

EXPOSÉ XIV

ÉLÉMENTS RÉGULIERS : SUITE, APPLICATION AUX GROUPES ALGÈBRIQUES

par A. GROTHENDIECK
avec un Appendice par J.-P. SERRE

1. Construction de sous-groupes de Cartan et de tores maximaux pour un groupe algébrique lisse

296

Théorème 1.1. — Soit G un groupe algébrique lisse sur un corps k . Alors G admet un tore maximal T , donc un sous-groupe de Cartan $C = \text{Centr}_G(T)$.

En vertu de XII 3.2, il revient au même de trouver un tore maximal T de G , ou un sous-groupe de Cartan C de G . D'ailleurs, comme les tores maximaux de G sont ceux de G^0 , on peut supposer G connexe. Nous distinguons deux cas :

1°) Le corps k est fini. Soit \mathcal{T} le schéma des tores maximaux de G (Exp XII 1.10.), qui est un schéma lisse sur k . Notons que G opère sur \mathcal{T} via automorphismes intérieurs, et en vertu du théorème de conjugaison (XII 6.6 a)), deux points de $\mathcal{T}_{\bar{k}}$ rationnels sur \bar{k} sont congrus sous $G_{\bar{k}}(\bar{k})$. Compte tenu que \mathcal{T} est lisse sur k donc $\mathcal{T}_{\bar{k}}$ lisse sur \bar{k} , il s'ensuit que $\mathcal{T}_{\bar{k}}$ est isomorphe à $G_{\bar{k}}/\bar{N}$, où \bar{N} est le stabilisateur d'un élément de $\mathcal{T}_{\bar{k}}(\bar{k})$ i.e. le normalisateur d'un tore maximal \bar{T} de $G_{\bar{k}}$. Par suite, \mathcal{T} est un « espace homogène » sous l'action du groupe G . Un théorème bien connu de Lang (Amer. J. Math. 78, 1956, pp. 555-563) nous dit que tout espace homogène sous un groupe algébrique lisse connexe sur un corps fini k admet un point rationnel. En particulier, \mathcal{T} admet un point rationnel, i.e. G admet un tore maximal T . C.Q.F.D.

2°) Le corps k est infini. Nous utiliserons le

297

Lemme 1.2. — Soit G un groupe algébrique lisse sur un corps k . Alors G admet un sous-groupe de type (C) (XIII 6.2).

En vertu de XIII 6.3 il revient au même de dire que \mathfrak{g} contient une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{d} . C'est trivial si k est infini, car alors \mathfrak{g} contient un élément régulier a , et on prendra $\mathfrak{d} = \text{Nil}(a, \mathfrak{g})$. Le cas k fini se traite exactement comme dans la démonstration 1°) ci-dessus, mais nécessite la construction préalable du schéma \mathfrak{d} des sous-algèbres de Cartan de \mathfrak{g} et le fait que ce dernier est lisse sur k , qui seront vus ci-dessous (2.16).

⁽⁰⁾version xy du 1/12/08

Pour établir 1.1 dans le cas 2°) où nous nous sommes placés, il nous suffira de toutes façons de connaître 1.2 pour k infini. Signalons aussi pour mémoire :

Lemme 1.3. — *Soit G un groupe algébrique lisse, connexe, affine, dont le centre réductif (XII 4.1 et 4.4) est réduit au groupe unité. Alors G est nilpotent si (et seulement si) son algèbre de Lie \mathfrak{g} est nilpotente.*

Ceci est contenu dans XII 4.9.

Nous pouvons maintenant donner un procédé de construction de sous-groupes de Cartan de G (valable également lorsque k est fini, en admettant 1.2 dans ce cas). Supposons d'abord G affine. Nous procédons par récurrence sur $n = \dim G$, l'assertion étant triviale si $n = 0$. Donc supposons $n > 0$ et l'assertion démontrée pour les dimensions $n' < n$. Soit Z le centre réductif de G , et soit

$$u : G \longrightarrow G' = G/Z$$

l'homomorphisme canonique. En vertu de XII 4.7 c), on a une correspondance bi-univoque $C' \mapsto C = u^{-1}(C')$ entre sous-groupes de Cartan de G' et sous-groupes de Cartan de G . Donc, quitte à remplacer G par G' , on peut supposer que le centre réductif Z de G est réduit à l'élément neutre (car il en est ainsi de celui de G' par XII 4.7 b)). En vertu de 1.3, G admet un sous-groupe D de type (C). Nous savons que sur la clôture algébrique \bar{k} de k , $D_{\bar{k}}$ contient un sous-groupe de Cartan de $G_{\bar{k}}$ (XIII 6.6 b)), donc tout sous-groupe de Cartan de D est un sous-groupe de Cartan de G (XIII, 2.8 a)). Donc on est ramené à trouver un sous-groupe de Cartan de D . Si $\dim D = \dim G$, i.e. $D = G$, alors l'algèbre de Lie de G est une sous-algèbre de Cartan d'elle-même, donc est nilpotente, donc en vertu de 1.3 G est nilpotent, donc est un sous-groupe de Cartan de lui-même. Si $\dim D < \dim G$, alors par l'hypothèse de récurrence il existe un sous-groupe de Cartan de D , qui est donc un sous-groupe de Cartan de G , ce qui achève la démonstration dans le cas où G est affine. Dans le cas général, soit Z le centre de G , alors $G/Z = G'$ est affine (XII 6.1) et pour tout sous-groupe de Cartan C' de G' , son image inverse C dans G est un sous-groupe de Cartan de G (XII 6.6 e)). On est ramené à trouver un sous-groupe de Cartan du groupe algébrique lisse affine G' , cas qui a déjà été traité.

Corollaire 1.4. — *Soit G un schéma en groupes lisse de type fini sur un schéma artinien S . Alors G admet un tore maximal T , donc un sous-groupe de Cartan $C = \text{Centr}_G(T)$. Tout tore S dans G est contenu dans un tore maximal.*

On peut en effet supposer S local de corps résiduel k , alors en vertu de 1.1, $G_0 = G \times_S \text{Spec}(k)$ admet un tore maximal T_0 , en vertu de IX 3.6 bis et X 2.3, T_0 provient d'un tore T de G , qui est évidemment un tore maximal. Le dernier énoncé résulte de là, en appliquant le résultat précédent au centralisateur de S , qui est bien lisse sur k (XI 2.4).

Remarques 1.5. — a) Nous donnerons plus bas (3.20, 3.21 et XV) des variantes de 1.4 dans le cas où S n'est pas supposé artinien.

b) J'ignore si tout groupe algébrique G (pas nécessairement lisse) sur un corps k admet un tore maximal. La question ne se pose qu'en caractéristique $p > 0$, et

utilisant 1.1 pour un groupe quotient lisse de la forme $G' = G/I$, où I est un sous-groupe *radiciel* convenable de G (par exemple, le noyau d'une puissance assez élevée de l'homomorphisme de Frobenius), en prenant l'image inverse dans G d'un tore maximal de G' , on est ramené au cas où $(G_{\bar{k}})_{\text{réd}}$ est un tore (\bar{k} désignant toujours la clôture algébrique de k). Il est facile de voir que la réponse est affirmative lorsque G est commutatif, (ou plus généralement nilpotent) : alors G admet un *unique* tore maximal, qu'on peut construire par exemple par descente à partir du tore maximal de $G_{\bar{k}}$ (*).

c) Dans le cas où G est affine, et k est parfait ou G résoluble, 1.1 est connu et dû à Rosenlicht ; sa démonstration est très différente de celle donnée ici.

d) Lorsque k est infini, 1.1 est une conséquence du résultat beaucoup plus précis que le schéma \mathcal{T} des tores maximaux de G est une variété rationnelle, prouvé plus bas (6.1). La méthode est essentiellement une conjonction de la démonstration de 1.1 et de l'explicitation de la structure du schéma \mathfrak{d} des sous-algèbres de Cartan de \mathfrak{g} . Pour parvenir au résultat voulu, nous devons d'abord généraliser au cas d'un préschéma de base quelconque certains résultats de XIII 4 à 6 (c'est le but des deux N^{os} suivants), et préciser la construction précédente prouvant 1.1, en utilisant le fait que tout sous-groupe de Cartan de G est contenu dans un *en un seul* sous-groupe de type (C) de G (N^{os} 4, 5).

2. Algèbres de Lie sur un préschéma quelconque : sections régulières et sous-algèbres de Cartan

Lemme 2.1. — Soient A un anneau, \mathfrak{d} une algèbre de Lie sur A , et pour tout $s \in \text{Spec}(A)$, soit $\mathfrak{d}(s) = \mathfrak{d} \otimes_A k(s)$ l'algèbre de Lie correspondante sur le corps résiduel $k(s)$. On suppose le A -module \mathfrak{d} de présentation finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Pour tout $s \in \text{Spec}(A)$, $\mathfrak{d}(s)$ est nilpotente.
- (ii) Pour tout $x \in \mathfrak{d}$, $\text{ad}(x)$ est nilpotent.
- (iii) Il existe un entier $N \geq 0$ tel que pour toute suite x_1, \dots, x_N d'éléments de \mathfrak{d} , on ait

$$\text{ad}(x_1) \text{ad}(x_2) \dots \text{ad}(x_N) = 0.$$

Lorsque A est un corps, l'équivalence de (i) et (iii) est la définition de « nilpotent », celle de (ii) et (iii) est une conséquence bien connue du théorème d'Engel (Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. I, § 4, N°2). Dans le cas général, on a trivialement (iii) \Rightarrow (ii), et (ii) \Rightarrow (i) grâce au résultat précédent et au fait que (ii) est stable par passage au quotient et par localisation. Reste à prouver (i) \Rightarrow (iii). Lorsque A est artinien local d'idéal maximal \mathfrak{m} , soit $n > 0$ un entier tel que $\mathfrak{m}^n = 0$, soit N un entier tel que la condition (iii) soit vérifiée pour $\mathfrak{d}(s) = \mathfrak{d} \otimes_A A/\mathfrak{m}$, prenons $N' = nN$, on voit aussitôt que cet entier satisfait à (iii). Lorsque A est noethérien, alors il existe

(*) M. Raynaud a donné une réponse négative à la question soulevée ici, cf. XVII Exemple 5.9.c).

un nombre fini d'éléments $s_i \in \text{Spec}(A)$ et d'idéaux de définition $\mathfrak{q}_i \subset A_{s_i}$, tel que l'application naturelle

$$\mathfrak{d} \longrightarrow \prod_i \mathfrak{d} \otimes_A A_i, \quad \text{où } A_i = A_{s_i}/\mathfrak{q}_i,$$

soit injective; alors en vertu de ce qui précède il existe pour tout i un entier N_i satisfaisant à (iii) pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{d} \otimes_A A_i$, et prenant pour N le plus grand des N_i , on satisfait à (iii) pour \mathfrak{d} . Enfin, le cas général se ramène au cas noethérien par le procédé habituel expliqué dans EGA IV 8.

Définition 2.2. — Soient S un préschéma, \mathfrak{d} une algèbre de Lie quasi-cohérente sur S , qui soit un module de présentation finie. On dit que \mathfrak{d} est localement nilpotente si pour tout $s \in S$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{d}(s)$ sur $k(s)$ est nilpotente. On dit que \mathfrak{d} est strictement localement nilpotente si elle est localement libre, et si sur tout ouvert U de S sur le quel elle est de rang constant r , son polynôme de Killing se réduit à $P_{\mathfrak{d}}(t) = t^r$.

Bien entendu, si \mathfrak{d} est une algèbre de Lie localement libre (en tant que module) sur S , on définit son polynôme de Killing comme un polynôme

$$P_{\mathfrak{d}} \in A[t], \quad \text{où } A = \Gamma(\underline{\text{Sym}}_{\mathcal{O}_S}(\mathfrak{d})) \simeq \Gamma(W(\mathfrak{d}))$$

301 est l'anneau des sections du faisceau structural du fibré vectoriel $W(\mathfrak{d})$ défini par \mathfrak{d} .

Il est évident que les deux notions qu'on vient d'introduire dans 2.2 sont stables par changement de base, et de nature locale pour la topologie fpqc. Notons :

Proposition 2.3. — *Si \mathfrak{d} est strictement localement nilpotente, elle est localement nilpotente. La réciproque est vraie lorsque \mathfrak{d} est localement libre, et S réduit.*

La démonstration est immédiate.

Définition 2.4. — Soient S un préschéma, \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur S qui soit un module localement libre de type fini. Soit \mathfrak{d} une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} , on dit que c'est une sous-algèbre de Cartan si elle satisfait aux conditions suivantes :

(i) \mathfrak{d} est un sous-module localement facteur direct (donc aussi localement libre de type fini).

(ii) Pour tout $s \in S$, $\mathfrak{d}(s)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}(s)$.

Définition 2.5. — Soient S , \mathfrak{g} comme dans 2.4. Une section a de \mathfrak{g} est dite quasi-régulière si pour tout $s \in S$, $a(s) \in \mathfrak{g}(s)$ est un élément régulier de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(s)$ sur $k(s)$. On dit que a est une section régulière si elle est quasi-régulière et contenue dans une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} .

Les notions 2.4 et 2.5 sont encore stables par changement de base, et de nature locale pour la topologie fpqc. Seule la dernière assertion, et pour le cas de la notion « section régulière », demande une démonstration, et provient du fait que la sous-algèbre de Cartan contenant une section régulière donnée est uniquement déterminée. De façon plus précise :

302 **Proposition 2.6.** — Soient S, \mathfrak{g} comme dans 2.4 et soit a une section quasi-régulière de \mathfrak{g} . Alors il existe au plus une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} contenant a . Pour qu'il en existe une, i.e. pour que a soit une section régulière, il faut et suffit que a satisfasse la condition suivante : $\mathfrak{d} = \text{Nil}(a, \mathfrak{g})$ est un sous-module localement facteur direct de \mathfrak{g} , et $\text{ad}(a)$ induit un automorphisme de $\mathfrak{g}/\mathfrak{d}$. Dans ce cas, \mathfrak{d} est l'unique sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} contenant a .

Supposons en effet que a soit contenue dans la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{d} de \mathfrak{g} . Alors $\text{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}$ est bijectif en chaque fibre, donc (comme $\mathfrak{g}/\mathfrak{d}$ est localement libre de type fini) c'est un automorphisme de $\mathfrak{g}/\mathfrak{d}$, d'autre part en vertu de 2.1 $\text{ad}(a)_{\mathfrak{d}}$ est localement nilpotent, donc $\mathfrak{d} = \text{Nil}(a, \mathfrak{g})$, ce qui prouve l'unicité de \mathfrak{d} , et la nécessité du critère annoncé de régularité. Pour la suffisance, notons que l'hypothèse faite sur a implique que la formation de $\text{Nil}(a, \mathfrak{g})$ commute à l'extension de la base et en particulier au passage aux fibres, ce qui montre en particulier que les fibres $\mathfrak{d}(s)$ de $\mathfrak{d} = \text{Nil}(a, \mathfrak{g})$ sont des sous-algèbres de Cartan des $\mathfrak{g}(s)$; d'ailleurs \mathfrak{d} est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} en vertu de XIII 4.1, donc c'est une sous-algèbre de Cartan.

Corollaire 2.7. — Sous les conditions de 2.4, soit \mathfrak{d} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , a une section de \mathfrak{d} qui est régulière dans \mathfrak{g} , u un automorphisme de \mathfrak{g} . Pour que u invarie \mathfrak{d} , il faut et il suffit que $u(a)$ soit une section de \mathfrak{d} .

En effet, alors par transport de structure $u(a)$ est une section régulière de \mathfrak{g} , contenue dans les deux sous-algèbres de Cartan \mathfrak{d} et $u(\mathfrak{d})$, qui sont donc identiques.

Corollaire 2.8. — Sous les conditions de 2.4, soit \mathfrak{d} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . Alors pour tout $s \in S$ tel que $k(s)$ soit infini, il existe un voisinage ouvert V de s et une section régulière a de \mathfrak{g} sur V , telle que $\mathfrak{d} = \text{Nil}(a, \mathfrak{g}|_V)$ (i.e. telle que a soit une section de $\mathfrak{d}|_V$).

En effet, le fait que $k(s)$ soit infini assure l'existence d'un élément régulier a_0 de $\mathfrak{g}(s)$ contenu dans $\mathfrak{d}(s)$, on peut le prolonger en une section a de \mathfrak{d} sur un voisinage ouvert U de s , et comme $\text{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}$ induit un automorphisme de $\mathfrak{g}(s)/\mathfrak{d}(s)$, il s'ensuit qu'à condition de restreindre V , $\text{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}$ est un automorphisme, ce qui implique que a est une section quasi-régulière de $\mathfrak{g}|_V$, qui satisfait à la condition voulue.

Soit \mathfrak{g} comme dans 2.4, alors l'examen de son polynôme de Killing implique aussitôt que la fonction

$$s \mapsto \text{rang nilpotent de } \mathfrak{g}(s)$$

sur S est *semi-continue supérieurement*. Nous nous intéressons surtout au cas où cette fonction est en fait continue i.e. localement constante. Voici quelques variantes de cette propriété :

Proposition 2.9. — Soient S, \mathfrak{g} comme dans 2.4. Considérons les conditions suivantes :

(C₀) Le rang nilpotent des $\mathfrak{g}(s)$ ($s \in S$) est une fonction localement constante de s .

(C₁) Il existe localement pour la topologie fpqc une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} .

(C'₁) Comme (C₁), en remplaçant « topologie fpqc » par « topologie étale ».

303

(C₂) La condition (C₀) est satisfaite, et pour tout S' sur S , toute section quasi-régulière de $\mathfrak{g}_{S'} = \mathfrak{g} \otimes_S S'$ est régulière.

(C₃) Tout $s \in S$ a un voisinage ouvert V sur lequel le polynôme de Killing de \mathfrak{g} est de la forme

$$t^r(t^{n-r} + c_1 t^{n-r-1} + \cdots + c_{n-r})$$

où pour tout $s \in V$, $c_{n-r}(s) \in \text{Sym}(\mathfrak{g}(s)^\vee)$ est non nul.

Avec ces notations, on a les implications

$$(C_3) \Rightarrow (C_2) \Rightarrow (C'_1) \Rightarrow (C_1) \Rightarrow (C_0),$$

304 et lorsque S est réduit, les cinq conditions envisagées sont équivalentes.

Notons aussi que les conditions envisagées sont manifestement stables par changement de base, et de nature locale pour la topologie fpqc.

Les implications $(C'_1) \Rightarrow (C_1) \Rightarrow (C_0)$ sont triviales, l'implication $(C_0) \Rightarrow (C_3)$ lorsque S est réduit immédiate. Notons d'ailleurs :

Corollaire 2.10. — *Supposons la condition (C₀) satisfaite. Soit U l'ensemble des éléments de $W(\mathfrak{g})$ qui sont réguliers dans leur fibre. Alors U est ouvert ; en particulier, pour toute section a de \mathfrak{g} sur S , l'ensemble V des $s \in S$ tels que $a(s) \in \mathfrak{g}(s)$ soit régulier, est ouvert.*

En effet, la première assertion résulte de la seconde (appliquées à $\mathfrak{g}_{S'}$ pour tout changement de base S' sur S). Pour celle-ci, comme on peut supposer ici S réduit, donc (C₃) vérifié, il suffit d'examiner le polynôme de Killing de a dans \mathfrak{g} .

L'implication $(C_2) \Rightarrow (C'_1)$ résulte maintenant facilement de b) dans l'énoncé plus précis suivant :

Corollaire 2.11. — *Supposons la condition (C₂) satisfaite. Alors :*

a) *Pour tout $s \in S$ et toute sous-algèbre de Cartan \mathfrak{d}_0 de $\mathfrak{g}(s)$, telle que \mathfrak{d}_0 contienne un élément régulier de $\mathfrak{g}(s)$ (condition automatiquement vérifiée si $k(s)$ est infini), il existe un voisinage ouvert V de s , et une sous-algèbre de \mathfrak{d} de $\mathfrak{g}|_V$ dont la fibre en s soit \mathfrak{d}_0 . Si S_1 est un sous-préschéma de S contenant s , et si on a déjà prolongé \mathfrak{d}_0 en une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{d}_1 de $\mathfrak{g} \otimes_S S_1$, alors on peut trouver un voisinage ouvert V de s dans S et une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{d} de $\mathfrak{g}|_V$ telle que $\mathfrak{d} \otimes_V (S_1 \cap V)$ soit égale à $\mathfrak{d}_1|_{(S_1 \cap V)}$.*

305 b) *Pour tout $s \in S$ tel que $\mathfrak{g}(s)$ contienne un élément régulier (condition automatiquement satisfaite si $k(s)$ est infini), il existe un voisinage ouvert V de s et une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{d} de $\mathfrak{g}|_V$.*

L'énoncé b) résulte de a) en prenant $\mathfrak{d}_0 = \text{Nil}(a_0, \mathfrak{g}(s))$, a_0 étant un élément régulier de $\mathfrak{g}(s)$. Pour prouver a), disons la deuxième formulation, on considère un élément régulier a_0 de $\mathfrak{g}(s)$ contenu dans \mathfrak{d}_0 , on le prolonge au voisinage de s dans S_1 en une section de \mathfrak{d}_1 , et on prolonge cette dernière en une section de \mathfrak{g} au voisinage de s . En vertu de 2.10 cette section est quasi-régulière dans un voisinage ouvert V de s , donc régulière en vertu de (C₂), donc en vertu de 2.6 $\mathfrak{d} = \text{Nil}(a, \mathfrak{g}|_V)$ satisfait aux conditions voulues.

Remarque 2.12. — J'ignore si l'énoncé 2.11 a) et b) est valable sans hypothèse d'existence de points réguliers (lorsque $k(s)$ est fini).

Il reste à prouver l'implication $(C_3) \Rightarrow (C_2)$. Notons aussi la forme équivalente suivante de (C_3) :

(C'_3) On a (C_0) i.e. le rang nilpotent des $\mathfrak{g}(s)$ ($s \in S$) est localement constant, et sur tout ouvert V de S où ce rang est de valeur r , le polynôme de Killing de $\mathfrak{g}|_V$ est divisible par t^r .

Il faut montrer que cette condition implique que toute section quasi-régulière a de \mathfrak{g} est régulière. Compte tenu de 2.6, ceci est contenu dans le lemme suivant (appliqué à l'endomorphisme $\text{ad}(a)$ de \mathfrak{g}), $(iv) \Rightarrow (iii)$:

Lemme 2.13. — Soient A un anneau, M un A -module projectif de type fini, u un endomorphisme de M . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) M est somme directe de deux modules stables M' , M'' tels que $u|_{M'}$ soit nilpotent, et $u|_{M''}$ soit un automorphisme de M'' .

(ii) Il existe un entier $n > 0$ tel que $\text{Im } u^n + \text{Ker } u^n = M$.

(iii) Le nil-espace $\text{Nil}(u) = \bigcup_{n>0} \text{Ker } u^n$ est facteur direct dans M , et $M = \text{Nil}(u) + u(M)$.

Ces conditions sont impliquées par la suivante, (et lui sont équivalentes lorsque A est réduit) :

(iv) Localement sur $\text{Spec}(A)$ (pour la topologie de Zariski) le polynôme caractéristique $P_u(t)$ de u peut se mettre sous la forme

$$t^r(t^{n-r} + c_1 t^{n-r-1} + \dots + c_{n-r}),$$

où c_{n-r} est inversible.

L'équivalence de (i) (ii) (iii) est immédiate et mise pour mémoire. Le fait que (i) implique (iv) lorsque A est réduit provient du fait que dans ce cas, un endomorphisme nilpotent d'un module projectif de rang r a comme polynôme caractéristique t^r , tandis que en tous cas, le polynôme caractéristique d'un automorphisme d'un module projectif de type fini a comme terme constant le déterminant de u au signe près (localement sur $\text{Spec}(A)$), donc un élément inversible de A . Enfin, pour prouver $(iv) \Rightarrow (i)$, on note que M est un module sur l'anneau de polynômes $A[t]$, en faisant opérer t par u , et l'identité bien connue

$$P(u) = 0$$

montre que M est annulé par $PA[t]$, donc peut être considéré comme un module sur $A[t]/PA[t]$. Or écrivant $P = t^r Q$, où le terme constant de Q est inversible, on voit aussitôt que

$$PA[t] = t^r A[t] \cap QA[t],$$

donc $A[t]/PA[t]$ se décompose en produit des anneaux $A[t]/t^r A[t]$ et $A[t]/QA[t]$, d'où une décomposition correspondante de M en somme de deux $A[t]$ -modules i.e. en somme de deux sous- A -modules M' et M'' stables par u , c'est la décomposition envisagée dans (i).

Cela achève la démonstration de 2.13, donc de 2.9.

307 **Corollaire 2.14.** — Lorsque la condition (C_3) de 2.9 est vérifiée, les sous-algèbres de Cartan de \mathfrak{g} sont strictement nilpotentes (2.2).

La démonstration est immédiate.

Remarque 2.15. — a) Signalons qu'on peut prouver une réciproque de 2.14 : (C_3) équivaut au fait que pour tout S' sur S , toute section quasi-régulière de $\mathfrak{g}_{S'}$ soit régulière et toute sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{S'}$ strictement nilpotente, ou encore toute section quasi-régulière de $\mathfrak{g}_{S'}$ contenue dans une sous-algèbre de Cartan strictement nilpotente de $\mathfrak{g}_{S'}$.

b) Contrairement aux autres conditions (C_0) à (C_2) , la condition (C_3) est de « nature infinitésimale », de façon précise, lorsque S est localement noethérien, \mathfrak{g} satisfait la condition (C_3) si et seulement si pour tout changement de base $S' \rightarrow S$, avec S' artinien local (si on veut, S' le spectre d'un quotient artinien d'un anneau local de S), $\mathfrak{g}_{S'}$ satisfait la même condition. De même, lorsque (C_0) est satisfait, la condition pour une section de \mathfrak{g} d'être régulière est de nature infinitésimale.

c) Lorsque \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie d'un préschéma en groupes lisse de présentation finie sur S , alors nous verrons que les conditions (C_0) , (C_1) , (C'_1) , (C_2) sur \mathfrak{g} sont équivalentes (5.2 a)); j'ignore ce qu'il en est en général (sauf que, même pour S artinien local, (C_0) n'implique pas (C_1)). Cependant, même dans le cas où \mathfrak{g} provient d'un G , et S étant artinien local, il n'est pas vrai en général que (C_2) implique (C_3) , car \mathfrak{g} peut être nilpotente sans être strictement nilpotente. On obtient un exemple de ce fait en partant d'un schéma en groupes G lisse et affine sur le spectre S d'un anneau de valuation discrète, tel que l'algèbre de Lie de la fibre générale soit non nilpotente (par exemple la fibre générale est un groupe semi-simple adjoint), et celle de la fibre spéciale étant nilpotente (par exemple, la fibre spéciale étant un groupe vectoriel) : alors pour n assez grand, l'algèbre de Lie de $G_n = G \times_S S_n$ n'est pas strictement nilpotente, cependant elle est nilpotente.

308 Plaçons-nous toujours sous les conditions de 2.4, et soit

$$\mathcal{D} : (\mathbf{Sch})_{/S}^{\circ} \longrightarrow (\mathbf{Ens})$$

le foncteur défini par

$$\mathcal{D}(S') = \text{ensemble des sous-algèbres de Cartan de } \mathfrak{g}_{S'}.$$

Introduisons également le foncteur

$$X(S') = \text{ensemble des couples } (\mathfrak{d}, a), \text{ où } \mathfrak{d} \text{ est une sous-algèbre de Cartan de } \mathfrak{g}_{S'} \text{ et } a \text{ une section de } \mathfrak{d}.$$

On a donc deux projections $(\mathfrak{d}, a) \mapsto \mathfrak{d}$ et $(\mathfrak{d}, a) \mapsto a$:

$$p : X \longrightarrow \mathfrak{d} \quad \text{et} \quad \psi : X \longrightarrow W(\mathfrak{g}).$$

Lorsque (C_0) est vérifiée, nous considérons aussi l'ouvert U des points réguliers de $W(\mathfrak{g})$ (cf. 2.10) et la condition (C_2) s'exprime alors par le fait que le morphisme

$$\psi^{-1}(U) \longrightarrow U$$

induit par ψ est un *isomorphisme* (a priori, c'est un monomorphisme grâce à 2.6). Noter qu'il est trivial que le morphisme $p : X \rightarrow \mathfrak{d}$ est représentable par une projection

de fibrés vectoriels, (i.e. pour tout S -morphisme $S' \rightarrow \mathfrak{d}$, correspondant à une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{d} de $\mathfrak{g}_{S'}$, $X \times_{\mathfrak{d}} S'$ est représentable par un fibré vectoriel sur S' , savoir $W(\mathfrak{d})$); donc si \mathfrak{d} est représentable, il en est de même de X . Or on a :

Théorème 2.16. — Soient S un préschéma, \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur S qui est un \mathcal{O}_S -module localement libre de type fini, supposons la condition (C_0) de 2.9 satisfaite.

a) Le foncteur \mathcal{D} des sous-algèbres de Cartan de \mathfrak{g} défini ci-dessus est représentable par un préschéma quasi-projectif de présentation finie sur S . Il en est de même du foncteur X défini ci-dessus. 309

b) Lorsque la condition (C_2) de 2.9 est vérifiée, \mathcal{D} et X sont lisses sur S , et le morphisme $\psi^{-1}(U) \rightarrow U$ induit par ψ est un isomorphisme.

c) Supposant toujours la condition (C_2) vérifiée, soient $s \in S$, \mathfrak{d}_0 une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}(s)$, correspondant à un point d de \mathcal{D} rationnel sur $k(s)$. Supposons que \mathfrak{d}_0 contienne un point régulier de $\mathfrak{g}(s)$ (condition automatiquement vérifiée si $k(s)$ est infini). Soit r le rang infinitésimal de $\mathfrak{g}(s)$, n son rang sur $k(s)$, alors il existe un voisinage ouvert V de d dans \mathcal{D} qui est S -isomorphe à un ouvert V' de $S[t_1, \dots, t_{n-r}]$.

Démonstration. On peut supposer que \mathfrak{g} est de rang constant n , et de rang nilpotent constant r . Les assertions faites sur X dans a) et b) résultent aussitôt des assertions faites sur \mathcal{D} et du fait que X est un fibré vectoriel sur \mathcal{D} défini par un module localement libre, et sont mises uniquement pour mémoire.

a) Le foncteur \mathcal{D} est un sous-foncteur du foncteur $\underline{\text{Grass}}_{n-r}(\mathfrak{g})$ dont la valeur en S' est l'ensemble des module quotient localement libres de rang $n-r$ de $\mathfrak{g}_{S'}$, et il est bien connu que ce dernier foncteur est représentable par un préschéma projectif et lisse sur S (cf. par exemple Séminaire Cartan 1960/61, Exp. 12, Nos 2 et 3 dont les constructions se transposent telles quelles au cas des préschémas)^(*)(1). On est donc ramené à un problème relatif, savoir le suivant : étant donné un module quotient localement libre de rang $n-r$ de \mathfrak{g} , ou ce qui revient au même, un sous-module \mathfrak{d} localement libre de rang r qui soit localement facteur direct, représenter le foncteur suivant : $F(S') = \emptyset$ si \mathfrak{d} n'est pas une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{S'}$, $F(S') = \{\emptyset\}$ dans le cas contraire. En fait, nous allons voir que F est représentable par un *sous-préschéma* de présentation finie de S (ce qui montrera que $\mathcal{D} \rightarrow \underline{\text{Grass}}$ est représentable par une immersion de présentation finie, et achèvera de prouver a)). On commence par exprimer la condition que $\mathfrak{d}_{S'}$ soit une *sous-algèbre de Lie* de $\mathfrak{g}_{S'}$, on voit tout de suite que cela s'exprime par le fait que $S' \rightarrow S$ se factorise par un certain sous-préschéma fermé S_1 de S , de présentation finie sur S (dont les équations locales sur S s'écrivent immédiatement à l'aide d'une base de \mathfrak{g} adaptée au sous-module \mathfrak{d}). On peut donc supposer qu'on a déjà $S = S_1$. On doit exprimer ensuite que $\mathfrak{d}_{S'}$ contient localement pour fpqc une section quasi-régulière de $\mathfrak{g}_{S'}$, et pour ceci on considère $V = W(\mathfrak{d}) \cap U$, où U est l'ouvert des points réguliers de $W(\mathfrak{g})$ (2.10); alors le morphisme structural $V \rightarrow S$ étant lisse et quasi-compact, son image S_1 est une partie ouverte de S et le morphisme d'immersion 310

^(*)cf. aussi EGA I, 2ème édition (à paraître dans North Holland Publishing Cie).

⁽¹⁾N.D.E. : Voir §I.1.3 de M. Demazure et P. Gabriel, Groupes algébriques, Masson (1970).

$S_1 \rightarrow S$ est quasi-compact i.e. de présentation finie. La condition envisagée sur S' s'exprime alors en disant que $S' \rightarrow S$ se factorise par S_1 . Donc on est ramené au cas de $S = S_1$, et utilisant la théorie de la descente, au cas où \mathfrak{d} admet une section a qui est une section quasi-régulière de \mathfrak{g} . Il faut enfin exprimer que la section $a_{S'}$ de $\mathfrak{g}_{S'}$ déduite de a satisfait à $\text{ad}(a_{S'})_{\mathfrak{g}_{S'}/\mathfrak{d}_{S'}}$ bijectif, ce qui revient encore à dire que $S' \rightarrow S$ se factorise à travers un certain sous-préschéma ouvert de présentation finie de S , savoir S_D , où D est le déterminant de $\text{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{d}}$. Mais alors on voit tout de suite que $\mathfrak{d}|_{S_D}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}|_{S_D}$, donc S_D représente le foncteur F , ce qui prouve a).

b) Est immédiat grâce à 2.11 a) et XI 1.5. Bien entendu b) est également une conséquence de l'énoncé plus précis c).

c) Soit a_0 un point régulier de $\mathfrak{g}(s)$, contenu dans \mathfrak{d}_0 , prolongeons-le en une section a de \mathfrak{g} , sur un voisinage ouvert V de s ; on peut évidemment supposer $V = S$. Soit d'autre part M_0 un supplémentaire de l'espace vectoriel \mathfrak{d}_0 dans $\mathfrak{g}(s)$, alors dans un voisinage ouvert V de S il existe un sous-module M de \mathfrak{g} , facteur direct de $\mathfrak{g}|_V$, tel que $M(s) = M_0$, et on peut supposer encore $V = S$. Soit maintenant V le sous-foncteur de \mathcal{D} tel que $V(S')$ soit l'ensemble des sous-algèbres de Cartan \mathfrak{d}' de $\mathfrak{g}_{S'}$ qui satisfont aux deux conditions suivantes :

- 1°) \mathfrak{d}' est supplémentaire de $M_{S'}$, et
- 2°) l'unique section de $(a_{S'} + M_{S'}) \cap \mathfrak{d}$ est une section régulière de $\mathfrak{g}_{S'}$.

311 La condition 1°) correspond à un ouvert V_1 de \mathfrak{d} (induit par l'ouvert de $\underline{\text{Grass}}_{n-r}(\mathfrak{g})$ défini par la même condition 1°); la conjonction 1° et 2° correspond à un ouvert de V_1 en vertu de 2.10 et (C₂). Donc V est représenté par un sous-préschéma ouvert V de \mathcal{D} , contenant évidemment a .

Soit d'autre part V' le sous-foncteur de $W(M)$ défini par

- $V'(S') =$ ensemble des sections u' de $M_{S'}$ telles que :
- (i) $a_{S'} + u'$ soit une section régulière de $\mathfrak{g}_{S'}$, et
 - (ii) l'unique sous-algèbre de Cartan \mathfrak{d}' de $\mathfrak{g}_{S'}$ qui contient $a_{S'} + u'$ soit un supplémentaire de $M_{S'}$.

Alors la condition 1°) correspond à un sous-préschéma ouvert V'_1 de $W(M)$, savoir l'image inverse de l'ouvert U des points réguliers de $W(\mathfrak{g})$ (cf. 2.10) par le morphisme de translation $m \mapsto a + m$. La conjonction de (i) et (ii) correspond à un ouvert V' de V'_1 , savoir l'image inverse de V par le morphisme évident $V'_1 \rightarrow \mathcal{D}$ (associant à u' l'unique sous-algèbre de Cartan \mathfrak{d}' de $\mathfrak{g}_{S'}$ qui contient $a_{S'} + u'$). La restriction de ce dernier morphisme à V' est un morphisme

$$V' \longrightarrow V,$$

qui est évidemment un isomorphisme. Cela démontre c).

Corollaire 2.17. — Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps k . Alors le schéma \mathcal{D} des sous-algèbres de Cartan de \mathfrak{g} (2.16 a)) est quasi-projectif, lisse et irréductible. Lorsque \mathfrak{g} contient un élément régulier (par exemple lorsque k est infini) \mathfrak{d} est une variété rationnelle i.e. son corps de fonctions est une extension pure de k .

Le fait que \mathcal{D} soit irréductible provient du fait qu'on a un morphisme surjectif $\psi^{-1}(U) \rightarrow \mathcal{D}$, et $\psi^{-1}(U)$ est irréductible, étant isomorphe à l'ouvert U de $W(\mathfrak{g})$. L'assertion sur le corps des fonctions est une conséquence immédiate de c).

Remarques 2.18. — J'ignore si cette conclusion reste vraie si k est fini, sans supposer que \mathfrak{g} contienne un point régulier, comparer 2.12. On peut prouver qu'il en est ainsi lorsque \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie d'un groupe algébrique G lisse sur k , du moins lorsque $G/\text{radical}$ est un groupe semi-simple « adjoint », en utilisant un résultat de Chevalley signalé plus bas (cf. Appendice). Il est plausible que ce résultat reste valable sans restriction sur G ; il suffirait pour ceci que le résultat cité de Chevalley soit prouvé pour tout groupe algébrique semi-simple (non nécessairement adjoint). 312

3. Sous-groupes de type (C) des préschémas en groupes sur un préschéma quelconque

Théorème 3.1. — Soient S un préschéma, G un S -préschéma en groupes lisse, \mathfrak{g} son algèbre de Lie (qui est un module localement libre de type fini sur S), \mathfrak{h} une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} qui soit (en tant que module) localement facteur direct dans \mathfrak{g} , et telle que pour tout $s \in S$, la fibre géométrique $\mathfrak{h}_{\bar{s}}$ contienne une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\bar{s}}$. Soit a une section quasi-régulière de \mathfrak{g} (2.5). Alors

$$M_a = \underline{\text{Transp}}_G(a, \mathfrak{h})$$

(sous-foncteur de G dont les points à valeurs dans S' sont les $g \in G(S')$ tels que $\text{ad}(g) \cdot a_{s'} \in \Gamma(s', \mathfrak{h}_S)$) est représentable par un sous-préschéma fermé ⁽²⁾ de G lisse sur S , dont le morphisme structural dans S est surjectif.

Considérons le morphisme canonique

$$\varphi : G \times_S W(\mathfrak{h}) \longrightarrow W(\mathfrak{g})$$

donné par $(g, x) \mapsto \text{ad}(g) \cdot x$, alors M_a est S -isomorphe à $\varphi^{-1}(a)$, image inverse de a (considéré comme section de $W(\mathfrak{g})$ sur S) par φ . Il suffira donc pour la lissité de M_a que nous montrions que φ est lisse en les points de $G \times_S W(\mathfrak{h})$ au-dessus de $\text{Im}(a)$; plus généralement φ est lisse en tout point au-dessus d'un point de $W(\mathfrak{g})$ qui est régulier dans sa fibre $W(\mathfrak{g}(s))$ sur S . Pour le voir, comme source et but de φ sont lisses donc plats localement de présentation finie sur S , on est ramené à faire la vérification fibre par fibre ce qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos, G étant donc un groupe localement algébrique sur k , \mathfrak{h} une sous-algèbre de son algèbre de Lie \mathfrak{g} , contenant une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , et a un point régulier de \mathfrak{g} . On peut évidemment supposer (compte tenu que φ est un G -morphisme) que le point envisagé de $G \times W(\mathfrak{h})$ est de la forme (e, a) . On peut évidemment supposer G connexe, donc de type fini sur k , mais alors notre assertion n'est autre que XIII 5.4. D'ailleurs, le fait que M_a est un sous-préschéma fermé de G (de présentation finie sur S) est trivial, puisque M_a est l'image inverse de $W(\mathfrak{h})$ par le morphisme $g \mapsto \text{ad}(g) \cdot a$ de G dans $W(\mathfrak{g})$. La surjectivité du morphisme structural $M_a \rightarrow S$ se 313

⁽²⁾N.D.E. : on le notera $\underline{\text{Transp}}_G(a, \mathfrak{h})$.

ramène également au cas d'un corps de base algébriquement clos, mais alors \mathfrak{h} contient une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{d} par hypothèse, qui est donc conjuguée à la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{d} = \text{Nil}(a, \mathfrak{g})$ par le théorème de conjugaison XIII 6.1 a), donc \mathfrak{h} contient un conjugué de a . Cela achève la démonstration de 3.1.

Corollaire 3.2. — Soient G, \mathfrak{g} comme dans 3.1, avec G de type fini sur S , soient \mathfrak{k} et \mathfrak{h} deux sous-algèbres de Lie de \mathfrak{g} , localement facteurs directs (en tant que modules), supposons que l'on soit sous l'une des deux hypothèses suivantes :

a) Pour tout $s \in S$, la fibre géométrique $\mathfrak{k}_{\bar{s}}$ est nilpotente et contient un élément régulier de $\mathfrak{g}_{\bar{s}}$; la fibre géométrique $\mathfrak{h}_{\bar{s}}$ contient une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\bar{s}}$.

b) \mathfrak{k} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} .

Alors $\underline{\text{Transp}}_G(\mathfrak{k}, \mathfrak{h})$ est un sous-préschéma fermé de G lisse sur S ; de plus, dans le cas a), son morphisme structural dans S est surjectif.

Le fait que le transporteur soit représentable par un sous-préschéma fermé de présentation finie de G est immédiat, et laissé au lecteur. Prouvons d'abord la lissité dans le cas a). Supposons d'abord qu'il existe une section a de \mathfrak{k} qui soit quasi-régulière dans \mathfrak{g} . Alors il suffit d'appliquer 3.1 et le

Lemme 3.3. — Sous les conditions de 3.2 a), si a est une section de \mathfrak{k} quasi-régulière dans \mathfrak{g} , alors on a

$$\underline{\text{Transp}}_G(\mathfrak{k}, \mathfrak{h}) = \underline{\text{Transp}}_G(a, \mathfrak{h}).$$

314

En effet, compte tenu des définitions, cela revient à montrer que si a est de plus une section de \mathfrak{h} , alors on a $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{h}$. Or comme par hypothèse, \mathfrak{k} est localement nilpotente, il résulte de 2.1 que $\mathfrak{k} \subset \text{Nil}(a, \mathfrak{g})$, d'autre part $\text{Nil}(a, \mathfrak{g}) \subset \mathfrak{h}$ car $\text{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ est injectif (l'étant fibre par fibre en vertu de XIII 4.8 b)). D'où la conclusion. Dans le cas général, on se ramène au cas où S est affine noethérien par le procédé standard habituel, puis au cas où S est local artinien (la lissité étant une propriété de nature infinitésimale), et par descente plate au cas où son corps résiduel est infini, donc la fibre \mathcal{K}_0 admet un élément qui est régulier dans \mathfrak{g}_0 . On relève cet élément en un élément de $\mathcal{K} = \Gamma(\mathfrak{k})$, ce qui nous ramène au cas précédent. Ainsi, on a prouvé dans le cas a) la lissité du transporteur; quant au fait que son morphisme structural est surjectif, il se ramène au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos, donc où \mathcal{K} contient un point régulier de \mathfrak{g} , et on applique 3.3 et 3.1.

Pour prouver b), on est ramené par définition de la lissité (XI 1.1) à prouver que si S est affine, S_0 un sous-schéma défini par un idéal quasi-cohérent nilpotent \underline{J} , g_0 un élément de $G(S_0)$ qui transporte \mathfrak{k}_0 dans \mathfrak{g}_0 , alors g_0 se relève en un élément g de $G(S)$ qui transporte \mathfrak{k} dans \mathfrak{g} . Or l'hypothèse faite sur g_0 implique qu'on est sous les conditions de a), déjà traité. Cela achève la démonstration.

Bien entendu, lorsque dans 3.2 b) \mathfrak{h} satisfait à l'hypothèse plus forte de 3.1, alors (et alors seulement) le morphisme structural $\underline{\text{Transp}}_G(\mathfrak{d}, \mathfrak{h}) \rightarrow S$ est surjectif. Utilisant le lemme de Hensel XI 1.10, on conclut de 3.1 et 3.2 :

Corollaire 3.4. — Sous les conditions de 3.1 pour G et \mathfrak{h} et supposant G de type fini sur S :

a) pour toute section quasi-régulière a de \mathfrak{g} , il existe localement pour la topologie étale un conjugué de a qui soit une section de \mathfrak{h} .

b) Pour toute sous-algèbre de Cartan \mathfrak{d} de \mathfrak{g} , \mathfrak{d} est localement pour la topologie étale conjuguée d'une sous-algèbre de \mathfrak{h} .

En particulier, lorsque \mathfrak{h} est elle-même une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , on trouve : **315**

Corollaire 3.5. — Soient G un S -préschéma en groupes lisse de type fini, \mathfrak{g} son algèbre de Lie, \mathfrak{d} et \mathfrak{d}' deux sous-algèbres de Cartan de G . Alors $\underline{\text{Transp}}_G(\mathfrak{d}, \mathfrak{d}')$ est identique au transporteur strict de \mathfrak{d} en \mathfrak{d}' , et est un sous-préschéma fermé de G lisse sur S , à morphisme structural surjectif. Localement pour la topologie étale, \mathfrak{d} et \mathfrak{d}' sont conjugués.

Le fait que le transporteur soit ici identique au transporteur strict provient trivialement du fait que \mathfrak{d} et \mathfrak{d}' sont localement facteurs directs dans \mathfrak{g} , et ont même rang en chaque point. Donc 3.5 est un cas particulier de 3.4. En particulier, si $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}'$:

Corollaire 3.6. — Soit G comme dans 3.5, et soit \mathfrak{d} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . Alors $\text{Norm}_G(\mathfrak{d})$ est un sous-préschéma en groupes fermé de G lisse sur S , dont l'algèbre de Lie est identique à \mathfrak{d} .

En effet, cette dernière assertion revient à dire que \mathfrak{d} est son propre normalisateur dans \mathfrak{g} , ce qui provient aussitôt du fait que c'est vrai fibre par fibre.

Corollaire 3.7. — Soient G, \mathfrak{g} comme dans 3.5. Alors les conditions $(C_2), (C'_1), (C_1)$ de 2.9 sont équivalentes, en d'autres termes, si \mathfrak{g} admet localement pour la topologie fpqc une sous-algèbre de Cartan, alors toute section quasi-régulière de \mathfrak{g} est régulière.

Soit en effet a une section quasi-régulière, prouvons qu'elle est régulière. La question étant locale pour la topologie fpqc, on peut supposer que \mathfrak{g} admet une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{d} . En vertu de 3.4 a), a est alors localement pour la topologie étale conjugué à une section de \mathfrak{d} , ce qui nous ramène au cas où a est une section de \mathfrak{d} , où la conclusion est triviale sur la définition.

Définition 3.8. — Soit G un préschéma en groupes lisse sur un préschéma S . On appelle sous-groupe de type (C) de G , un sous-préschéma en groupes D de G , lisse sur S , à fibres connexes, tel que $\mathfrak{d} = \text{Lie}(D)$ soit une sous-algèbre de Cartan (2.4) de $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$, i.e. tel que pour tout $s \in S$, D_s soit un sous-groupe de type (C) du groupe algébrique G_s (XIII 6.2). **316**

Théorème 3.9. — Soit G un S -préschéma en groupes lisse et de présentation finie, \mathfrak{g} son algèbre de Lie. Alors :

a) L'application

$$D \mapsto \mathfrak{d} = \text{Lie}(D)$$

établit une correspondance biunivoque entre sous-groupes de type (C) de G , et sous-algèbres de Cartan de \mathfrak{g} .

b) Si D et \mathfrak{d} se correspondent, on a

$$\text{Norm}_G(D) = \text{Norm}_G(\mathfrak{d}),$$

c'est un sous-préschéma fermé de G lisse sur S , et on a

$$D = \text{Norm}_G(D)^0 = \text{Norm}_G(\mathfrak{d})^0.$$

c) Deux sous-groupes de type (C) D et D' de G sont conjugués localement pour la topologie étale.

317 *Démonstration.* Soit D un sous-groupe de type (C) de G , et \mathfrak{d} son algèbre de Lie, alors $D \subset \text{Norm}_G(\mathfrak{d})$, et en vertu de la définition 3.8 et de 3.6 c'est une inclusion de préschémas en groupes lisses sur S , induisant un isomorphisme sur les algèbres de Lie. Comme D est à fibres connexes, on a donc $D = \text{Norm}_G(\mathfrak{d})^0$. Donc l'application envisagée dans a) est injective, prouvons qu'elle est surjective. Soit donc \mathfrak{d} une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , alors en vertu de 3.6 $\text{Norm}_G(\mathfrak{d}) = N$ est un sous-préschéma en groupes fermé de G lisse sur S , admettant \mathfrak{d} comme algèbre de Lie. Comme G est de présentation finie sur S , il en est de même de N , donc (comme il a été signalé dans XII après 7.3) la réunion des composantes connexes des fibres de N est l'ensemble sous-jacent à un sous-préschéma en groupes ouvert N° de N , qui est évidemment un sous-groupe de type (C) de G ayant l'algèbre de Lie \mathfrak{d} . Cela prouve a), la première assertion b) en résulte aussitôt, et la formule $D = \text{Norm}_G(\mathfrak{d})^0$ a déjà été prouvée. Enfin, c) résulte de a) et de 3.5.

Corollaire 3.10. — *Supposons que \mathfrak{g} admette localement pour la topologie fpqc une sous-algèbre de Cartan (ou ce qui revient au même en vertu de 3.9 a), que G admette localement pour la topologie fpqc un sous-groupe de type (C)). Considérons le foncteur $\mathcal{D} : (\mathbf{Sch})_{/S}^\circ \rightarrow (\mathbf{Ens})$ défini par $\mathcal{D}(S') =$ ensemble des sous-groupes de type (C) de $G_{S'}$. Alors ce foncteur est représentable par un préschéma quasi-projectif et lisse sur S , à fibres géométriques connexes. Lorsque S est le spectre d'un corps k , donc G un groupe algébrique lisse sur k , et que \mathfrak{g} admet un point régulier (condition automatiquement vérifiée si k est infini), alors \mathcal{D} est une variété rationnelle sur k .*

En effet, en vertu de 3.9 a), le foncteur \mathcal{D} est canoniquement isomorphe au foncteur envisagé dans 2.16, d'autre part en vertu de 3.7 la condition (C_2) est satisfaite. Donc 3.10 résulte de 2.16 et 2.17.

Corollaire 3.11. — *Soit D un sous-groupe de type (C) de G , et soit N son normalisateur dans G . Alors le faisceau quotient G/N est canoniquement isomorphe au foncteur \mathcal{D} de 3.10, donc représentable par un préschéma quasi-projectif et lisse sur S , à fibres géométriques connexes.*

Proposition 3.12. — *Soient G un S -préschéma en groupes, lisse de présentation finie sur S , H, K deux sous-préschémas en groupes, lisses de présentation finie sur S , K étant à fibres connexes, $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{h}$ les algèbres de Lie correspondantes. On suppose que l'une des deux conditions suivantes soit réalisée pour les fibres géométriques de ces dernières :*

318 a) Pour tout $s \in S$, $\mathfrak{k}_{\bar{s}}$ contient un élément régulier de $\mathfrak{g}_{\bar{s}}$, et $\mathfrak{h}_{\bar{s}}$ contient une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\bar{s}}$.

b) Pour tout $s \in S$, $\mathfrak{k}_{\bar{s}}$ contient une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\bar{s}}$. Sous ces conditions, pour qu'on ait $H \supset K$, il faut et suffit que l'on ait $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{k}$.

Bien entendu, on doit seulement prouver que si $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{k}$, alors $H \supset K$. Dans le cas b), l'inclusion $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{k}$ montre qu'on est en fait sous les conditions de a), donc il suffit de prouver a). Procédant comme dans 3.2 a) par réduction au cas S artинien local, on est ramené au cas où il existe une section a de \mathfrak{k} qui est quasi-régulière dans \mathfrak{g} . Dans ce cas, procédant comme dans XIII 5.5, on est ramené à l'énoncé suivant :

Corollaire 3.13. — Soient G un S -préschéma en groupes lisse de présentation finie sur S , H un sous-préschéma en groupes de G lisse de présentation finie sur S , \mathfrak{g} et \mathfrak{h} les algèbres de Lie, a une section de \mathfrak{h} qui soit quasi-régulière dans \mathfrak{g} . On suppose que pour tout $s \in S$, la fibre géométrique $\mathfrak{h}_{\bar{s}}$ contient une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\bar{s}}$. Soit

$$M_a = \text{Transp}_G(a, \mathfrak{h}),$$

qui est un sous-préschéma fermé de G lisse sur S (cf. 3.1), de sorte que M_a^0 (réunion des composantes connexes de l'élément neutre dans les fibres de M_a) est une partie ouverte de M_a , que nous munirons de la structure induite par M_a . On a alors $H^0 = M_a^0$.

Évidemment, on a $H \subset M_a$ d'où $H^0 \subset M_a^0$. Comme c'est là une inclusion de préschémas lisses sur S , pour prouver que c'est une égalité, on est ramené à le vérifier sur les fibres, ce qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos, cas qui a été vu dans XIII 5.4.

Corollaire 3.14. — Soient G un S -préschéma en groupes lisse de présentation finie, D un sous-groupe de type (C) de G , H un sous-préschéma en groupes de G lisse sur S 319 et de présentation finie sur S , \mathfrak{d} et \mathfrak{h} leurs algèbres de Lie. Alors on a

$$\underline{\text{Transp}}_G(D, H) = \underline{\text{Transp}}_G(\mathfrak{d}, \mathfrak{h}),$$

et ce foncteur est représentable par un sous-préschéma fermé de G lisse sur S .

En effet, l'identité entre les deux transporteurs résulte de 3.12 b), ce qui permet d'appliquer 3.2.

Corollaire 3.15. — Soient G, H comme dans 3.14 et supposons que pour tout $s \in S$, la fibre géométrique $\mathfrak{h}_{\bar{s}}$ contient une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\bar{s}}$. Supposons de plus que \mathfrak{g} admette localement pour la topologie fpqc une sous-algèbre de Cartan. Alors localement pour la topologie étale, H contient un sous-groupe de type (C) de G .

En vertu de 3.7 et 3.9 a), G admet localement pour la topologie étale un sous-groupe de type (C), donc on peut supposer que G admet un tel sous-groupe, soit D . Alors l'hypothèse sur \mathfrak{h} signifie aussi que le morphisme structural du transporteur considéré dans 3.14 est surjectif (compte tenu du théorème de conjugaison XIII 6.1 a)). On conclut alors par le lemme de Hensel XI 1.10.

Corollaire 3.16. — Soient G, H, K , comme dans 3.12 a), supposons de plus que pour tout $s \in S$, la fibre géométrique \mathfrak{k}_s soit nilpotente, (i.e. \mathfrak{k} est localement nilpotente). Alors on a

$$\underline{\text{Transp}}_G(K, H) = \underline{\text{Transp}}_G(\mathfrak{k}, \mathfrak{h}),$$

et ce foncteur est représentable par un sous-préschéma fermé de G lisse sur S , à morphisme structural dans S surjectif. H contient localement pour la topologie étale un sous-groupe conjugué à K .

320 L'identité des deux transporteurs est encore contenue dans 3.12 a), l'assertion sur sa structure n'est alors autre que 3.2 a), et la dernière assertion de 3.16. est alors conséquence du lemme de Hensel.

Remarques 3.17. — a) Dans 3.12 et 3.16, on peut remplacer l'hypothèse que K est lisse sur S par l'hypothèse plus faible suivante : le faisceau $e_K^*(\Omega_{K/S}^1) = \omega_K^1$ des 1-différentielles relatives le long de la section unité est localement libre. De cette façon, 3.12 contient XIII 5.5.

b) Soient $G, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ comme dans 3.1, avec G de présentation finie sur S . Alors $N = \text{Norm}_G(\mathfrak{h})$ n'est pas nécessairement lisse sur S le long de la section unité, ou ce qui revient au même, il n'existe pas nécessairement un sous-préschéma en groupes H de S lisse sur S dont l'algèbre de Lie soit \mathfrak{h} , même si S est le spectre d'un corps. Lorsqu'un tel H existe, de sorte qu'on a alors (prenant H à fibres connexes) $N = \text{Norm}_G(H)$, j'ignore si N est lisse sur S . Dans cette question, on peut évidemment se ramener au cas où S est local artinien.

Pour finir ce N° , examinons le cas où G est « semi-simple » sur S :

Théorème 3.18. — Soient S un préschéma, G un S -préschéma en groupes lisse sur S , dont les fibres géométriques sont des groupes semi-simples « adjoints », i.e. semi-simples à centre réductif (XII 4.1 et 4.4) réduit au groupe unité. Alors les sous-groupes de type (C) de G sont identiques à ses tores maximaux, donc aussi à ses sous-groupes de Cartan (XII 3.1).

321 Compte tenu des définitions, on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos, et à prouver alors que pour un tore maximal T de G , l'algèbre de Lie \mathfrak{t} de T est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , c'est-à-dire (compte tenu de l'inégalité rang nilpotent de $\mathfrak{g} \geq \text{rang nilpotent de } G = \dim T = \text{rang } \mathfrak{t} = r$) qu'il existe $x \in \mathfrak{t}$ avec $\dim \text{Nil}(x, \mathfrak{g}) = r$. Comme \mathfrak{t} est abélienne et a fortiori nilpotente, il revient au même de dire qu'il existe un $a \in \mathfrak{t}$ tel que $\text{ad}(a)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{t}}$ soit injective (XIII 5.7 a)). Or considérons les caractères α de T qui interviennent dans la représentation induite sur T par la représentation adjointe de G . La théorie de structure de groupe semi-simple G (BIBLE, 13 th. 1 a) et th. 3, cor. 2), plus précisément de la « grosse cellule » de G , produit semi-direct de T et de sous-groupes P_α isomorphes au groupe additif \mathbb{G}_a , invariants par T et correspondants aux caractères « racines » de G pour le tore T , montre que le sous-espace propre de \mathfrak{g} relatif au caractère unité n'est autre que \mathfrak{t} , et les autres sous-espaces propres sont de dimension 1, les caractères α associés n'étant autres que les racines de G pour T . En vertu du calcul du centre réductif de G comme intersection des noyaux des caractères de T qui interviennent dans la représentation

adjointe de G (XII 4.8), on voit que le fait que G soit adjoint s'interprète par le fait que *les racines engendrent le réseau* $M = \text{Hom}(T, \mathbb{G})$. Or un lemme bien connu de la théorie des racines nous dit que toute racine fait partie d'un système de racines simples, donc d'une base du groupe engendré par les racines, et par suite d'une base du dual M de T ⁽³⁾. On en conclut :

Corollaire 3.19. — *Si G est un groupe algébrique semi-simple adjoint sur un corps algébriquement clos k , T un tore maximal de G , alors pour toute racine α de G par rapport à T , $\alpha : T \rightarrow \mathbb{G}_m$, l'homomorphisme correspondant $\alpha' : \mathfrak{t} \rightarrow k$ est non nul.*

Ce résultat est essentiellement équivalent au théorème 3.18, car pour un $t \in \mathfrak{t}$, $\text{ad}(t)$ est semi-simple et ses valeurs propres dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{t}$ ne sont autres que les $\alpha'(t)$, donc $\text{ad}(t)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{t}}$ est injectif si et seulement si les $\alpha'(t)$ sont $\neq 0$, et il existe un $t \in \mathfrak{t}$ ayant cette propriété si et seulement si tous les α' sont $\neq 0$.

Corollaire 3.20. — *Soient S un préschéma, G un S -préschéma en groupes, lisse, de présentation finie sur S , à fibres géométriques des groupes algébriques connexes et réductifs (i.e. extensions d'un groupe semi-simple par un tore). Alors pour tout $s \in S$ il existe un voisinage ouvert U de s tel que $G|_U$ admette un tore maximal. ^(*)*

Nous verrons en effet dans XVI que l'hypothèse qu'on vient de faire sur G implique que G est affine sur S et de rang réductif localement constant; donc (XII 4.7 c)) G admet un centre réductif Z , $G' = G/Z$ est un groupe lisse et affine sur S , dont le centre réductif est réduit au groupe unité, enfin les tores maximaux de G et de G' sont en correspondance biunivoque. De plus, on voit aussitôt que les fibres géométriques de G' sont des groupes connexes semi-simples, et de plus adjoints par définition (leur centre réductif étant trivial). Donc il suffit de se borner au cas où G est semi-simple et adjoint, et en vertu de 3.18 on est ramené à trouver un voisinage ouvert U de s et un sous-groupe *de type* (C) de $G|_U$, où ce qui revient au même (3.9 a)) une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}|_U$. Or ceci est possible si $k(s)$ est infini, car en vertu de 3.7 \mathfrak{g} satisfait à la condition (C_2) de 2.9, donc on peut appliquer 2.11 b). En fait, l'énoncé 3.20 reste valable sans supposer $k(s)$ infini. En effet, par la démonstration précédente, il suffit de savoir que *pour tout groupe semi-simple adjoint G sur un corps fini k , l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G contient un élément régulier*. Or cet énoncé a été prouvé par Chevalley (en utilisant les propriétés de l'*élément de Coxeter* du groupe de Weyl...), cf. l'Appendice plus bas par J.-P. Serre. 322

Remarques 3.21. — a) L'énoncé 3.20 reste valable, avec essentiellement la même démonstration, en y remplaçant G par un sous-préschéma en groupes H fermé, lisse sur S , ayant partout même rang que G (par exemple un « sous-groupe parabolique » de G), pourvu que $k(s)$ soit infini. J'ignore si ici encore, l'hypothèse que $k(s)$ soit infini est superflue. On peut montrer qu'il en est ainsi du moins si H est parabolique, grâce

^(*)Ce résultat, ainsi que 2.11 sur lequel il s'appuie, se généralise immédiatement au cas où s est remplacé par une partie finie de S , contenue dans un ouvert affine.

⁽³⁾N.D.E. : on a remplacé \hat{T} par T

à la construction du radical U de H et du quotient H/U , ce qui nous ramène au cas semi-simple. Malheureusement, la méthode des éléments réguliers semble ici impuissante, car on construit facilement des exemples (par exemple avec le groupe projectif et son sous-groupe de Borel « standard ») où l'algèbre de Lie \mathfrak{h} de H ne contient aucun élément régulier.

323 b) La démonstration de 3.20 montre en fait un résultat plus précis (en invoquant 3.9 b)) dans le cas où $k(s)$ est infini, savoir que tout tore maximal T_0 de G_s provient d'un tore maximal T sur un voisinage ouvert de s . J'ignore si cet énoncé reste valable lorsque $k(s)$ n'est plus supposé infini, la difficulté provenant évidemment du fait que l'algèbre de Lie \mathfrak{t}_0 de T_0 ne contient en général pas d'élément régulier de l'algèbre de Lie \mathfrak{g}_0 de la fibre G_s . Une réponse affirmative à ce problème impliquerait l'énoncé suivant (qui n'est démontré que dans le cas d'un corps résiduel infini ou lorsque A est séparé et complet) : Soit A un anneau local, de corps résiduel k , M une « algèbre de Azumaya » sur A , i.e. une algèbre telle que M soit un module libre de type fini sur A , et $M_0 = M \otimes_A k$ une algèbre centrale simple sur k , D_0 une sous-algèbre commutative de M_0 séparable sur k , telle que $[M_0 : k] = ([D_0 : k])^2$; alors il existe une sous-algèbre commutative D de M , qui est un module facteur direct dans M et tel que $D \otimes_A k = D_0$ (?). (Noter que la donnée de M équivaut à la donnée d'un fibré principal homogène sous le groupe projectif $\mathrm{PGL}(n)_A$, d'où une forme tordue « intérieure » G de $\mathrm{PGL}(n)$, et les tores maximaux de G correspondant biunivoquement aux sous-algèbres commutatives D de M , étales sur A , de rang n sur A).

c) Appliquant 3.20 au centralisateur d'un sous-tore Q de G (G S -préschéma en groupes réductif), on déduit que tout tel Q est contenu, localement pour la topologie de Zariski, dans un tore maximal de G .

4. Une digression sur les sous-groupes de Borel

Définition 4.1. — Soit G un groupe algébrique lisse sur un corps algébriquement clos. On appelle *sous-groupe de Borel* de G un sous-groupe algébrique lisse résoluble connexe, qui soit maximal pour ces propriétés.

324 Lorsque G est affine, on retrouve donc la terminologie de BIBLE 6 déf. 1. Notons tout de suite que si Z est un sous-groupe connexe et lisse de G , contenu dans le centre (ou plus généralement, résoluble et invariant), alors pour tout sous-groupe de Borel B de G , l'image BZ de $B \times Z$ par le morphisme $(b, z) \mapsto bz$ de $B \times Z$ dans G est un sous-groupe lisse résoluble connexe de G contenant B , donc identique à B , donc B contient Z , donc B est l'image inverse d'un sous-groupe algébrique B' de $G' = G/Z$, et il est immédiat que B' est un sous-groupe de Borel de G' . Prenant $Z = \mathrm{Centr}(G^0)_{\mathrm{red}}$, $G' = G/Z$ est affine (XII 6.1), donc les sous-groupes de Borel de G' sont conjugués et pour un tel B' , G'/B' est une variété projective (BIBLE 6 th. 4). Par suite :

Proposition 4.2. — Soit G comme dans 4.1. Alors les sous-groupes de Borel de G sont conjugués. Si B est un sous-groupe de Borel, alors G/B est une variété projective. Les tores maximaux de B (resp. les sous-groupes de Cartan de B , G étant connexe) sont des tores maximaux de G (resp. des sous-groupes de Cartan de G).

Il reste à prouver la dernière assertion, et on peut évidemment supposer $G = G^0$. Pour les sous-groupes de Cartan, elle résulte de l'assertion analogue dans G' (BIBLE 6 th. 4 cor. 4) et de XII 6.6 e). Pour les tores maximaux, elle se déduit de la précédente, puisque par XII 6.6 c) les tores maximaux d'un groupe algébrique lisse sont les tores maximaux de ses sous-groupes de Cartan.

Corollaire 4.3. — *Supposons G connexe. Alors tout élément de G est contenu dans un sous-groupe de Borel de G .*

On est ramené au même énoncé dans G' , qui est bien connu (BIBLE 6 th. 5 d)).

Corollaire 4.4. — *Soit B un sous-groupe de Borel de G , C un sous-groupe de Cartan de B , N son normalisateur dans G , alors $N \cap B = C$.*

En effet, $N \cap B = \text{Norm}_B(C)$, on est donc ramené à montrer que lorsque G est connexe et résoluble, alors un sous-groupe de Cartan C est son propre normalisateur connexe. Or avec les notations précédentes, C est l'image inverse d'un sous-groupe de Cartan C' de G' , on est donc ramené au cas où G est affine. Comme on sait que le normalisateur d'un sous-groupe de Cartan est lisse (C étant son propre normalisateur connexe, cf. par exemple XII 6.6 c)), il suffit de voir que C et N ont mêmes points à valeurs dans k , ce qui n'est autre que BIBLE th. 6 d). 325

Définition 4.5. — Soit G un préschéma en groupes lisse de présentation finie sur un préschéma S . On appelle *sous-groupe de Borel* de G tout sous-préschéma en groupes lisse B de présentation finie de G , tel que pour tout $s \in S$, la fibre géométrique $B_{\bar{s}}$ soit un sous-groupe de Borel de $G_{\bar{s}}$.

C'est donc là, comme on le vérifie aussitôt, une notion stable par changement de base, et de nature locale pour la topologie fpqc (car si k' est une extension algébriquement close d'un corps algébriquement clos k , alors un sous-groupe algébrique B du groupe algébrique G lisse sur k est un sous-groupe de Borel de G si et seulement si $B_{k'}$ en est un de $G_{k'}$). Il résulte de cette définition que si G est un groupe algébrique lisse sur un corps quelconque k , B un sous-groupe de Borel de G , alors G/B est une variété projective, tout tore maximal T de B est un tore maximal de G , son normalisateur dans B est identique à son centralisateur C , et est un sous-groupe de Cartan de G lorsque G est connexe.

Remarques 4.6. — Malheureusement, il n'est plus vrai en général (même si G est affine sur S et S est le spectre de l'algèbre des nombres duaux sur un corps k algébriquement clos) que deux sous-groupes de Borel de G soient conjugués localement pour la topologie fpqc. Comme conséquence de ce fait regrettable, signalons que si G est un groupe algébrique lisse, affine, connexe sur un corps k non parfait, il n'est pas possible en général de définir de façon naturelle un espace homogène D sous G , jouant le rôle d'une variété de drapeaux i.e. de la variété des sous-groupes de Borel de G (qui, sur la clôture algébrique \bar{k} de k , serait donc isomorphe à $G_{\bar{k}}/\bar{B}$, où \bar{B} est un sous-groupe de Borel de $G_{\bar{k}}$). En effet, lorsque le quotient de $G_{\bar{k}}$ par son radical \bar{R} est un groupe semi-simple adjoint, alors le noyau de $G_{\bar{k}} \rightarrow \underline{\text{Aut}}_k(\bar{D})$ est le radical de $G_{\bar{k}}$, donc si \bar{D} provient d'un espace homogène D sous G , le radical \bar{R} provient d'un 326

sous-groupe R de G . Or on construit facilement des exemples où $G_{\bar{k}}/\bar{R}$ est adjoint mais \bar{R} n'est pas « défini sur k ». Il est facile de voir que sous ces conditions, le foncteur $\mathcal{B} : (\mathbf{Sch})_{\mathcal{S}}^{\circ} \rightarrow (\mathbf{Ens})$ tel que $\mathcal{B}(S') =$ ensemble des sous-groupes de Borel de $G_{S'}$, n'est pas représentable par un \mathcal{S} -préschéma lisse. Du point de vue infinitésimal (III §3), la non validité du théorème de conjugaison s'exprime par le fait que si B est un sous-groupe de Borel du groupe algébrique lisse G , le groupe de cohomologie $H^1(B, \mathfrak{g}/\mathfrak{b})^{(4)}$ peut être différent de zéro.

Nous verrons par contre dans un exposé ultérieur que lorsque G est semi-simple, ou plus généralement réductif, de tels phénomènes déplaisants ne se produisent pas. Ce sont ces phénomènes sans doute, ainsi que l'absence de bons théorèmes d'existence, qui expliquent que les sous-groupes de Borel ne jouent qu'un rôle relativement effacé dans l'étude des schémas en groupes *généraux* du point de vue schématique, alors qu'ils domineront la théorie des schémas en groupes semi-simples dans les exposés ultérieurs.

Proposition 4.8. — ⁽⁵⁾ Soient G un \mathcal{S} -préschéma en groupes lisse de présentation finie à fibres connexes, B un sous-groupe de Borel de G , alors B est identique à son propre normalisateur, et c'est un sous-préschéma fermé de G .

En effet, en vertu de XII 7.10, on est ramené à prouver que sur un corps algébriquement clos k , tout élément de $G(k)$ qui normalise B est dans $B(k)$, ce qui pour G affine est un résultat fondamental de Chevalley (BIBLE 9 th. 1); le cas général s'y ramène aussitôt par la réduction utilisée déjà dans 4.2.

Remarques 4.8.1. — On peut généraliser la définition 4.5, en introduisant également la notion de *sous-groupe parabolique* de G : on appelle ainsi un sous-préschéma en groupes P de G , lisse et de présentation finie sur \mathcal{S} , tel que pour tout $s \in \mathcal{S}$, la fibre géométrique $P_{\bar{s}}$ soit un sous-groupe parabolique de $G_{\bar{s}}$, i.e. contienne un sous-groupe de Borel de $G_{\bar{s}}$. La proposition 4.8 s'étend (avec la même démonstration de réduction à l'énoncé « ensembliste », qui est connu) au cas d'un sous-groupe parabolique P de G . Notons la conséquence suivante de ce résultat (cf. XVI). Si P est un sous-groupe parabolique de G , alors G/P est représentable par un préschéma quasi-projectif de présentation finie sur \mathcal{S} (N. B. on suppose G à fibres connexes). D'ailleurs G/P est évidemment lisse sur \mathcal{S} , et de plus à fibres géométriques connexes et propres, d'où on peut conclure facilement, utilisant EGA III 5.5.1, que $D = G/P$ est en fait propre, donc projectif, sur \mathcal{S} . D'ailleurs, si sa dimension relative est n , il est connu que le faisceau inversible $\Omega_{D/\mathcal{S}}^n$ est tel que son inverse induise sur les fibres géométriques de D/\mathcal{S} des faisceaux amples, donc (EGA III 4.7.1) $(\Omega_{D/\mathcal{S}}^n)^{-1}$ est ample sur D relativement à \mathcal{S} .

On voit aisément, par réduction au cas affine et au cas d'un corps de base algébriquement clos, que si $u : G \rightarrow G'$ est un épimorphisme de groupes algébriques lisses, alors pour tout sous-groupe de Borel B de G , $u(B) = B'$ est un sous-groupe de Borel

⁽⁴⁾N.D.E. : où \mathfrak{b} est l'algèbre de Lie de B .

⁽⁵⁾N.D.E. : il n'y a pas de numéro 4.7.

de G' . Nous nous intéressons au cas où on obtient ainsi une correspondance bijective entre sous-groupes de Borel de G et de G' :

Proposition 4.9. — Soient G, G' deux S -préschémas en groupes lisses de présentation finie à fibres connexes, $u : G \rightarrow G'$ un homomorphisme de groupes fidèlement plat i.e. surjectif⁽⁶⁾. On suppose qu'on est dans l'un des deux cas suivants (où on a posé $N = \text{Ker } u$) :

a) N est central dans G .

b) S est le spectre d'un corps k , et si \bar{k} en désigne une clôture algébrique, $N_{\bar{k}} = \text{Ker } u_{\bar{k}}$ est contenu dans le radical de $G_{\bar{k}}$ i.e. dans le plus grand sous-groupe lisse connexe résoluble invariant de $G_{\bar{k}}$.

Alors l'application $B' \mapsto u^{-1}(B')$ induit une bijection de l'ensemble des sous-groupes de Borel de G' avec l'ensemble analogue pour G .

Le cas b) résulte aussitôt de la correspondance entre sous-groupes algébriques de G' et sous-groupes algébriques de G contenant N , et le fait que lorsque k est algébriquement clos, les sous-groupes de Borel de G contiennent le radical de G (ce qui est immédiat par le raisonnement précédant 4.2). 328

Prouvons le cas a). En vertu de XII 7.12, l'application $H' \mapsto H = u^{-1}(H')$ établit une correspondance biunivoque entre sous-préschémas en groupes H' de G' qui sont lisses de présentation finie sur S , à fibres connexes, et qui ont en tout $s \in S$ même rang réductif et même rang nilpotent que G' , et les sous-préschémas en groupes H de G ayant les propriétés analogues. Or les sous-groupes de Borel (de G' , ou de G), ont les propriétés en question. Reste à prouver que si H', H se correspondent, alors H' est un sous-groupe de Borel de G' si et seulement si H en est un dans G . Par définition, cette question se ramène au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Or comme N est central dans G donc dans H , il s'ensuit que H est résoluble si et seulement si H' l'est. Enfin, compte tenu de la correspondance entre sous-groupes algébriques de G' et sous-groupes algébriques de G contenant N , on voit aussitôt que H' possède le caractère maximal de la définition 4.1 si et seulement si H le possède, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 4.10. — Avec les notations de 4.7, si B' et B sont des sous-groupes de Borel de G' et G qui se correspondent, on a

$$\mathfrak{b} = \text{Lie}(u)^{-1}(\mathfrak{b}')$$

où $\mathfrak{g}, \mathfrak{g}', \mathfrak{b}, \mathfrak{b}'$ sont les algèbres de Lie de G, G', B, B' , et où $\text{Lie}(u) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ est l'homomorphisme déduit de u .

Cet énoncé résulte trivialement des définitions et de la relation $u^{-1}(B') = B$.

Nous pouvons maintenant prouver le résultat principal du présent numéro :

Théorème 4.11. — Soient G un groupe algébrique lisse sur un corps algébriquement clos k , \mathfrak{g} son algèbre de Lie. Alors \mathfrak{g} est égal à la réunion des algèbres de Lie \mathfrak{b} des sous-groupes de Borel B de G .

⁽⁶⁾N.D.E. : ajouter une référence ici ?

329 On peut évidemment supposer G connexe. Soit R le radical de G et soit $G' = G/R$. Alors 4.9 b) et 4.10 nous ramènent à prouver le théorème 4.11 pour G' au lieu de G , i.e. on peut supposer G *semi-simple*. Soit alors Z le centre de G , identique au centre réductif, et soit $G' = G/Z$. Le même raisonnement (utilisant maintenant 4.9 a) nous ramène à prouver le théorème pour G' , i.e. on peut supposer G *semi-simple adjoint*. Soit B un Borel de G , T un tore maximal de B donc de G , et soient \mathfrak{b} et \mathfrak{t} les algèbres de Lie. En vertu de 3.18, T est un sous-groupe de type (C) de G , i.e. \mathfrak{t} est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , donc la réunion des conjugués de \mathfrak{t} est dense dans \mathfrak{g} (XIII 5.1 (i) \Rightarrow (vii)). A fortiori la réunion des conjugués de \mathfrak{b} est dense dans \mathfrak{g} . Or soit X le sous-schéma fermé de $G/B \times W(\mathfrak{g})$ dont les points à valeurs dans k sont les (g', x) tels que $x \in \text{Ad}(g) \cdot \mathfrak{b}$ (cf. XIII 1). Alors le morphisme $\psi : X \rightarrow W(\mathfrak{g})$ induit par la deuxième projection est propre puisque G/B est propre sur k , d'autre part on vient de voir qu'il est dominant, donc il est surjectif, ce qui prouve 4.11.

Le seul résultat du présent n° que nous utiliserons dans la suite de cet exposé est le corollaire suivant :

Corollaire 4.12. — Soient k un corps infini, G un groupe algébrique lisse sur k , T un tore maximal de G , \mathfrak{g} et \mathfrak{t} les algèbres de Lie, $u : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation linéaire (V un vectoriel de dimension finie sur k), d'où une représentation d'algèbres de Lie $u' : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, faisant de V un \mathfrak{g} -module. Alors le minimum de la nullité de $u'(x)$ ($x \in \mathfrak{g}$) est atteinte pour un élément $x \in \mathfrak{t}$.

330 On est ramené aussitôt au cas où k est algébriquement clos. On peut évidemment supposer G connexe, et quitte à diviser G par $(\text{Ker } u)_{\text{réd}}$, on peut supposer G affine. Utilisant 4.11 et le théorème de conjugaison des tores maximaux de G , on est ramené au cas où G est de plus résoluble. Alors G est un produit semi-direct $T \cdot V$, où V est la « partie unipotente » de G , qui est un groupe lisse connexe unipotent (BIBLE 6 th. 3). Donc \mathfrak{g} est somme directe (en tant qu'espace vectoriel) des sous-algèbres de Lie \mathfrak{t} et $\mathfrak{v} = \text{Lie}(V)$. En vertu du théorème de Lie-Kolchin (BIBLE 6 th. 1), \mathfrak{v} admet une suite de composition par des sous-espaces \mathfrak{v}_i stables, tels que $\mathfrak{v}_i/\mathfrak{v}_{i+1} = \mathfrak{w}_i$ soit de dimension 1. Alors pour chaque i , on a une représentation induite $u_i : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{w}_i) = \mathbb{G}_m$ et l'homomorphisme d'algèbres de Lie correspondant $u'_i : \mathfrak{g} \rightarrow k$, de sorte que pour tout $x \in \mathfrak{g}$, la nullité de $u'(x)$ est égal au nombre des i tels que $u'_i(x) = 0$. Comme V est unipotent, les u_i sont triviaux sur V , donc les u'_i sont triviaux sur \mathfrak{v} , ce qui prouve que si $x = t + v$ ($t \in \mathfrak{t}, v \in \mathfrak{v}$), alors $u'_i(x) = u'_i(t)$ pour tout i , donc la nullité de $u'(x)$ est égale à celle de $u'(t)$. L'assertion 4.12 en résulte aussitôt.

5. Relations entre sous-groupes de Cartan et sous-algèbres de Cartan

Appliquant 4.12 à la représentation adjointe de G , on trouve :

Théorème 5.1. — Soient G un groupe algébrique lisse sur un corps infini, T un tore maximal de G , $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{t}$ les algèbres de Lie, alors \mathfrak{t} contient un élément régulier de \mathfrak{g} .

Corollaire 5.2. — Soient G un S-préschéma en groupes lisse de présentation finie, \mathfrak{g} son algèbre de Lie.

a) Les conditions (C_0) à (C_2) de 2.9 sur \mathfrak{g} sont équivalentes, en particulier si le rang infinitésimal des fibres de \mathfrak{g} aux points de S est localement constant, alors \mathfrak{g} admet localement pour la topologie étale une sous-algèbre de Cartan, donc (d'après 3.9 a)) G admet localement pour la topologie étale un sous-groupe de type (C).

b) Soient H un sous-préschéma en groupes de G lisse de présentation finie sur S , à fibres connexes ayant même rang réductif que G en chaque $s \in S$ (par exemple, H est un tore maximal ou un sous-groupe de Cartan de G), D un sous-groupe de type (C) de G , alors on a $H \subset D$ si et seulement si on a $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{d}$.

c) Supposons la condition (C_0) satisfaite i.e. le rang infinitésimal de G localement constant. Soit H un sous-préschéma en groupes de G lisse de présentation finie sur S , à fibres connexes nilpotentes, ayant même rang réductif que G en chaque point (par exemple, H est un tore maximal ou un sous-groupe de Cartan de G). Alors H est contenu dans un sous-groupe D de type (C) de G et dans un seul. 331

d) Supposons que G admette localement pour fpqc un sous-groupe de Cartan, alors il en est de même de tout sous-groupe D de type (C) de G .

Démonstration. a) Supposons la condition (C_0) satisfaite, et prouvons qu'il en est de même de (C_2) , i.e. que toute section quasi-régulière a de \mathfrak{g} est régulière. On se ramène comme d'habitude au cas S affine noethérien, puis, la question étant « infinitésimale » (2.15 b), au cas où S est local artinien (alors (C_0) est d'ailleurs trivialement satisfaite). On peut supposer de plus le corps résiduel k de S infini. Notons qu'en vertu de 3.7 il suffit d'établir que \mathfrak{g} admet une sous-algèbre de Cartan. Soit T un tore maximal de G , en vertu de 5.1 il existe un élément quasi-régulier t contenu dans l'algèbre de Lie \mathfrak{t} de T , prouvons qu'il est régulier, ce qui achèvera la démonstration. Considérons la représentation linéaire de T dans \mathfrak{g} induite par la représentation adjointe de G ; il existe donc un ensemble fini $(u_i)_{i \in I}$ de caractères de T , tel que \mathfrak{g} se décompose en somme directe de sous-modules \mathfrak{g}_i stables sous T , T opérant sur \mathfrak{g}_i par u_i (cf. I § 4.7.3). Soit $u'_i : \mathfrak{t} \rightarrow A$ l'homomorphisme d'algèbres de Lie déduit de $u_i : T \rightarrow \mathbb{G}_m$ (N. B. A désigne l'anneau de S). Considérons les homomorphismes u_{i0} et u'_{i0} déduits des précédents par passage aux fibres, i.e. par le changement de base $A \rightarrow k$. Soit I' l'ensemble des $i \in I$ tels que $u'_{i0} \neq 0$, et soit $I'' = I - I'$. Le fait que t soit régulier s'exprime par la condition $u'_{i0}(t_0) \neq 0$ pour tout $i \in I'$, donc $u'_i(t)$ inversible pour $i \in I'$. La sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 défini par t , i.e. le sous-espace noyau de l'endomorphisme semi-simple $\text{ad}(t_0)$ de \mathfrak{g}_0 , est $\sum_{i \in I''} (\mathfrak{g}_i)_0$. Considérons

$$\mathfrak{d} = \sum_{i \in I''} \mathfrak{g}_i,$$

alors $\text{ad}(t)$ est nilpotent dans \mathfrak{d} , d'autre part c'est un automorphisme de $\mathfrak{g}/\mathfrak{d} \simeq \sum_{i \in I'} \mathfrak{g}_i$. En vertu de 2.6 t est donc régulier. 332

b) Résulte de 3.12 a), H vérifiant l'hypothèse que toute fibre géométrique de \mathfrak{h} contient un élément régulier de celle de \mathfrak{g} , grâce à 5.1.

c) En vertu de b), on est ramené à prouver que \mathfrak{h} est contenu dans une sous-algèbre de Cartan et une seule de \mathfrak{d} . En vertu de a) on sait d'ailleurs que \mathfrak{g} satisfait à (C_2) . On est donc ramené au

Lemme 5.3. — Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur S qui soit un module localement libre de type fini, et satisfasse la condition (C_2) de 2.9. Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} qui satisfasse aux conditions suivantes : c'est un module localement facteur direct, elle est localement nilpotente, et pour tout $s \in S$, la fibre géométrique $\mathfrak{h}_{\bar{s}}$ contient un élément régulier de $\mathfrak{g}_{\bar{s}}$. Alors \mathfrak{h} est contenu dans une sous-algèbre de Cartan et une seule de \mathfrak{g} .

(N. B. dans le cas qui nous intéresse, \mathfrak{h} satisfait aux conditions énoncées : elle est localement nilpotente car H est à fibres nilpotentes, et la condition sur les éléments réguliers résulte de 5.1). Comme 5.3 est local pour la topologie fpqc, il suffit de prouver qu'en un point $s \in S$ tel que $\kappa(s)$ soit infini, il existe un voisinage ouvert U de s tel que existence et unicité soient vrais pour tout changement de base $S' \rightarrow S$ se factorisant par U . Prenons un élément régulier de $\mathfrak{g} \otimes \kappa(s)$ contenu dans $\mathfrak{h} \otimes \kappa(s)$, prolongeons-le en une section a de \mathfrak{h} sur un voisinage ouvert U de s , grâce à (C_2) on peut supposer que cette section est régulière (2.10). On peut supposer $U = S$. Une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} qui contient \mathfrak{h} contient a , donc est identique à $\mathfrak{d} = \text{Nil}(a, \mathfrak{g})$ (2.6), d'où l'unicité. D'ailleurs comme \mathfrak{h} est localement nilpotente, on a bien $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{d}$, ce qui prouve l'existence.

d) C'est un cas particulier de XII 7.9 d).

333 Corollaire 5.4. — Soient G un groupe algébrique lisse et connexe sur un corps algébriquement clos k , H un sous-groupe algébrique connexe tel que \mathfrak{h} contienne une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , i.e. tel que H contienne un sous-groupe de type (C) de G . Alors le nombre de conjugués de H contenant un élément régulier de $G(k)$, est égal au nombre des conjugués de \mathfrak{h} contenant un élément régulier de \mathfrak{g} .

En effet, soit g un élément régulier de $G(k)$, C l'unique sous-groupe de Cartan de G contenant g (XIII 2), alors les conjugués de H contenant g sont ceux contenant C (XIII 2.8 b)). Soit de même x un élément régulier de \mathfrak{g} , alors si un conjugué \mathfrak{h}' de \mathfrak{h} contient x , alors $\text{ad}(x)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'}$ est injectif (XIII 5.4) donc \mathfrak{h}' contient $\text{Nil}(x, \mathfrak{g}) = \mathfrak{d}$, donc le nombre de conjugués de \mathfrak{h} contenant x est égal au nombre de conjugués contenant la sous-algèbre de Cartan \mathfrak{d} . D'ailleurs \mathfrak{d} est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe D de type (C) de G . On peut évidemment supposer $C \subset D$, et l'assertion 5.4. résultera de ceci : pour que H contienne C , il faut et suffit que \mathfrak{h} contienne \mathfrak{d} . En effet, en vertu de XIII 5.5 la relation $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{d}$ implique $H \supset D$ et a fortiori $H \supset C$. Inversement, par 5.1 \mathfrak{t} contient un élément régulier x de \mathfrak{g} , alors $H \supset C$ implique $\mathfrak{h} \ni x$, donc comme on a déjà signalé, cela implique $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{d}$. Cela achève la démonstration.

Soit G comme dans 5.2 et supposons que le rang infinitésimal des fibres de G reste localement constant (condition (C_0)). Alors grâce à 5.2 c), on trouve un homomorphisme de foncteurs sur $(\text{Sch})_{/S}^{\circ}$:

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

où

$\mathcal{C}(S') =$ ensemble des sous-groupes de Cartan de $G_{S'}$

$\mathcal{D}(S') =$ ensemble des sous-groupes de type (C) de $G_{S'}$.

En vertu de 3.10 et 5.2 a), \mathcal{D} est représentable par un préschéma lisse et quasi-projectif sur S . Considérons le sous-groupe D de type (C) de $G_{\mathcal{D}}$ jouant le rôle universel par rapport à G/S , on peut considérer alors le foncteur $\mathcal{C}_D : (\mathbf{Sch})_{\mathcal{D}}^{\circ} \rightarrow (\mathbf{Ens})$ défini en termes du \mathcal{D} -groupe D comme \mathcal{C} en termes du S -groupe G . On a alors le résultat suivant :

Proposition 5.5. — *Sous les conditions précédentes, considérons \mathcal{C} comme un foncteur au-dessus du préschéma \mathcal{D} , alors \mathcal{C} est \mathcal{D} -isomorphe au foncteur \mathcal{C}_D « des sous-groupes de Cartan de D ».*

Cela résulte aussitôt du

Corollaire 5.6. — *Soient G un S -préschéma en groupes lisse de présentation finie, D un sous-groupe de type (C) de G . Alors il y a correspondance biunivoque entre les sous-groupes de Cartan de G contenus dans D , et les sous-groupes de Cartan de D , (de façon précise, pour un sous-groupe H de G , H est un sous-groupe de Cartan de G si et seulement si c'est un sous-groupe de Cartan de D).*

En effet, c'est un cas particulier de XII 7.9 c), compte tenu que sur un corps algébriquement clos, un sous-groupe de type (C) de G contient un sous-groupe de Cartan de G .

Pour le numéro suivant, le résultat principal obtenu ici est 5.2 c) pour H un sous-groupe de Cartan de G , qui permet d'énoncer 5.5 et fournit ainsi un « dévissage » utile de \mathcal{C} .

6. Applications à la structure des groupes algébriques

Théorème 6.1. — *Soit G un groupe algébrique lisse sur un corps k . Considérons le schéma \mathcal{T} des tores maximaux de G , isomorphe au schéma \mathcal{C} des sous-groupes de Cartan de G , qui est un espace homogène sous G^0 , et un schéma algébrique lisse affine connexe (XII 7.1 d)). Alors \mathcal{C} est une variété rationnelle, i.e. le corps des fonctions rationnelles de \mathcal{C} est une extension pure de k .*

Nous ferons d'abord la démonstration dans le cas où k est infini. On peut évidemment supposer G connexe, car \mathcal{T} donc \mathcal{C} ne change pas en remplaçant G par G^0 . De plus, en vertu de XII 7.6, \mathcal{C} ne change pas en divisant G par un sous-groupe central. Cela nous permet, divisant d'abord par le centre de G , de supposer G affine (XII 6.1), puis, divisant par son centre réductif (XII 4.1 et 4.4), de supposer que le centre réductif de G est trivial (XII 4.7 b)). Par ailleurs nous procédons par récurrence sur $n = \dim G$, en supposant le théorème prouvé pour les dimensions $n' < n$. Si G est nilpotent, alors \mathcal{C} est réduit à un point rationnel sur k , et 6.1 est trivial. Dans le cas contraire, l'algèbre de Lie de G est non nilpotente (1.3), donc les sous-algèbres de Cartan de \mathfrak{g} sont de dimension $n' < n$, donc les sous-groupes de type (C) de G sont de dimension $n' < n$. Considérons alors le morphisme

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

envisagé dans 5.5. On sait par 3.10 (k étant un corps infini, donc \mathfrak{g} contenant un élément régulier) que \mathcal{D} est une variété rationnelle, i.e. le corps K des fonctions rationnelles sur \mathcal{D} est extension pure de k . Considérons la fibre de \mathcal{C} en le point générique x de \mathcal{D} , c'est en vertu de 5.5 le schéma des sous-groupes de Cartan d'un certain groupe algébrique D_x lisse et connexe sur $K = \kappa(x)$ (savoir $D_x = \ll$ le sous-groupe de type (C) générique de G \gg). Le corps L des fonctions rationnelles sur \mathcal{C} est donc isomorphe au corps des fonctions rationnelles sur \mathcal{C}_{D_x} , qui par l'hypothèse de récurrence (comme $\dim D_x = n' < n$) est une extension pure de K . Donc par transitivité L est une extension pure de k .

Lorsque k est fini, il faut une démonstration différente. On peut encore supposer que G est affine et connexe. Noter que k est parfait, il en résulte aussitôt que le radical \overline{R} de $G_{\overline{k}}$ est « défini sur k » i.e. provient d'un sous-groupe R de G . Supposons d'abord $R \neq G$ i.e. G non résoluble, et soit

$$u : G \longrightarrow G' = G/R$$

336 le morphisme canonique. Considérons le morphisme correspondant $C \mapsto u(C)$

$$v : \mathcal{C}_G \longrightarrow \mathcal{C}_{G'}$$

(dont la définition est immédiate en vertu de XII 7.1 e)). Soit x le point générique de $\mathcal{C}_{G'}$, alors la fibre $v^{-1}(x)$ s'identifie au schéma des sous-groupes de Cartan de G_K (où $K = \kappa(x)$) dont l'image dans G'_K est un certain sous-groupe de Cartan C'_x (savoir, « le sous-groupe de Cartan générique de G' »). C'est donc aussi le schéma des sous-groupes de Cartan de $H = u_K^{-1}(C')$ (XII 7.9 c)) et comme K est ici une extension infinie de k , il résulte de la partie déjà prouvée de 7.1 que le corps L des fonctions rationnelles de \mathcal{C}_G , égal à celui de \mathcal{C}_H , est une extension transcendante pure de K . Pour prouver que c'est une extension transcendante pur de k , il suffit donc de prouver qu'il en est ainsi de K , i.e. on est ramené au cas où G est semi-simple. On peut de plus supposer que G est adjoint (quitte à diviser G par son centre réductif). Mais alors en vertu de 3.18 on a $\mathcal{C}_G \simeq \mathcal{D}_G$, et en vertu de 3.10 il suffit de prouver que \mathfrak{g} admet un point régulier, ce qui (comme on l'a signalé dans 3.20) est un résultat inédit de Chevalley ⁽⁷⁾.

Il reste donc seulement à traiter le cas où k est fini, G connexe affine *résoluble*. On a en fait un résultat plus général :

Corollaire 6.2. — *Soit G un groupe algébrique lisse résoluble sur un corps k , alors la variété \mathcal{C} des sous-groupes de Cartan de G est isomorphe à un espace affine $\text{Spec } k[t_1, \dots, t_N]$.*

On peut encore supposer G connexe, et affine. Soit G_∞ le plus petit des groupes figurant dans la série centrale descendante de G (par des G_i tels que $G_{i+1} = [G, G_i]$) ; c'est donc le plus petit sous-groupe algébrique invariant de G tel que G/G_∞ soit nilpotent. Soit C un sous-groupe de Cartan de G (il en existe en vertu de 1.1), alors l'image de C dans G/G_∞ en est un sous-groupe de Cartan, donc est égale à G/G_∞ , par suite le morphisme $g \mapsto \text{Ad}(g) \cdot C$ de G_∞ dans \mathcal{C} est un épimorphisme, et identifie

⁽⁷⁾N.D.E. : cf. l'Appendice, par J.-P. Serre

\mathcal{C} à l'espace homogène $G_\infty/N \cap G_\infty$, où N est le normalisateur de C dans G (d'ailleurs égal à C comme on a rappelé dans 4.4, mais peu importe ici). Noter que $U = G_\infty$ est évidemment un groupe algébrique lisse et connexe « unipotent » (car sur la clôture algébrique de k , il est contenu dans la partie unipotente de G , en vertu de la structure connue des groupes lisses affines résolubles, BIBLE 6 th, 3). Lorsque k est parfait, (seul cas nécessaire pour établir 6.1), il s'ensuit très facilement que U est même k -unipotent, i.e. admet une suite de composition par des sous-groupes algébriques U_i tels que U_i/U_{i+1} soit isomorphe à \mathbb{G}_a . En fait, Rosenlicht a prouvé que ce résultat reste valable pour un groupe de la forme G_∞ comme dessus, sans restriction sur k (M. Rosenlicht, Questions of rationality for solvable algebraic groups over non perfect fields, Annali di Matematica 1963, pp. 97-120, theorem 4 cor. 2), résultat nettement plus délicat que nous admettrons ici. Il suffit maintenant d'appliquer le lemme suivant, sans doute bien connu des spécialistes :

Lemme 6.3. — Soit U un groupe algébrique lisse connexe sur un corps k , $X = U/V$ un espace homogène sous U ayant un point rationnel sur k . Supposons U k -unipotent. Alors en tant que k -schéma, X est isomorphe à un espace affine $\text{Spec } k[t_1, \dots, t_N]$.

Soit en effet $(U_i)_{0 \leq i \leq n}$ une suite de composition de U par des sous-groupes lisses connexes, avec $U_n = (e)$, $U_0 = U$, $U_i/U_{i+1} \simeq \mathbb{G}_a$, les U_i invariants dans U . Alors les $K_i = U_i V$ sont des sous-groupes algébriques de U (pas nécessairement lisses ni connexes si V ne l'est pas, mais peu nous chaut), et K_{i+1} est invariant dans K_i . On a un morphisme canonique $U_i/U_{i+1} \rightarrow K_i/K_{i+1}$ qui est un épimorphisme, ce qui prouve que K_i/K_{i+1} est soit réduit au groupe unité, soit isomorphe à \mathbb{G}_a/H_i , où H_i est un sous-groupe fini de \mathbb{G}_a , ce qui en vertu de Rosenlicht (*loc. cit.*, th 2) implique que $K_i/K_{i+1} \simeq \mathbb{G}_a$, (résultat d'ailleurs immédiat si k est parfait). Posons maintenant $X_i = U/K_i$, prouvons par récurrence sur i que X_i est isomorphe à un espace affine. En effet, s'il en est ainsi pour X_i , prouvons qu'il en est de même de X_{i+1} . Si $K_i/K_{i+1} = e$ on a $X_i = X_{i+1}$ et c'est trivial. Sinon, X_{i+1} est un fibré principal de base X_i et de groupe structural $\mathbb{G}_a \simeq K_i/K_{i+1}$. Donc, X_i étant affine, X_{i+1} est un fibré trivial donc est isomorphe à $X_i \times \mathbb{G}_a$, ce qui prouve encore que X_{i+1} est isomorphe à un espace affine type. Cela prouve 6.2 et par suite achève de prouver 6.1.

Corollaire 6.4. — Soit G un groupe algébrique lisse sur un corps infini k . Alors l'ensemble des points de \mathcal{C} (notations de 6.1) rationnels sur k est dense pour la topologie de Zariski. La réunion des sous-groupes de Cartan de G est dense dans G .

La première assertion est valable pour toute variété unirationnelle sur un corps infini, et est d'ailleurs ici pour nous la conséquence « arithmétique » la plus importante des résultats d'unirationalité. La deuxième assertion résulte de la première et du théorème de densité XIII 2.1.

Corollaire 6.5. — Soit G un groupe algébrique lisse connexe sur k . Alors la variété Z des points semi-simples réguliers de G (XIII 3.5) est une variété unirationnelle. En particulier, si k est infini, l'ensemble des points de Z rationnels sur k est dense dans Z .

En effet, Z est un ouvert d'un tore sur \mathcal{C} , donc son corps des fonctions L est le corps des fonctions d'un tore défini sur le corps des fonction K de \mathcal{C} (savoir le « tore maximal générique » de G), c'est donc une extension unirationnelle de K (XIII 3.4), et comme K est une extension pure de k en vertu de 6.1, L est une extension unirationnelle de k .

339 Corollaire 6.6. — Soit G un groupe algébrique lisse connexe sur k , et soit H le sous-groupe de G engendré par la sous-variété Z des points semi-simples réguliers, i.e. (XII 8.2) le plus petit sous-groupe algébrique invariant de G tel que G/H soit de rang réductif nul (i.e. soit sur la clôture algébrique de k extension d'une variété abélienne par un groupe lisse connexe unipotent). Alors H est une variété unirationnelle. En particulier, si $G = H$ i.e. (XII 8.4) si G est affine et si sur la clôture algébrique \bar{k} , il n'existe pas d'homomorphisme non trivial de $G_{\bar{k}}$ dans \mathbb{G}_a , alors G est une variété unirationnelle, donc si k est infini, l'ensemble de ses points rationnels sur k est dense.

Ceci résulte aussitôt de 6.5, car il est immédiat que si on a des k -préschémas lisses connexes Z_i qui sont des variétés unirationnelles et des morphismes $u_i : Z_i \rightarrow G$, alors le sous-groupe algébrique de G engendré par les u_i (VI_B 7.1) est une variété unirationnelle.

Comme cas particulier intéressant de 6.5 ou 6.6 (au choix), notons :

Corollaire 6.7. — Soit G un groupe algébrique lisse connexe affine de rang unipotent nul, alors G est une variété unirationnelle.

On peut préciser 6.4 de la façon suivante :

Corollaire 6.8. — Soit G un groupe algébrique lisse connexe sur le corps infini k , et soit C un sous-groupe de Cartan de G . Alors la réunion des conjugués de C par des éléments semi-simples réguliers de $G(k)$ est dense dans G .

Cela résulte aussitôt de 6.4 et de XIII 3.6 qui dit que le morphisme $\varphi : Z \times C \rightarrow G$ défini par $\varphi(t, c) = \text{ad}(t)c$ est dominant. Ce résultat implique aussi (sans supposer k infini) :

Corollaire 6.9. — Soient G un groupe algébrique lisse connexe sur k , H un sous-groupe algébrique lisse connexe de G , tel que H ait même rang réductif et même rang nilpotent que G (i.e. sur la clôture algébrique \bar{k} de k , $H_{\bar{k}}$ contient un sous-groupe de Cartan de $G_{\bar{k}}$). Si H est une variété unirationnelle, il en est de même de G . Si $H(k)$ est dense dans H , $G(k)$ est dense dans G .

En effet, le morphisme $\varphi : Z \times H \rightarrow G$ défini par $\varphi(t, h) = \text{ad}(t)h$ est dominant, or en vertu de 6.5, Z est une variété unirationnelle, et par hypothèse il en est de même de H , donc de $Z \times H$, d'où le premier résultat. Le deuxième se prouve de façon analogue.

Nous retrouvons maintenant le résultat bien connu suivant (dû à Chevalley, en caractéristique 0, à Rosenlicht en caractéristique $p > 0$) :

340 Corollaire 6.10. — Soit G un groupe algébrique lisse connexe affine sur un corps parfait k . Alors G est une variété unirationnelle, donc si k est de plus infini, $G(k)$ est dense dans G .

En effet, en vertu de 1.1, G admet un sous-groupe de Cartan C . En vertu de 6.9 il suffit de prouver que ce dernier est une variété unirationnelle. Or k étant parfait, on voit aussitôt par descente galoisienne à partir du cas k algébriquement clos (BIBLE 6 th.2) que l'on a $C = T \times C_u$, où T est le tore maximal de C et C_u un groupe lisse connexe unipotent. On sait déjà que T est une variété unirationnelle (XIII 3.4), il reste à voir qu'il en est de même de C_u . Or k étant parfait, C_u est même k -unipotent, et on peut appliquer 6.3.

Remarques 6.11. — a) On connaît (Rosenlicht) des exemples de formes tordues de \mathbb{G}_a sur un corps non parfait, qui n'ont qu'un nombre fini de points rationnels, donc a fortiori ce ne sont pas des variétés unirationnelles. D'autre part, Chevalley a donné un exemple de tore sur un corps de caractéristique nulle, qui n'est pas une variété rationnelle. Par contre, il résulte de la théorie de Chevalley des groupes semi-simples que sur un corps algébriquement clos, tout groupe algébrique lisse connexe affine est une variété rationnelle. Notons d'ailleurs que la question d'unirationnalité ne se pose de toutes façons que pour les groupes algébriques *affines*, un groupe algébrique unirationnel étant nécessairement affine d'après le théorème de structure de Chevalley.

b) Avec les notations de 6.6, il est tentant d'essayer de donner une condition d'unirationnalité de G en termes du groupe G/H , (qui est unipotent si G est supposé affine). Il faut évidemment que ce dernier soit unirationnel, cette condition est-elle également suffisante? Notons qu'un exemple de Rosenlicht (*loc. cit.*) montre qu'un groupe algébrique lisse connexe unipotent U peut être une variété rationnelle, sans être k -unipotent.

c) Il serait intéressant d'étudier, sur un corps fini k , des questions du type « densité », comme la suivante (soulevée par Rosenlicht) : Soit G un groupe algébrique lisse et connexe sur k , alors G est-il engendré par ses sous-groupes de Cartan ^(*)(8) ?

341

(*) Cette question a depuis été résolue par l'affirmative par Steinberg.

(8) N.D.E. : n'ayant pas identifié ce résultat dans les Collected Papers de R. Steinberg, donnons-en une preuve fondée sur la décomposition de Bruhat. Soit G/k un groupe semi-simple défini sur le corps fini k . Il s'agit de montrer que G est engendré par ses k -sous-groupes de Cartan. Cette question est stable par isogénie centrale et par restriction des scalaires; on est donc ramené au cas où G est géométriquement simple (de la même façon qu'au lemme 1 de l'appendice ci-après). On note G^\sharp le sous-groupe de G engendré par ses sous- k -tores. Le groupe G est quasi-déployé (Lang) et admet donc un couple de Killing (T, B) . Par définition, on a $T \subset G^\sharp$; en particulier T normalise G^\sharp . La grosse cellule $R_u(B^-) T R_u(B)$ de G indique qu'il suffit de vérifier que $R_u(B) \subset G^\sharp$. Soit S le k -tore déployé maximal de T . On considère le système de racines relatif $\Phi(G, S)$ et une base Δ_k . Étant donné $\alpha \in \Phi(G, S)$, on note $U_{(\alpha)}$ le sous-groupe unipotent associé à α (cf. A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, seconde édition (1991), Springer, Prop. 21.9). Vu que le k -groupe $R_u(B)$ est engendré par les k -groupes unipotents $U_{(\alpha)}$ ($\alpha \in \Delta_k$), on est ramené à vérifier que $U_{(\alpha)} \subset G^\sharp$. Un coup d'oeil sur la classification montre qu'il existe un groupe semi-simple G_α de type quasi-déployé $A_1, {}^2A_1, {}^3A_1$ ou 2A_2 tel que $U_{(\alpha)} \subset G_\alpha \subset G$. Il est donc loisible de supposer que $G = \mathrm{PGL}_2$ ou $G = \mathrm{SU}_3(K)$, où K désigne l'unique extension quadratique de corps de k . Le groupe PGL_2^\sharp contenant le tore déployé standard T , les possibilités à conjugaison près sous $G(k)$ sont les suivantes : $\mathrm{PGL}_2^\sharp = T$, $\mathrm{PGL}_2^\sharp = B$, ou $\mathrm{PGL}_2^\sharp = \mathrm{PGL}_2$. Le cas $\mathrm{PGL}_2^\sharp = T$ est exclu puisque PGL_2^\sharp contient le k -tore $R_{K/k}(\mathbb{G}_m)/\mathbb{G}_m$. La discussion précédente indique que si $\mathrm{PGL}_2^\sharp = B$, alors $\mathrm{PGL}_2^\sharp = \mathrm{PGL}_2$. On a donc $\mathrm{PGL}_2^\sharp = \mathrm{PGL}_2$. Si

Dans cette question, on peut se ramener au cas G affine, en divisant par le centre. La réponse serait affirmative dans le cas G semi-simple, si on pouvait préciser le résultat d'existence de points réguliers de Chevalley signalé dans 3.20, de façon à obtenir un élément régulier de \mathfrak{g} qui n'appartienne pas à $\mathfrak{h} = \text{Lie}(H)$, où H est un sous-groupe algébrique lisse de G et $\neq G$ donné à l'avance, (G groupe semi-simple adjoint sur le corps fini k).

$G = \text{SU}_3(K)$, $\Delta_k = \{\alpha\}$ et les possibilités pour G^\sharp (à conjugaison près) sont les suivantes : $G^\sharp = T$, $G^\sharp = B$, $G^\sharp = U_{(2\alpha)} \rtimes T$, $G^\sharp = \langle U_{(2\alpha)}, U_{(-2\alpha)}, T \rangle = \text{SL}_2 \cdot T$, ou $G^\sharp = G$. Le cas $G^\sharp = B$ est exclu comme pour PGL_2 . Le cas $\text{SL}_2 \cdot T$ est exclu parce que G^\sharp contient le k -tore $R_{K/k}^1 \left(R_{K_3/K}^1(\mathbb{G}_m) \right)$, K_3/K désignant l'extension de degré 3 de K , et la classe d'isogénie de ce tore est irréductible. En outre, ce tore exclut aussi les cas $G^\sharp = T$ et $G^\sharp = U_{(2\alpha)} \rtimes T$. On conclut que $G^\sharp = G$.

7. APPENDICE : Existence d'éléments réguliers sur les corps finis

342

par J. -P. SERRE

Dans tout ce qui suit, k désigne un corps fini, et \bar{k} sa clôture algébrique; le groupe de Galois de \bar{k}/k est noté \mathcal{G} ; on rappelle que, si $q = \text{Card}(k)$, \mathcal{G} est topologiquement engendré par l'élément « de Frobenius » $F : x \mapsto x^q$.

On se propose de démontrer le théorème suivant⁽¹⁾ :

Théorème. — Soit G un groupe semi-simple adjoint défini sur k , et soit \mathfrak{g} son algèbre de Lie. La k -algèbre de Lie $\mathfrak{g}(k)$ contient un élément régulier.

Remarques. — (1) Il est bon de rappeler que « adjoint » signifie que le centre de G est trivial (en tant que sous-schéma en groupes de G). Vu le séminaire Chevalley, cela signifie aussi que, si T est un tore maximal de G , le groupe $X(T)$ des caractères de T (définis sur \bar{k}) est engendré par l'ensemble R des racines. Il en résulte en particulier que le rang de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est égal à la dimension de T (i.e. au rang de G).

(2) Le rédacteur ignore si l'hypothèse que G est adjoint est indispensable.

Lemme 1. — Il suffit de prouver le théorème lorsque G est géométriquement simple.

(On dit que G est géométriquement simple si $G \otimes \bar{k}$ ne contient aucun sous-schéma en groupes distingué lisse sur \bar{k} , à part G et $\{e\}$; condition équivalente : le système de racines R associé est irréductible).

On peut d'abord supposer G indécomposable sur k . Le groupe $G \otimes \bar{k}$ est alors produit de composantes géométriquement simples S qui sont permutées transitivement par le groupe de Galois \mathcal{G} . Si \mathcal{H} est le sous-groupe de \mathcal{G} laissant fixe l'une de ces composantes S , cette composante est définie sur le corps K correspondant à \mathcal{H} (i.e. provient par extension des scalaires d'un sous-schéma de $G \otimes K$), et un argument standard montre que $G = \prod_{K/k} (S)$ (i.e. $R_{K/k}(S)$, pour les lecteurs habitués aux notations de Weil). De même, l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G s'identifie à $\prod_{K/k} \mathfrak{s}$, où \mathfrak{s} est l'algèbre de Lie de S . Si le théorème est vrai pour S , il existe $x \in \mathfrak{s}(K) = \mathfrak{g}(k)$ qui est régulier dans \mathfrak{s} ; on vérifie alors aisément qu'il est régulier dans \mathfrak{g} . C.Q.F.D.

343

À partir de maintenant, on suppose G géométriquement simple et l'on choisit un tore maximal T de G (on sait que c'est possible). On note X le groupe des caractères de $T \otimes \bar{k}$, R son système de racines, W son groupe de Weyl et E le groupe d'automorphismes de X conservant R . Le groupe W est un sous-groupe distingué de E .

Si T' est un autre tore de G , on note X', R', W', E' le groupe des caractères, système de racines, ..., correspondants. Si l'on choisit $y \in G(\bar{k})$ tel que $y \cdot (T \otimes \bar{k}) \cdot y^{-1} = T' \otimes \bar{k}$, on peut identifier X', R', W', E' à X, R, W, E grâce à $\text{int}(y)$. Changer y modifie cette identification par un automorphisme de X correspondant à un élément de W .

⁽¹⁾Ce théorème est dû à Chevalley. Le rédacteur tient à exprimer sa reconnaissance à l'American Express qui, en égarant une malle de manuscrits de Chevalley, l'a obligé à reconstituer la démonstration.

Le générateur canonique $x \mapsto x^q$ de \mathcal{G} opère sur X' en laissant stable R' ; il définit donc un élément $f_{T'}$ de E' . On posera en particulier $f = f_T$. Lorsqu'on identifie E' à E comme on vient de le dire, l'élément $f_{T'}$ se transforme en un élément f' de E , défini au remplacement près par $wf'w^{-1}$, avec $w \in W$. On va comparer cet élément à f :

Lemme 2. — *On a $f' \equiv f \pmod{W}$; réciproquement, tout $f' \in E$ vérifiant cette condition peut s'obtenir à partir d'un tore maximal T' de G .*

344 Posons $\bar{T} = T \otimes \bar{k}$, $\bar{T}' = T' \otimes \bar{k}$, et soit $y \in G(\bar{k})$ tel que $y\bar{T}y^{-1} = \bar{T}'$; comme $y^q\bar{T}y^{-q} = \bar{T}'$, on en conclut que $n = y^{-1}y^q$ appartient au normalisateur $N(T)$ de T . L'effet de f' sur les points de $T(\bar{k})$ est alors le suivant :

$$f'(t) = y^{-1}(yty^{-1})^q y = y^{-1}y^q t^q y^{-q} y = nt^q n^{-1}.$$

Si $w \in W$ est l'élément défini par n , cela montre que f' et $f \circ w$ ont même effet sur les points de \bar{T} , donc aussi sur ses caractères, et l'on a $f' = f \circ w$, d'où $f' \equiv f \pmod{W}$. Inversement, si $w \in W$ est donné, on le représente par un élément $n \in N(T)(\bar{k})$; grâce à un théorème classique de Lang, on peut écrire n sous la forme $n = y^{-1}y^q$, avec $y \in G(\bar{k})$; le tore $\bar{T}' = y\bar{T}y^{-1}$ est alors défini sur k , et le calcul précédent montre que le f' correspondant est égal à $f \circ w$.

Lemme 3. — *Soient X, R, W, E comme ci-dessus (R étant irréductible), et soit $\varphi \in E/W$. Il existe alors un élément $f \in E$ représentant φ , ainsi qu'une famille $\theta_1, \dots, \theta_n$ de racines jouissant des deux propriétés suivantes :*

- (1) $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ est une base de X .
- (2) R est réunion des orbites des θ_i par les puissances de f (i.e. tout $a \in R$ s'écrit $a = f^m \theta_i$, avec m et i convenables).

On donnera la démonstration un peu plus loin.

Voici maintenant un lemme d'algèbre linéaire :

Lemme 4. — *Soit V un espace vectoriel sur k , et soit $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ une base du dual de $V \otimes \bar{k}$. Il existe $x \in V$ tel que $\theta_i(x) \neq 0$ pour tout i .*

Soit V^* le dual de V , et soit \bar{W}_i le sous-espace de $V^* \otimes \bar{k}$ engendré par les conjugués de θ_i ; ce sous-espace est défini sur k , i.e. de la forme $W_i \otimes \bar{k}$. L'application évidente $W_1 \otimes \dots \otimes W_n \rightarrow \wedge^n V^*$ n'est pas nulle (sinon son extension à \bar{k} le serait aussi, ce qui est absurde puisque $\theta_i \in \bar{W}_i$, et $\theta_1 \wedge \dots \wedge \theta_n \neq 0$). Il existe donc une base de V^* formée d'éléments $u_i \in W_i$. Soit $x \in V$ tel que $u_i(x) \neq 0$ pour tout i (par exemple $u_i(x) = 1$). L'élément x répond à la question, car, si l'on avait $\theta_i(x) = 0$, les conjugués de θ_i s'annuleraient aussi en x , et il en serait de même de u_i , ce qui n'est pas le cas.

345 *Fin de la démonstration du théorème.*

En combinant les lemmes 2 et 3, on peut choisir un tore T dont l'élément f vérifie les propriétés du lemme 3. Si Y est le dual de X , l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}(\bar{k})$ de $\bar{T}^{(9)}$ s'identifie canoniquement à $Y \otimes \bar{k}$, et cette opération est compatible avec l'action du groupe de

⁽⁹⁾N.D.E. : on a changé T en \bar{T} .

Galois (ce dernier opérant sur $Y \otimes \bar{k}$ grâce à son action sur Y et sur \bar{k}). Soit $V = \mathfrak{t}(k)$ l'algèbre de Lie de T sur k . Un élément $x \in V$ est régulier si et seulement si il n'est annulé par aucune racine $\alpha \in R$, ou plutôt par aucune des formes linéaires $\bar{\alpha} \in V^* \otimes \bar{k}$ définies canoniquement par les $\alpha \in R$. D'après le lemme 4, on peut trouver un tel x qui ne soit annulé par aucune des racines θ_i ; mais toute racine est conjuguée d'une θ_i (c'est ce qu'exprime la condition (2) du lemme 3); il s'ensuit que x n'est annulé par aucune racine, et c'est bien un élément régulier.

Démonstration du lemme 3.

Elle s'appuie sur les propriétés des *transformations de Coxeter*. Rappelons brièvement en quoi cela consiste :

Soit a_1, \dots, a_n un système simple de racines de R , et, pour tout i , soit r_i la symétrie correspondant à a_i . Posons :

$$c = r_1 \cdots r_n.$$

On a $c \in W$; bien entendu l'élément c dépend du choix du système simple (a_1, \dots, a_n) ainsi que de l'ordre des a_i ; toutefois on démontre que sa classe de conjugaison ne dépend d'aucun de ces choix. On appelle *c l'élément de Coxeter* du système considéré. On démontre (nous l'admettrons) que *c n'admet pas 1 pour valeur propre*.

Lemme 5. — Posons $\theta_i = r_n \cdots r_{i+1}(a_i)$. Alors :

- (a) Les θ_i forment une base du groupe X engendré par les racines,
- (b) On a $\theta_i > 0$ et $c(\theta_i) < 0$ pour tout i .⁽²⁾
- (c) Toute racine $a \in R$ telle que $a > 0$ et $c(a) < 0$ est égale à l'une des θ_i .
- (d) R est réunion des orbites des θ_i par les puissances de c .

346

Il est clair que θ_i est de la forme $a_i + \sum_{j>i} m_{ij} a_j$, avec $m_{ij} \in \mathbb{Z}$, ce qui démontre (a). Les assertions (b) et (c) sont conséquences de la remarque suivante : la symétrie r_i conserve le signe de toute racine distincte de $\pm a_i$, et change le signe de $\pm a_i$.

Enfin, pour (d) on remarque qu'une orbite de c ne peut être formée entièrement de racines positives (resp. négatives), car, en prenant la somme de ces racines on trouverait un élément non nul de X invariant par c , et l'on a bien voulu admettre que c n'admet pas 1 pour valeur propre. Il y a donc nécessairement dans toute orbite un élément $a > 0$ tel que $c(a) < 0$, et on applique (c).

Remarque. — On a esquissé la démonstration précédente seulement pour faciliter la tâche du lecteur; on aurait pu se borner à renvoyer aux textes canoniques sur Coxeter (cf. par exemple Koszul, Séminaire Bourbaki, 1959/1960, exposé 191). Lesdits textes contiennent d'autres résultats : les orbites de c ont toutes le même nombre h d'éléments, et chacune ne contient qu'un seul θ_i . En particulier $h = \text{Card}(R)/n$.

Revenons maintenant à la *démonstration du lemme 3*. Distinguons trois cas :

- (1) L'élément $\varphi \in E/W$ donné est égal à l'élément neutre.

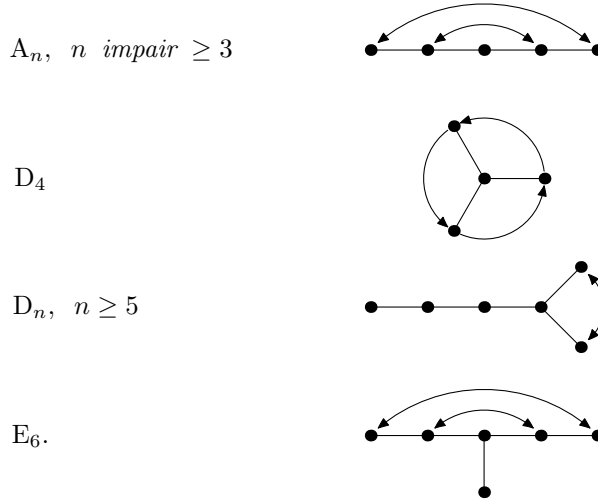
On doit alors prendre $f \in W$; on choisit $f = c$; ça marche d'après le lemme 5.

⁽²⁾Pour la relation d'ordre définie par (a_1, \dots, a_n) .

(2) Le système R est du type A_n , avec n pair ≥ 2 , et φ est l'unique élément non trivial de E/W .

347 On sait que $-1 \notin W$; on prend alors $f = -c$. Un calcul simple montre que c est d'ordre $h = n + 1$; son ordre est donc impair. Si $a \in R$ est une racine quelconque, on a $a = c^m \theta_i$ pour un couple (m, i) , cf. lemme 5; quitte à ajouter h à m , on peut supposer m pair, et on voit que l'on a alors $a = (-c)^m \theta_i = f^m \theta_i$. Les orbites des θ_i remplissent donc bien R .

(3) L'élément $\varphi \in E/W$ est non trivial, et R est de l'un des types suivants :



(Un coup d'oeil sur la classification montre que ce sont bien là tous les cas (avec A_n , n pair) où E/W est non trivial.)

Soit S un système simple de racines, que nous ne numérotions pas pour l'instant. On sait que E est produit semi-direct de W et du groupe Ψ des permutations de S qui laissent invariante la matrice de Cartan (ou le diagramme de Dynkin, c'est la même chose). Le groupe E/W s'identifie ainsi à Ψ , et en particulier φ correspond à un élément $\psi \in \Psi$. On constate par inspection des diagrammes de Dynkin (cf. figures ci-dessus) que toute orbite de ψ dans S est formée de racines deux à deux orthogonales (i.e. non liées dans le diagramme). [Noter que ce ne serait pas le cas pour A_n (n pair), ce qui nous a obligé à traiter ce cas séparément.] Si σ est une telle orbite, les symétries r_a , $a \in \sigma$, commutent entre elles; leur produit sera noté ρ_σ . Il est clair que ρ_σ commute à ψ .

348 Ceci étant, choisissons sur S un ordre total tel que toute orbite soit un segment pour cette relation d'ordre; cela revient à numéroter les éléments de S : $S = \{a_1, \dots, a_n\}$. Soient $\theta_1, \dots, \theta_n$ les racines définies plus haut, et $c = r_1 \cdots r_n$ l'élément de Coxeter correspondant. L'élément c est produit des ρ_σ , les σ étant rangés dans un certain ordre; il s'ensuit qu'il commute à ψ . On pose alors $f = c\psi$. On remarque en plus que ψ permute les θ_i entre eux. En effet, on a $\psi(\theta_i) > 0$ puisque $\theta_i > 0$ et $c(\psi(\theta_i)) = \psi(c(\theta'_i)) < 0$, donc (lemme 5, (c)), $\psi(\theta_i)$ est égal à un θ_j . Il est maintenant immédiat

que $f = c\psi$ répond à la question. En effet, si $a \in \mathbb{R}$, on a $a = c^m\theta_i$ pour un couple (m, i) , d'où $a = f^m(\psi^{-m}\theta_i) = f^m\theta_j$ pour un certain j . C.Q.F.D.

Remarque. — On peut prouver que, sauf dans le cas (2), toute orbite de f a exactement $h = \text{Card}(\mathbb{R})/n$ éléments et contient un θ_i et un seul. Dans le cas (2), certains des θ_i sont inutiles.

