n'est au- **561**
tre que ${}_r\omega$ (Notations 5.2). A fortiori, l'application $\sigma(r)$ composée de $\sigma : \omega \to \mathrm{I}$ et de la projection $\mathrm{I} \to \mathfrak{m}(r)$ est compatible avec les filtrations $(\omega(r)_n)$ et $(\mathfrak{m}(r)_n)$ de ω et $\mathfrak{m}(r)$. Comme $k[[{}_r\omega]]/((x^{p^n}))_{x\in {}_r\omega_n}$ n'est autre que B'_r et que $\phi_r : \mathrm{B}'_r \to \mathrm{B}_r$ est le morphisme induit par $\sigma(r)$, le résultat déja établi pour les algèbres de hauteur finie montre que ϕ_r est un isomorphisme.

5.2.6. Définition. — [164] Soit $(\mathrm{A}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de k-algèbres profinies, chacune munie d'une augmentation $\varepsilon_\lambda : \mathrm{A}_\lambda \to k$ (c'est le cas, en particulier, si chaque A_λ est locale de corps résiduel k). On définit alors le produit tensoriel complété infini $\mathscr{A} = \widehat{\bigotimes}_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{A}_\lambda$ comme la limite projective dans $\mathbf{Alp}_{/k}$ des $\mathrm{A}_\mathrm{F} = \widehat{\bigotimes}_{\lambda\in\mathrm{F}}\mathrm{A}_\lambda$, pour F parcourant les partie finies de Λ, les morphismes de transition $\mathrm{A}_{\mathrm{F}'} \to \mathrm{A}_\mathrm{F}$, pour $\mathrm{F}' = \mathrm{F}\cup\{\lambda\}$, étant $\mathrm{id}\,\widehat{\otimes}\,\varepsilon_\lambda$. En particulier, si $\Lambda = \mathbb{N}^*$ et si l'on note X_n la k-variété formelle $\mathrm{Spf}(\mathrm{A}_n)$, alors $\mathrm{Spf}(\mathscr{A})$ représente le foncteur qui à tout $\mathrm{C} \in \mathbf{Alf}_{/k}$ associe l'ensemble des suites « finies » d'éléments de $\prod_{n\geqslant 1}\mathrm{X}_n(\mathrm{C})$, i.e. des suites

$$(x_1, x_2, \ldots) \in \prod_{n\geqslant 1}\mathrm{X}_n(\mathrm{C})$$

telles que $x_n = \varepsilon_n$ pour n assez grand, où ε_n désigne par abus de notation la composée de $\varepsilon_n : \mathrm{A}_n \to k$ et du morphisme structural $k \to \mathrm{C}$. (Si de plus chaque A_n est un quotient d'une algèbre $k[[\omega'_n]]$, on peut noter 0 l'unique morphisme $\mathrm{A}_n \to \mathrm{C}$ qui s'annule sur ω'_n, et l'on obtient donc l'ensemble des suites telles que « $x_n = 0$ » pour n assez grand.)

5.3. Remarques. — (a) Appelons stationnaire toute k-algèbre profinie qui est le produit tensoriel complété d'une famille d'algèbres de séries formelles tronquées. [165]

---

[163] N.D.E. : On a détaillé l'original dans ce qui suit.

[164] N.D.E. : On a ajouté cet numéro, afin de définir les produits tensoriels infinis utilisés en 5.3 (a).

[165] N.D.E. : L'auteur pensait sans doute à un produit tensoriel $\mathrm{A} = \widehat{\bigotimes}_{n\in\mathbb{N}^*} k[[\omega'_n]]/((x^{p^n}))_{x\in\omega'_n}$, où les ω'_n sont des k-espaces vectoriels pseudocompacts arbitraires. Dans ce cas, on voit sans difficultés que $\omega = \omega_{\mathrm{A}/k}$ s'identifie au *produit* des ω'_n, et la filtration $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donnée par $\omega_n = \prod_{i=1}^n \omega'_i$, i.e. on est dans le cas 5.2.1.B. Pour cette raison, il serait préférable de nommer ces algèbres *stables* (plutôt que « stationnaires »), cf. [**Di73**], II § 2.9, p.75. Si par exemple $\dim\omega'_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors A représente le foncteur qui à tout $\mathrm{C} \in \mathbf{Alf}_{/k}$ associe l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Si G est un k-groupe formel infinitésimal et B l'algèbre affine d'un espace homogène de G, il résulte du théorème 5.2 que l'algèbre $\mathrm{B}/((x^{p^r}))_{x\in\mathfrak{r}(\mathrm{B})}$ est stationnaire pour tout entier $r \in \mathbb{N}$. Cela implique en particulier que B est une limite projective d'algèbres stationnaires. [166]

(b) Je ne sais pas si, avec les notations de 5.2.1, on peut choisir A et B de telle façon qu'il n'existe pas de section $\sigma : \omega \to \mathrm{I}$ compatible avec les filtrations. [167] On remarquera cependant qu'on peut avoir pour ω n'importe quel espace vectoriel pseudocompact filtré par une suite croissante de sous-espaces fermés. En effet, si $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \cdots \subset \omega$ est un tel espace filtré, on peut définir dans l'algèbre $\mathrm{B} = \mathrm{A} = k[[\omega]]/((x^{p^r}))_{x\in\omega_r}$ un morphisme diagonal $\Delta_{\mathrm{A}} : \mathrm{A} \to \mathrm{A}\,\widehat{\otimes}_k\,\mathrm{A}$ vérifiant les conditions (i), (ii), (iii) de 2.1 ; il suffit de poser $\Delta_{\mathrm{A}}(y) = y\,\widehat{\otimes}\,1 + 1\,\widehat{\otimes}\,y$ lorsque y est l'image dans A d'un élément de ω.

562 ***5.4. Corollaire***. — *Soient* G *un groupe algébrique sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$,* H *un sous-groupe algébrique de* G, *e l'image de l'élément neutre de* G *dans* G/H *et* A *l'algèbre locale de* G/H *en e. Alors $\widehat{\mathrm{A}}$ est isomorphe à une algèbre de la forme*

$$k[[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r, \ldots \mathrm{X}_s]]/(\mathrm{X}_1^{p^{n_1}}, \ldots, \mathrm{X}_r^{p^{n_r}}).$$

En effet, considérons les groupes formels infinitésimaux $\widehat{\mathrm{G}} = \mathrm{Spf}(\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{G},e})$ et $\widehat{\mathrm{H}} = \mathrm{Spf}(\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{H},e})$; d'après 1.3.4, le complété $\widehat{\mathrm{A}}$ de $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{G/H},e}$ est isomorphe à $\mathscr{A}(\widehat{\mathrm{G}}/\widehat{\mathrm{H}})$, et le corollaire découle donc du théorème 5.2 (ii). [168]

5.5. Compléments. — [169] Rappelons les définitions suivantes. D'une part, on dit qu'un anneau local noethérien A est *intersection complète* si le complété $\widehat{\mathrm{A}}$ est quotient d'un anneau local noethérien complet *régulier* B par un idéal I engendré par une suite régulière d'éléments de B (cf. EGA IV_4, 19.3.1). D'autre part, soit $\tau : \mathrm{Y} \hookrightarrow \mathrm{X}$ une immersion fermée de schémas. Si $y \in \mathrm{Y}$, on dit que τ est une *immersion régulière au point y* si le noyau de $\mathscr{O}_{\mathrm{X},y} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Y},y}$ est engendré par une suite régulière ; si de plus X est localement noethérien et si τ est une immersion régulière en tout point, on dit que τ est une immersion régulière (cf. *loc. cit.*, Prop. 16.9.10 et Déf. 16.9.2).

---

d'éléments de C tels que $x_n^{p^n} = 0$, et $x_n = 0$ pour n assez grand. Notons enfin que ce cas (i.e. le cas où $\omega = \prod_{n\in\mathbb{N}^*}\omega'_n$) correspond au cas étudié, dans la situation duale des algèbres de Hopf cocommutatives connexes, par M. E. Sweedler, cf. [**Sw67**], Th. 3.

(166) N.D.E. : Mais une telle limite projective n'est pas nécessairement une k-algèbre profinie *stable* (au sens de la N.D.E. précédente). Par exemple, soit $\mathscr{S}$ le k-espace vectoriel « ordinaire » des suites $(u_1, u_2, \ldots)$ d'éléments de k et soit $\omega = \mathscr{S}^*$, alors ω est la somme directe dans $\mathbf{PC}(k)$ de copies k_n de k, pour $n \in \mathbb{N}^*$, i.e. on est dans le cas 5.2.1.A. Si l'on note x_n l'élément de ω défini par $x_n(\mathbf{u}) = u_n$, pour toute suite $\mathbf{u} = (u_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, alors la k-algèbre $\mathrm{A} = k[[\omega]]/((x_n^{p^n}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est telle que $\omega_{\mathrm{A}/k} = \omega$ et $\omega_n = \prod_{i=1}^n kx_i$, mais n'est pas stable : Spf(A) représente le foncteur qui à tout $\mathrm{C} \in \mathbf{Alf}_{/k}$ associe l'ensemble des suites « infinies » $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de C tels que $x_n^{p^n} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(167) N.D.E. : Les éditeurs ne le savent pas non plus, en dehors des cas considérés en 5.2.1.A et B.

(168) N.D.E. : Voir aussi [**DG70**], § III.3, Th. 6.1.

(169) N.D.E. : On a ajouté cette sous-section, pour donner quelques conséquences de 5.4, mentionnées dans les exposés III et $\mathrm{VI_A}$.

Corollaire 5.5.1. — *Si* G *est un groupe algébrique sur un corps k, l'anneau local* $\mathscr{O}_{\mathrm{G},e}$ *est* intersection complète.

En effet, d'après EGA IV_4, 19.3.4, on peut supposer k algébriquement clos. Si $\mathrm{car}(k) = 0$, on sait déjà que G est lisse (cf. 3.3.1 ou $\mathrm{VI_B}$, 1.6.1) et donc $\mathscr{O}_{\mathrm{G},e}$ est une k-algèbre de séries formelles, d'après EGA IV_4, 17.5.3 (d″). Si $\mathrm{car}(k) = p > 0$, il résulte de 5.4, appliqué à $\mathrm{H} = \{e\}$, que $\mathscr{O}_{\mathrm{G},e}$ est intersection complète.

Remarques 5.5.2. — Soient k un corps, G un k-groupe algébrique *lisse*, et H un sous-groupe fermé de G.

a) On a vu dans l'Exp. III, 4.15, que l'immersion $\mathrm{H} \hookrightarrow \mathrm{G}$ est régulière ; ceci peut aussi se déduire de 5.4, comme suit. Comme dans *loc. cit.*, on peut supposer k algébriquement clos, et il suffit de montrer que le noyau I de $\mathscr{O}_{\mathrm{G},e} \to \mathscr{O}_{\mathrm{H},e}$ est engendré par une suite régulière. Posons $\mathrm{A} = \mathscr{O}_{\mathrm{G},e}$, $\widehat{\mathrm{G}} = \mathrm{Spf}(\widehat{\mathrm{A}})$ et $\widehat{\mathrm{H}} = \mathrm{Spf}(\widehat{\mathscr{O}}_{\mathrm{H},e})$. Comme A est noethérien, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{I} \otimes_{\mathrm{A}} \widehat{\mathrm{A}} \longrightarrow \widehat{\mathrm{A}} \xrightarrow{\ \pi\ } \mathscr{A}(\mathrm{H}) \to 0$$

et $\widehat{\mathrm{A}}$ est fidèlement plat sur A. Donc, d'après EGA IV_4, 16.9.10 (ii) et 19.1.5 (ii), il suffit de montrer que le noyau $\widehat{\mathrm{I}} = \mathrm{I} \otimes_{\mathrm{A}} \widehat{\mathrm{A}}$ de π est engendré par une suite régulière d'éléments de $\widehat{\mathrm{A}}$.

Or, comme G est lisse, $\widehat{\mathrm{A}}$ est réduit ; d'après 5.4, la sous-algèbre $\mathrm{B} = \mathscr{A}(\widehat{\mathrm{G}}/\widehat{\mathrm{H}})$ est donc isomorphe à une algèbre de séries formelles $k[[x_1, \dots, x_n]]$, et donc la section unité de $\widehat{\mathrm{G}}/\widehat{\mathrm{H}}$ est définie dans B par la suite régulière $(x_1, \dots, x_n)$. Comme $\widehat{\mathrm{A}}$ est noethérien, l'idéal J de $\widehat{\mathrm{A}}$ engendré par $x_1, \dots, x_n$ est fermé donc égal à $\widehat{\mathrm{I}}$, d'après le corollaire 1.4. De plus, comme $\widehat{\mathrm{A}}$ est topologiquement plat, donc plat sur B (cf. 0.3.8), alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une suite régulière dans $\widehat{\mathrm{A}}$, d'après EGA IV_4, 19.1.5 (ii).

b) On peut aussi déduire de 5.2 (ii) le résultat plus précis suivant. Supposons k parfait. D'après 5.2 (ii) appliqué à l'algèbre $\mathrm{C} = \mathscr{A}(\mathrm{H})$, il existe une base $(y_1, \dots, y_{r+s})$ de ω_{H} et des entiers $1 \leqslant n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_r$ tels que $\mathscr{A}(\mathrm{H})$ soit isomorphe au quotient de $k[[y_1, \dots, y_{r+s}]]$ par l'idéal engendré par les $y_i^{p^{n_i}}$ pour $i = 1, \dots, r$. Relevons les y_i en des éléments x_i de ω_{G} et complétons $(x_1, \dots, x_{r+s})$ en une base $(x_1, \dots, x_n)$ de ω_{G}. Puisque $\mathscr{A}(\mathrm{G})$ est réduit, le morphisme $k[[x_1, \dots, x_n]] \to \mathscr{A}(\mathrm{G})$ est un isomorphisme, d'après 5.2 (iii). On obtient donc : *il existe un « système de coordonnées »* $(x_1, \dots, x_n)$ *de* G (i.e. un isomorphisme $\mathscr{A}(\mathrm{G}) \simeq k[[x_1, \dots, x_n]]$) *tel que* H *soit défini par les équations* $x_i^{p^{n_i}} = 0$ *pour* $i = 1, \dots, r$ *et* $x_i = 0$ *pour* $i > r + s$ (« théorème de Dieudonné », comparer avec [**Di55**], § 19, Th. 6 et [**Di73**], II § 3.2, Prop. 3 et ce qui la précède).

Bibliographie

[CA] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323-448. [170]

[170] N.D.E. : On a ajouté à cette référence, figurant dans l'original, les références qui suivent.

[Ab80] E. Abe, *Hopf algebras*, Cambridge Univ. Press, 1980.

[Br00] C. Breuil, *Groupes p-divisibles, groupes finis et modules filtrés*, Ann. of Math. **152** (2000), n°2, 489-549.

[BAlg] N. Bourbaki, *Algèbre*, Chap. I-III et IV-VII, Hermann, 1970, et Masson, 1981.

[BAC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chap. I-IV, Masson, 1985.

[BEns] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles*, Chap. I-IV, Hermann, 1970.

[BLie] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. II-III, Hermann, 1970.

[Ca62] P. Cartier, *Groupes algébriques et groupes formels*, pp. 87–111 *in :* Colloque sur la théorie des groupes algébriques (Bruxelles, 1962), Gauthier-Villars, 1962.

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[De72] M. Demazure, *Lectures on p-divisible groups*, Lect. Notes Math. **302**, Springer-Verlag, 1972.

[Di55] J. Dieudonné, *Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique* $p > 0$, Comm. Math. Helv. **28** (1955), 87-118.

[Di73] J. Dieudonné, *Introduction to the theory of formal groups*, Marcel Dekker, 1973.

[Fo77] J.-M. Fontaine, *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*, Astérisque **47-48**, Soc. Math. France, 1977.

[Gr57] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math. J. **9** (1957), 119-221.

[Gr74] A. Grothendieck, *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné*, Presses Univ. Montréal, 1974.

[HS69] R. G. Heyneman, M. E. Sweedler, *Affine Hopf Algebras* I, J. Algebra **13** (1969), 194-241.

[Il85] L. Illusie, *Déformations de groupes de Barsotti-Tate, d'après A. Grothendieck*, pp. 151-198 *in* : Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, Astérisque **127**, Soc. Math. France, 1985.

[Ja65] I. M. James, analyse de [**MM65**] dans Math. Reviews, MR0174052.

[La75] M. Lazard, *Commutative formal groups*, Lect. Notes Math. **443**, Springer-Verlag, 1975.

[LT65] J. Lubin, J. Tate, *Formal complex multiplication in local fields*, Ann. of Math. **81** (1965), 380-387.

[LT66] J. Lubin, J. Tate, *Formal moduli for one-parameter formal Lie groups*, Bull. Soc. Math. France **94** (1966), 49-60.

[Ma91] A. Masuoka, *On Hopf algebras with cocommutative coradicals*, J. Algebra **144** (1991), 451-466.

[Me72] W. Messing, *The crystals associated with Barsotti-Tate Groups : with applications to abelian schemes*, Lect. Notes Math. **264**, Springer-Verlag, 1972.

[MM65] J. W. Milnor, J.. C. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. **81** (1965), 211-264.

[Mi65] B. Mitchell, *Theory of categories*, Academic Press, 1965.

[Ne75] K. Newman, *A correspondence between bi-ideals and sub-Hopf algebras in cocommutative Hopf algebras*, J. Algebra **36** (1975), 1-15.

[Po73] N. Popescu, *Abelian categories with applications to rings and modules*, Academic Press, 1973.

[Sch90] H. J. Schneider, *Principal homogeneous spaces for arbitrary Hopf algebras*, Israel J. Math. **72** (1990), n^{os} 1-2, 167-195.

[Sw67] M. Sweedler, *Hopf algebras with one grouplike element*, Trans. Amer. Math. Soc. **127** (1967), n°3, 515-526.

[Sw69] M. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin, 1969.

[Tak72] M. Takeuchi, *A correspondence between Hopf ideals and sub-Hopf algebras*, Manuscripta Math. **7** (1972), 251-270.

[Tak79] M. Takeuchi, *Relative Hopf modules–Equivalence and freeness criteria*, J. Algebra **60** (1979), 452-471.

[Ta67] J. Tate, *p-divisible groups*, pp. 158-183 *in* : Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966) (éd. T. A. Springer), Springer-Verlag, 1967.

[We95] C. A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Univ. Press, 1995.