EXPOSÉ XV

COMPLÉMENTS SUR LES SOUS-TORES D'UN PRÉSCHÉMA EN GROUPES. APPLICATION AUX GROUPES LISSES.

par M. Raynaud (*)

0. Introduction

349

Cet exposé complète et reprend partiellement les exposés XI et XII ; la connaissance des exposés XIII et XIV n'est pas indispensable. Poursuivant l'effort entrepris dans XII, nous travaillerons sur des S-préschémas en groupes non nécessairement affines et non nécessairement séparés sur S.

Les paragraphes 1, 2, 3, 4 sont consacrés à l'étude des sous-tores d'un préschéma en groupes. On obtient des théorèmes de relèvement infinitésimal (§ 2) et global (§ 4), où un rôle essentiel est joué par les points d'ordre fini (§ 1).

Les paragraphes 5, 6 et 7 sont indépendants des paragraphes précédents. La considération des voisinages infinitésimaux conduit à la représentabilité du foncteur des sous-groupes lisses égaux à leur normalisateur connexe (§ 5). Aux § § 6 et 7, on s'intéresse plus spécialement aux sous-groupes de Cartan.

Enfin, on donne au § 8 une condition nécessaire et suffisante pour que le foncteur des sous-tores d'un groupe lisse, ou celui des tores maximaux, soit représentable.

1. Relèvement des sous-groupes finis

350

1. *Sous-groupes de type multiplicatif finis, lisses et centraux*

Proposition 1.1. — *Soient* S *un schéma affine,* S_0 *un sous-schéma fermé de* S *défini par un idéal de carré nul,* G *un* S*-préschéma en groupes,* H_0 *un sous-schéma en groupes de* $G_0 = G \times_S S_0$*, qui soit lisse sur* S_0*, de type fini, et de type multiplicatif. Alors, pour qu'il existe un sous-schéma en groupes de* G*,* de type multiplicatif*, qui*

(0) version xy du 1/12/08

(*) Cet exposé et les deux suivants (Exp. XVI et XVII) ne correspondent pas à des exposés oraux du séminaire. Ils développent, avec quelques compléments, la substance de notes manuscrites (succintes) de A. Grothendieck, écrites en 1964, à l'occasion du présent séminaire.

relève H_0*, il faut et il suffit qu'il existe un sous-schéma* H' *de* G*,* plat sur S*, qui relève* H_0.

La nécessité de la condition est bien claire, prouvons la suffisance. Le groupe de type multiplicatif H_0 est quasi-isotrivial (X 4.5) ; d'après Exp. X 2.1, il existe un S-groupe de type multiplicatif H et un S_0-isomorphisme de groupes :

$$u_0 : \mathrm{H} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}_0 \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_0.$$

Comme H' est plat sur S et $\mathrm{H}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$ de présentation finie sur S_0 (Exp. IX 2.1 b)), H' est de présentation finie sur S ; par ailleurs, ses fibres sont lisses, donc H' est lisse sur S (EGA IV 17.5.1). Le schéma S étant affine, u_0 se relève donc en un S-morphisme de préschémas :

$$u : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}'.$$

Il résulte alors de Exp. III 2.1 et de Exp. IX 3.1 que le morphisme composé v_0 :
351 $\mathrm{H} \times_{\mathrm{S}_0} \mathrm{S} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}_0 \to \mathrm{G}_0$ se relève aussi en un S-morphisme de groupes :

$$v : \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G}.$$

Comme v_0 est une immersion, il en est de même de v. L'image de H par v est donc un sous-schéma en groupes de G, de type multiplicatif, qui relève H_0.

Proposition 1.2. — *Soient* S *un préschéma,* S_0 *un sous-préschéma de* S *défini par un faisceau d'idéaux localement nilpotent,* G *un* S*-préschéma en groupes,* plat *et de présentation finie sur* S *et* H_0 *un sous-schéma en groupes de* $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$ *qui est* lisse, fini *sur* S_0*, de type multiplicatif et* central*. Alors il existe un unique sous-schéma en groupes* H *de* G*, de type multiplicatif, qui relève* H_0*. De plus* H *est central.* (Voir XVII App. III, 1).

Proposition 1.2. bis. — *Soient* S*,* G*,* S_0*,* G_0 *comme ci-dessus,* H *un* S*-schéma en groupes, de type multiplicatif, lisse et fini sur* S *et* $u_0 : \mathrm{H}_0 = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0 \to \mathrm{G}_0$ *un homomorphisme central. Alors* u *se relève de manière unique en un homomorphisme* $u : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$*. De plus* u *est central.*

L'existence du relèvement u dans 1.2 bis se déduit facilement de 1.2 par la considération du graphe de u_0. Le relèvement u est unique et central d'après Exp. IX 3.4 et Exp. IX 5.1.

Démonstration de 1.2. L'unicité de H et le fait que H soit central résultent de Exp. IX 5.6 b) et de Exp. IX 3.4 bis. Compte tenu de l'unicité, pour prouver l'existence
352 de H, on peut supposer S affine et S_0 défini par un idéal de carré nul et il nous suffit (1.1) de trouver un sous-schéma de G, plat sur S, qui relève H_0.

Comme H_0 est lisse et fini sur S_0, on peut supposer, quitte à restreindre S, qu'il existe un entier $n > 0$, inversible sur S, tel que $\mathrm{H}_0 = {}_n\mathrm{H}_0$. Considérons le morphisme d'élévation à la puissance $n^{\text{ième}}$ dans G :

$$u : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}, \qquad x \mapsto x^n.$$

Notons encore ${}_n\mathrm{G}$ le « noyau de u », c.-à-d. l'image réciproque par u de la section unité de G (N. B. u n'est pas en général un morphisme de groupes). Admettons un instant le lemme suivant :

Lemme 1.3. — *Soient k un corps,* G *un schéma en groupes localement de type fini sur k, n un entier premier à la caractéristique de k, u le morphisme d'élévation à la puissance $n^{\text{ième}}$ dans* G*. Alors u est étale en tout point x de* G *qui appartient au centre de* G.

Comme G est plat et de présentation finie sur S, il résulte du lemme précédent et de EGA IV 17.8.2 que si x est un point de G se projetant en s dans S et qui appartient au centre de G_s, le morphisme u est *étale* en x. Si de plus x est un point de ${}_n\mathrm{G}$, ${}_n\mathrm{G}$ est donc étale sur S en x. Par hypothèse, le groupe H_0 est central et contenu dans ${}_n\mathrm{G}_0$, il est donc en fait contenu dans le plus grand ouvert V de ${}_n\mathrm{G}$ qui est étale sur S. Comme H_0 et $\mathrm{V} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0 = \mathrm{V}_0$ sont étales sur S_0, H_0 est un ouvert de V_0 (EGA **353**
IV 17.8.7 et 17.9.1). Mais alors, le sous-préschéma ouvert de V qui a même espace sous-jacent que H_0 est un sous-schéma de G, plat sur S, qui relève H_0.

Il nous reste à démontrer le lemme 1.3. Pour cela notons que le plus grand ouvert de G sur lequel u est étale est invariant par extension du corps de base (EGA IV 17.8.2) ; ceci nous permet de nous ramener au cas où x est rationnel sur k. Notons t_x la translation par x, qui est un k-automorphisme du schéma G. Comme x est dans le centre de G, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "t_x"'] & \mathrm{G} \arrow[d, "t_x^n"] \\ \mathrm{G} \arrow[r, "u"] & \mathrm{G} \end{tikzcd} .$$

Il suffit donc de montrer que u est étale à l'origine, mais cela a été vu dans $\mathrm{VII_A}$ 8.4.

2. *Relèvement global des groupes finis*

Lemme 1.4. — *Soient* A *un anneau local, séparé et complet pour la topologie définie par son idéal maximal* $\mathfrak{m}$*,* $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$*,* $\mathrm{S}_n = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n)$*. Alors pour tout préschéma* X *(resp. pour tout* S*-préschéma* X*), l'application canonique :*

(x) $$\mathrm{Hom}(\mathrm{S}, \mathrm{X}) \longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{Hom}(\mathrm{S}_n, \mathrm{X})$$

(resp. *:*

(xx) $$\Gamma(\mathrm{X}/\mathrm{S}) \longrightarrow \varprojlim_n \Gamma(\mathrm{X}_n/\mathrm{S}_n), \quad \text{où} \quad \mathrm{X}_n = \mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}_n)$$

est bijective.

(xx) est une conséquence facile de (x). Démontrons (x). **354**

Soit $u_n : \mathrm{S}_n \to \mathrm{X}$ ($n \in \mathbb{N}$), un système cohérent de morphismes. L'image y du point fermé de S_n est donc indépendante de n et u_n se factorise à travers $\mathrm{Spec}\, \mathscr{O}_y$. Les morphismes u_n définissent par passage à la limite projective un morphisme d'anneaux :

$$\widetilde{u} : \mathscr{O}_y \longrightarrow \varprojlim_n (\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n) = \mathrm{A}.$$

Ceci montre que (x) est surjective ; elle est injective dès que A est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

Corollaire 1.5. — *Soient* A *un anneau local noethérien complet,* $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal,* $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, $\mathrm{S}_n = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n)$, X *un schéma fini sur* S *et* Y *un* S*-préschéma. Alors l'application canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_n}(\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_n)$$

(*où* $\mathrm{X}_n = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n$ *et de même* $\mathrm{Y}_n = \cdots$) *est bijective.*

En effet, il résulte de EGA II 6.2.5 que X est une somme finie de S-schémas locaux finis sur S. Ceci nous ramène au cas où X lui-même est le spectre d'un anneau local noethérien complet. Mais $\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \Gamma(\mathrm{Z}/\mathrm{X})$ où Z est le X-préschéma $\mathrm{Y} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ et on applique la proposition précédente.

Proposition 1.6. — *Soient* A, S, S_n *comme ci-dessus et soient* G *et* M *deux* S*-préschémas en groupes,* M *étant fini sur* S*. Alors :*

a) *L'application canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}\text{-gr}}(\mathrm{M}, \mathrm{G}) \longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_n\text{-gr}}(\mathrm{M}_n, \mathrm{G}_n)$$

355 *est bijective.*

b) *Si* M *est de type multiplicatif et si* G *est lisse sur* S *l'application canonique :*

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}\text{-gr}}(\mathrm{M}, \mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_0\text{-gr}}(\mathrm{M}_0, \mathrm{G}_0)$$

est surjective. De plus, si $\varphi(u) = \varphi(u') = u_0$*, alors* u *et* u' *sont conjugués par un élément de* G(S) *se réduisant suivant l'élément unité de* $\mathrm{G}(\mathrm{S}_0)$.

c) *Si* M *est de type multiplicatif et lisse sur* S*, si* G *est plat de type fini sur* S*, et si* $u_0 : \mathrm{M}_0 \to \mathrm{G}_0$ *est un homomorphisme central,* u_0 *se relève de manière unique en un homomorphisme*

$$u : \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{G}.$$

De plus u *est central si* G *est à fibres connexes.*

Démonstration. a) Résulte de 1.5, du fait que $\mathrm{M} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{M}$ est fini sur S et de la caractérisation des morphismes de groupes comme étant ceux rendant commutatif le diagramme bien connu :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{M} \arrow[r, "u \times u"] \arrow[d] & \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \arrow[d] \\
\mathrm{M} \arrow[r, "u"] & \mathrm{G}
\end{tikzcd}\quad .$$

b) D'après Exp IX 3.6, on peut construire un système cohérent d'homomorphismes $u_n : \mathrm{M}_n \to \mathrm{G}_n$ qui relèvent un homomorphisme $u_0 : \mathrm{M}_0 \to \mathrm{G}_0$. D'où la première assertion de b), compte tenu de a).

Si maintenant u et u' sont deux relèvements de u_0, alors u_n et u'_n sont conjugués **356**
par un élément g_n de $\mathrm{G}(\mathrm{S}_n)$ qui relève l'élément unité de $\mathrm{G}(\mathrm{S}_0)$ (Exp. IX 3.6) ; *loc. cit.* implique aussi que l'on peut choisir les g_n de façon cohérente, donc (1.4) provenant d'une section g de $\mathrm{G}(\mathrm{S})$. Les morphismes u et $\mathrm{int}(g)u'$ coïncident alors modulo $\mathfrak{m}^n$ pour tout n, donc coïncident (1.5).

c) L'existence et l'unicité de u résultent de a) et de 1.2 bis. Si G est à fibres connexes, u est central d'après Exp. IX 5.6 a).

2. Relèvement infinitésimal des sous-tores **357**

1. *Énoncé du théorème*

Nous allons donner un théorème de relèvement infinitésimal des sous-tores d'un préschéma en groupes qui ne fait pas appel à des hypothèses de lissité (contrairement à Exp. IX 3.6 bis) et qui par ailleurs répond à une question très naturelle[(1)] : suffit-il de pouvoir relever « suffisamment » de points d'ordre fini d'un sous-tore T_0, pour être assuré de pouvoir relever T_0 (infinitésimalement bien sûr) ?

Théorème 2.1. — *Soient* S *un schéma affine noethérien,* S_0 *un sous-schéma fermé de* S *défini par un idéal* J *de carré nul,* G *un* S*-préschéma en groupes de type fini,* $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$*,* T_0 *un sous-tore de* G_0*, q un entier > 0 inversible sur* S*. Supposons que pour tout entier n égal à une puissance de q, il existe un sous-schéma* M_n *de* G*,* plat *sur* S*, tel que* $\mathrm{M}_n \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0 = {}_n\mathrm{T}_0$*. Alors il existe un sous-tore* T *de* G *tel que* $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0 = \mathrm{T}_0$.

Le théorème 2.1 nous sera utile par les deux corollaires suivants :

Corollaire 2.2. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien,* S_0 *un sous-préschéma fermé de* S *défini par un faisceau d'idéaux localement nilpotent,* G *un* S*-préschéma en groupes de type fini,* T_0 *un sous-tore de* $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$*, q un entier > 0 inversible sur* S *; enfin, l'entier n parcourant les puissances de q, soit* (M_n) *un système cohérent* **358**
de S*-sous-schémas en groupes de* G*, de type multiplicatif, qui relève les* ${}_n\mathrm{T}_0$ *(N. B. Le système de sous-groupes de type multiplicatif* (M_n) *est dit* cohérent *si* $\mathrm{M}_m = {}_m(\mathrm{M}_n)$ *lorsque l'entier m divise n.) Alors il existe un et un seul sous-tore* T *de* G *tel que* $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0 = \mathrm{T}_0$ *et* ${}_n\mathrm{T} = \mathrm{M}_n$ *pour tout n.*

Corollaire 2.3. — *Soient* G *un* S*-préschéma en groupes,* plat *et de présentation finie sur* S*,* S_0 *un sous-préschéma fermé de* S *défini par un faisceau d'idéaux de type fini et localement nilpotent,* T_0 *un tore central de* $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$*. Alors il existe un et un seul sous-tore* T *de* G*, qui relève* T_0*. De plus* T *est central.*

(1)N.D.E. : L'idée d'approximer un tore par ses sous-groupes finis apparaît dans la preuve de Grothendieck sur la connexité des centralisateurs de tores, voir § 4.6 de BIBLE.

Remarque 2.4. — Nous laissons au lecteur le soin de formuler l'analogue des énoncés 2.1, 2.2, 2.3, où au lieu de relever un sous-tore de G_0, on se donne un tore T sur S et on se propose de relever un morphisme

$$u_0 : T_0 \longrightarrow G_0$$

(on se ramène aux cas précédents par la considération du graphe de u_0).

Montrons comment on déduit les corollaires 2.2 et 2.3 de 2.1.

Démonstration du corollaire 2.2.
L'unicité de T résulte de Exp. IX 4.8 b) et de Exp. IX 4.10. Pour prouver l'existence de T, on peut donc se ramener au cas où S est affine, donc noethérien, et au cas où S_0 est défini par un idéal de carré nul.

359 ***Lemme 2.5***. — *Soient* G *un* S-*préschéma en groupes, de présentation finie, et* H *un sous-schéma en groupes de* G, *de type multiplicatif,* lisse *sur* S. *Alors* $\underline{\mathrm{Centr}}_G(H)$ *est représentable par un sous-préschéma en groupes de* G, *de présentation finie.*

Le lemme résulte de Exp. VIII 6.5 e), sans hypothèse de lissité sur H, lorsque G est séparé sur S. Dans le cas présent, on remarque que l'assertion à démontrer est locale pour la topologie fpqc, ce qui nous permet de supposer H diagonalisable, donc de la forme $D_S(M)$. On peut aussi supposer S affine, puis S noethérien grâce à EGA IV 8. Comme H est lisse sur S et de type fini, l'ordre q du sous-groupe de torsion de M est inversible sur S (Exp VIII 2.1 e)). Il est alors immédiat (cf. Exp. IX 4.10) que les sous-groupes ${}_nH$, où n parcourt les puissances de q, sont schématiquement denses dans H (Exp. IX 4.1). Mais ${}_nH$ est un revêtement complètement décomposé de S (c'est-à-dire est isomorphe à une somme directe finie de copies de S), donc $\underline{\mathrm{Centr}}_G({}_nH) = Z_n$ est représentable par l'intersection des centralisateurs dans G des sections de ${}_nH$ au-dessus de S. Il suffit alors d'appliquer le lemme :

Lemme 2.5. bis. — *Soient* S *un préschéma noethérien,* G *un* S-*préschéma en groupes de type fini,* H *un sous-groupe de type multiplicatif de* G, H_i *une famille filtrante croissante de sous-groupes de type multiplicatif de* G, *et supposons que* $Z_i = \underline{\mathrm{Centr}}_G(H_i)$ *soit représentable par un sous-préschéma en groupes de* G. *Alors la famille des*
360 Z_i *est stationnaire. Si de plus les* H_i *sont schématiquement denses dans* H, *on a* $Z_i = \underline{\mathrm{Centr}}_G(H)$ *pour i assez grand.*

Pour voir que la famille des Z_i est stationnaire, il suffit de montrer que la famille des ensembles sous-jacents $\mathrm{ens}(Z_i)$ est stationnaire. En effet, la valeur stationnaire sera une partie fermée d'un ouvert U de G, et quitte à remplacer G par U, on est ramené à étudier une famille filtrante décroissante de sous-préschémas *fermés* d'un préschéma noethérien. Un argument facile de constructibilité nous ramène au cas où S est intègre. Nous devons alors montrer que la famille des $\mathrm{ens}(Z_i)$ est stationnaire au-dessus d'un ouvert non vide de S. Or la fibre générique de G est séparée (Exp. VI_A 0.3), donc, quitte à restreindre S, on peut supposer G séparé sur S (EGA IV 8). Mais alors Z_i est fermé dans G (Exp. VIII 6.5 e)).

Pour établir la dernière assertion du lemme, notons Z la valeur stationnaire de la famille Z_i. Il est clair que $\underline{\mathrm{Centr}}_G(H)$ est un sous-foncteur de Z ; montrons que Z centralise H. Or soit E le sous-préschéma de $H \times_S Z$ noyau du couple de morphismes :

$$\begin{aligned} &H \underset{S}{\times} Z \rightrightarrows G \\ &(h, c) \longmapsto c \\ &(h, c) \longmapsto hch^{-1}. \end{aligned}$$

Le préschéma E majore $H_i \times_S Z$ pour tout i. D'autre part les H_i sont plats sur S, donc (EGA IV 11.10.9) pour tout point s de S, les $(H_i)_s$ sont schématiquement denses dans H_s et les $H_i \times_S Z$ sont schématiquement denses dans $H \times_S Z$. Comme G_s est séparé, E_s est fermé dans $(H \times_s Z)_s$ et par suite lui est égal. Mais alors E est fermé dans **361**
$H \times_S Z$, donc est égal à $H \times_S Z$. C'est dire que Z centralise H.

Revenons à la démonstration de 2.2. D'après 2.5, $Z_n = \underline{\mathrm{Centr}}_G(M_n)$ est représentable et d'après 2.5 bis, la famille décroissante des sous-préschémas Z_n est stationnaire, soit Z la valeur stationnaire. Le groupe Z majore T_0 et les M_n. Quitte à remplacer G par Z, on peut donc supposer les M_n centraux.

Nous sommes alors dans les conditions d'application du théorème 2.1 et il existe un sous-tore T de G, relevant T_0. Les groupes ${}_nT$ et M_n sont alors deux relèvements de ${}_nT_0$, donc sont conjugués (Exp. IX 3.2 bis) et par suite coïncident, M_n étant central. Le tore T répond à la question.

Démonstration du corollaire 2.3.

L'unicité de T résulte de Exp. IX 5.1 bis et le fait que T soit central résulte de IX 5.6 b). Cette remarque permet de nous ramener par le procédé habituel, au cas où S est affine, (donc S_0 défini par un idéal nilpotent de type fini) puis au cas où S est noethérien. En restreignant au besoin S, on peut supposer qu'il existe un entier q inversible sur S. Le corollaire 2.3 est alors conséquence de 2.2 et de 1.2.

Remarque 2.6. — On montre facilement que le corollaire 2.3 reste vrai si l'on remplace le tore T_0 par un sous-groupe de type multiplicatif lisse et central de G_0.

2. *Démonstration de* 2.1 **362**

a) Réduction au cas où $T_0 = \mathbb{G}_{m\,S_0}$.

Grâce à 1.1, on peut supposer que M_n est un sous-groupe de type multiplicatif. Utilisant Exp. IX 3.2 bis, on peut supposer que la famille des M_n est cohérente (2.2). Le centralisateur Z_n de M_n dans G est représentable (2.5) et la famille filtrante des Z_n est stationnaire (2.5 bis). Quitte à remplacer G par Z_n pour n assez grand, on peut donc supposer T_0 et les M_n centraux. L'unicité du relèvement de T_0 est alors assurée (Exp. IX 5.1 bis).

Procédant comme dans la démonstration de 1.1, on peut supposer qu'il existe un S-tore T et un S_0-isomorphisme :

$$u_0 : T \underset{S}{\times} S_0 \xrightarrow{\sim} T_0$$

et il est équivalent de relever u_0 ou de relever T_0. Vu l'unicité, il suffit de prouver l'existence d'un relèvement de u_0 après avoir fait une extension $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ fidèlement plate affine de type fini (descente fpqc), ce qui nous permet de supposer $\mathrm{T} = \mathbb{G}^r_{m\,\mathrm{S}}$ (Exp. X 4.5). Si la restriction de u_0 à chaque facteur $\mathbb{G}$ se relève en un S-morphisme, nécessairement central, on en déduit immédiatement un relèvement de u_0. Bref, on peut supposer $\mathrm{T}_0 = \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}_0}$.

b) Définition de l'obstruction à l'existence d'un relèvement de T_0.

Pour prouver 2.1, il suffit d'après 1.1 de trouver un sous-schéma de G, plat sur S, qui relève T_0. Nous allons voir que l'on peut définir l'obstruction à l'existence d'un
363 tel relèvement comme un élément d'un certain $\mathrm{Ext}^1(\ ,\ )$ de faisceaux de modules.

Soit U un ouvert de G tel que T_0 soit fermé dans U et notons encore U (resp. U_0) le sous-schéma ouvert de G (resp. G_0) ayant U pour espace sous-jacent. Le faisceau $\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$, considéré comme faisceau sur U, est donc un quotient de $\mathscr{O}_{\mathrm{U}_0}$. Soit h l'épimorphisme canonique :

$$h : \mathscr{O}_{\mathrm{U}_0} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}.$$

Lemme 2.7. — *L'application canonique :*

$$h' = \mathrm{id}_{\mathrm{J}} \otimes h : \ \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{U}_0} \longrightarrow \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$$

se factorise (*évidemment de manière unique*) *en* $i \circ j_{\mathrm{U}}$ *où* j_{U} *est l'épimorphisme canonique :*

$$\mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{U}_0} \longrightarrow \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{U}} \simeq \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{U}_0}.$$

On doit montrer que $h'(\mathrm{K}) = 0$, où K est le noyau de j_{U}. Or pour tout entier n égal à une puissance de q, on a un épimorphisme :

$$h_n : \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0} \longrightarrow \mathscr{O}_{{}_n\mathrm{T}_0}$$

et comme ${}_n\mathrm{T}_0$ se relève en un schéma M_n plat sur S, le morphisme canonique :

$$j_n : \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{{}_n\mathrm{T}_0} \longrightarrow \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{M}_n}$$

est un isomorphisme.

364 Le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K} \arrow[r] & \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{U}_0} \arrow[r, "j_{\mathrm{U}}"] \arrow[d, "h'"] & \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{U}} \subset \mathscr{O}_{\mathrm{U}} \arrow[dl, "i"'] \\
 & \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0} \arrow[d, "h'_n"] & \\
 & \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{{}_n\mathrm{T}_0} \arrow[r, "\cong", "j_n"'] & \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{M}_n} \subset \mathscr{O}_{\mathrm{M}_n}
\end{tikzcd}$$

prouve que $h'(\mathrm{K})$ est contenu dans $\mathrm{Ker}\, h'_n$ pour tout n donc est contenu dans $\bigcap_n \mathrm{Ker}\, h'_n$ et il suffit de montrer que ce dernier est nul. Or le faisceau $\mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$ est égal au faisceau $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}[\mathbb{Z}]$, algèbre du groupe $\mathbb{Z}$ à coefficients dans $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$, tandis que $\mathscr{O}_{{}_n\mathrm{T}_0}$ est l'algèbre quotient : $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$.

Soit $a = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m \otimes m$ un élément de $\mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$. Les a_m sont donc des sections de J presque toutes nulles. Prenons n assez grand pour que les indices m pour lesquels a_m est non nul, aient des images distinctes dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Alors si $a \in \operatorname{Ker} h'_n$, on a nécessairement $a = 0$. Ceci prouve que $\bigcap_n \operatorname{Ker} h'_n = 0$, et démontre 2.7.

Soit alors K_0 le noyau de h ; considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{U}} \arrow[d, "\wr"] & & \mathrm{K}_0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{U}_0} \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & \mathscr{O}_{\mathrm{U}} \arrow[r] & \mathscr{O}_{\mathrm{U}_0} \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
 & \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0} & & \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0} \arrow[d] & \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$
.

Le faisceau $\mathscr{O}_{\mathrm{U}}$ définit un élément Φ du groupe $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{U}}}(\mathscr{O}_{\mathrm{U}_0}, \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{U}_0})$. Soit Ψ l'élément **365**
de $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{U}}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0})$ déduit de Φ par bifonctorialité de $\operatorname{Ext}^1(\ ,\ )$ grâce aux morphismes : $\mathrm{K}_0 \to \mathscr{O}_{\mathrm{U}_0}$ et $i : \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{U}_0} \to \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$. Il résulte de Exp. III 4.1 et du critère de platitude infinitésimal (confer. Exp. III 4.3) qu'il existe un sous-schéma de U, *plat sur* S, qui relève T_0, si et seulement si Ψ est nul.

Mais notons que T_0 est affine, il suffit donc (Exp. III 4.5 et 4.6) de montrer qu'il existe localement sur U, un sous-schéma plat sur S qui relève T_0. Bref, il suffit de montrer que l'image de Ψ dans le faisceau :

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{U}}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0})$$

est nulle. Nous noterons encore Ψ cet élément de $\Gamma(\mathrm{U}, \mathscr{E})$.

c) Réduction au cas S local artinien, à corps résiduel algébriquement clos.

Comme K_0 et $\mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$ sont des faisceaux cohérents, il en est de même du faisceau $\mathscr{E}$, de plus $\mathscr{E}$ a son support dans T_0 puisqu'il en est ainsi de $\mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0}$. Pour montrer que la section f de $\mathscr{E}$ est nulle, il suffit de voir que pour tout point u de T_0, l'image de **366**
f dans la fibre de $\mathscr{E}$ au point u est nulle. Mais la formation des $\mathscr{E}xt^i(\ ,\ )$ de faisceaux cohérents commute aux extensions plates de la base[(2)], de sorte que l'on est ramené à prouver l'existence d'un relèvement de $\mathrm{T}_0 \cap \operatorname{Spec} \mathscr{O}_u$ qui soit plat sur S. Soit s la projection de u sur S, on peut alors remplacer S par $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_s$ et G par $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \operatorname{Spec} \mathscr{O}_s$.

[(2)]N.D.E. : cf. EGA 0_{III}, 12.3.5.

Quitte encore à faire une extension fidèlement plate, on peut supposer que $\mathscr{O}_s$ a un corps résiduel algébriquement clos (EGA 0_{III} 10.3.1)

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathscr{O}_s$ et $\mathrm{S}_n = \operatorname{Spec} \mathscr{O}_s/\mathfrak{m}^n$. Supposons avoir montré que pour tout $n > 0$, l'obstruction au relèvement de $\mathrm{T}_0 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n = (\mathrm{T}_0)_n$ en un sous-schéma de $\mathrm{G}_n = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n$, plat sur S_n, soit nulle et soit T_n l'unique relèvement de $(\mathrm{T}_0)_n$, plat sur S_n qui est un sous-tore de G_n. Il est clair que si $n > n'$, on a :

$$(\mathrm{T}_n) \underset{\mathrm{S}_n}{\times} \mathrm{S}_{n'} = \mathrm{T}_{n'}.$$

Si alors u est un point de T_0 qui se projette sur s, il résulte du lemme ci-après, appliqué au système cohérent de relèvements $(\mathrm{T}_n \cap \operatorname{Spec} \mathscr{O}_u)$ de $(\mathrm{T}_0)_n \cap \operatorname{Spec} \mathscr{O}_u$, qu'il existe bien un relèvement de $\mathrm{T}_0 \cap \operatorname{Spec} \mathscr{O}_u$ plat sur $\mathscr{O}_s$. Nous sommes donc ramenés à prouver que Ψ est nul lorsque $\mathrm{S} = \mathrm{S}_n$ est le spectre d'un anneau artinien local à corps résiduel algébriquement clos et à prouver le :

Lemme 2.8. — *Soient* $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens,* $\mathfrak{m}$ *l'idéal maximal de* A, J *un idéal de carré nul de* A, M *un* B*-module de type fini,* $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}/\mathrm{J}$, $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}/\mathrm{JB}$, $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}/\mathrm{JM}$, N_0 *un* B_0*-module* quotient *de* M_0 *qui est* plat
367 *sur* A_0. *Pour tout entier* $n > 0$ *notons* A_n, $\mathrm{A}_{0,n}$, *etc. les objets obtenus par extension de la base :* $\mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathfrak{m}^n = \mathrm{A}_n$ *et soit* $\overline{\mathrm{J}}_n$ *l'image de* J *dans* A_n. *Pour tout entier* $n > 0$, *soit* N_n *un* B_n *module quotient de* M_n, *plat sur* A_n, *qui relève* $\mathrm{N}_{0,n}$ *et supposons que pour* $n \geqslant n'$, $\mathrm{N}_{n'}$ *s'obtienne à partir de* N_n *par extension de la base :* $\mathrm{A}_n \to \mathrm{A}_{n'}$. *Alors il existe un* B*-module* N, *quotient de* M, *plat sur* A, *qui relève* N_0.

Démonstration de 2.8.

Notons P_0 le noyau de l'épimorphisme : $\mathrm{M}_0 \to \mathrm{N}_0$. Pour tout $n > 0$, on a donc la diagramme commutatif suivant, où les lignes horizontales sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & & \mathrm{P}_{0,n} \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] & \overline{\mathrm{J}}_n \mathrm{M}_n \arrow[r] \arrow[dd] & \mathrm{M}_n \arrow[r] \arrow[dd] & \mathrm{M}_{0,n} \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \\
(*)_n & \overline{\mathrm{J}}_n \otimes_{\mathrm{A}_{0,n}} \mathrm{M}_{0,n} \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
 & 0 \arrow[r] & \overline{\mathrm{J}}_n \otimes_{\mathrm{A}_{0,n}} \mathrm{N}_{0,n} \arrow[r] & \mathrm{N}_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{N}_{0,n} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

De plus, par hypothèse, le diagramme $(*)_{n+1}$ se réduit suivant $(*)_n$ modulo $\mathfrak{m}^n$.

Le lemme d'Artin-Rees (Bourbaki, *Alg. comm.*, Chap. 3 § 3 cor. 1) montre que la
368 filtration définie sur JM (resp. $\mathrm{J} \otimes_{\mathrm{A}_0} \mathrm{M}_0$ et $\mathrm{J} \otimes_{\mathrm{A}_0} \mathrm{N}_0$) par les noyaux des morphismes :

$$\mathrm{JM} \longrightarrow \overline{\mathrm{J}}_n\mathrm{M}_n, \quad (\text{resp. } \mathrm{J}\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{M}_0 \longrightarrow \overline{\mathrm{J}}_n\otimes_{\mathrm{A}_{0,n}}\mathrm{M}_{0,n} \text{ et } \mathrm{J}\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{N}_0 \longrightarrow \overline{\mathrm{J}}_n\otimes_{\mathrm{A}_{0,n}}\mathrm{N}_{0,n})$$

est $\mathfrak{m}$B-bonne, de sorte qu'en passant à la limite projective sur les diagrammes $(*)_n$ et en notant $\widehat{\mathrm{Q}}$ le séparé complété d'un B-module Q pour la topologie $\mathfrak{m}$B-adique, on obtient le diagramme commutatif suivant où les deux lignes horizontales sont encore exactes :

$$\widehat{(*)} \qquad \begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & & \widehat{\mathrm{P}}_0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[rr] & & \widehat{\mathrm{JM}} \arrow[r] \arrow[dd] & \widehat{\mathrm{M}} \arrow[r] \arrow[dd] & \widehat{\mathrm{M}}_0 \arrow[r] \arrow[dd] & 0 \\
 & \mathrm{J}\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}_0}\mathrm{M}_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
0 \arrow[rr] & & \mathrm{J}\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}_0}\mathrm{N}_0 \arrow[r] & \varprojlim_n \mathrm{N}_n \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\mathrm{N}}_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Or $(\mathrm{B},\mathfrak{m}\mathrm{B})$ est un anneau de Zariski et $\mathrm{J}\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{N}_0$ est de type fini sur B, donc est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$B-adique. Le diagramme $\widehat{(*)}$ montre alors que le morphisme :

$$\mathrm{J}\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{M}_0 \longrightarrow \mathrm{J}\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{N}_0$$

déduit de l'épimorphisme $\mathrm{M}_0 \to \mathrm{N}_0$ se factorise à travers JM :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{J}\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{M}_0 \arrow[rr, "\text{can.}"] \arrow[dr] & & \mathrm{JM} \arrow[dl] \\
 & \mathrm{J}\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{N}_0 &
\end{tikzcd} .$$

Dans ces conditions, il résulte de Exp. III 4.1 et Exp. III 4.3 qu'il existe un B-module quotient N de M, plat sur A, qui relève N_0, si et seulement si un certain élément g de $\mathrm{E} = \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{B}}(\mathrm{P}_0, \mathrm{J}\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{N}_0)$ est nul. Plus précisément, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{JM} \longrightarrow \mathrm{M} \longrightarrow \mathrm{M}_0 \longrightarrow 0$$

définit un élément f de F, où F est le B-module $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{B}}(\mathrm{M}_0, \mathrm{JM})$, et g est l'image de f **369**
par le morphisme naturel $\mathrm{F} \to \mathrm{E}$ qui provient par bifonctorialité des morphismes :

$$\mathrm{P}_0 \longrightarrow \mathrm{M}_0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{JM} \longrightarrow \mathrm{J}\otimes_{\mathrm{A}_0}\mathrm{N}_0.$$

Il résulte du diagramme $\widehat{(*)}$ et de Exp. III 4.1 que l'image de g dans $\widehat{\mathrm{E}}$, canoniquement identifié à $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{B}}(\widehat{\mathrm{P}}_0, \mathrm{J}\widehat{\otimes}_{\mathrm{A}_0}\mathrm{N}_0)$, est nulle. Mais E est de type fini sur B, donc est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$B-adique et par suite, g est bien égal à 0, ce qui achève la démonstration de 2.8.

d) Étude de $\mathscr{E}$. Nous supposons donc que S est le spectre d'un anneau local artinien A, à corps résiduel k, algébriquement clos. Soit A_0 l'anneau de S_0, $\mathfrak{m}_0$ l'idéal maximal de A_0. Comme S_0 est artinien, T_0 est fermé dans G (Exp. VI_B 1.4.2) ; nous pouvons donc prendre l'ouvert U égal à G, de sorte que :

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_G}(K_0, J \otimes_{S_0} \mathscr{O}_{T_0}).$$

Soit B_0 l'anneau du S_0-schéma affine $T_0 = \mathbb{G}_{m, S_0}$ et $\overline{B}_0$ l'anneau de la fibre spéciale $T_0 \times_{S_0} \operatorname{Spec}(k) = \mathbb{G}_{m,k}$ de T_0. Le faisceau $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_{T_0}$-module cohérent, donc est défini par un B_0-module de type fini que nous noterons E.

Considérons le module gradué associé à E et à la filtration $\mathfrak{m}_0 B_0$-adique :

$$E_r = \mathfrak{m}_0^r E / \mathfrak{m}_0^{r+1} E.$$

370 Chaque E_r est donc un $\overline{B}_0$-module de type fini et $E_r = 0$ pour r assez grand, S_0 étant artinien.

Soit alors g une section de G au-dessus de S, qui sur S_0 induit une section g_0 de T_0. La translation (à gauche pour fixer les idées), par l'élément g, définit un « automorphisme de la situation » du point de vue du problème d'obstruction envisagé. En particulier, à g correspond un S_0-automorphisme du faisceau $\mathscr{E}$ qui laisse l'obstruction Ψ fixe. Plus précisément, g définit un automorphisme semi-linéaire du B_0-module E (relativement au A_0-automorphisme de B_0 défini par la translation par g_0 dans le groupe T_0). Par réduction modulo $\mathfrak{m}_0^{r+1}$, g définit donc un automorphisme semi-linéaire de E_r (relativement au k-automorphisme de $\overline{B}_0$ défini par la translation par $g_0 \times_{S_0} \operatorname{Spec}(k)$ dans $T_0 \times_{S_0} \operatorname{Spec}(k)$).

Lemme 2.9. — *Pour tout entier $r \geqslant 0$, E_r est un B_0-module localement libre.*

Soit x un point de T_0, $\kappa(x)$ son corps résiduel, $(E_r)_x$ « la fibre » de E_r en x égale à $E_r \otimes_{\overline{B}_0} \kappa(x)$, $\ell(x)$ le rang de $(E_r)_x$ sur $\kappa(x)$, ℓ la valeur maximum de $\ell(x)$ lorsque x parcourt les points de T_0. Notons L le plus grand sous-schéma fermé de $\operatorname{Spec} \overline{B}_0 = \mathbb{G}_{m,k}$, au-dessus duquel E_r est localement libre de rang ℓ (TDTE IV Lemme 3.6). Soit β un point de $L(k)$ (il en existe, L étant de type fini sur k algébriquement clos) et soit α un point de $G_{m,k}(k)$ d'ordre égal à une puissance n de q. Le point α est donc rationnel
371 sur k et comme, par hypothèse, ${}_nT_0$ se relève en un sous-schéma M_n étale sur S, il existe une section a de G au-dessus de S, qui relève α et qui, au-dessus de S_0, est une section de T_0. Les remarques faites plus haut montrent alors que les fibres de E_r sont k-isomorphes aux points β et $\alpha\beta$ de $\mathbb{G}_{m,k}(k)$. Mais les points d'ordre une puissance de q sont denses dans $\mathbb{G}_{m,k}$ et il en est de même de leurs translatés par β. Comme L est fermé dans $\mathbb{G}_{m,k}$ et que $\mathbb{G}_{m,k}$ est réduit, L est égal à $\mathbb{G}_{m,k}$ et E_r est localement libre sur $\overline{B}_0$, de rang ℓ.

e) Fin de la démonstration du théorème 2.1.

Soit $\mathrm{K}_0(n)$ le faisceau d'idéaux de $\mathscr{O}_{\mathrm{G}_0}$ qui définit le sous-schéma fermé ${}_n\mathrm{T}_0$. Le faisceau K_0 [(3)] est donc un sous-faisceau de $\mathrm{K}_0(n)$. Posons pour simplifier :

$$\mathrm{R} = \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}(n) = \mathrm{J} \otimes_{\mathrm{S}_0} \mathscr{O}_{{}_n\mathrm{T}_0}.$$

Le faisceau $\mathrm{R}(n)$ est donc un quotient de R, et on a le diagramme d'applications :

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{K}_0 \arrow[d] & \\
 & & & \mathrm{K}_0(n) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{G}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_{\mathrm{G}} \arrow[r] & \mathscr{O}_{\mathrm{G}_0} \arrow[r] & 0 \\
 & \mathrm{R} \arrow[d] & & & \\
 & \mathrm{R}(n) & & &
\end{tikzcd}$$

Utilisant alors la bifonctorialité de $\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\ ,\ )$, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathscr{O}_{\mathrm{G}_0}, \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{G}}) \arrow[dr] & & \\
 & \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathrm{K}_0(n), \mathrm{R}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{R}) = \mathscr{E} \arrow[d] \\
 & \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathrm{K}_0(n), \mathrm{R}(n)) \arrow[r] & \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{R}(n)) .
\end{tikzcd}$$

Désignons encore par Φ l'élément de $\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathscr{O}_{\mathrm{G}_0}, \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{G}})$ défini par la suite exacte : **372**

$$0 \longrightarrow \mathrm{J}\mathscr{O}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{G}_0} \longrightarrow 0$$

de sorte que Ψ est l'image de Φ dans $\mathscr{E}$. Comme ${}_n\mathrm{T}_0$ se relève en un sous-schéma M_n de G, plat sur S, l'image de Φ dans le faisceau $\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathrm{K}_0(n), \mathrm{R}(n))$ est nulle (Exp. III 4.1), a fortiori l'image de Φ dans $\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{R}(n))$, qui est aussi l'image de Ψ, est nulle.

Lemme 2.10. — *Le morphisme canonique :*

$$\mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{R}) \otimes_{\mathrm{B}_0} \mathscr{O}_{{}_n\mathrm{T}_0} \longrightarrow \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_{\mathrm{G}}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{R}(n))$$

est injectif pour tout entier n.

(3) N.D.E. : introduit après le lemme 2.7.

En effet, le schéma affine $\mathrm{T}_0 = \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}_0}$ a pour anneau :

$$\mathrm{B}_0 = \mathrm{A}_0[\mathrm{T}, \mathrm{T}^{-1}].$$

Le sous-schéma ${}_n\mathrm{T}_0$ est défini par l'annulation de la section suivante de B_0 :

$$h(n) = \mathrm{T}^n - 1,$$

qui est régulière (EGA 0_{IV} 15.2.2) et reste régulière après tout changement de base : $\mathrm{S}'_0 \to \mathrm{S}_0$. On a donc une suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0} \xrightarrow{h(n)} \mathscr{O}_{\mathrm{T}_0} \longrightarrow \mathscr{O}_{{}_n\mathrm{T}_0} \longrightarrow 0.$$

373 Comme ${}_n\mathrm{T}_0$ est plat sur S, on obtient, par tensorisation par J sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}_0}$, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{R} \xrightarrow{h(n)} \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}(n) \longrightarrow 0$$

Puis la suite exacte des $\mathscr{E}xt$:

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_\mathrm{G}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{R}) \xrightarrow{h(n)} \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_\mathrm{G}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{R}) \longrightarrow \mathscr{E}xt^1_{\mathscr{O}_\mathrm{G}}(\mathrm{K}_0, \mathrm{R}(n)),$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Ce qui précède montre que pour tout entier n égal à une puissance de q, l'image de Ψ dans $\mathrm{E}/h(n)\mathrm{E}$ est nulle. Pour montrer que Ψ est nul, il suffit de voir que si $\Psi \in \mathfrak{m}_0^r\mathrm{E}$, alors $\Psi \in \mathfrak{m}_0^{r+1}\mathrm{E}$. Soit $\overline{\Psi}$ l'image de Ψ dans E_r. Il existe un élément $\Psi(n)$ de E tel que l'on ait :

$$\Psi = \Psi(n)h(n) \quad (n \text{ égal à une puissance de } q).$$

Nous avons remarqué que l'image $\overline{h(n)}$ de $h(n)$ dans $\overline{\mathrm{B}}_0$ est encore $\overline{\mathrm{B}}_0$-régulière. Comme E_s est localement libre sur $\overline{\mathrm{B}}_0$ pour tout s (2.9), la multiplication par $\overline{h(n)}$ dans E_s est injective. On en déduit immédiatement que $\Psi(n)$ est dans $\mathfrak{m}_0^r\mathrm{E}$. Soit $\overline{\Psi(n)}$ son image dans E_r, de sorte que l'on a la relation :

$$\overline{\Psi} = \overline{h(n)}\,\overline{\Psi(n)} \quad (n \text{ égal à une puissance de } q).$$

Ceci montre que l'ensemble F des points de $\mathbb{G}_{m,\,k}$ en lesquels $\overline{\Psi}$ prend la valeur 0 contient l'ensemble dense des points d'ordre une puissance de q. Par ailleurs F est un fermé (car E_r est localement libre sur $\overline{\mathrm{B}}_0$) et $\mathbb{G}_{m,\,k}$ est réduit, donc $\overline{\Psi}$ est nul.

Ceci achève la démonstration du théorème 2.1.

3. Caractérisation d'un sous-tore par son ensemble sous-jacent

374 1. *Énoncé du théorème*

Notations. — Si X est un préschéma, ens(X) désigne l'ensemble sous-jacent à X. Si X et S′ sont deux S-préschémas, $\mathrm{X}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{X} \times_\mathrm{S} \mathrm{S}'$, $u : \mathrm{X}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{X}$ le morphisme canonique, E une partie de ens(X), on désigne par $\mathrm{E}_{\mathrm{S}'}$ (ou $\mathrm{E} \times_\mathrm{S} \mathrm{S}'$) le sous-ensemble de $\mathrm{ens}(\mathrm{X}_{\mathrm{S}'})$ égal à $u^{-1}(\mathrm{E})$.

Théorème 3.1. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien,* G *un* S-*préschéma en groupes de type fini,* q *un entier* > 0 *inversible sur* S, E *une partie de* ens(G). *Considérons les assertions suivantes portant sur* E :

(i) *L'ensemble* E *est l'ensemble sous-jacent à un sous-tore* T *de* G.

(ii) a) *Pour tout point* s *de* S, *il existe un sous-tore* T_s *de* G_s *tel que* $E \cap \mathrm{ens}(G_s) = E_s$ *soit l'ensemble sous-jacent à* T_s.

b) *L'entier* n *parcourant les puissances de* q, *il existe une famille cohérente* (cf. 2.2) M_n *de sous-schémas en groupes de* G, *de type multiplicatif, telle que pour tout point* s *de* S, *on ait :*

$$(M_n)_s = {}_nT_s.$$

(iii) a) *comme* (ii) a).

b) *L'ensemble* E *est localement fermé dans* ens(G) *et la dimension des fibres* **375**
de E, *relativement à* S, *est localement constante.*

(iv) a) *comme* (ii) a).

b) *Pour tout* S-*schéma* S′ *qui est le spectre d'un anneau de valuation discrète, complet, à corps résiduel algébriquement clos,* $E_{S'}$ *est l'ensemble sous-jacent à un sous-tore de* $G_{S'}$.

Alors on a les implications suivantes :

A) (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv).

B) *Si* G *est séparé sur* S, *on a* (iii) $\Leftrightarrow$ (iv), *et de plus* E *est fermé.*

C) *Les conditions* (i), (ii), (iii) (et aussi (iv), *si* G *est séparé sur* S) *sont équivalentes dans les deux cas suivants :*

1^er^ cas : a) *Le préschéma* S *est réduit ou bien* G *est plat sur* S, *et*
b) *Pour tout point* s *de* S, T_s *est un tore* central *de* G_s.
2^ème^ cas : S *est normal.*

De plus, dans les deux cas ci-dessus, le tore T *d'espace sous-jacent* E *est unique.*

Remarques 3.2. — a) Lorsque S est réduit, il est inutile dans (ii) de supposer que la famille M_n est cohérente, cette condition étant entraînée par les autres hypothèses. En effet, si l'entier m divise n, les sous-groupes ${}_mM_n$ et M_m sont étales sur S, donc **376**
réduits, et ont même espace sous-jacent, donc ils coïncident.

b) Si S n'est plus supposé normal, il n'est plus vrai en général que (iii) $\Rightarrow$ (i) même lorsque S est réduit, géométriquement unibranche et que G est un schéma en groupes lisse sur S. En effet, considérons le sous-groupe de Borel de $SL_{2,S}$ formé des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} t & u \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix},$$

où S est la courbe affine sur un corps k ayant pour anneau :

$$k[x,y]/(y^2 - x^3).$$

Considérons alors l'ensemble E obtenu de la façon suivante : Au-dessus du « point de rebroussement de S » $(x = y = 0)$ nous prendrons le tore diagonal $(u = 0)$. Au-dessus de l'ouvert complémentaire ($x \neq 0$) nous prendrons le tore déduit du tore diagonal par conjugaison par l'élément :

$$\begin{pmatrix} 1 & y/x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'ensemble E obtenu satisfait à (iii) a), d'autre part il est fermé dans G et le sous-schéma réduit ayant pour ensemble sous-jacent E a pour équations :

$$\begin{cases} xu + y(t - t^{-1}) = 0 \\ u^2 - x(t - t^{-1})^2 = 0. \end{cases}$$

377 Ce n'est donc pas un sous-tore de G, puisque la fibre au-dessus du point de rebroussement n'est pas réduite.

Plan de la démonstration de 3.1.

Dans une première partie, nous établirons les implications « faciles » suivantes :

$$\begin{tikzcd} & \text{(ii)} \arrow[dr, Rightarrow] & \\ \text{(i)} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{(iv)} \\ & \text{(iii)} \arrow[ur, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

et (iv) $\Rightarrow$ $\big[$(iii) et E fermé$\big]$ si G est séparé sur S.

La démonstration des implications plus délicates se fera en trois étapes :

I) Réduction de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i) (sous les hypothèses de C), 1^{er} cas), au cas où S est normal.

II) (iii) $\Rightarrow$ (ii) si S est normal.

III) (ii) $\Rightarrow$ (i).

2. *Démonstration des assertions « faciles » contenues dans* 3.1

(i) $\Rightarrow$ (ii) et (iii) est trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Quitte à remplacer S par S′, nous pouvons supposer que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète. Soit t le point générique de S et s le point fermé.

Comme E est localement fermé, il existe un sous-préschéma de G, qui est réduit et dont l'espace sous-jacent est E, nous le noterons $\overline{\mathrm{E}}$. La fibre générique $\overline{\mathrm{E}}_t$ de $\overline{\mathrm{E}}$
378 est donc égale au sous-tore T_t de rang r de G_t (d'après (iii) a)). Soit E′ l'adhérence schématique de $\overline{\mathrm{E}}_t$ dans $\overline{\mathrm{E}}$. Le préschéma E′ est irréductible et sa fibre fermée E'_s n'est pas vide (elle contient la section unité de G_s) donc E'_s est de dimension r (EGA IV 14.3.10). Mais E'_s est alors un sous-schéma fermé de $\overline{\mathrm{E}}_s$ et ce dernier est de dimension r (d'après (iii) b)) et irréductible (car il a même espace sous-jacent que T_s), donc E'_s a même espace sous-jacent que $\overline{\mathrm{E}}_s$ et par suite $\mathrm{E}' = \overline{\mathrm{E}}$, ce qui prouve que $\overline{\mathrm{E}}$ est plat sur S.

Soit maintenant E″ l'adhérence schématique de $\overline{\mathrm{E}}_t$ dans G. Alors E″ est un sous-préschéma en groupes de G plat sur S (Exp. VIII 7.1) qui majore E′ donc $\overline{\mathrm{E}}$. La fibre fermée E''_s est un sous-groupe algébrique de G_s, de dimension r (*loc. cit.*). Comme T_s est un fermé irréductible de G_s, de dimension r, $\overline{E}_s$ a même ensemble sous-jacent que la composante neutre $(E''_s)^0$ de E''_s. Soit $(E'')^0$ la « composante neutre » de E'', c.-à-d. le sous-groupe ouvert de E'' complémentaire de la réunion des composantes irréductibles de E''_s ne contenant pas l'origine. On a donc :

$$E = \mathrm{ens}[(E'')^0].$$

Comme $\overline{E}$ et E'' sont réduits, on a même $\overline{E} = (E'')^0$. Finalement, $\overline{E}$ est un sous-préschéma en groupes de G, plat et de type fini sur S, à fibres connexes, donc séparé (Exp. VI_B 5.2), dont la fibre générique est un tore T_t, et dont la fibre fermée réduite est un tore T_s, mais alors $\overline{E}$ est un tore (Exp. X 8.8).

(ii) ⇒ (iv). On peut encore supposer que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, et nous gardons les notations introduites ci-dessus. L'adhérence schématique **379**
dans G de T_t est un sous-préschéma en groupes $\overline{T}$ de G, plat sur S, qui majore M_n pour tout entier n égal à une puissance de q. Par suite la fibre fermée de $\overline{T}$ est un sous-schéma fermé de G_s qui majore $(M_n)_s$ pour tout n, donc qui majore T_s. Pour des raisons de dimension, la « composante neutre » $\overline{T}^0$ de $\overline{T}$ admet E pour ensemble sous-jacent et on conclut comme ci-dessus que $\overline{T}^0$ est un sous-tore de G.

(iv) ⇒ [(iii) et E fermé], si G est séparé sur S. Montrons que E est fermé. [(4)] Prouvons d'abord le lemme :

Lemme 3.3. — *Si les conditions énoncées dans* 3.1 iv) *sont satisfaites,* E *est une partie localement constructible de* ens(G).

Par la méthode habituelle, nous sommes ramenés à étudier le cas où S est noethérien, intègre, de point générique η. Quitte à restreindre S, on peut supposer (Exp. VI_B 10.10) qu'il existe un sous-schéma en groupes de G, soit H, plat sur S, à fibres connexes, dont la fibre générique H_η soit égale à T_η. Pour prouver 3.3, il suffit alors de montrer que ens(H) = E. Or si s est un point de S, il existe, d'après EGA II 7.1.9, un S-schéma S′, spectre d'un anneau de valuation discrète, que l'on peut supposer complet à corps résiduel algébriquement clos, dont le point générique t' se projette sur η et le point fermé s' se projette sur s. D'après (iv) b), il existe un sous-tore $T_{S'}$ de $G_{S'}$ ayant $E_{S'}$ pour espace sous-jacent. Les deux sous-préschémas en groupes $T_{S'}$ et $H_{S'} = H \times_S S'$, de $G_{S'}$, sont plats sur S′, à fibres connexes et ont même fibre générique $T_{t'}$, donc ils coïncident avec la composante neutre de l'adhérence schématique de $T_{t'}$ **380**
dans $G_{S'}$. Par suite $\mathrm{ens}(H_s) = E_s$, donc ens(H) = E, ce qui prouve le lemme.

Ceci étant, sachant que E est localement constructible, pour voir que E est fermé, il suffit de montrer que toute spécialisation dans G d'un point de E est un point de E. Par la technique habituelle, nous sommes ramenés au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, complet, à corps résiduel algébriquement clos. Mais alors, le sous-tore de G, d'espace sous-jacent E ((iv) b)) est fermé dans G puisque G est séparé (Exp. VIII 7.12).

(4) N.D.E. : Le fait que (iv) ⇒ (iii) apparaitra au cours de la démonstration.

3. *Suite de la démonstration de* 3.1

I) Réduction de (iii) $\Rightarrow$ (i) (C, 1^{er} cas) au cas où S est normal.

a) Réduction au cas S affine réduit.

Nous supposons donc que pour tout point s de S, E_s est l'espace sous-jacent à un sous-tore central de G_s. L'unicité de T résulte alors de Exp. IX 5.1 bis, et de plus T sera nécessairement central (*loc. cit.*). Vu l'unicité, pour prouver l'existence de T, nous pouvons supposer S noethérien, affine d'anneau A. Si S n'est pas réduit, par hypothèse, G est plat sur S. D'après 2.3, il suffit alors de résoudre le problème pour $\mathrm{S}_{\text{réd}}$ et $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_{\text{réd}}$. Nous pouvons donc supposer de plus S réduit.

b) Réduction au cas où l'anneau A est de type fini sur $\mathbb{Z}$.

Démontrons d'abord deux lemmes :

381 ***Lemme 3.4***. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe algébrique,* E *un sous-ensemble de* G*, k' une extension de k,* $\mathrm{T}_{k'}$ *un sous-tore de* $\mathrm{G}_{k'}$ *ayant* $\mathrm{E}_{k'}$ *pour espace sous-jacent. Alors si* $\mathrm{T}_{k'}$ *est central ou si k est parfait,* E *est l'ensemble sous-jacent à un sous-tore de* G_k.

En effet, par descente fpqc, il suffit de montrer que les deux images réciproques de $\mathrm{T}_{k'}$ dans $\mathrm{G}_{k''}$, où $k'' = k' \otimes_k k'$ coïncident. Or elles ont même espace sous-jacent, à savoir l'image réciproque de E. Si $\mathrm{T}_{k'}$ est central, le lemme est alors conséquence de Exp. IX 5.1 bis. Si k est parfait, k'' est réduit et les deux images réciproques de $\mathrm{T}_{k'}$, étant lisses sur k'', sont réduites, donc coïncident.

Remarque 3.5. — Il résulte du lemme précédent que dans l'énoncé de 3.1 (iv), la propriété (iv) a) est conséquence de (iv) b) dans les deux cas suivants :

(1) On suppose que les corps résiduels des points de S sont parfaits.

(2) Pour tout S' comme dans (iv) b), on suppose que le tore d'espace sous-jacent égal à $\mathrm{E}_{\mathrm{S}'}$, est central dans $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$.

Lemme 3.6. — *Soient* S *un préschéma limite projective de schémas affines* S_i (cf. EGA IV 8)*,* H *un* S*-schéma en groupes de type multiplicatif et de type fini. Alors il existe un indice i, un* S_i*-schéma en groupes* H_i *de type multiplicatif et de type fini et un* S*-isomorphisme :*

$$\mathrm{H}_i \underset{\mathrm{S}_i}{\times} \mathrm{S} \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}.$$

382 *Si de plus* H *est isotrivial, on peut supposer* H_i *isotrivial.*

Comme H est de type fini sur S, H est même de présentation finie sur S (Exp. IX 2.1 b)), il existe donc un indice ℓ et un S_ℓ-schéma en groupes H_ℓ tel que $\mathrm{H}_\ell \times_{\mathrm{S}_\ell} \mathrm{S}$ soit isomorphe à H (Exp. VI_{B}. 10). Posant $\mathrm{H}_i = \prod \mathrm{H}_\ell \mathrm{S}_i \mathrm{S}_\ell$, on a donc $\mathrm{H} \cong \prod \mathrm{H}_i \mathrm{S} \mathrm{S}_i$ pour tout $i \geqslant \ell$.

Comme H est de type fini sur S, H est quasi-isotrivial (Exp. X 4.5) donc trivialisé par un morphisme $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, étale surjectif. Utilisant la quasi-compacité de S, on voit facilement qu'il existe un recouvrement de S par un nombre fini d'ouverts affines S_α et pour tout α un morphisme étale, surjectif et de présentation finie $\mathrm{S}'_\alpha \to \mathrm{S}_\alpha$ qui trivialise $\mathrm{H}|_{\mathrm{S}_\alpha}$. Ce recouvrement (S_α) de S provient alors d'un recouvrement $(\mathrm{S}_{i,\alpha})$ de S_i pour i assez grand (EGA IV 8). Quitte à remplacer S_i par $\mathrm{S}_{i,\alpha}$ et S par S_α, on peut donc supposer que H est trivialisé par un morphisme $S' \to S$ étale surjectif et de présentation finie. Pour i assez grand, il existe alors un préschéma S'_i, un morphisme $S'_i \to S_i$ étale surjectif, de présentation finie et un S-isomorphisme $S'_i \times_{S_i} S \to S'$ (EGA IV 17.16). Posons alors pour j assez grand :

$$S'_j = S'_i \underset{S_i}{\times} S_j, \qquad H'_j = H_j \underset{S_j}{\times} S'_j, \qquad H' = H \underset{S}{\times} S'.$$

Vu le choix de S', il existe un groupe abélien M de type fini et un S-isomorphisme de schémas en groupes : $D_{S'}(M) \xrightarrow{\sim} H'$. Comme les S'_i sont quasi-compacts et que $S' = \varprojlim S'_i$, il résulte de Exp. VI_B 10 qu'il existe un indice j et un S'_j-isomorphisme de schémas en groupes :

$$D_{S'_j}(M) \xrightarrow{\sim} H'_j.$$

Mais c'est dire que H_j est un groupe de type multiplicatif quasi-isotrivial. **383**

Lorsque H est isotrivial, on procède de manière analogue en utilisant une trivialisation de H par un morphisme $S' \to S$ étale fini.

Ceci étant nous pouvons effectuer la réduction b) annoncée. L'anneau A de S est limite inductive filtrante de ses sous-anneaux A_i de type fini sur $\mathbb{Z}$. Soient $S_i = \operatorname{Spec} A_i$, $u_j : S \to S_j$ et $u_{jk} : S_k \to S_j$ $(k \geqslant j)$ les morphismes de transition. Comme S est noethérien et G de présentation finie sur S, il existe un indice i et un S_i-préschéma en groupes G_i, de type fini sur S_i, tel que G soit S-isomorphe à $G_i \times_{S_i} S$. De même, E étant localement fermé dans G, on peut supposer qu'il existe un sous-ensemble localement fermé E_i de G_i tel que $E = E_i \times_{S_i} S$ (EGA IV 8.3.11). Pour tout $j > i$, notons $G_j = G_j \times_{S_i} S_j$ et $E_j = E_i \times_{S_i} S_j$ et soit Q_j l'ensemble des points s de S_j tels que $(E_j)_s$ soit l'ensemble sous-jacent à un sous-tore central de $(G_j)_s$.

Il résulte de 3.4 que $Q_k = u_{jk}^{-1}(Q_j)$ pour $k \geqslant j$, et par hypothèse $\operatorname{ens}(S) = u_j^{-1}(Q_j)$ pour $j \geqslant i$. Par ailleurs je dis que Q_j est ind-constructible (EGA IV 1.9.4). En effet, comme S_j est noethérien, il suffit (EGA IV 1.9.10) de voir que si S est un schéma intègre noethérien, de point générique η, et si E_η est l'ensemble sous-jacent à un sous-tore central T_η de G_η, il existe un voisinage U de η tel que pour tout point s de U, E_s possède la même propriété. Or quitte à restreindre S, on peut supposer **384**
que le centre Z de G est représentable et qu'il existe un sous-schéma en groupes T de G dont la fibre générique est T_η (VI_B § 10). Mais alors, ens(T) et E sont deux sous-ensembles localement fermés de ens(G) qui coïncident sur la fibre générique, on peut donc trouver un voisinage U de η, tel que, au-dessus de U, ens(T) = E (EGA IV 8.3.11). Pour les mêmes raisons, on peut supposer que au-dessus de U, T est central puisque T est un tore (3.6).

Sachant maintenant que Q_j est ind-constructible, il résulte de EGA IV 8.3.4 que $Q_j = \operatorname{ens}(S_j)$ pour j assez grand. Nous pouvons alors remplacer S, G, E par S_j, G_j, E_j ce qui nous ramène au cas où S est un schéma affine réduit, de type fini sur $\mathbb{Z}$.

c) Réduction au cas où S est spectre d'un anneau local noethérien, réduit complet.

En raison de l'unicité du tore d'espace sous-jacent E, la technique habituelle (EGA IV 8) et le lemme 3.6 permettent de remplacer S par le spectre de l'anneau local A d'un point de S. Soit $\widehat{S}$ le spectre du complété $\widehat{A}$ de A pour la topologie définie par l'idéal maximal. Comme A est le localisé d'une algèbre de type fini sur $\mathbb{Z}$, $\widehat{S}$ est encore

réduit (EGA IV 7.6.5). Je dis qu'il suffit de résoudre le problème après extension de la base : $\widehat{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}$. En effet si $\widehat{\mathrm{T}}$ désigne le sous-tore de $\mathrm{G}_{\widehat{\mathrm{S}}}$ d'espace sous-jacent $\mathrm{E}_{\widehat{\mathrm{S}}}$, ses deux images réciproques dans $\mathrm{G}_{\widehat{\mathrm{S}}\times_{\mathrm{S}}\widehat{\mathrm{S}}}$ sont deux sous-tores centraux qui ont même
385 espace sous-jacent, donc coïncident (Exp. IX 5.1 bis) et par descente fpqc, $\widehat{\mathrm{T}}$ provient d'un tore T de G qui répond à la question (cf. 3.4).

d) Un lemme de descente.

Rappelons les propriétés suivantes des morphismes finis qui ont été signalées dans TDTE I : Soient S et S′ deux préschémas et $u : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ un morphisme fini. Alors :

(1) Le morphisme u est un *épimorphisme* si et seulement si le morphisme canonique de faisceaux :

$$\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \longrightarrow u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{S}'})$$

est injectif.

(2) Le morphisme u est un *épimorphisme effectif* (Exp. IV 1.3) si et seulement si le diagramme canonique :

$$0 \longrightarrow \mathscr{O}_{\mathrm{S}} \longrightarrow u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) \rightrightarrows u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{S}'})$$

est exact.

(3) Si de plus S est noethérien et si u est un épimorphisme, u est le composé d'une suite finie d'épimorphismes effectifs finis.

Nous sommes alors en mesure de prouver le lemme suivant dont la démonstration utilise une technique de descente non plate :

Lemme 3.7. — *Soient* S *un préschéma* localement noethérien, G *un* S*-préschéma en groupes de type fini,* S′ *un préschéma et* $u : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *un morphisme* fini. *Pour tout* S*-préschéma* T*, notons* M(T) *l'ensemble des sous-groupes de type multiplicatif de* G_{T}
386 (*resp. l'ensemble des sous-groupes de type multiplicatif et centraux de* G_{T}) *de sorte que* M *soit de manière naturelle un foncteur contravariant défini sur* **Sch**/S*. Alors si* u *est un* épimorphisme effectif (*resp. un épimorphisme*)*, le diagramme d'ensembles :*

$$(*) \qquad \mathrm{M}(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathrm{M}(\mathrm{S}') \rightrightarrows \mathrm{M}(\mathrm{S}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}')$$

est exact.

Démonstration. i) *Réduction au cas où* u *est un épimorphisme effectif.* Nous nous intéressons donc au foncteur des sous-groupes de type multiplicatif et centraux de G. L'injectivité de $\mathrm{M}(\mathrm{S}) \to \mathrm{M}(\mathrm{S}')$ est une question de nature locale sur S, et cette injectivité étant admise, l'exactitude de $(*)$ devient un problème de nature locale sur S. On peut donc supposer S affine noethérien.

Étudions le cas où $u : \mathrm{S} \to \mathrm{S}'$ est le composé de deux épimorphismes finis :

$$\mathrm{S}' \xrightarrow{v} \mathrm{S}'' \xrightarrow{w} \mathrm{S}.$$

Je dis que si les deux diagrammes :

$$(*)' \qquad \mathrm{M}(\mathrm{S}'') \longrightarrow \mathrm{M}(\mathrm{S}') \rightrightarrows \mathrm{M}(\mathrm{S}' \underset{\mathrm{S}''}{\times} \mathrm{S}')$$

$$(*)'' \qquad \mathrm{M}(\mathrm{S}) \longrightarrow \mathrm{M}(\mathrm{S}'') \rightrightarrows \mathrm{M}(\mathrm{S}'' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}'')$$

sont exacts, il en est de même de $(*)$.

En effet l'injectivité de $\mathrm{M(S)} \to \mathrm{M(S')}$ est claire. Si maintenant $\mathrm{T'}$ est un élément de : $\operatorname{Ker} \mathrm{M(S')} \rightrightarrows \mathrm{M(S' \times_S S')}$, a fortiori, $\mathrm{T'}$ appartient à $\operatorname{Ker} \mathrm{M(S')} \rightrightarrows \mathrm{M(S' \times_{S''} S')}$ donc par l'exactitude de $(*)'$, provient d'un unique élément $\mathrm{T''}$ de $\mathrm{M(S'')}$. Il nous suffit **387**
de montrer que $\mathrm{T''}$ appartient à $\operatorname{Ker} \mathrm{M(S'')} \rightrightarrows \mathrm{M(S'' \times_S S'')}$ car, vu l'exactitude de $(*)''$, $\mathrm{T''}$ se descendra sur S. Soient donc $\mathrm{T''_1}$ et $\mathrm{T''_2}$ les deux images inverses de $\mathrm{T''}$ dans $\mathrm{M(S'' \times_S S'')}$. Comme ce sont deux sous-groupes de type multiplicatif centraux de $\mathrm{G_{S'' \times_S S''}}$, pour montrer que $\mathrm{T''_1} = \mathrm{T''_2}$, il suffit de voir qu'ils ont mêmes fibres (Exp. IX 5.1 bis). Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S'} \arrow[d, "v"'] & \mathrm{S' \times_S S'} \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] \arrow[d, "v \times v"] \\
\mathrm{S''} & \mathrm{S'' \times_S S''}. \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right]
\end{tikzcd}$$

Le morphisme v est un épimorphisme fini donc est dominant (propriété (a) ci-dessus) et fermé, donc est surjectif et il en est de même de $v \times v$. Soit alors x'' un point de $\mathrm{S'' \times_S S''}$ et x' un point de $\mathrm{S' \times_S S'}$ au-dessus de x''. Il résulte de la commutativité du diagramme ci-dessus que les deux images réciproques de $(\mathrm{T''_1})_{x''}$ et $(\mathrm{T''_2})_{x''}$ dans $\mathrm{G}_{x'}$ coïncident, donc $(\mathrm{T''_1})_{x''} = (\mathrm{T''_2})_{x''}$ (EGA IV 2.2.15).

Ce qui précède et une récurrence immédiate sur le nombre des facteurs d'une factorisation de $u : \mathrm{S'} \to \mathrm{S}$ en épimorphismes effectifs (propriété c) rappelée ci-dessus) montrent que pour prouver l'exactitude de $(*)$ dans le cas des sous-groupes de type multiplicatif centraux, on peut se borner au cas où u est un épimorphisme effectif. Finalement, utilisant encore une fois Exp. IX 5.1 bis, on voit qu'il suffit de démontrer 3.7 lorsque M est le foncteur des sous-groupes de type multiplicatif de G et u un épimorphisme effectif.

ii) *Injectivité de* $\mathrm{M(S)} \to \mathrm{M(S')}$. Comme $u : \mathrm{S'} \to \mathrm{S}$ est un épimorphisme, le **388**
morphisme canonique :

$$\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \longrightarrow u_*(\mathscr{O}_{\mathrm{S'}})$$

est injectif ; par ailleurs, un S-groupe de type multiplicatif est plat sur S ; l'injectivité de $\mathrm{M(S)} \to \mathrm{M(S')}$ est donc une conséquence du lemme plus général suivant :

Lemme 3.8. — *Soient* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ *et* $g : \mathrm{S'} \to \mathrm{S}$ *deux morphismes de préschémas,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-module quasi-cohérent,* $\mathrm{X'} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S'}$, $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S'}}$, $\mathrm{Q}(\mathscr{F})$ *l'ensemble des* $\mathscr{O}_{\mathrm{X}}$*-modules quotients* $\mathscr{G}$ *de* $\mathscr{F}$ *qui sont quasi-cohérents et plats sur* S, $\mathrm{Q}(\mathscr{F}')$ *l'analogue relatif à* $\mathscr{F}'$, $\mathrm{X'}$ *et* $\mathrm{S'}$. *Supposons g quasi-compact et* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \to g_*(\mathscr{O}_{\mathrm{S'}})$ *injectif ; alors l'application canonique :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}(\mathscr{F}) &\longrightarrow \mathrm{Q}(\mathscr{F}') \\ \mathscr{G} &\longmapsto \mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S'}} \end{aligned}$$

est injective.

En effet, on peut supposer S affine, puis X affine. Le morphisme g étant quasi-compact, $\mathrm{S'}$ est alors réunion d'un nombre fini d'ouverts affines $\mathrm{S'_i}$. Quitte à remplacer $\mathrm{S'}$ par $\coprod \mathrm{S'_i}$ (opération qui conserve l'injectivité de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \to g_*(\mathscr{O}_{\mathrm{S'}})$), on peut supposer

S' affine. On est alors ramené à prouver le lemme suivant, dont la démonstration est immédiate :

389 ***Lemme 3.9***. — *Soient* $\mathrm{A} \to \mathrm{A}'$ *un homomorphisme injectif d'anneaux,* M *un* A-*module,* $\mathrm{N} = \mathrm{M}/\mathrm{P}$ *un* A-*module quotient plat sur* A, $\mathrm{M}' = \mathrm{M} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}'$, $\mathrm{N}' = \mathrm{N} \otimes_{\mathrm{A}} \mathrm{A}' = \mathrm{M}'/\mathrm{P}'$. *Alors* P *est l'image inverse de* P' *sous l'homomorphisme canonique* $\mathrm{M} \to \mathrm{M}'$ (*donc* N *et* P *sont connus quand on connaît* N' *et* P').

iii) *Exactitude de* 3.7 $(*)$ *en* $\mathrm{M}(\mathrm{S}')$. Soit T' un élément de $\operatorname{Ker} \mathrm{M}(\mathrm{S}') \rightrightarrows \mathrm{M}(\mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}')$. *Supposons avoir prouvé* iii) *lorsque* S *est spectre d'un anneau local noethérien.* Pour tout point s de S, il existe donc un sous-groupe de type multiplicatif T_s de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s})$ qui provient par descente de $\mathrm{T}' \times_{\mathrm{S}'} u^{-1} \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s})$. D'après (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 10 et 3.6), il existe un voisinage U de s dans S et un sous-schéma en groupes T de G au-dessus de U qui est de type multiplicatif et qui prolonge T_s. Soit U' l'image réciproque de U dans S'. On connaît alors deux sous-schémas de $\mathrm{G}'|_{\mathrm{U}'}$: $\mathrm{T}'|_{\mathrm{U}'}$ et $\mathrm{T} \times_{\mathrm{U}} \mathrm{U}'$ qui coïncident sur $u^{-1}(\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}))$. Si l'on considère $u^{-1}(\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}))$ comme étant la limite projective des schémas $u^{-1}(\mathrm{V})$ où V parcourt les voisinages ouverts de s dans U, il résulte de EGA IV 8 qu'il existe un ouvert V de U contenant s tel que $\mathrm{T} \times_{\mathrm{U}} \mathrm{U}'$ et T' coïncident au-dessus de $u^{-1}(\mathrm{V})$. Donc avec les hypothèses faites, T' se descend localement sur S, mais en raison de l'unicité prouvée dans ii), T' se descend alors globalement sur S. Bref, il suffit de prouver iii) lorsque S est le spectre d'un *anneau local noethérien.*

390 Notons alors $\widehat{\mathrm{S}}$ le spectre du complété de l'anneau de S et soient $\mathrm{S}'' = \mathrm{S}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, $\widehat{\mathrm{S}}' = \widehat{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$, $\widehat{\mathrm{S}}'' = \widehat{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'' = \widehat{\mathrm{S}}' \times_{\mathrm{S}} \widehat{\mathrm{S}}'$. Je dis qu'il suffit de montrer que le diagramme :

$$(*) \qquad \mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}}) \longrightarrow \mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}}') \rightrightarrows \mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}}'')$$

est exact en $\mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}}')$. Cela résulte du diagramme commutatif ci-dessous où la deuxième ligne est exacte en $\mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}}')$ par hypothèse, où les deux premières colonnes sont exactes (descente fpqc), et où l'application f est injective comme il résulte de ii) appliqué à l'épimorphisme fini :

$$\widehat{\mathrm{S}}' \underset{\mathrm{S}'}{\times} \widehat{\mathrm{S}}' \longrightarrow \widehat{\mathrm{S}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \widehat{\mathrm{S}}$$

déduit de $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ par le changement de base plat $\widehat{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \widehat{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M}(\mathrm{S}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{M}(\mathrm{S}') \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \mathrm{M}(\mathrm{S}'') \arrow[d] \\
\mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}}) \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}}') \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}''}) \\
\mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \widehat{\mathrm{S}}) \arrow[r, "f"] & \mathrm{M}(\widehat{\mathrm{S}}' \times_{\mathrm{S}'} \widehat{\mathrm{S}}') &
\end{tikzcd}$$

(le diagram-chasing est laissé au lecteur). Il résulte de la caractérisation b) des épimorphismes finis effectifs que le morphisme $\widehat{\mathrm{S}}' \to \widehat{\mathrm{S}}$, déduit de $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ par le changement de base plat $\widehat{\mathrm{S}} \to \mathrm{S}$, est encore un épimorphisme fini effectif. Nous sommes donc ramenés au cas où de plus S est le spectre d'un *anneau noethérien local complet.*

Notons S_0 le sous-schéma réduit de S qui a pour espace sous-jacent le point fermé de S. Soient T' un élément de $\operatorname{Ker} M(S') \rightrightarrows M(S'')$, T'' son image dans $M(S'')$. Comme $S'_0 = S' \times_S S_0$ est fidèlement plat sur S_0, il existe un S-sous-groupe de type multiplicatif T_0 de G_{S_0} dont l'image inverse dans $G_{S'_0}$ est $T'_{S'_0}$ (descente fpqc). Mais S est local **391**
noethérien complet, donc il existe un S-groupe de type multiplicatif T et un S_0-morphisme $u_0 : T \times_S S_0 \to T_0$ (Exp. X 3.3). L'image inverse u'_0 de u_0 au-dessus de S'_0 se prolonge de manière unique en un S'-isomorphisme $u' : T_{S'} \to T'$, toujours d'après Exp. X 3.3 (noter que S' étant fini sur S local complet est la somme d'un nombre fini de schémas locaux complets). Les deux images réciproques de u' au-dessus de S'' sont deux morphismes de $T_{S''}$ dans T'' qui coïncident sur $S_0 \times_S S''$, donc ils coïncident (*loc. cit.*). Comme T est plat sur S et que $S' \to S$ est un épimorphisme effectif fini, il résulte de TDTE I page 8 que le diagramme :

$$\operatorname{Hom}_S(T, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{S'}(T_{S'}, G_{S'}) \rightrightarrows \operatorname{Hom}_{S''}(T_{S''}, G_{S''})$$

est exact. Donc u' provient d'un morphisme de préschémas $u : T \to G$. De même $T \times_S T$ est plat sur S et par suite l'application :

$$\operatorname{Hom}_S(T \underset{S}{\times} T, G) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{S'}(T_{S'} \underset{S'}{\times} T_{S'}, G_{S'})$$

est injective. On en déduit immédiatement que u est un morphisme de groupes puisqu'il en est ainsi de u'. De plus u est un monomorphisme. En effet, notons d'abord que $\operatorname{Ker} u$ est plat sur S, car pour établir ce fait, on peut supposer S artinien local (EGA 0_{III} 10.2.2), donc G séparé (Exp. $\mathrm{VI_A}$ 0.3), mais alors $\operatorname{Ker} u$ est de type multiplicatif (Exp. IX 6.8) donc est plat sur S. Comme $\operatorname{Ker}(u) \times_S S' = \operatorname{Ker}(u') = 0$, on a $\operatorname{Ker}(u) = 0$ (3.8). Mais u étant un monomorphisme est une immersion (Exp. VIII, remarques 7.13) et le groupe image $u(T)$ est bien un élément de M(S) dont l'image dans $M(S')$ est T', ce qui achève de démontrer 3.7.

e) Fin de la démonstration de I). **392**

Nous sommes ramenés par la réduction c) au cas où S est le spectre d'un anneau local noethérien réduit et complet A. Soit S' le spectre du normalisé A' de A, qui est fini sur A d'après Nagata (EGA 0_{IV} 23.1.5) ; $S' \to S$ est un épimorphisme puisque A s'envoie injectivement dans A'. Supposons alors qu'il existe un tore T' de $G_{S'}$ ayant $E_{S'}$ pour espace sous-jacent. Les deux images inverses de T' dans $G_{S' \times_s S'}$ sont deux sous-tores centraux ayant même espace sous-jacent, donc ils coïncident (Exp. IX 5 bis) donc, d'après 3.7, T' provient d'un sous-tore central T de G_S qui admet évidemment E pour espace sous-jacent. Il suffit donc de démontrer l'existence de T', ce qui nous ramène au cas où S est normal et achève la démonstration de I).

II) Démonstration de (iii) ⇒ (ii) lorsque S est normal.

Nous pouvons nous limiter au cas où S est intègre ; soit t son point générique. Pour tout entier n égal à une puissance de q, soit ${}_nG$ le sous-préschéma de G « noyau » de l'élévation à la puissance $n^{\text{ième}}$ dans G. Comme E est localement fermé dans G (d'après (iii) b)), l'intersection de $\operatorname{ens}({}_nG)$ avec E est localement fermée dans ens(G) ; notons alors $E(n)$ le sous-préschéma réduit de G qui a $\operatorname{ens}({}_nG) \cap E$ pour espace sous-jacent.

Montrons que le morphisme structural : $E(n) \to S$ est *séparé* et *universellement ouvert.* Pour ces deux propriétés, on dispose d'un critère valuatif (EGA II 7.2.3 et

EGA IV 14.5.8). Soit donc S' un S-schéma qui est le spectre d'un anneau de valuation
393 discrète, complet à corps résiduel algébriquement clos. Nous avons démontré que 3.1 (iii) $\Rightarrow$ 3.1 (iv), donc il existe un sous-tore T' de $G_{S'}$ ayant $E_{S'}$ pour espace sous-jacent. Or ${}_nT'$ est fini et étale sur S' donc est séparé et universellement ouvert sur S' et il en est de même de $E(n) \times_S S'$ qui a même espace sous-jacent que ${}_nT'$.

Par ailleurs, les fibres de $E(n)$ ont le même nombre de points géométriques, à savoir r^n si r est le rang du tore T_t. Enfin, la fibre générique $E(n)_t$, étant réduite, est égale à ${}_nT_t$ donc est étale sur $\operatorname{Spec}(t)$. Comme S est normal, il résulte alors de SGA I 10.11 que $E(n)$ est un revêtement étale de S.

Si s est un point de S, $E(n)_s$ est étale sur $\operatorname{Spec}\kappa(s)$, donc est réduit et par suite coïncide avec le groupe de type multiplicatif ${}_nT_s$. Montrons que $E(n)$ est un sous-préschéma en groupes de G. En effet, soit m le morphisme

$$E(n) \underset{S}{\times} E(n) \longrightarrow G$$

induit par la multiplication dans G. L'application $\operatorname{ens}(m)$ sous-jacente à m se factorise à travers $E(n)$, donc m se factorise à travers le préschéma $E(n)$ puisque le premier membre $E(n) \times_S E(n)$ est étale sur S, donc réduit. Il résulte alors de Exp. X 4.8 a) que $E(n)$ est un sous-groupe de type multiplicatif. Comme on l'a déjà remarqué (3.2 a)) la famille des sous-groupes $E(n)$ est nécessairement cohérente. Nous avons donc prouvé que (iii) $\Rightarrow$ (ii) lorsque S est normal.

394 **III)** Démonstration de (ii) $\Rightarrow$ (i).

En fait nous allons montrer qu'il existe un unique sous-tore T de G d'espace sous-jacent égal à E et tel que ${}_nT = M_n$ pour tout n égal à une puissance de q. L'unicité de T résulte simplement de Exp. IX 4.8 b). Pour établir l'existence de T, compte tenu de l'unicité, nous pouvons supposer successivement que :

a) S est noethérien.

b) Les M_n sont des sous-groupes centraux. En effet, il suffit de remplacer G par $Z_n = \underline{\operatorname{Centr}}_G(M_n)$ pour n assez grand (2.5 et 2.5 bis),

c) S est le spectre d'un anneau local. Supposons en effet le problème résolu après tout changement de base : $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{S,s}) \to S$ où s parcourt les points de S. Soit T_s le sous-tore de $G \times_S \operatorname{Spec}(\mathscr{O}_{S,s})$ ainsi obtenu. Pour tout s il existe alors un voisinage ouvert U de s et un sous-tore T de $G|_U$ qui prolonge T_s (Exp. VI_B § 10 et 3.6). Nous avons démontré que 3.1 (ii) $\Rightarrow$ 3.1 (iv) ; comme S est noethérien, E est donc constructible (3.3). Par suite, quitte à restreindre U, on peut supposer que ens (T) = $E \times_S U$ (EGA IV 9.5.2). Mais alors, pour tout entier n égal à une puissance de q, ${}_nT$ et $M_n \times_S U$ sont deux sous-groupes de type multiplicatif de $G|_U$ qui ont mêmes fibres, donc qui coïncident, M_n étant central (Exp. IX 5.3 bis). Bref, avec les hypothèses faites, il existe une solution localement sur S, donc en raison de l'unicité, il existe une solution globale.

395 d) S est le spectre d'un anneau local noethérien complet, et si s est le point fermé, T_s est trivial. Cela résulte de EGA 0_{III} 10.3.1 et de la descente fpqc.

e) S est réduit. On applique 2.2.

f) S est normal. On applique le théorème de finitude de Nagata (EGA $0_{\rm IV}$ 23.1.5) et le lemme 3.7 dans le cas des sous-tores centraux.

Ces réductions étant faites, comme T_s est trivial, $(\mathrm{M}_n)_s$ est trivial, donc M_n est trivial (Exp. X 3.3). Si t est un point de S, les sous-groupes ${}_n\mathrm{T}_t$ de T_t sont donc triviaux pour tout n égal à une puissance de q, et il résulte facilement de Exp. X 1.4 que T_t lui-même est trivial. Il nous suffit alors de démontrer le lemme :

Lemme 3.10. — *Sous les hypothèses de* 3.1 (ii)*, supposons de plus que* S *soit noethérien et normal et que pour tout point* s *de* S, T_s *soit un tore trivial. Alors il existe un unique sous-tore* T *de* G *d'espace sous-jacent égal à* E*, tel que* ${}_n\mathrm{T} = \mathrm{M}_n$ *pour tout* n *égal à une puissance de* q*. De plus* T *est trivial.*

L'unicité de T résulte du fait que T étant lisse sur S, T est réduit. Pour prouver l'existence, on peut supposer S irréductible de point générique η. Soient r le rang de T_η, $\mathrm{T}' = \mathbb{G}^r_{m,\mathrm{S}}$, u_η un isomorphisme de T'_η sur T_η, ${}_nu_\eta$ la restriction de u_η à ${}_n\mathrm{T}'_\eta$. Comme ${}_n\mathrm{T}'$ et M_n sont triviaux, il existe un unique prolongement ${}_nu$ de ${}_nu_\eta$ en un S-isomorphisme de ${}_n\mathrm{T}'$ sur M_n. Je dis que pour tout point s de S, il existe un isomorphisme de groupes, nécessairement unique :

$$u_s : \mathrm{T}'_s \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_s$$

qui prolonge ${}_nu_s$ pour tout n égal à une puissance de q. En effet, soit S_1 un S-schéma, **396**
spectre d'un anneau de valuation discrète, complet, à corps résiduel algébriquement clos, dont le point générique t_1 se projette sur η et le point fermé s_1 sur s (EGA II 7.1.9). Il résulte de la démonstration de 3.1 (ii) $\Rightarrow$ 3.1 (iv) qu'il existe un sous-tore T^1 de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_1}$ tel que $(\mathrm{M}_n)_{\mathrm{S}_1} = {}_n\mathrm{T}^1$ pour tout n égal à une puissance de q. Comme S_1 est normal, T^1 est isotrivial (Exp. X 5.16) et il résulte de la classification des tores isotriviaux (Exp. X 1.2) et de SGA1 V 8.2 que T^1, ayant sa fibre générique triviale, est trivial. On peut donc prolonger l'isomorphisme $u_\eta \times_\eta t_1$ en un S_1-isomorphisme de schémas en groupes :

$$u^1 : \mathrm{T}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{S}_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}^1.$$

La restriction de u^1 à ${}_n\mathrm{T}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_1$ d'une part, et ${}_nu \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}^1$ d'autre part, coïncident sur la fibre générique par construction, donc coïncident. La restriction $u^1_{s_1}$ de u^1 à la fibre fermée réalise donc le prolongement cherché après extension du corps résiduel : $\kappa(s) \to \kappa(s_1)$. Il résulte alors de Exp. IX 4.8 a) et de la descente fpqc que $u^1_{s_1}$ se descend sur $\kappa(s)$ en un isomorphisme de groupes $u_s : \mathrm{T}'_s \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_s$ qui répond à la question.

Par ailleurs, T′ est lisse sur S qui est normal, donc est normal. Il résulte alors d'un critère facile de prolongement des applications rationnelles (EGA IV_4 20.4.6), que, pour qu'il existe un S-morphisme $u : \mathrm{T}' \to \mathrm{G}$ dont la restriction à T'_s, pour tout point s de S, soit le morphisme composé :

$$\mathrm{T}'_s \xrightarrow{u_s} \mathrm{T}_s \longrightarrow \mathrm{G}_s$$

il faut et il suffit qu'il en soit ainsi après tout changement de base $\mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}$, où S_1 est **397**
le spectre d'un anneau de valuation discrète complet, à corps résiduel algébriquement clos.

Or dans le cas présent, un raisonnement analogue à celui que l'on vient de faire, montre que la condition de prolongement est bien satisfaite. Notons u le S-morphisme $\mathrm{T}' \to \mathrm{G}$ ainsi obtenu.

Montrons que u est bien un morphisme de groupes. Soit $m_{\mathrm{T}'}$ (resp. m_{G}) le morphisme définissant la multiplication dans T' (resp. G). Nous devons vérifier que $m_{\mathrm{G}} \circ (u \times_{\mathrm{S}} u) = u \circ m_{\mathrm{T}'}$. Or le sous-préschéma des coïncidences de ces deux morphismes est un sous-préschéma de $\mathrm{T}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}'$, qui majore les fibres (car u_{S} est un morphisme de groupes), donc qui a même espace sous-jacent que $\mathrm{T}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}'$, donc est égal à ce dernier, puisque $\mathrm{T}' \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}'$ est lisse sur S, donc réduit.

Enfin notons que u est un monomorphisme (puisqu'il en est ainsi sur les fibres) donc est une immersion (Exp. VIII 7.9). L'image de T' par u est alors un sous-tore de G qui a E pour ensemble sous-jacent.

Ceci achève la démonstration du théorème 3.1.

4. Caractérisation d'un sous-tore T par les sous-groupes ${}_n\mathrm{T}$

398 1. *Énoncé du théorème principal*

Théorème 4.1. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien* connexe, G *un* S-*préschéma en groupes de type fini sur* S, q *un entier* > 1 *inversible sur* S, r *un entier positif. Pour tout entier* n *égal à une puissance de* q, *soit* $\mathrm{M}(n)$ *un sous-schéma en groupes de* G, *de type multiplicatif et de type* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$. *On suppose que :*

a) *La famille des sous-groupes* $\mathrm{M}(n)$ *est cohérente, c'est-à-dire que, si l'entier* m *divise* n, *on a :*

$${}_m\mathrm{M}(n) = \mathrm{M}(m).$$

b) *Il existe un point* s *de* S *et un sous-tore* T_s *de* G_s *tel que :*

$$\mathrm{M}(n)_s = {}_n\mathrm{T}_s \quad \textit{pour tout } n.$$

c) *Pour tout point* t *de* S, *il existe un sous-schéma fermé et affine* $\mathrm{F}_{\overline{t}}$ *de* $\mathrm{G}_{\overline{t}}$ *qui majore* $\mathrm{M}(n)_{\overline{t}}$ *pour tout* n.

Alors il existe un sous-tore T *de* G *et un seul, tel que* ${}_n\mathrm{T} = \mathrm{M}(n)$ *pour tout* n *égal à une puissance de* q.

On a un théorème analogue portant sur le relèvement des morphismes :

Théorème 4.1. bis. — *Soient* S, G *et* q *comme ci-dessus,* T *un* S-*tore, et pour tout entier* n *égal à une puissance de* q, *soit* $u(n)$ *un* S-*morphisme de groupes :* ${}_n\mathrm{T} \to \mathrm{G}$. *On suppose que :*

399 a) *La famille des morphismes* $u(n)$ *est cohérente, c.-à-d., si* m *divise* n, *on a :*

$$u(m) = u(n)|_{{}_m\mathrm{T}}.$$

b) *Il existe un point* s *de* S *et un morphisme de groupes :*

$$u_s : \mathrm{T}_s \longrightarrow \mathrm{G}_s$$

tel que $u_s|_{{}_n\mathrm{T}_s} = u(n)_s$ *pour tout* n *égal à une puissance de* q.

c) *Pour tout point* t *de* S, *il existe un sous-schéma fermé et affine* $\mathrm{F}_{\bar{t}}$ *de* $\mathrm{G}_{\bar{t}}$ *qui majore* $u(n)_{\bar{t}}\,({}_n\mathrm{T}_{\bar{t}})$ *pour tout* n.

Alors il existe un unique morphisme de groupes $u : \mathrm{T} \to \mathrm{G}$, *tel que pour tout* n *égal à une puissance de* q, *la restriction de* u *à* ${}_n\mathrm{T}$ *soit égale à* $u(n)$.

Remarque 4.2. — Utilisant la semi-continuité inférieure du rang abélien d'un préschéma en groupes plat de type fini sur le spectre d'un anneau de valuation discrète (confer. Exp. X 8.7) on peut, dans l'énoncé de 4.1 et de 4.1 bis, affaiblir la condition c) en demandant simplement que le sous-schéma fermé et affine $\mathrm{F}_{\bar{t}}$ exigé existe pour tout point maximal t de S.

Montrons comment 4.1 bis *résulte de* 4.1. Soit $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{T}$. Pour tout entier n égal à une puissance de q, considérons le morphisme de groupes :

$$v(n) : {}_n\mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{G}'$$

dont les projections sur G et T sont respectivment $u(n)$ et l'immersion canonique : ${}_n\mathrm{T} \to \mathrm{T}$. Le morphisme $v(n)$ est donc une immersion, soit $\mathrm{M}(n)$ le sous-groupe image. **400**
Il est clair que la famille des sous-groupes $\mathrm{M}(n)$ est cohérente au sens de 4.1, que le groupe $\mathrm{M}(n)_s$ est égal à ${}_n\mathrm{T}'_s$, où T'_s est le sous-tore de G'_s graphe de u_s, et que pour tout point t de S, le sous-schéma fermé et affine $\mathrm{F}_{\bar{t}} \times_{\bar{t}} \mathrm{T}_{\bar{t}}$ de $\mathrm{G}'_{\bar{t}}$ majore les sous-groupes $\mathrm{M}(n)_{\bar{t}}$ pour tout n. D'après 4.1 il existe donc un sous-tore T' de G' tel que ${}_n\mathrm{T}' = \mathrm{M}(n)$ pour tout n égal à une puissance de q. Soient f la restriction à T' de la projection de G' sur T, et $f(n)$ la restriction de f à $\mathrm{M}(n)$. On a :

$$f(n) \circ v(n) = \mathrm{id}_{{}_n\mathrm{T}}\,.$$

La fibre en s de T' est le tore déjà noté T'_s, égal au graphe de u_s (ceci résulte de Exp. IX 4.8 b)), donc f_s est un isomorphisme. Mais $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Coker} f$ sont des groupes de type multiplicatif (Exp. IX 2.7) de type constant, S étant connexe, donc réduits au groupe unité, et f est un isomorphisme. Soit v l'isomorphisme réciproque de f. On a :

$$v|_{{}_n\mathrm{T}} = v(n).$$

Par suite, le composé de v et de la projection de G' sur G est un morphisme $u : \mathrm{T} \to \mathrm{G}$ qui répond à la question. Ce qui précède prouve l'existence du morphisme u ; quant à l'unicité elle résulte de toute façon de Exp. IX 4.8 a).

2. *Application*

Nous nous proposons de généraliser le théorème 7.1 de Exp. IX.

Soient A un anneau local noethérien complet, I son idéal maximal, $\mathrm{S} = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$, **401**
$\mathrm{S}_m = \operatorname{Spec}(\mathrm{A}/\mathrm{I}^m)$. Pour tout préschéma X, posons $\mathrm{X}_m = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_m$.

Soient alors G un S-préschéma en groupes de type fini, T un S-tore, q un entier inversible sur S et $u_m : \mathrm{T}_m \to \mathrm{G}_m$ ($m \in \mathbb{N}$) une famille cohérente de morphismes de groupes. L'entier n parcourant les puissances de q, notons $u_m(n)$ la restriction de u_m à ${}_n\mathrm{T}_m$ et $u(n)$ l'unique morphisme de groupes :

$$u(n) : {}_n\mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{G}$$

qui prolonge les morphismes $u_m(n)$ pour tout m (1.6 a)). Nous dirons que la famille (u_m), $m \in \mathbb{N}$, est *admissible* si pour tout point t de S, il existe un sous-préschéma *fermé affine* $\mathrm{F}_{\overline{t}}$ de $\mathrm{G}_{\overline{t}}$ qui majore $u(n)_{\overline{t}}({}_n\mathrm{T}_{\overline{t}})$ pour tout n égal à une puissance de q (cette propriété est indépendante de q comme on va le voir).

Proposition 4.3. — *Avec les notations ci-dessus, l'application canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr}}(\mathrm{T}, \mathrm{G}) \longrightarrow \varprojlim_m \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_m\text{-gr}}(\mathrm{T}_m, \mathrm{G}_m)$$

induit un isomorphisme du premier membre sur le sous-ensemble du second membre formé des familles cohérentes « admissibles ».

En effet, il suffit d'appliquer 4.1 bis en prenant pour s le point fermé de S.

Corollaire 4.4. — *Avec les notations ci-dessus, supposons de plus que* G *est à fibres* affines*, alors l'application canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\text{S-gr}}(\mathrm{T}, \mathrm{G}) \longrightarrow \varprojlim_m \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}_m\text{-gr}}(\mathrm{T}_m, \mathrm{G}_m)$$

402 *est un isomorphisme.*

En effet, si G est à fibres affines, toute famille cohérente est « admissible ».

Remarque 4.5. — Lorsque G est *séparé,* on peut dans 4.3 remplacer l'anneau A par un anneau noethérien I-adique ; on peut en effet utiliser EGA III 5.4.1 au lieu de 1.6 a).

3. *Démonstration de* 4.1

Lemme 4.6. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe algébrique, q un entier premier à la caractéristique résiduelle de k, r un entier > 0,* $\mathrm{M}(n)$ *(n parcourant les puissances de q) une famille cohérente de sous-groupes de* G*, de type multiplicatif et de type* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$*. Alors il existe un plus petit sous-schéma fermé* H *de* G *qui majore les* $\mathrm{M}(n)$ *pour tout n. De plus,* H *est un sous-groupe algébrique de* G*, lisse, connexe et commutatif « dont la formation est compatible avec l'extension du corps de base ».*

Soient M le sous-ensemble de ens(G) réunion des ensembles sous-jacents aux sous-groupes $\mathrm{M}(n)$ pour tout n, et H le sous-schéma fermé réduit de G ayant l'adhérence de M pour espace sous-jacent. Comme $\mathrm{M}(n)$ est étale sur k donc réduit, $\mathrm{M}(n)$ est contenu dans H et par suite, H est le plus petit sous-schéma fermé de G qui majore $\mathrm{M}(n)$ pour tout n. Soit maintenant $\overline{k}$ une extension algébriquement close de k. Par
403 construction, les sous-schémas $\mathrm{M}(n)$ sont schématiquement denses dans H (Exp. IX 4.1), les $\mathrm{M}(n)_{\overline{k}}$ sont donc schématiquement denses dans $\mathrm{H}_{\overline{k}}$ (Exp. IX 4.5), par ailleurs $\mathrm{M}(n)_{\overline{k}}$ est réduit, il en résulte que $\mathrm{H}_{\overline{k}}$ est nécessairement égal au sous-schéma fermé et réduit de $\mathrm{G}_{\overline{k}}$ qui a pour espace sous-jacent l'adhérence de $\mathrm{M}_{\overline{k}}$. Ceci prouve que H est géométriquement réduit (EGA IV 4.6.1). La famille $\mathrm{M}(n)$ étant cohérente, M est stable par la loi de groupe, de plus $\mathrm{M} \times_k \mathrm{M}$ est dense dans ens$(\mathrm{H} \times_k \mathrm{H})$ et $\mathrm{H} \times_k \mathrm{H}$ est réduit (EGA IV 4.6.5) ; on en déduit immédiatement que H est un sous-groupe algébrique de G. De plus H est lisse sur S, car il est géométriquement réduit (Exp. $\mathrm{VI_A}$ 1.3.1) et H est commutatif puisque les $\mathrm{M}(n)$ sont commutatifs. Il reste à voir que H est

connexe. Soient H^0 la composante neutre de H, m le nombre de points géométriques de H/H^0, q^s l'exposant de q dans la décomposition en facteurs premiers de m. Pour tout entier n égal à une puissance de q, $q^s\mathrm{M}(n)$ est alors contenu dans H^0. Mais la famille $\mathrm{M}(n)$ est cohérente et $\mathrm{M}(n)$ est de type $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r$, par suite $q^s\mathrm{M}(nq^s) = \mathrm{M}(n)$. Donc H^0 majore $\mathrm{M}(n)$ pour tout n et par suite est égal à H.

Ceci étant, nous allons préciser la condition c) de 4.1. En effet, d'après ce qui précède, nous pouvons considérer le plus petit sous-schéma fermé H_t de G_t qui majore $\mathrm{M}(n)_t$ pour tout n. La formation de H_t commutant avec l'extension du corps de base (4.6), $\mathrm{H}_{\bar{t}} = \mathrm{H}_t \times_t \bar{t}$ est contenu dans le fermé affine $\mathrm{F}_{\bar{t}}$, donc est affine. Bref, H_t est affine. D'autre part, nous savons (4.6) que H_t est un groupe algébrique lisse, connexe, commutatif. Il résulte alors de la structure des groupes algébriques affines lisses commutatifs et connexes, sur un corps algébriquement clos (BIBLE 4 Th. 4), **404**
que $\mathrm{H}_{\bar{t}}$ est produit direct d'un tore $\mathrm{T}_{\bar{t}}$ et d'un groupe unipotent $\mathrm{U}_{\bar{t}}$. Mais alors $\mathrm{M}(n)_{\bar{t}}$ est nécessairement contenu dans $\mathrm{T}_{\bar{t}}$, donc $\mathrm{H}_{\bar{t}} = \mathrm{T}_{\bar{t}}$ et par suite, H_t est un tore.

Nous pouvons maintenant aborder la démonstration de 4.1.

a) Unicité de la solution : il suffit d'appliquer Exp. IX 4.8 b).

b) Cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète A complet, à corps résiduel algébriquement clos k. Notons K le corps des fractions de A, s le point fermé de S, t le point générique, J l'idéal maximal de A, $\mathrm{S}_m = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathrm{J}^m)$, $\mathrm{X}_m = \mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_m$.

Distinguons deux cas :

1er cas : Le point s de 4.1 b) est le point générique t de S. Soit alors T' l'adhérence schématique dans G du tore T_t. La fibre fermée T'_s est donc un sous-groupe algébrique de G_s, de dimension r, qui majore $\mathrm{M}(n)_s$ pour tout n, donc T'_s majore H_s. Mais H_s est un tore qui contient $\mathrm{M}(n)_s$ donc H_s a un rang au moins égal à r. Par suite H_s a même espace sous-jacent que la composante neutre de T'_s. La « composante neutre » $(\mathrm{T}')^0$ de T' est alors un sous-préschéma en groupes de G, plat, séparé (VI_{B} 5.2) dont la fibre générique T_t est un tore et la fibre fermée réduite H_s est un tore. Mais alors $(\mathrm{T}')^0$ est un tore (Exp. X 8.8) que nous notons T. Les groupes ${}_n\mathrm{T}$ et M_n sont lisses sur S, donc réduits et comme ils ont même espace sous-jacent, ils coïncident. Donc le tore T est la solution du problème.

2ème cas : Le point s de 4.1 b) est le point fermé s de S. Quitte à remplacer G par **405**
l'adhérence schématique dans G du plus petit sous-groupe algébrique H_t qui majore la famille $\mathrm{M}(n)_t$ (4.6), nous pouvons supposer G_t affine.

Pour tout entier $m \geqslant 0$, il résulte de 2.2 qu'il existe un unique sous-tore T_m de G_m qui relève T_s et tel que pour tout entier n égal à une puissance de q, on ait ${}_n\mathrm{T}_m = \mathrm{M}(n)_m$. Par ailleurs, soit $\mathrm{T}' = \mathbb{G}^r_{m,\mathrm{S}}$. Comme k est algébriquement clos, T_s est trivial et il existe un k-isomorphisme $u_s : \mathrm{T}'_s \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_s$. Le morphisme u_s se relève de manière unique en un S_m-isomorphisme $u_m : \mathrm{T}'_m \to \mathrm{T}_m$ (Exp. IX 3.3). La famille de morphismes u_m, $m \in \mathbb{N}$, définit à la limite un morphisme $\widehat{u}$ des complétés formels

$\widehat{\mathrm{T}}'$ et $\widehat{\mathrm{G}}$ de T′ et G le long de leur fibre fermée :

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathrm{T}'} \arrow[r, "\widehat{u}"] \arrow[d, "i"'] & \widehat{\mathrm{G}} \arrow[d, "j"'] \\ \mathrm{T}' & \mathrm{G} \end{tikzcd} \quad ,$$

où i et j désignent les morphismes canoniques.

Nous allons montrer que le morphisme $\widehat{u}$ est *algébrisable.* Pour cela nous allons nous ramener au cas où le groupe G est affine.

Lemme 4.7. — *Soient* S *le spectre d'un anneau de valuation discrète* A, X *et* Y *deux* S*-préschémas, quasi-compacts, quasi-séparés et plats sur* S. *Alors, l'application canonique :*

$$\Gamma(\mathrm{X}, \mathscr{O}_{\mathrm{X}}) \otimes_{\mathrm{A}} \Gamma(\mathrm{Y}, \mathscr{O}_{\mathrm{Y}}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Y}, \mathscr{O}_{\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}})$$

est un isomorphisme.

406 Soit $f : \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ (resp. $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{S}$) le morphisme structural. Comme X (resp. Y) est quasi-compact et quasi-séparé, il résulte de EGA I 9.2.2 et de EGA IV 1.7.4 que $f_*(\mathscr{O}_{\mathrm{X}})$ (resp. $g_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Y}})$) est une $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-algèbre quasi-cohérente qui correspond donc à un S-schéma affine $\widetilde{\mathrm{X}}$ (resp. $\widetilde{\mathrm{Y}}$). Par hypothèse, Y est plat sur S, il résulte alors de EGA III 1.4.15, compte tenu de EGA IV 1.7.21, que l'application canonique (déduite du morphisme canonique $\mathrm{X} \to \widetilde{\mathrm{X}}$) :

$$\Gamma(\widetilde{\mathrm{X}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Y}, \mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{X}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{X} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Y}, \mathscr{O}_{\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}})$$

est un isomorphisme. Mais X étant plat sur S, $\widetilde{\mathrm{X}}$ est plat sur S (car plat sur A équivaut à sans torsion). Appliquons encore EGA III 1.4.15 en permutant les rôles de X et Y, on obtient un isomorphisme :

$$\Gamma(\widetilde{\mathrm{X}}, \mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{X}}}) \otimes_{\mathrm{A}} \Gamma(\widetilde{\mathrm{Y}}, \mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{Y}}}) \simeq \Gamma(\widetilde{\mathrm{X}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \widetilde{\mathrm{Y}}, \mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{X}} \times_{\mathrm{S}} \widetilde{\mathrm{Y}}}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\widetilde{\mathrm{X}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{Y}, \mathscr{O}_{\widetilde{\mathrm{X}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{Y}})$$

d'où le lemme.

Dans le cas présent, le S-groupe G est plat sur S et de type fini, donc quasi-compact et quasi-séparé. On peut donc appliquer le lemme à $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$:

$$\Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}}) \otimes_{\mathrm{A}} \Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}}).$$

Au morphisme $m_g : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, définissant la multiplication dans G, correspond donc un morphisme :

$$\Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}}) \longrightarrow \Gamma(\mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}}) \otimes_{\mathrm{A}} \Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}})$$

donc un S-morphisme :

$$m_{\widetilde{\mathrm{G}}} : \widetilde{\mathrm{G}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \widetilde{\mathrm{G}} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{G}},$$

407 où $\widetilde{\mathrm{G}}$ désigne le S-schéma affine ayant $\Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_{\mathrm{G}})$ pour A-algèbre. Il est formel, à partir de là, de vérifier que $m_{\widetilde{\mathrm{G}}}$ munit $\widetilde{\mathrm{G}}$ d'une structure de S-schéma en groupes, telle que le morphisme canonique $v : \mathrm{G} \to \widetilde{\mathrm{G}}$ soit un morphisme de S-groupes.

Remarque 4.8. — $\widetilde{\mathrm{G}}$ joue le rôle d'un plus grand « quotient affine » de G, d'ailleurs, on peut montrer que $\widetilde{\mathrm{G}}$ est bien un quotient de G pour fpqc donc est de type fini sur S (XVII App. III, 2).

Dans le cas qui nous occupe, la fibre générique G_t de G est affine, il résulte alors de EGA I 9.3.3 que v_t est un isomorphisme. Comme $\widetilde{\mathrm{G}}$ est affine, la famille cohérente de morphismes :

$$w_m = v_m u_m : \mathrm{T}'_m \longrightarrow \widetilde{\mathrm{G}}_m \quad (m \in \mathbb{N})$$

provient d'un unique morphisme de S-groupes (Exp. IX 7.1)

$$w : \mathrm{T}' \longrightarrow \widetilde{\mathrm{G}}.$$

Soit alors T_t le sous-tore de G_t égal à $v_t^{-1} w_t(\mathrm{T}'_t)$. Le tore T_t est donc de rang r au plus (comme image d'un tore de rang r). Montrons que T_t majore $\mathrm{M}(n)_t$ pour tout n. En effet, soit $u(n)_m$ le S_m-isomorphisme $({}_n\mathrm{T}')_m \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}(n)_m$ obtenu par restriction de u_m à $({}_n\mathrm{T}')_m$. La famille cohérente de morphismes $u(n)_m$ provient d'un unique S-isomorphisme $u(n) : {}_n\mathrm{T}' \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}(n)$ (car $\mathrm{M}(n)$ est fini sur S). Pour tout entier $m \geqslant 0$, on a alors les égalités :

$$w_m|_{({}_n\mathrm{T}')_m} = (v_m u_m)|_{({}_n\mathrm{T}')_m} = (v \circ u(n))_m.$$

Par suite, $w|_{{}_n\mathrm{T}'} = v \circ u(n)$ (1.6 a)). En particulier, on a :

$$w_t|_{({}_n\mathrm{T}')_t} = v_t \circ u(n)_t,$$

donc $v_t^{-1} w_t\,({}_n\mathrm{T}')_t = u(n)_t\,({}_n\mathrm{T}')_t = \mathrm{M}(n)_t$.

Ceci prouve bien que T_t majore $\mathrm{M}(n)_t$ et entraîne que T_t est de rang r. On termine **408**
comme dans le premier cas déjà étudié, en considérant l'adhérence schématique dans G de T_t, soit T''. Comme T_t majore $\mathrm{M}(n)_t$, alors T''_s majore $\mathrm{M}(n)_s$ donc majore T_s (théorème de densité). D'autre part, T'' étant plat sur S et T_t de dimension r, T''_s est de dimension r (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 4). Bref, T_s a même espace sous-jacent que la composante neutre de T''_s, et on conclut comme dans le premier cas que la composante neutre de T'' est un sous-tore de G qui répond à la question.

c) Fin de la démonstration de 4.1.

Pour prouver l'existence du sous-tore T, on peut supposer S réduit (2.2). Compte tenu de 3.1 (ii) $\Rightarrow$ (i), il suffit alors de prouver que l'ensemble U des points x de S tels qu'il existe un sous-tore T_x de G_x avec ${}_n\mathrm{T}_x = \mathrm{M}(n)_x$ pour tout n égal à une puissance de q, est égal à ens(S). Le tore T_x dont il est question est nécessairement unique et par descente fpqc, il suffit de prouver son existence après extension du corps résiduel de x (Exp. IX 4.8 b)).

Ceci étant, comme S est localement noethérien et connexe et comme U n'est pas vide (il contient le point s de 4.1 b)), on est ramené, par un raisonnement immédiat, à prouver que si x et x' sont deux points de S, x étant une spécialisation de x', et si l'un des deux points appartient à U, alors les deux points sont dans U. Par la technique habituelle (EGA II 7.1.9) on se ramène au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos, cas qui a été traité dans b).

Ceci achève la démonstration du théorème 4.1.

5. Représentabilité du foncteur : sous-groupes lisses identiques à leur normalisateur connexe

409 ***Proposition 5.1***. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie,* H *un sous-préschéma en groupes de* G*, lisse à fibres connexes. Alors :*

a) *Le normalisateur* N *de* H *dans* G *est représentable par un sous-préschéma fermé de* G*, de présentation finie sur* S*.*

b) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *L'immersion canonique* $\mathrm{H} \to \mathrm{N}$ *est une immersion ouverte.*

ii) *Le groupe* N *est lisse le long de la section unité et sa composante neutre, qui est alors représentable* (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 3.10)*, est égale à* H.

iii) *Pour tout point* s *de* S*, on a* $\mathrm{H}_s = (\mathrm{N}_s)^0$.

Démonstration. Le préschéma en groupes H est localement de présentation finie sur S (H est lisse sur S) et à fibres connexes, donc est de présentation finie sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.3.3). L'assertion a) est alors une conséquence de Exp. XI 6.11. L'équivalence des conditions figurant dans b) est mise ici pour mémoire et a été démontrée dans $\mathrm{VI_B}$ 6.5.1.

Ceci étant, nous pouvons énoncer le théorème principal de ce paragraphe :

410 ***Théorème 5.2***. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie sur* S*,* $\mathscr{L}_{\mathrm{G}}$ (*ou simplement* $\mathscr{L}$ *s'il n'y a pas d'ambiguité*) *le* S*-foncteur tel que pour tout* S*-préschéma* S′ *on ait :*

$\mathscr{L}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S}') =$ *ensemble des sous-préschémas en groupes de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$*, lisses sur* S′*, à fibres connexes, qui sont identiques à leur normalisateur connexe.*

Alors le foncteur $\mathscr{L}$ *est représentable par un* S*-préschéma, réunion d'une famille croissante* $(\mathrm{U}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *de sous-préschémas ouverts, quasi-projectifs, de présentation finie sur* S*, donc a fortiori séparé sur* S*.*

Premières réductions.

Pour tout entier $r \geqslant 0$, soit $\mathscr{L}_r$ le sous-foncteur de $\mathscr{L}$ tel que pour tout S-préschéma S′, on ait :

$\mathscr{L}_r(\mathrm{S}') =$ ensemble des sous-préschémas en groupes de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, lisses, à fibres connexes, identiques à leur normalisateur connexe et de *dimension relative* r.

Comme la dimension des fibres d'un groupe lisse est une fonction localement constante, le monomorphisme canonique : $\mathscr{L}_r \to \mathscr{L}$ est représentable par une immersion à la fois ouverte et fermée. Il suffit donc de montrer que pour tout r, $\mathscr{L}_r$ est représentable par un S-préschéma possédant les propriétés ci-dessus, car $\mathscr{L}$ sera alors représentable par le S-préschéma somme $\coprod_{r\in\mathbb{N}} \mathscr{L}_r$.

411 Pour tout entier $n \geqslant 0$, tout S-préschéma S′ et tout sous-préschéma en groupes H de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, nous noterons $\mathrm{H}^{(n)}$ le $n^{\text{ième}}$ *invariant normal* de la section unité $\mathrm{S}' \to \mathrm{H}$ de

H (EGA IV 16.1.2), de sorte que $\mathrm{H}^{(n)}$ est un faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$-modules, de type fini, qui correspond au $n^{\text{ième}}$ voisinage infinitésimal de la section unité de H. Si H est lisse sur S′ de dimension relative r, $\mathrm{H}^{(n)}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre dont le rang $\varphi(n,r)$ ne dépend que de n et de r. Par ailleurs, comme H est un sous-préschéma de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, on a un épimorphisme canonique, compatible avec l'extension de la base :

$$\mathrm{G}^{(n)} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'} \simeq \mathrm{G}^{(n)}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{H}^{(n)}.$$

Introduisons alors le S-schéma projectif :

$$\mathrm{P}_{\varphi(n,r)} = \mathrm{Grass}_{\varphi(n,r)}\Big((\mathrm{G})^{(n)}\Big)$$

(EGA I 2° éd. 9.7 ; cf. aussi Séminaire Cartan, 1960/61, Exp. N°14 de A. Grothendieck). Il résulte alors des remarques précédentes que l'application :

$$\mathrm{H} \longmapsto \mathrm{H}^{(n)}$$

définit un morphisme canonique :

$$u_{n,r} : \mathscr{L}_r \longrightarrow \mathrm{P}_{\varphi(n,r)}.$$

Le groupe G opère de manière naturelle sur $\mathrm{G}^{(n)}$, donc sur $\mathrm{P}_{\varphi(n,r)}$, par l'intermédiaire de la représentation :

$$\mathrm{int} : \mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{G}), \qquad g \mapsto \mathrm{int}(g).$$

De plus, si S′ est un S-préschéma *quasi-compact* et H un élément de $\mathscr{L}_r(\mathrm{S}')$, on sait **412**
(Exp. XI 6.11) que pour n assez grand, on a :

$$\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}^{(n)}).$$

Pour chaque entier $n \geqslant 0$, introduisons le sous-foncteur $\mathscr{L}^n_r$ de $\mathscr{L}_r$ tel que pour tout S-préschéma S′, on ait :

$\mathscr{L}^n_r(\mathrm{S}') =$ ensemble des sous-groupes H de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ qui appartiennent à $\mathscr{L}_r(\mathrm{S}')$ et tels que $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}^{(n)})$.

Représentabilité de $\mathscr{L}^n_r$.

Comme l'entier r est fixé jusqu'à la fin de la démonstration de 5.2, nous omettrons de le rappeler dans les notations. Ainsi nous écrirons $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}^n$, P_n, u_n au lieu de $\mathscr{L}_r$, $\mathscr{L}^n_r$, $\mathrm{P}_{\varphi(n,r)}$, $u_{n,r}$.

Soit v_n la restriction de u_n au sous-foncteur $\mathscr{L}^n$ de $\mathscr{L}$. Il résulte de la définition de $\mathscr{L}^n$ et de 5.1 b) ii) que v_n est un monomorphisme. En fait on a le lemme suivant :

Lemme 5.3. — *Le morphisme v_n est une immersion de présentation finie. A fortiori, $\mathscr{L}^n$ est représentable par un* S*-préschéma, quasi-projectif et de présentation finie sur* S.

Quitte à remplacer S par P_n, on est ramené par la technique habituelle à prouver l'assertion suivante : Soit $\mathrm{Q} \in \mathrm{P}_n(\mathrm{S})$ et considérons le sous-foncteur $\mathscr{F}$ du foncteur h_{S} représenté par l'objet final S de **Sch**/S, tel que pour tout S-préschéma S′, on ait :

$\mathscr{F}(\mathrm{S}') =$ $h_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}')$ (ensemble réduit à un élément) s'il existe $\mathrm{H} \in \mathscr{L}^n(\mathrm{S}')$ tel que $\mathrm{H}^{(n)} = \mathrm{Q}_{\mathrm{S}'}$,

$\mathscr{F}(\mathrm{S}') =$ $\varnothing$ sinon.

413 Alors, le monomorphisme canonique : $\mathscr{F} \to \mathrm{S}$ est une immersion de présentation finie.

Commençons par transformer la définition du foncteur $\mathscr{F}$. Pour cela, notons que le normalisateur de Q dans G est représentable par un sous-préschéma en groupes N de présentation finie sur S (à savoir l'image réciproque du point Q de $\mathrm{P}_n(\mathrm{S})$ par le morphisme :

$$\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{P}_n, \qquad g \mapsto g \cdot \mathrm{Q}.$$

Je dis que le foncteur $\mathscr{F}$ coïncide avec le sous-foncteur de h_{S} suivant :

$\mathscr{F}(\mathrm{S}') = h_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}')$ si on a :

(a) $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}$ est lisse le long de la section unité et de dimension relative r.

(b) $(\mathrm{N}_{\mathrm{S}'})^{(n)}$ (qui est alors canoniquement un élément de $\mathrm{P}_n(\mathrm{S}')$) est égal à $\mathrm{Q}_{\mathrm{S}'}$.

$\mathscr{F}(\mathrm{S}') = \varnothing$ sinon.

En effet, notons provisoirement $\mathscr{F}_1$ le foncteur $\mathscr{F}$ première manière et $\mathscr{F}_2$ le foncteur $\mathscr{F}$ deuxième manière. Alors :

i) $$\mathscr{F}_1(\mathrm{S}') = h_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}') \Rightarrow \mathscr{F}_2(\mathrm{S}') = h_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}').$$

414 En effet, soit $\mathrm{H} \in \mathscr{F}^n(\mathrm{S}')$ le sous-groupe de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ tel que $\mathrm{H}^{(n)} = \mathrm{Q}_{\mathrm{S}'}$. On a donc :

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}^{(n)}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{Q}_{\mathrm{S}'}) = \mathrm{N}_{\mathrm{S}'}.$$

Donc d'après 5.1 b) ii), $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}$ est lisse le long de la section unité et sa composante neutre est H. Par suite, $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}$ est de dimension relative r et comme H est ouvert dans $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}$ (d'après 5.1 b) i)), on a $(\mathrm{N}_{\mathrm{S}'})^{(n)} = \mathrm{H}^{(n)} = \mathrm{Q}_{\mathrm{S}'}$. Bref, $\mathscr{F}_2(\mathrm{S}') = h_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}')$.

ii) $$\mathscr{F}_2(\mathrm{S}') = h_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}') \Rightarrow \mathscr{F}_1(\mathrm{S}') = h_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}').$$

Par hypothèse, $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}$ est lisse le long de la section unité, de dimension relative r ; sa composante neutre est donc représentable (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 3.10) par un sous-préschéma en groupes H, lisse sur S', à fibres connexes de dimension r. Comme H est invariant dans $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}$ et ouvert dans $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}$, on a les inclusions suivantes :

$$\mathrm{N}_{\mathrm{S}'} \subset \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}) \subset \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}^{(n)}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{N}_{\mathrm{S}'}^{(n)}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{Q}_{\mathrm{S}'}) = \mathrm{N}_{\mathrm{S}'}.$$

Les inclusions ci-dessus sont donc des égalités. La première inclusion montre alors que H est égal à son normalisateur connexe et la deuxième montre que H est un élément de $\mathscr{L}^n(\mathrm{S}')$. C'est dire que $\mathscr{F}_1(\mathrm{S}') = h_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}')$.

Les implications i) et ii) entraînent $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2$. Nous gardons la deuxième définition du foncteur $\mathscr{F}$ et nous allons d'abord « représenter la condition a) » par une immersion de présentation finie. Pour cela, il suffit d'appliquer le :

Lemme 5.4. — *Soient* S *un préschéma,* X *un* S*-préschéma localement de présentation finie sur* S*,* $\sigma : \mathrm{S} \to \mathrm{X}$ *une section de* X*,* r *un entier* $\geqslant 0$ *et* $\mathrm{L} : (\mathbf{Sch}/\mathrm{S})^{\circ} \to (\mathbf{Ens})$ *le sous-foncteur de* S *défini comme suit :* **415**

$$\begin{cases} \mathrm{L}(\mathrm{S}') = h_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}') \text{ si } \mathrm{X}_{\mathrm{S}'} \text{ est lisse le long de la section } \sigma_{\mathrm{S}'} \text{ et de dimension} \\ \qquad\qquad \text{relative } r \text{ aux points de } \sigma_{\mathrm{S}'}(\mathrm{S}'). \\ \mathrm{L}(\mathrm{S}') = \varnothing \text{ sinon.} \end{cases}$$

Alors :

a) *Le monomorphisme* $\mathrm{L} \to \mathrm{S}$ *est une immersion de présentation finie.*

b) *Soit* J *le faisceau conormal relatif à l'immersion :* $\mathrm{S} \to \mathrm{X}$ (EGA IV 16.1.2)*; supposons que pour tout point* s *de* S*,* $\mathrm{J} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}} \kappa(s)$ *soit de rang au plus* r*, alors l'immersion* $\mathrm{L} \to \mathrm{S}$ *est une immersion fermée.*

Démonstration. Le foncteur L est de nature locale sur S, ce qui nous ramène au cas où S est affine. Quitte à remplacer X par un voisinage de $\sigma(\mathrm{S})$, on peut supposer X de présentation finie sur S, puis (EGA IV 8.9) S noethérien (noter, dans le cas b), que la formation du faisceau conormal commute à l'extension de la base (EGA IV 16.6.4) et que le rang des fibres de J est une fonction constructible sur S). Ceci étant, pour tout S-préschéma S′, notons $\mathrm{J}' = \mathrm{J}_{\mathrm{S}'}$ le faisceau conormal relatif à la section $\sigma_{\mathrm{S}'}$, soient $\mathrm{S}^{\bullet}(\mathrm{J}')$, canoniquement isomorphe à $\mathrm{S}^{\bullet}(\mathrm{J})_{\mathrm{S}'}$ l'algèbre symétrique de J′ sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$, $\mathrm{Gr}_{\bullet}(\sigma_{\mathrm{S}'})$ le faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$-algèbres graduées associé à $\sigma_{\mathrm{S}'}$ (EGA IV 16) et pour tout entier $n \geqslant 0$ soit $\sigma_{n,\mathrm{S}'} : \mathrm{S}^n(\mathrm{J}') \to \mathrm{G}r_n(\sigma_{\mathrm{S}'})$ l'épimorphisme canonique.

Il résulte de EGA IV 17.12.3 et de EGA 0_{IV} 19.5.4 que, pour que $\mathrm{X}_{\mathrm{S}'}$ soit lisse le long de la section $\sigma_{\mathrm{S}'}$ et de dimension relative r aux points de $\sigma_{\mathrm{S}'}(\mathrm{S}')$, il faut et il suffit que : **416**

i) J′ soit un $\mathrm{O}_{\mathrm{S}'}$-faisceau localement libre de rang r.

ii) Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\sigma_{n,\mathrm{S}'}$ soit un isomorphisme.

Or il résulte de TDTE IV, lemme 3.6, que « le foncteur qui rend J localement libre de rang r » est représentable par un sous-préschéma S_1, fermé dans S dans le cas b). Remplaçant S par S_1 on est ramené au cas où J est localement libre de rang r. Procédons alors par récurrence sur l'entier n. Supposons avoir représenté par un sous-préschéma fermé S_{n-1} de S le « foncteur qui rend les morphismes $\sigma_{q,\mathrm{S}'}$ injectifs pour tout entier $q \leqslant n-1$ », et montrons que le « sous-foncteur[(5)] qui rend $\sigma_{n,\mathrm{S}'}$ injectif » est représentable par un sous-préschéma fermé S_n de S_{n-1}. Remplaçant S par S_{n-1} nous pouvons supposer que $\sigma_{q,\mathrm{S}}$ est bijectif pour $q \leqslant n-1$. Mais alors, le $(n-1)^{\text{ième}}$ invariant normal $\mathrm{X}^{(n-1)}$ relatif à la section σ_s admet une suite de composition : $\mathrm{X}^{(0)}, \ldots, \mathrm{X}^{(n-1)}$ dont les quotients successifs $\mathrm{Gr}_0(\sigma_s), \ldots, \mathrm{Gr}_{n-1}(\sigma_s)$ sont localement libres sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$ donc plats, par suite $\mathrm{X}^{(n-1)}$ est *plat sur* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$. Comme la formation de $\mathrm{X}^{(i)}$ commute à l'extension de la base (EGA IV 16), on a pour tout S-préschéma S′ :

$$\mathrm{Gr}_n(\sigma_{\mathrm{S}'}) = \operatorname{Ker} \mathrm{X}_{\mathrm{S}'}^{(n)} \to \mathrm{X}_{\mathrm{S}'}^{(n-1)} = (\mathrm{G}r_n(\sigma))_{\mathrm{S}'} \quad \text{et} \quad \sigma_{n,\mathrm{S}'} = (\sigma_{n,\mathrm{S}})_{\mathrm{S}'}.$$

(5) N.D.E. : on a remplacé « foncteur » par « sous-foncteur ». Faudrait-il écrire « qui rend $\sigma_{q,\mathrm{S}'}$ injectif pour $q \leqslant n$ » ?

Donc, le foncteur qui nous intéresse est « celui qui rend le morphisme $\sigma_{n,\mathrm{S}}$ injectif ». Ce foncteur est de nature locale sur S, ce qui nous permet de supposer S affine et $\mathrm{S}^n(\mathrm{J})$ *libre* sur $\mathscr{O}_\mathrm{S}$. Mais il est clair alors que le foncteur en question est représentable par le sous-schéma fermé de S défini par l'idéal engendré par les coordonnées de $\operatorname{Ker}\sigma_{n,\mathrm{S}}$ par rapport à une base de $\mathrm{S}^n(\mathrm{J})$.

417 Comme S est noethérien, la suite décroissante $\{\mathrm{S}_n\}$ de sous-préschémas fermés de S_1 est stationnaire, et la valeur stationnaire représente le foncteur L, ce qui achève la démonstration de 5.4.

Revenons à la question de la représentabilité de $\mathscr{L}^n$. Remplaçant S par un sous-préschéma convenable S_1, on peut donc supposer N lisse le long de la section unité et de dimension relative r. Le foncteur $\mathscr{L}^n$ est alors le « foncteur des coïncidences » de deux sections de P_n au-dessus de S, h et g, correspondant aux faisceaux Q et $\mathrm{N}^{(n)}$ (condition b) intervenant dans la définition du foncteur $\mathscr{F}_2$ ci-dessus). Il est donc représentable par le sous-préschéma fermé de S, image réciproque de la diagonale de $\mathrm{P}_n \times_\mathrm{S} \mathrm{P}_n$ par le morphisme de présentation finie $h \times_\mathrm{S} g$. Ceci achève la démonstration de 5.3.

Étude des morphismes de transition $\mathscr{L}^n \to \mathscr{L}^m$.

Si un sous-groupe H de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ appartient à $\mathscr{L}^n(\mathrm{S}')$, il appartient a fortiori à $\mathscr{L}^m(\mathrm{S}')$ pour tout $m \geqslant n$, d'où des monomorphismes naturels :

$$u_n^m : \mathscr{L}^n \longrightarrow \mathscr{L}^m \quad \text{pour} \quad m \geqslant n.$$

Lemme 5.5. — *Le morphisme u_n^m est une immersion ouverte.*

Quitte à changer S, nous sommes ramenés au problème suivant : Soient $\mathrm{H} \in \mathscr{L}^m(\mathrm{S})$,

$$\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathrm{H}^{(m)}), \qquad \mathrm{N}' = \underline{\mathrm{Norm}}_\mathrm{G}(\mathrm{H}^{(n)})$$

et soit $\mathscr{D} : (\mathbf{Sch}/\mathrm{S})^\circ \to (\mathbf{Ens})$ le foncteur des coïncidences de N et de N′ défini par $\mathscr{D}(\mathrm{S}') = h_\mathrm{S}(\mathrm{S}')$ si $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{N}'_{\mathrm{S}'}$ et $\mathscr{D}(\mathrm{S}') = \varnothing$ sinon. Nous devons montrer que $\mathscr{D} \to \mathrm{S}$
418 est une immersion ouverte. Or je dis que $\mathscr{D}$ est aussi le sous-foncteur de S qui « rend l'immersion $\mathrm{H} \to \mathrm{N}'$ ouverte ». En effet, si $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{N}'_{\mathrm{S}'}$, alors $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{N}'_{\mathrm{S}'}$ est bien une immersion ouverte puisqu'il en est ainsi de $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{N}_{\mathrm{S}'}$ (prop. 5.1). Réciproquement, si $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{N}'_{\mathrm{S}'}$ est une immersion ouverte, H étant à fibres connexes, $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$ est la composante neutre de $\mathrm{N}'_{\mathrm{S}'}$ (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 3.10) et par suite est invariant dans $\mathrm{N}'_{\mathrm{S}'}$, donc $\mathrm{N}'_{\mathrm{S}'} \subset \mathrm{N}_{\mathrm{S}'}$. Comme de toute façon N′ majore N, on a bien $\mathrm{N}_{\mathrm{S}'} = \mathrm{N}'_{\mathrm{S}'}$. Les préschémas en groupes H et N′ sont de présentation finie sur S et H est plat sur S ; le fait que $\mathscr{D} \to \mathrm{S}$ soit une immersion ouverte résulte alors de Exp. $\mathrm{VI_B}$ 2.6.

Fin de la démonstration de 5.2.

Les foncteurs $\mathscr{L}^n$ étant représentables et les morphismes de transition u_n^m étant compatibles entre eux et représentables par des immersions ouvertes, il existe un S-préschéma X, réunion d'une suite croissante d'ouverts $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tel que X_i représente le foncteur $\mathscr{L}^i$ et tel que si on identifie $\mathscr{L}^i$ à X_i, l'inclusion $\mathrm{X}_i \to \mathrm{X}_j$ $(j \geqslant i)$ s'identifie à u_i^j. Pour conclure que X représente le foncteur $\mathscr{L}$, il suffit alors de remarquer que, dans la catégorie des faisceaux sur **Sch**/S munie de la topologie de Zariski (Exp. IV 6.1), on a :

$$\mathrm{X} = \varprojlim \mathrm{X}_i \qquad \text{et} \qquad \mathscr{L} = \varprojlim \mathscr{L}^i.$$

Remarque 5.6. — Avec les notations précédentes, supposons de plus que S ait toutes ses *caractéristiques résiduelles nulles,* alors pour tout entier $r \geqslant 0$, le foncteur $\mathscr{L}_r$ est égal à $\mathscr{L}_r^1$, donc est représentable par un S-préschéma de *présentation finie et quasi-projectif* sur S. En effet, il suffit de montrer que si $\mathrm{H} \in \mathscr{L}_r(\mathrm{S}')$, l'immersion **419**
canonique :

$$\mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H}^{(1)})$$

est une immersion ouverte (car cela entraîne $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{H})$, donc $\mathrm{H} \in \mathscr{L}_r^1(\mathrm{S}')$). Comme H est plat sur S, H et N de présentation finie sur S, il suffit (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 2.6) de montrer que pour tout point s de S, $\mathrm{H}_s \to \mathrm{N}_s$ est une immersion ouverte. Or il résulte facilement[(6)] du théorème de Cartier (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 1.6) que si G est un groupe algébrique sur un corps de caractéristique 0 et si H est un sous-groupe algébrique connexe, on a :

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Lie}\,\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}^{(1)}).$$

Par contre, si S possède des caractéristiques résiduelles non nulles, les sous-foncteurs $\mathscr{L}_r^n$ de $\mathscr{L}_r$ peuvent former une suite strictement croissante (même lorsque S est quasi-compact) et dans ce cas, $\mathscr{L}_r$ n'est pas représentable par un S-préschéma, quasi-compact sur S. Prenons par exemple le groupe algébrique G, défini sur un corps k de caractéristique $p > 0$, égal au produit semi-direct du tore $\mathrm{T} = \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m$ par le groupe unipotent $\mathrm{U} = \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a$, l'opération de T sur U étant définie par : $(t, t', u, u') \to (tu, t'u')$. Pour tout entier $n > 0$, considérons alors le sous-groupe lisse et connexe U_n de U d'équation $u' = u^{p^n}$, et le sous-tore T_n de T d'équation $t' = t^{p^n}$. Il est immédiat de vérifier que T_n opère sur U_n et que le sous-groupe G_n de G, égal à $\mathrm{T}_n \cdot \mathrm{U}_n$ est lisse, connexe et identique à son normalisateur dans G. Or tous les groupes G_n, pour $n \geqslant m$, sont distincts et ont même voisinage infinitésimal d'ordre p^m.

Remarque 5.7. — Il existe sur $\mathscr{L}$ un faisceau inversible canonique L, dont la restriction **420**
à tout ouvert U de $\mathscr{L}$, quasi-compact sur S, est S-*ample.* En effet, considérons le sous-préschéma en groupes H de $\mathrm{G}_{\mathscr{L}}$ lisse sur $\mathscr{L}$, à fibres connexes, égal à son normalisateur connexe et qui est universel pour ces propriétés. Je dis que l'on peut prendre pour L, le faisceau $(\mathrm{d\acute{e}t}(\mathrm{Lie}\,\mathrm{H}))^{-1}$ (rappelons que si F est un faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules sur un préschéma S, qui est localement libre de rang fini, dét(F) désigne le $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module inversible dont la restriction au sous-préschéma ouvert et fermé S_r de S ($r \geqslant 0$) où F est de rang r, est égale à $\bigwedge^r(\mathrm{F})$). Nous gardons les notations de la démonstration de 5.2. Pour prouver l'assertion faite sur L, nous pouvons nous limiter au foncteur $\mathscr{L}_r^n$ et prouver que $\mathrm{L}|_{\mathscr{L}_r^n}$ est S-ample. Considérons l'immersion canonique $v_n : \mathscr{L}_r^n \to \mathrm{P}_n$, et soit Q le faisceau localement libre sur P_n, universel pour la grassmanienne P_n. Par construction, on a : $v_n^*(\mathrm{Q}) = \mathrm{H}^{(n)}$ (où maintenant H désigne le sous-préschéma en groupes de $\mathrm{G}_{\mathscr{L}_r^n}$, universel pour le foncteur $\mathscr{L}_r^n$). Or dét(Q) est le faisceau ample

(6) N.D.E. : On peut appliquer par exemple la proposition II.6.1 du livre de M. Demazure et P. Gabriel, *Groupes algébriques* I, Masson & North Holland (1970).

canonique sur P_n (EGA I 2°éd., 9.7), donc $\mathrm{d\acute{e}t}\,\mathrm{H}^{(n)}$ est ample relativement à $\mathscr{L}_r^n$ (EGA II 4.6.13 i) bis). Notons encore J le faisceau conormal, égal à $\mathrm{H}^{(1)}$, et $\mathrm{S}^q(\mathrm{J})$ la partie homogène de degré q de l'algèbre symétrique de J sur $\mathscr{O}_{\mathscr{L}_r^n}$. Comme H est lisse sur $\mathscr{L}_r^n$, il est immédiat que l'on a un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{d\acute{e}t}\,\mathrm{H}^{(n)} \simeq \prod_{1\leqslant q\leqslant n} \mathrm{d\acute{e}t}\,\mathrm{S}^q(\mathrm{J}).$$

D'autre part, on démontre que pour tout faisceau localement libre J de rang r et pour
421 tout entier $q > 0$, il existe un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{d\acute{e}t}\,\mathrm{S}^q(\mathrm{J}) \simeq (\mathrm{d\acute{e}t}\,\mathrm{J})^{\otimes s},$$

où $s > 0$ est un entier qui ne dépend que de r et de q. Finalement, on obtient : $\mathrm{d\acute{e}t}\,\mathrm{H}^{(n)} \simeq (\mathrm{d\acute{e}t}\,\mathrm{J})^{\otimes s}$ pour un entier $s > 0$ convenable, donc (EGA II 4.5.6), $\mathrm{d\acute{e}t}\,\mathrm{J} = (\mathrm{d\acute{e}t}\,\mathrm{Lie}\,\mathrm{H})^{-1}$ est bien S-ample.

Remarque 5.8. — Soient S un préschéma, G et H deux S-préschémas en groupes de présentation finie sur S, $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ un S-homomorphisme de groupes qui est un *monomorphisme.* Si H est lisse sur S, à fibres connexes, on sait (Exp. XI 6.11) que $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ est représentable par un *sous-préschéma* en groupes fermé de G, de présentation finie sur S. Supposons de plus que N est lisse le long de la section unité et a même dimension relative sur S que H. La composante neutre N^0 de N est alors représentable par un sous-préschéma en groupes ouvert de N, lisse sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 3.10). Le monomorphisme i se factorise évidemment à travers N^0. En fait on a $\mathrm{H} = \mathrm{N}^0$. En effet, pour tout point s de S, on a $\mathrm{H}_s = (\mathrm{N}^0)_s$, ces deux groupes algébriques étant connexes, lisses, et de même dimension. Comme H est plat sur S, on en déduit que $\mathrm{H} \to \mathrm{N}^0$ est un isomorphisme (EGA IV 17.9.5). Finalement, H est un *sous-préschéma* en groupes de G. On a donc montré que le foncteur $\mathscr{L}$ introduit dans ce paragraphe est identique au foncteur des *sous-groupes* H de G, lisses sur S, à fibres connexes et égaux à leur normalisateur connexe.

6. Foncteur des sous-groupes de Cartan et foncteur des sous-groupes paraboliques

422 Lorsque G est un groupe algébrique lisse et connexe, défini sur un corps k algébriquement clos, on a défini les sous-tores de G, les sous-tores maximaux, les sous-groupes de Cartan (Exp. XII 1) les sous-groupes de Borel (Exp. XIV 4.1), les sous-groupes paraboliques (Exp. XIV 4.8 bis). Nous étendons ces notions au cas d'un préschéma en groupes sur une base quelconque, de la façon suivante :

Définition 6.1. — Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes de présentation finie sur S, H un S-préschéma en groupes, $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ un S-monomorphisme qui fait de H un sous-groupe de G. Nous dirons que H est un sous-tore de G (resp. un sous-tore maximal de G, un sous-groupe de Cartan, un sous-groupe de Borel, un sous-groupe parabolique) si :

i) H est lisse sur S.

ii) Pour tout point géométrique $\overline{s}$ au-dessus de S, $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ est un sous-tore de $(\mathrm{G}_{\overline{s}})^0_{\mathrm{réd}}$ (resp. un sous-tore maximal, un sous-groupe de Cartan, un sous-groupe de Borel, un sous-groupe parabolique).

Remarques 6.1. bis. — a) Si le S-groupe H est un sous-tore de G (resp. ...), ses fibres sont connexes, et par suite H est de présentation finie sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.3.3).

b) Si H est un sous-tore de G, alors H est un tore au sens de Exp. IX, comme il **423** résulte immédiatement de Exp. X 8.1. De plus le monomorphisme $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ est une immersion (cf. 8.3 ci-après).

c) Si G est lisse sur S, à fibres connexes et si H est un sous-groupe de Cartan de G (resp. un sous-groupe de Borel, un sous-groupe parabolique), le monomorphisme $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ est une immersion, de sorte que nos définitions coïncident avec celles introduites dans Exp. XII et Exp. XIV. En effet, H est alors identique à son normalisateur connexe (d'après XII 6.6 c), XIV 4.8 et 4.8 bis) et il suffit d'appliquer 5.8.

Définition 6.1. ter. — Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes localement de type fini, s un point S. On appelle *rang nilpotent* de G au point s, et on note $\rho_n(s)$, la dimension des sous-groupes de Cartan de $(\mathrm{G}_{\overline{s}})^0_{\mathrm{réd}}$. On définit de façon analogue le *rang réductif* $\rho_r(s)$, le *rang unipotent* $\rho_u(s)$, le *rang abélien* $\rho_{ab}(s)$ (cf. Exp. X 8.7).

Si maintenant G est un groupe algébrique, lisse et connexe, défini sur un corps k algébriquement clos, rappelons que le *radical* de G, noté rad(G) est le plus grand sous-groupe algébrique de G, qui est invariant, lisse, connexe et résoluble ; G/ rad(G) est alors *semi-simple* (utiliser Exp. XII 6.1 pour se ramener au cas G affine). Si G est de plus affine, on définit le *radical unipotent* $\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$ de G comme étant le plus grand sous-groupe algébrique de G, invariant, lisse, connexe et unipotent : $\mathrm{G}/\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$ est **424** alors *réductif.*

Proposition 6.2. — *Soient* S *un préschéma,* G *et* H *deux* S*-préschémas en groupes de présentation finie sur* S, $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un* S*-monomorphisme de groupes qui fait de* H *un sous-groupe de* G *et soit* P(s) *l'une des propriétés suivantes concernant le point* s *de* S *:*

i) $(\mathrm{G}_{\overline{s}})^0_{\mathrm{réd}}$ *est une variété abélienne* (*resp. est affine, est un tore, est unipotent*).

ii) $(\mathrm{H}_{\overline{s}})^0_{\mathrm{réd}}$ *est un tore maximal de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$*.*

iii) $(\mathrm{H}_{\overline{s}})^0_{\mathrm{réd}}$ *est le centralisateur dans* $(\mathrm{G}_{\overline{s}})^0_{\mathrm{réd}}$ *d'un tore de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ (*resp. est un sous-groupe de Cartan de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$)*.*

iv) $(\mathrm{H}_{\overline{s}})^0_{\mathrm{réd}}$ *est un sous-groupe de Borel* (*resp. un sous-groupe parabolique*) *de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$*.*

v) $(\mathrm{H}_{\overline{s}})^0_{\mathrm{réd}}$ *est le radical de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ (*resp.* $(\mathrm{G}_{\overline{s}})^0_{\mathrm{réd}}$ *est semi-simple*)*.*

vi) $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ *est affine et* $(\mathrm{H}_{\overline{s}})^0_{\mathrm{red}}$ *est le radical unipotent de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ (*resp.* $(\mathrm{G}_{\overline{s}})^0_{\mathrm{réd}}$ *est réductif*)*.*

Alors l'ensemble E *des points* s *de* S*, tels que* P(s) *soit vraie est* localement constructible (EGA 0_{III} 9.1.11).

Remarque 6.2.1. — Cette proposition complète Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 10. Par ailleurs, on peut encore préciser la structure de E, en utilisant des théorèmes de semi-continuité (cf. Exp. X 8.7) ; nous en verrons un exemple un peu plus loin.

425 *Démonstration de* 6.2.

Notons que si S est le spectre d'un corps, E est invariant par extension de ce corps. Une réduction standard (EGA IV 9) permet alors de nous ramener au cas où S est noethérien intègre, de point générique η. On doit montrer que E ou ens(S) \ E, contient un voisinage de η (EGA IV 9.2.1). On peut supposer S affine d'anneau A et de corps des fractions K. Si L est une extension finie de K, il est immédiat qu'il existe une sous-A-algèbre B de L, finie sur A, ayant L pour corps des fractions. Le morphisme canonique : $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, où $\mathrm{S}' = \operatorname{Spec} \mathrm{B}$, est dominant, de présentation finie, donc l'image d'un ouvert non vide de S′ contient un ouvert non vide de S (EGA IV 1.8.4). Du point de vue qui nous intéresse, nous pouvons donc remplacer S par S′, donc remplacer K par une extension finie L. Ainsi nous pouvons choisir L de façon que $(\mathrm{G_L})_{\text{réd}}$ et $(\mathrm{H_L})_{\text{réd}}$ soient lisses sur L (EGA IV 4.6.6). Quitte à restreindre S′, nous pouvons supposer que $\mathrm{G}_{\text{réd}}$ et $\mathrm{H}_{\text{réd}}$ sont des préschémas en groupes lisses sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 10 et EGA IV 17). Vu les propriétés à démontrer, nous pouvons remplacer G et H par leurs composantes neutres (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 10.9) réduites, donc supposer G et H lisses sur S, à fibres connexes. Enfin, nous pouvons supposer que H est un sous-préschéma en groupes fermé de G (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 10.4).

Démonstration de i). Quitte à faire une extension finie de K, nous pouvons supposer que G_η possède une « décomposition de Chevalley », c.-à-d. est extension d'une variété abélienne D_η par un groupe algébrique linéaire F_η, lisse et connexe (Séminaire
426 Bourbaki 1956/57 N°145). D'après Exp. $\mathrm{VI_B}$ 10.16, il existe un voisinage ouvert U de η, tel que cette extension générique provienne d'une extension :

$$1 \longrightarrow \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G}|_{\mathrm{U}} \longrightarrow \mathrm{D} \longrightarrow 1.$$

On peut de plus supposer F et D lisses sur U, à fibres connexes, F affine sur U et D propre sur U (EGA IV 8, 9 et 17). Pour tout point s de U, $(\mathrm{D}_s, \mathrm{F}_s)$ est alors la « décomposition de Chevalley » de G_s. Par suite, G_s est une variété abélienne (resp. est affine) si est seulement si F_s (resp. D_s) est le groupe unité, ce qui est une propriété constructible (EGA IV 9.2.6.1).

Pour établir les deux dernières assertions de i), nous pouvons, vu ce qui précède, supposer G affine sur S. Soient q un nombre premier inversible sur S et ${}_q\mathrm{G}$ le « noyau » de l'élévation à la puissance $q^{\text{ième}}$ dans G. Il résulte facilement de la structure des groupes algébriques affines que G_s est un tore (resp. est unipotent) si et seulement si a) ${}_q\mathrm{G}_s$ est quasi-fini, ce qui est une propriété constructible (EGA IV 9.3.2) et b) ${}_q\mathrm{G}_s$ a r^q points géométriques, où r désigne la dimension relative de G sur S (resp. ${}_q\mathrm{G}_s$ a un seul point). Or la fonction $s \mapsto$ (nombre de points géométriques de ${}_q\mathrm{G}_s$) est constructible (EGA IV 9.7.9). Ceci achève de démontrer (i).

Démonstration de iii). a) Cas d'un centralisateur d'un tore. Supposons que $\mathrm{H}_\eta = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_\eta}(\mathrm{T}_\eta)$, où T_η est un tore de G_η et montrons que H_s est le centralisateur d'un sous-tore de G_s pour s dans un voisinage de η. D'après i), quitte à restreindre S, on

peut supposer que T_η provient d'un sous-tore T de G. Mais alors, $Z = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T)$ est représentable (Exp. XI 6.11) par un sous-préschéma en groupes de G. Comme H et **427**
Z coïncident génériquement, ils coïncident au-dessus d'un voisinage de η. Ceci nous prouve que l'ensemble E des points s de S tels que H_s soit le centralisateur dans G_s d'un sous-tore de G_s est ind-constructible (EGA IV 1) et ce résultat nous suffira pour établir, dans le lemme 6.6 ci-après, que E est une partie ouverte de S ; a fortiori, E sera bien une partie localement constructible de S.

iii) b) Cas d'un sous-groupe de Cartan. Supposons que H_η est un sous-groupe de Cartan de G_η et montrons que H_s est un sous-groupe de Cartan de G_s en tout point s d'un voisinage de η. Le groupe H_η est le centralisateur dans G_η d'un tore de G_η et est nilpotent (Exp. XII 6.6). D'après a) et Exp. $\mathrm{VI_B}$ 8.4, H_s possède les mêmes propriétés en tout point s d'un voisinage U de η. Pour tout point s de U, le groupe H_s a donc même rang réductif que G_s et son unique tore maximal est central (Exp. XII 6.7), c'est donc le centralisateur d'un tore maximal de G_s, c.-à-d. un groupe de Cartan de G_s.

Supposons maintenant que H ne soit pas un sous-groupe de Cartan de G et montrons que H_s n'est pas un sous-groupe de Cartan de G_s pour s dans un voisinage U de η. Compte tenu de l'assertion provisoirement admise dans (a) ci-dessus, nous pouvons nous limiter au cas où H est le centralisateur dans G d'un sous-tore T. Mais alors H_η contient un sous-groupe de Cartan C_η de H_η. On vient de voir que, quitte à restreindre S, C_η se prolonge en un sous-groupe de Cartan C de G, que l'on peut supposer contenu dans H. Par hypothèse H_η majore strictement C_η, donc H_s majore strictement C_s pour s dans un voisinage U de η (EGA IV 9.5.2) ; a fortiori, H_s n'est **428**
pas un sous-groupe de Cartan de G_s pour s dans U.

Démonstration de ii). Supposons que H_η soit un tore maximal de G_η et soit C_η son centralisateur dans G_η. D'après i) et iii), H est un tore au-dessus d'un voisinage U de η et $C = \mathrm{Centr}_{G|_U}(H|_U)$ est un sous-groupe de Cartan de $G|_U$. Pour prouver que H est un tore maximal de G sur un voisinage de η, on peut alors remplacer G par C, puis par la composante linéaire F d'une décomposition de Chevalley de C (cf. i)). Soit q un entier inversible sur S, ${}_qF$ le noyau de l'élévation à la puissance $q^{\text{ième}}$ dans F. Comme F_s est affine, nilpotent, lisse et connexe, $F_{\overline{s}}$ est le produit direct de son tore maximal T_s par un groupe unipotent (BIBLE 6-04), donc ${}_qF_s = {}_qT_s$. Comme H_η est un tore maximal, ${}_qH_\eta = {}_qF_\eta$ et par suite, ${}_qH = {}_qF$ au-dessus d'un voisinage V de η. Pour tout point s de V, ${}_qH_s = {}_qT_s$, donc $H_s = T_s$ est un tore maximal.

Supposons maintenant que H_η ne soit pas un tore maximal de G_η. D'après i), nous pouvons nous limiter au cas où H_η est un tore, puis supposer qu'il est contenu dans un tore T_η strictement plus grand. Ce dernier se prolonge en un tore T qui majore strictement H sur un voisinage U de η. A fortiori, H_s n'est pas un tore maximal pour $s \in U$.

Démonstration de iv). Quitte à restreindre S, on peut supposer que le centre Z de G est représentable (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 10.11) et plat sur S, ainsi que le quotient G/Z (*loc. cit.*). La propriété « H_s majore Z_s » est constructible (EGA IV 9.5.2) et tout sous-groupe parabolique de G_s contient Z_s (Exp. XIV 4.9 a)) ; ceci nous permet de remplacer G par G/Z donc de supposer G affine sur S (Exp. XII 6.1 et i)). On peut encore **429** supposer que G/H est représentable, mais alors H_s est un sous-groupe parabolique de G_s si et seulement si $(\mathrm{G}/\mathrm{H})_s$ est propre (BIBLE 6. Th.4 b)) ce qui est une propriété ind-constructible (EGA IV 9.3.5). Donc E est ind-constructible et ceci nous suffira pour prouver que E est ouvert (Lemme 6.6) donc localement constructible.

Examinons maintenant le cas des sous-groupes de Borel. Si H_η est un sous-groupe de Borel de G_η, c.-à-d. un sous-groupe parabolique résoluble de G_η, ce qui précède et Exp. $\mathrm{VI_B}$ 8.4 entraînent que ces propriétés sont encore vraies en tout point s d'un voisinage de η. Si maintenant H_η n'est pas un sous-groupe de Borel de G_η, pour prouver qu'il en est de même aux points s d'un voisinage de η, nous pouvons nous limiter (vu ce qui précède) au cas où H_η est un sous-groupe parabolique, puis supposer que H_η contient un sous-groupe de Borel B_η. On vient de montrer que ce dernier se prolonge en un sous-groupe de Borel B de G sur un voisinage U de η. Comme H_η majore strictement B_η, alors H_s majore strictement B_s en tout point d'un ouvert V, et H_s n'est pas un sous-groupe de Borel de G_s pour $s \in \mathrm{V}$.

Démonstration de v). Supposons que H_η soit le radical de G_η. Le groupe H_η est donc invariant dans G_η, résoluble (lisse et connexe), il en est donc de même de H_s pour s appartenant à un voisinage U de η (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 8 et 10), donc, pour $s \in \mathrm{U}$, H_s est contenu dans le radical de G_s. Remplaçant G par G/H (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 10), il nous faut
430 prouver que si G_η est semi-simple, G_s est semi-simple en tout point d'un voisinage V de η. Grâce à i) et ii), on peut supposer que G est affine sur S et possède un tore maximal T. Soit W le groupe de Weyl de T (Exp. XII 2) qui est quasi-fini et étale sur S, donc fini et étale sur un ouvert V. Il résulte alors des propriétés élémentaires des racines (Exp. XIX 1.12) que G est semi-simple au-dessus de V.

Supposons maintenant que H_η ne soit le radical de G_η. Quitte à remplacer K par une extension finie L, on peut supposer que G_η possède un radical R_η. D'après ce qui précède, R_η se prolonge en un sous-préschéma en groupes R de $\mathrm{G}|_{\mathrm{U}}$, tel que pour tout $s \in \mathrm{U}$, R_s soit le radical de G_s. Par hypothèse, $\mathrm{R}_\eta \neq \mathrm{H}_\eta$. Donc $\mathrm{R}_s \neq \mathrm{H}_s$ pour $s \in \mathrm{V}$. Reste à prouver que si G_η n'est pas semi-simple, il en est de même de G_s aux points voisins, mais c'est un cas particulier de ce qui précède (prendre H = groupe unité).

Démonstration de vi). La démonstration est tout-à-fait analogue à celle de v), compte tenu de i), et est laissée au soin du lecteur.

Corollaire 6.3. — *Soient* S_0 *un préschéma quasi-compact,* S_i $(i \in \mathrm{L})$*, un système projectif de* S_0*-préschémas, affines sur* S_0*,* $\mathrm{S} = \varprojlim \mathrm{S}_i$ (EGA IV 8.2)*,* G_0 *un préschéma en groupes de présentation finie sur* S_0*,* $\mathrm{G}_i = \mathrm{G}_0 \times_{\mathrm{S}_0} \mathrm{S}_i$*,* $\mathrm{G} = \mathrm{G}_0 \times_{\mathrm{S}_0} \mathrm{S}$*,* H *un sous-groupe de* G*. Alors si* H *est un sous-tore de* G (*resp. un sous-tore maximal, un sous-groupe de Cartan, un sous-groupe de Borel, un sous-groupe parabolique*)*, il existe un indice* $i \in \mathrm{L}$*, et un sous-groupe* H_i *de* G_i*, tel que* $\mathrm{H} = \mathrm{H}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{S}$ *et que* H_i *soit un sous-tore de* G_i (resp. ...)*.*

431 En effet, H est lisse, à fibres connexes, donc de présentation fine sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.3.3). D'après (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 10) il existe un $i \in \mathrm{L}$ et un sous-groupe H_i de G_i, lisse sur S, tel que $\mathrm{H} = \mathrm{H}_i \times_{\mathrm{S}_i} \mathrm{S}$. Le corollaire Exp. 6.3 résulte alors de la définition 6.1, de 6.2 et de EGA IV 9.3.3.

Corollaire 6.3. bis. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie sur* S*. Alors les fonctions* ρ_n, ρ_r, ρ_u, ρ_{ab} (cf. 6.1 ter) *sont des fonctions localement constructibles sur* S.

Il nous suffit de montrer (EGA IV 9.) que si S est un schéma intègre noethérien de point générique η, les fonctions en jeu sont constantes sur un voisinage de η. Quitte à remplacer S par un schéma S′, fini sur S, dominant S, nous pouvons supposer que G_η possède un sous-groupe de Cartan C_η, possèdant une décomposition de Chevalley : $1 \to L_\eta \to C_\eta \to A_\eta \to 1$. Le raisonnement fait dans 6.2 i) prouve que cette décomposition se prolonge en une décomposition de Chevalley sur un voisinage de η :

$$1 \longrightarrow L \longrightarrow C \longrightarrow A \longrightarrow 1.$$

De plus, on peut supposer que C est un sous-groupe de Cartan de G (6.3) et que le tore maximal T_η de L_η se prolonge en un tore maximal T de L (6.3). Le corollaire résulte immédiatement de là et des définitions.

6.4.0. Soient alors S un préschéma, G un S-préschéma en groupes de présentation finie sur S, $\mathscr{L}$ le foncteur des sous-groupes de G, lisses, à fibres connexes et égaux à leur normalisateur connexe (cf. § 5) ; $\mathscr{L}$ est représentable (5.2 et 5.8). La suite de ce **432**
paragraphe est consacrée à l'étude de certains sous-foncteurs de $\mathscr{L}$. Plus précisément, introduisons les sous-foncteurs de $\mathscr{L}$, notés $\mathscr{L}\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{C}\mathscr{T}$, resp. $\mathscr{P}$), définis de la manière suivante : pour tout S-préschéma S′, $\mathscr{L}\mathscr{C}(S')$ (resp. $\mathscr{C}\mathscr{T}(S')$, resp. $\mathscr{P}(S')$) est l'ensemble des sous-groupes H de $G_{S'}$, lisses sur S′, à fibres connexes, égaux à leur normalisateur connexe et tels que pour tout point s de S′, $H_{\overline{s}}$ contienne un sous-groupe de Cartan (6.1) de $G_{\overline{s}}$ (resp. soit le centralisateur dans $(G_{\overline{s}})^0_{\text{réd}}$ d'un sous-tore de $G_{\overline{s}}$, resp. soit un sous-groupe parabolique (6.1) de G_s).

Théorème 6.4. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie sur* S*, alors les* S*-foncteurs* $\mathscr{L}\mathscr{C}$*,* $\mathscr{C}\mathscr{T}$*,* $\mathscr{P}$ *ci-dessus* (6.4.0) *sont représentables par des* S*-préschémas de* présentation finie *sur* S*, quasi-projectifs sur* S.

Remarque 6.5. — Si G est à fibres lisses, par exemple si G est lisse sur S, ou si les caractéristiques résiduelles de S sont nulles (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 1.6.1), tout sous-groupe H de G, lisse sur S, à fibres connexes, tel que pour tout point s de S, H_s contienne un sous-groupe de Cartan de $(G_{\overline{s}})^0$, est nécessairement égal à son normalisateur connexe (et par suite est un élément de $\mathscr{L}\mathscr{C}(S)$). En effet, grâce à 5.1 iii), on peut supposer que S est le spectre d'un corps, auquel cas la propriété a été signalée à la fin de l'énoncé de Exp. XIII 2.1.

Notons que l'on a des monomorphismes naturels :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}\mathscr{T} \arrow[dr] & & \\
& \mathscr{L}\mathscr{C} \arrow[r] & \mathscr{L}. \\
\mathscr{P} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

433 Montrons que ces monomorphismes sont des immersions ouvertes de présentation finie, (ce qui prouvera déjà, compte tenu de 5.2 que $\mathscr{LC}$, $\mathscr{CT}$, $\mathscr{P}$ sont représentables par des S-préschémas, réunion d'une suite croissante de sous-préschémas ouverts, quasi-projectifs et de présentation finie sur S). Or ceci va résulter, par la technique habituelle, du lemme suivant :

Lemme 6.6. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie,* H *un sous-groupe de* G*, lisse à fibres connexes. Alors l'ensemble des points* s *de* S *tels que* $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ *contienne un sous-groupe de Cartan de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ (*resp. soit égal au centralisateur, dans* $(\mathrm{G}_{\overline{s}})^0_{\text{réd}}$*, d'un tore de* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$) *est un ouvert de* S*. Si de plus,* H *est égal à son normalisateur connexe* [(*)]*, l'ensemble des points* s *de* S*, tels que* H_s *soit un sous-groupe parabolique de* G_s *est également un ouvert de* S.

L'assertion à démontrer est locale sur S, ce qui nous permet de supposer S affine, puis par EGA IV 8.1 et 6.3, S noethérien. Notons E l'ensemble des points de S possédant la propriété en question. Il résulte alors des assertions effectivement démontrées de 6.2 que E est ind-constructible. Mais S est noethérien, donc pour prouver que E est ouvert, il suffit alors de montrer que E est stable par générisations (EGA IV 1.10.1). Utilisant EGA II 7.1.9, nous sommes finalement amenés à prouver que si S est le
434 spectre d'un anneau de valuation discrète, et si le point fermé s appartient à E, alors il en est de même du point générique t. Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 6.7. — *Soient* A *un anneau local noethérien complet,* $\mathrm{S} = \operatorname{Spec} \mathrm{A}$*,* s *le point fermé de* S*,* H *un* S*-préschéma en groupes, lisse à fibres connexes,* T_s *un sous-tore de* H_s*. Alors :*

i) *Il existe un sous-préschéma en groupes fermé* C *de* H*, lisse, à fibres connexes, tel que* $\mathrm{C}_s = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{H}_s}(\mathrm{T}_s)$.

ii) *Pour tout point* t *de* S*,* C_t *est le centralisateur dans* H_t *d'un sous-tore* T_t *de* H_t.

Démonstration de 6.7. Soit T′ un S-tore, tel qu'il existe un isomorphisme $u_0 : \mathrm{T}'_s \xrightarrow{\sim} \mathrm{T}_s$ (Exp. X 4.6). Soient $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, $\mathrm{A}_n = \mathrm{A}/\mathfrak{m}^n$, $\mathrm{S}_n = \operatorname{Spec} \mathrm{A}_n$, $\mathrm{H}_n = \mathrm{H} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n$, etc. Comme H est lisse sur S, pour tout entier $n > 0$, il existe un S_n-morphisme de groupes :

$$u_n : \mathrm{T}'_n \longrightarrow \mathrm{H}_n$$

qui relève u_0 (Exp. IX 3.6) et on peut supposer par récurrence sur n que u_n relève u_{n-1}. Soit d'autre part q un nombre premier inversible sur S ; pour tout entier ℓ égal à une puissance de q, notons ${}_\ell u_n$ la restriction de u_n au sous-groupe ${}_\ell \mathrm{T}'_n$. Pour ℓ fixé et n variable, les morphismes ${}_\ell u_n$ forment un système projectif, donc proviennent d'un unique S-morphisme de groupes ${}_\ell u : {}_\ell \mathrm{T}' \to \mathrm{H}$ (1.6 a)). Comme H est séparé (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.2) et que u_0 est un monomorphisme, ${}_\ell u$ est un monomorphisme (Exp. IX 6.8)
435 et même une immersion fermée, puisqu'il est fini, ${}_\ell \mathrm{T}'$ étant fini sur S. Notons $\mathrm{M}(\ell)$ le groupe image. Il est clair que la famille de sous-groupes de type multiplicatif $\mathrm{M}(\ell)$ est cohérente au sens de 4.1. Soit $\mathrm{C}_\ell = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{H}}(\mathrm{M}(\ell))$, qui est représentable par un sous-préschéma en groupes (2.5), fermé (H est séparé), lisse sur S (Exp. XI 2.4). Les C_ℓ

[(*)] hypothèse en fait superflue, cf. XVII App. III 3.

forment une famille filtrante, décroissante de sous-schémas fermés, donc stationnaire, H étant noethérien. La valeur stationnaire est un sous-groupe C, lisse et fermé, tel que $\mathrm{C}_s = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{H}_s}(\mathrm{T}_s)$ d'après le théorème de densité (Exp. IX 4.7). Il nous reste à montrer que pour tout point t de S, C_t est le centralisateur dans H_t d'un sous-tore T_t (ce qui entraînera que C_t est connexe). Mais cela va résulter du lemme plus précis suivant, appliqué à la famille $\mathrm{M}(\ell)_t$ de sous-groupes de H_t :

Lemme 6.8. — *Soient* G *un groupe algébrique connexe, défini sur un corps k, r un entier* > 0*, q un entier premier à la caractéristique* [7] *de k,* $\mathrm{M}(\ell)$ *(ℓ parcourant les puissances de q) une famille cohérente de sous-groupes de type multiplicatif de* G*, de type* $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^r$ (cf. 4.6)*,* M *le sous-groupe algébrique de* G *engendré par les* $\mathrm{M}(\ell)$ (*loc. cit.*)*,* T *l'unique tore maximal de* M (cf. 3.4)*. Alors on a*

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{M}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{M}(\ell)) \qquad \text{pour } \ell \text{ assez grand.}$$

La dernière égalité est bien claire. Pour démontrer la première, introduisons le centre Z de G, $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$, M' (resp. T') l'image de M (resp. T) dans G', K l'image réciproque de T' dans G (c.-à-d. le sous-groupe algébrique de G engendré par T et Z). Il suffit évidemment de prouver que $\mathrm{K} \supset \mathrm{M}$, donc que $\mathrm{T}' = \mathrm{M}'$. Or, M est lisse et connexe (4.6) et G' est affine (Exp. XII 6.1), donc M' est produit direct de son tore **436**
maximal T' (Exp. XII 6.6 d)) et d'un groupe unipotent (BIBLE 4 Th. 4) (on peut supposer k algébriquement clos). L'image de $\mathrm{M}(\ell)$ dans M' est donc nécessairement contenue dans T'. Donc l'image réciproque de T' dans M, majore $\mathrm{M}(\ell)$ pour tout ℓ, donc est égale à M. Par suite $\mathrm{M}' = \mathrm{T}'$. Ceci prouve 6.8 et donc 6.7.

Ceci étant, démontrons 6.6. Nous nous sommes ramenés au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète A, que l'on peut supposer de plus complet à corps résiduel algébriquement clos. Quitte à remplacer A par son normalisé dans une extension finie de son corps des fractions, on peut supposer que $(\mathrm{G}_t)_{\mathrm{réd}}$ est lisse[8]. Il est clair que, pour prouver 6.6, on peut remplacer G par la composante neutre de l'adhérence schématique dans G de $(\mathrm{G}_t)^0_{\mathrm{réd}}$, donc supposer que G est plat sur S, à fibres connexes, et que G_t est lisse.

a) Supposons que H_s est le centralisateur dans $(\mathrm{G}_s)_{\mathrm{réd}}$ d'un tore T_s et montrons que H_t est alors le centralisateur dans G_t d'un sous-tore de G_t. D'après le lemme 6.7, il existe un sous-schéma en groupes C de H, lisse sur S, dont la fibre fermée est H_s et tel que $\mathrm{C}_t = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{H}_t}(\mathrm{T}_t)$, où T_t est un sous-tore de H_t. Comme H est lisse sur S, à fibres connexes, on en conclut, pour des raisons de dimension, que $\mathrm{C} = \mathrm{H}$. Gardant les notations de 6.7, on a : $\mathrm{H} = \mathrm{C} = \mathrm{C}_\ell$ pour ℓ grand. Considérons de même $\mathrm{C}'_\ell = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{M}(\ell))$ (2.5), et soit C' la valeur stationnaire de C'_ℓ pour ℓ grand (2.5 bis). Le schéma en groupes C' majore H et est tel que $\mathrm{C}'_t = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_t}(\mathrm{T}_t)$ (6.8) et $\mathrm{C}'_s = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_s}(\mathrm{T}_s)$. L'hypothèse faite sur H_s implique : $\dim \mathrm{H}_s = \dim \mathrm{C}'_s$. Par ailleurs, $\dim \mathrm{H}_s = \dim \mathrm{H}_t$ (car H est lisse sur S) et $\dim \mathrm{C}'_t \leqslant \dim \mathrm{C}'_s$ (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 4.1), **437**
donc on a $\dim \mathrm{H}_t = \dim \mathrm{C}'_t$. Mais G_t étant lisse et connexe, $\mathrm{C}'_t = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_t}(\mathrm{T}_t)$ est lisse et connexe, donc finalement on a $\mathrm{H}_t = \mathrm{C}'_t = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_t}(\mathrm{T}_t)$.

---

[7] N.D.E. : on a supprimé le mot « résiduelle ».

[8] N.D.E. : détails ou références à donner ici...

b) Supposons que H_s contienne un sous-groupe de Cartan C_s de G_s, c.-à-d. le centralisateur dans $(G_s)_{\text{réd}}$ d'un tore maximal T_s de G_s. D'après 6.7, il existe un sous-schéma en groupes C de H, lisse sur S, à fibres connexes, qui relève C_s. Il suffit évidemment de prouver que C_t contient un sous-groupe de Cartan de G_t. Or d'après a) appliqué avec $H = C$, C_t est le centralisateur dans G_t d'un sous-tore de G_t, donc contient un sous-groupe de Cartan de G_t.

c) Supposons que H_s soit un sous-groupe parabolique de G_s. Soit $N = \underline{\mathrm{Norm}}_G(H)$. Par hypothèse, H est égal à son normalisateur connexe, donc N_s est lisse, et par suite est égal à : $\underline{\mathrm{Norm}}_{(G_s)_{\text{réd}}}(H_s) = H_s$ (Exp. XII 8 bis). Mais alors N est *plat* sur S. Nous verrons dans Exp. XVI, que dans ces conditions, G/N est représentable. Comme $H_s = N_s$ est une sous-groupe parabolique de G, $(G/N)_s$ est propre. Comme (G/N) est à fibres connexes, et plat sur S, il résulte de EGA III 5.5.1 que (G/N) est propre sur S. Donc $(G/N)_t = G_t/N_t$ est propre sur t, et il en est de même de G_t/H_t, puisque N_t/H_t est fini. Il suffit alors d'appliquer le lemme suivant :

Lemme 6.9. — *Soient k un corps,* G *un k-groupe algébrique,* H *un sous-groupe algé-*
438 *brique lisse et connexe de* G*,* $N = \underline{\mathrm{Norm}}_G H$*, alors si* $\dim H = \dim N$ *et si* G/H *est propre,* H *est un sous-groupe parabolique de* G.

En effet, on peut supposer k algébriquement clos et G lisse et connexe. Le centre Z de G est contenu dans N, et l'hypothèse $\dim H = \dim N$, entraîne que $Z' = (Z)^0_{\text{réd}}$ est contenu dans H, donc $G' = G/Z'$ est affine (Exp. XII 6.1). Remplaçant G par G′, et H par son image dans G′, on est ramené au cas où G est affine (Exp. XIV 4.9) et le lemme 6.9 résulte alors de BIBLE 6 Th. 4. Nous avons donc démontré le lemme 6.6.

Pour achever de démontrer 6.4, il nous faut prouver que les S-préschémas qui représentent $\mathscr{LC}$ (resp. $\mathscr{CT}$, resp. $\mathscr{P}$) sont de présentation finie sur S. Cette assertion est locale sur S, ce qui nous permet de supposer S affine, puis, G étant de présentation finie, S noethérien (EGA IV 8.9). Nous venons de voir que les inclusions naturelles : $\mathscr{CT} \to \mathscr{L}$ (resp. $\mathscr{P} \to \mathscr{L}$) sont des immersions, il en est donc de même des inclusions : $\mathscr{CT} \to \mathscr{LC}$ (resp. $\mathscr{P} \to \mathscr{LC}$) et par suite, il suffit de prouver que $\mathscr{LC}$ est représentable par un S-préschéma de présentation finie.

Reprenons les notations introduites dans 5.2. Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit donc $\mathscr{L}^n$ le sous-foncteur de $\mathscr{L}$ tel que :

$$\mathscr{L}^n(S') = \{H \in \mathscr{L}(S') \quad \text{tels que} \quad \underline{\mathrm{Norm}}_{G_{S'}}(H) = \underline{\mathrm{Norm}}_{G_{S'}} H^{(n)}\}.$$

Le S-foncteur $\mathscr{L}^n$ est donc représentable par un sous-préschéma ouvert de $\mathscr{L}$, somme des $\mathscr{L}^n_r$. Chaque $\mathscr{L}^n_r$ est de présentation finie sur S (5.3) et est vide pour $r > \operatorname{Sup}_{s\in S} \dim G_s$ (qui est un nombre fini, S étant quasi-compact), donc $\mathscr{L}^n$ est de
439 présentation finie sur S. Il suffit de prouver que $\mathscr{LC}$ est contenu dans $\mathscr{L}^n$ pour n assez grand.

Pour tout point s de S, soit $d(s)$ le plus petit entier n (fini ou infini) tel que $\mathscr{LC}_{G_s} \subset \mathscr{L}^n_{G_s}$. Il suffit de montrer que la fonction d est bornée sur S, car si M est un majorant, $\mathscr{LC}$ sera ensemblistement contenu dans $\mathscr{L}^M$, donc $\mathscr{LC}$ sera contenu dans $\mathscr{L}^M$, puisque ce dernier est un ouvert de $\mathscr{L}$. Un argument immédiat de constructibilité nous ramène à prouver que si S est noethérien intègre de point générique t, alors la fonction d est bornée sur un voisinage de t.

a) Réduction au cas où G est lisse sur S.

Procédant comme dans 6.2, on voit que quitte à changer S, on peut supposer que $(\mathrm{G})_{\text{réd}}$ est un préschéma en groupes lisse sur S, que nous noterons G′. Posons $\mathrm{X} = \mathscr{L}\mathscr{C}_{\mathrm{G}}$, $\mathrm{X}' = \mathscr{L}\mathscr{C}_{\mathrm{G}'}$ et soit H (resp. H′) le sous-préschéma en groupes de G_{X} (resp. $\mathrm{G}'_{\mathrm{X}'}$) universel pour le foncteur $\mathscr{L}\mathscr{C}_{\mathrm{G}}$ (resp. $\mathscr{L}\mathscr{C}_{\mathrm{G}'}$). Comme H est lisse sur X, $\mathrm{H} \times_{\mathrm{X}} (\mathrm{X}_{\text{réd}})$ est réduit, donc contenu dans $\mathrm{G}'_{\mathrm{X}_{\text{réd}}}$ et c'est un élément de $\mathscr{L}\mathscr{C}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{X}_{\text{réd}})$, d'où un morphisme canonique $p : \mathrm{X}_{\text{réd}} \to \mathrm{X}'$. Il est clair que p est un monomorphisme ; montrons que p est même une immersion. Soit N′ le normalisateur de H′ dans $\mathrm{G}_{\mathrm{X}'}$. L'ensemble des points s de X′ tels que l'immersion $\mathrm{H}'_s \to \mathrm{N}'_s$ soit une immersion ouverte est un ouvert U et $\mathrm{H}'|_{\mathrm{U}} \to \mathrm{N}|_{\mathrm{U}}$ est une immersion ouverte (Exp. VI_{B} 2.5 et EGA IV 17.9.5). Il résulte de 5.1 iii) que U est le plus grand ouvert de X′ au-dessus duquel H′ est égal à son normalisateur connexe dans $\mathrm{G}_{\mathrm{X}'}$, donc $\mathrm{H}'|_{\mathrm{U}} \in \mathscr{L}\mathscr{C}_{\mathrm{G}}(\mathrm{U})$. On en déduit immédiatement que p est un isomorphisme de $\mathrm{X}_{\text{réd}}$ sur $\mathrm{U}_{\text{réd}}$. Si on sait **440**
montrer que $\mathscr{L}\mathscr{C}_{\mathrm{G}}$ est de type fini lorsque G est lisse, X′ sera de type fini sur S, donc $\mathrm{X}_{\text{réd}}$ sera de type fini (S est noethérien) et par suite sera contenu dans $\mathscr{L}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}}$ pour M assez grand et il en sera de même de X.

b) Cas où S est le spectre d'un corps k algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$ et G est un groupe algébrique lisse sur k.

Au lieu d'utiliser les voisinages infinitésimaux $\mathrm{H}^{(n)}$ d'un sous-préschéma en groupes H de G, nous utiliserons les sous-groupes radiciels ${}_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{H})$, noyaux des itérés du morphisme de Frobenius dans H (Exp. $\mathrm{VII}_{\mathrm{A}}$ 4), ce qui est légitime ici, vu que ${}_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{H})$ est contenu dans le voisinage infinitésimal d'ordre p^n de la section unité de H. Si T est un sous-tore de G, ${}_{\mathrm{F}^n}(\mathrm{T}) = {}_{p^n}(\mathrm{T})$ et il est immédiat par dualité que $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}({}_{p^n}(\mathrm{T}))$ est égal à $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ pour n assez grand. On a alors la proposition plus précise suivante :

Proposition 6.10. — *Soient k un corps de caractéristique $p > 0$, G un k-groupe algébrique lisse, T un tore maximal de G_k, m le plus petit entier tel que :*

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}({}_{p^m}(\mathrm{T}))^0 = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})^0.$$

Alors, pour tout k-préschéma S et pour tout $\mathrm{H} \in \mathscr{L}\mathscr{C}(\mathrm{S})$, on a :

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}}}({}_{\mathrm{F}^m}(\mathrm{H})).$$

A fortiori, $\mathscr{L}\mathscr{C}$ est contenu dans $\mathscr{L}^{p^m}$.

Comme H est lisse sur S, de présentation finie sur S et a un rang nilpotent constant (à savoir celui de G), nous verrons au paragraphe suivant (7.3), que le foncteur $\mathscr{C}_{\mathrm{H}}$ **441**
des sous-groupes de Cartan de H est représentable par un S-préschéma, lisse sur S (le lecteur vérifiera que la démonstration donnée de cette propriété, n'utilise pas le fait que $\mathscr{L}\mathscr{C}_{\mathrm{H}}$ soit de type fini sur S). Il résulte alors de Exp. XIII 3.1 que l'on peut considérer l'ouvert U des points réguliers de H.

Soit S′ un S-préschéma, g un élément de G(S′) normalisant ${}_{\mathrm{F}^m}(\mathrm{H})_{\mathrm{S}'}$. Pour prouver que g normalise $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$, il suffit de prouver que $\mathrm{int}(g)\mathrm{U}_{\mathrm{S}'}$ est contenu dans $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$; en effet, $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'} \cap \mathrm{int}(g)\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$ contiendra alors un sous-groupe ouvert de $\mathrm{int}(g)\mathrm{H}$, donc sera égal à

$\mathrm{int}(g)\mathrm{H}$, puisque ce dernier est à fibres connexes. Quitte à remplacer S' par un S'' convenable, puis S'' par S, on est ramené à prouver que si $g \in \mathrm{G(S)}$ normalise ${}_{\mathrm{F}^m}(\mathrm{H})$ et si $u \in \mathrm{U(S)}$, alors $\mathrm{int}(g)u \in \mathrm{H(S)}$.

Or soit C l'unique sous-groupe de Cartan de $\mathrm{H_S}$ qui « contient » u (Exp. XIII 3.2). Il nous suffit de montrer que $\mathrm{C}' = \mathrm{int}(g)\mathrm{C} \subset \mathrm{H}$. Comme $\mathrm{H} \in \mathscr{L}\mathscr{C}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$, C est aussi un sous-groupe de Cartan de G, mais ce dernier possède des tores maximaux, donc (Exp. XII 7.1 (a)) C est le centralisateur dans $\mathrm{G}^0_{\mathrm{S}}$ de son unique tore maximal T. Il résulte de la définition de m (et du fait que deux tores maximaux de G sont localement conjugués pour fpqc (Exp. XII 7.1)) que l'on a :

$$\mathrm{C} = (\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}))^0 = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}({}_{p^m}(\mathrm{T}))^0,$$

d'où par conjugaison par g :

$$\mathrm{C}' = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{int}(g)({}_{p^m}(\mathrm{T})))^0.$$

Mais $\mathrm{int}(g)({}_{p^m}(\mathrm{T}))$ est un sous-groupe de type multiplicatif de $\mathrm{int}(g)({}_{\mathrm{F}^m}(\mathrm{H}))$ égal à
442 ${}_{\mathrm{F}^m}(\mathrm{H})$ (g normalise ${}_{\mathrm{F}^m}(\mathrm{H})$), donc est contenu dans H. Il résulte alors de Exp. XIII 2.1 (qui est démontré lorsque la base est un corps, mais s'étend immédiatement au cas d'une base quelconque) que pour que C' soit contenu dans H, il suffit que l'on ait :

$$\mathrm{Lie}\,\mathrm{C}' \subset \mathrm{Lie}\,\mathrm{H}.$$

Or, $\mathrm{Lie}\,\mathrm{C}' = \mathrm{int}(g)(\mathrm{Lie}\,\mathrm{C}) \subset \mathrm{int}(g)(\mathrm{Lie}\,\mathrm{H})$.

D'autre part, si $m \geqslant 1$, ce qu'il est loisible de supposer, on a (en utilisant Exp. $\mathrm{VII_A}$ 4.1.2) :

$$\mathrm{Lie}\,\mathrm{H} = \mathrm{Lie}({}_{\mathrm{F}^m}(\mathrm{H})) = \mathrm{Lie}\,(\mathrm{int}(g)({}_{\mathrm{F}^m}(\mathrm{H}))) = \mathrm{int}(g)(\mathrm{Lie}\,\mathrm{H}).$$

Donc $\mathrm{Lie}\,\mathrm{C}' \subset \mathrm{Lie}\,\mathrm{H}$, ce qui achève la démonstration de 6.10.

Nous aurons besoin d'une autre définition de l'entier m introduit dans 6.10.

Lemme 6.11. — *Soient* G *un groupe algébrique, lisse, défini sur un corps k algébriquement clos, de caractéristique $p > 0$,* T *un tore maximal de* G*, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,\mathrm{G}$ et* R *la famille des caractères non nuls de* T *qui interviennent dans la représentation de* T *dans $\mathfrak{g}$ induite par la représentation adjointe de* G*. Pour tout élément $r \in \mathrm{R}$, notons e_r le plus grand entier n tel que p^n divise r dans le groupe des caractères de* T*. Alors $m = \mathrm{Sup}_{r\in\mathrm{R}}(e_r + 1)$ si $\mathrm{R} \neq \varnothing$ et $m = 0$ sinon.*

En effet, $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ est lisse et contenu dans $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}({}_{p^m}(\mathrm{T}))$, donc :

$$\begin{aligned}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{T})^0 = (\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}({}_{p^m}(\mathrm{T})))^0 &\iff \mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{T}) = \mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}({}_{\mathrm{F}^m}(\mathrm{T})))\\ &\iff \mathfrak{g}^{\mathrm{T}} = \mathfrak{g}^{{}_{p^m}(\mathrm{T})} \quad \text{(Exp. II 5.2.3)}\end{aligned}$$

443 Or avec les notations habituelles, on a :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \coprod_{r\in\mathrm{R}} \mathfrak{g}^r.$$

Donc $\mathfrak{g}^{\mathrm{T}} = \mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}^{({}_{p^m}(\mathrm{T}))} = \mathfrak{g}_0 + \coprod_{r\in\mathrm{R}'} \mathfrak{g}^r$, où R' est la partie de R formée des caractères de T dont la restriction à ${}_{p^m}(\mathrm{T})$ est nulle. Mais un caractère non nul r de T, a une restriction nulle à ${}_{p^m}(\mathrm{T})$ si et seulement si $m \leqslant e_r$, d'où le lemme.

c) Revenons à la démonstration de 6.4. Nous nous sommes ramenés (d'après le point a) et le paragraphe qui le précède), au cas où S est un schéma intègre noethérien et G est lisse sur S. Nous devons montrer que la fonction d est bornée sur un voisinage du point générique t de S. Quitte à changer S, nous pouvons supposer que G possède un tore maximal (6.2) trivial $\mathrm{T} = \mathrm{D_S(M)}$. Soit alors $\mathfrak{g} = \coprod_{\lambda \in \mathrm{M}} \mathfrak{g}^\lambda$ la décomposition de l'algèbre de Lie de G suivant les caractères de T et soit R l'ensemble fini des caractères non nuls de M, tels que $\mathfrak{g}^\lambda \neq 0$. Distinguons alors deux cas :

1er cas : le point t, et par suite tous les points de S, ont une caractéristique résiduelle $p > 0$. Il est clair, vu ce qui précède, que la fonction d est alors majorée par p^m, où m est défini comme dans 6.11.

2ème cas : le point t a une caractéristique résiduelle nulle. Pour tout $\lambda \in \mathrm{R}$, soit n_λ le plus grand entier qui divise λ dans le groupe M, et posons $n = \prod n_\lambda$, $\lambda \in \mathrm{R}$. Pour tout nombre premier q divisant n, notons S_q la partie fermée de S formée des points de S dont la caractéristique résiduelle est égale à q et soit U l'ouvert non vide (il contient t) complémentaire dans S de la réunion des S_q. Si maintenant s est un point de U, ou **444**
bien s a une caractéristique résiduelle nulle et alors $d(s) = 1$ (5.6), ou bien s a une caractéristique résiduelle $p > 0$ qui ne divise pas n, donc l'entier m, relatif au groupe G_s, défini dans 6.11, est inférieur ou égal à un. Par ailleurs, il résulte de Exp. VII[9] que l'on a :

$$\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G_{S'}}}({}_{\mathrm{F}^1}(\mathrm{H})) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G_{S'}}}(\mathrm{Lie\,H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G_{S'}}}(\mathrm{H}^{(1)}).$$

Finalement, il résulte de 6.10 que si $\mathrm{H} \in \mathscr{LC}_{\mathrm{G}_s}(\mathrm{S'})$, on a : $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G_{S'}}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G_{S'}}}(\mathrm{H}^{(1)})$, et par suite $d(s) \leqslant 1$, donc d est bornée par 1 sur U.

Ceci achève la démonstration de 6.4.

Corollaire 6.12. — *Soient* S *un préschéma et* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie. Supposons que le rang nilpotent* (*resp. la dimension des sous-groupes de Borel*) *des fibres de* G *soit une fonction localement constante sur* S*, alors le foncteur* $\mathscr{C}$ *des sous-groupes de Cartan de* G (*resp. le foncteur* $\mathscr{B}$ *des sous-groupes de Borel de* G) *est représentable par un* S*-préschéma de présentation finie sur* S.

En effet, quitte à restreindre S, on peut supposer que le rang nilpotent des fibres ν est constant. Mais alors il est clair que $\mathscr{C}$ est représenté par le sous-préschéma à la fois ouvert et fermé du préschéma X qui représente $\mathscr{LC}$ (6.4), au-dessus duquel le sous-groupe universel de $\mathrm{G_X}$ relatif au foncteur $\mathscr{LC}$, est de dimension relative ν. La démonstration est analogue pour le foncteur $\mathscr{B}$, compte tenu de la représentabilité du foncteur $\mathscr{P}$.

7. Sous-groupes de Cartan d'un groupe lisse **445**

Proposition 7.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie,* lisse *sur* S*, à fibres connexes.*

[9] N.D.E. : argument à expliciter...

i) *Soit* $\mathscr{C}\mathscr{T}$ *le* S-*foncteur* $(\mathbf{Sch}/\mathrm{S})^\circ \to \mathbf{Ens}$, *tel que pour tout* S-*préschéma* S', *on ait :*

$\mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S}')$ = *ensemble des sous-préschémas en groupes* H *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, *lisses sur* S', *tels que pour tout point* s' *de* S', $\mathrm{H}_{\overline{s'}}$ *soit le centralisateur dans* $\mathrm{G}_{\overline{s'}}$ *d'un sous-tore de* $\mathrm{G}_{\overline{s'}}$. *Alors,* $\mathscr{C}\mathscr{T}$ *est représentable par un* S-*préschéma de présentation finie sur* S, *lisse et quasi-projectif sur* S.

ii) *Si* S *est artinien et si* $\mathrm{H} \in \mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S})$, H *est le centralisateur dans* G *d'un sous-tore de* G. *Si* S *est le spectre d'un anneau local hensélien, et si* $\mathrm{H} \in \mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S})$, H *est le centralisateur dans* G *d'un sous-groupe de type multiplicatif de* G, *étale sur* S.

iii) *Si* L *est un* S-*préschéma en groupes, lisse et de présentation finie sur* S, $i : \mathrm{L} \to \mathrm{G}$ *un* S-*monomorphisme de groupes, et* H *un élément de* $\mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S})$, *alors* $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}, \mathrm{L})$ *et* $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}, \mathrm{L})$ (cf. Exp. VIII 6.5 e)) *sont représentables par des sous-préschémas fermés de* G, *lisses sur* S.

iv) *Si* $\mathrm{H} \in \mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S})$, H *est fermé dans* G, $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ *est représentable par un*
446 *sous-préschéma en groupes de* G, *fermé et lisse sur* S *;* N/H *est représentable par un* S-*préschéma en groupes, séparé sur* S, *étale et de type fini sur* S *;* G/N *est représentable par un* S-*préschéma lisse et quasi-projectif sur* S.

v) *Soit* G' *un* S-*préschéma en groupes, de présentation finie sur* S *et* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$, *un* S-*morphisme de groupes, fidèlement plat, de sorte que* G' *satisfait aux mêmes hypothèses que* G (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 9). *Alors si* $\mathrm{H} \in \mathscr{C}\mathscr{T}_{\mathrm{G}}(\mathrm{S})$, *l'image de* H *par* u *est représentable par un sous-préschéma en groupes* H' *de* G' *qui est un élément de* $\mathscr{C}\mathscr{T}_{\mathrm{G}'}(\mathrm{S})$. *De plus,* $\mathrm{H} \to \mathrm{H}'$ *est fidèlement plat et si* H *est le centralisateur dans* G *d'un tore* T, H' *est le centralisateur dans* G' *du tore* $\mathrm{T}' = u(\mathrm{T})$.

vi) *Sous les conditions de* v), *considérons le* S-*morphisme :*

$$\widetilde{u} : \mathscr{C}\mathscr{T}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathscr{C}\mathscr{T}_{\mathrm{G}'}, \qquad \mathrm{H} \mapsto \mathrm{H}' = u(\mathrm{H}).$$

Alors $\widetilde{u}$ *est un morphisme fidèlement plat quasi-compact ; si de plus* $\operatorname{Ker} u$ *est central,* $\widetilde{u}$ *est un isomorphisme, l'isomorphisme réciproque étant* $\mathrm{H}' \mapsto u^{-1}(\mathrm{H}')$.

Démonstration de ii). Pour la première assertion, on peut supposer S local artinien de point fermé s. Soit $\mathrm{H} \in \mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S})$ et $\mathrm{T}_{\overline{s}}$ le tore central maximal de $\mathrm{H}_{\overline{s}}$ qui est déjà défini sur $\kappa(s)$ (cf. 3.4). Comme $\mathrm{H}_s \in \mathscr{C}\mathscr{T}(s)$, on a : $\mathrm{H}_s = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_s} \mathrm{T}_s$. Le groupe H est lisse, donc T_s se relève (de manière unique) en un sous-tore T de H, central dans
447 H (Exp. IX 3.6 bis et Exp. IX 5.6). Mais alors $\mathrm{H}' = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}} \mathrm{T}$ majore H et a même fibre que H ; comme H est plat sur S, on a $\mathrm{H} = \mathrm{H}'$ (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 2.5).

Supposons maintenant que S soit le spectre d'un anneau local hensélien, qu'on peut supposer noethérien par les réductions habituelles. Notons s le point fermé de S, T_s le tore central maximal de H_s, q un entier inversible sur S, ℓ une puissance de q, T un S-tore ayant une fibre fermée isomorphe à T_s (Exp. X 4.6). Soit d'autre part ${}_\ell\mathrm{H}$ le « noyau » de l'élévation à la puissance $\ell^{\text{ième}}$ dans H et soit U_ℓ le plus grand ouvert de ${}_\ell\mathrm{H}$ qui est étale sur S. Il résulte alors de 1.3 et du fait que H est plat sur S que U_ℓ majore ${}_\ell\mathrm{T}_s$. Comme S est hensélien, il existe un unique S-morphisme :

$$u_\ell : {}_\ell\mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{U}_\ell$$

qui, sur la fibre fermée, induit l'immersion canonique ${}_{\ell}\mathrm{T}_s \to (\mathrm{U}_\ell)_s$. En raison de l'unicité, on voit facilement que u_ℓ est un morphisme de S-groupes, central (Exp. IX 5.6 a)). Procédant alors comme dans 6.6 et 6.7, on montre que u_ℓ est une immersion et que si M_ℓ est le groupe image $u_\ell({}_{\ell}\mathrm{T})$, alors $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{M}_\ell)$ est égal à H pour ℓ assez grand (c'est ici que sert l'hypothèse S noethérien).

Démonstration de i). Le groupe G est lisse sur S, à fibres connexes, donc si $\mathrm{H} \in \mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S})$, H a ses fibres connexes (Exp. XII 6.6 b)) et est égal à son normalisateur connexe (6.5) de sorte que le foncteur $\mathscr{C}\mathscr{T}$ défini dans 7.1 i) coïncide avec le foncteur aussi noté $\mathscr{C}\mathscr{T}$ qui a été défini dans 6.4.0. Donc, d'après le théorème 6.4, $\mathscr{C}\mathscr{T}$ est représentable par un S-préschéma de présentation finie et quasi-projectif sur S. Il reste à montrer que ce préschéma est lisse sur S. On se ramène d'abord par EGA IV 8, **448**
au cas où S est affine noethérien. Grâce à Exp. XI 1.5, il suffit alors de prouver que si S est le spectre d'un anneau local artinien, S_0 un sous-schéma défini par un idéal nilpotent, H_0 un élément de $\mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S}_0)$, alors H_0 se relève en un sous-préschéma en groupes H de G, lisse sur S. Or d'après ii), $\mathrm{H}_0 = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_0}\mathrm{T}_0$, où T_0 est un sous-tore de G_0. Comme G est lisse, T_0 se relève en un sous-tore T de G (Exp. IX 3.6 bis), et il suffit de prendre $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ qui est bien lisse sur S (Exp. XI 2.4 et lemme 2.5).

Démonstration de iii). Comme H est lisse, à fibres connexes, alors, d'après Exp. XI 6.11, $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{L})$ est représentable par un sous-préschéma fermé de G, de présentation finie sur S. Pour montrer que ce transporteur est lisse, on se ramène, comme ci-dessus, à prouver que si S est local artinien, S_0 un sous-préschéma fermé de S, $g_0 \in \mathrm{G}(\mathrm{S}_0)$ tel que $\mathrm{int}(g_0)\mathrm{H}_0 \subset \mathrm{L}_0$, alors g_0 se relève en $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ tel que $\mathrm{int}(g)\mathrm{H} \subset \mathrm{L}$. Le groupe G étant lisse sur S, il existe une section g_1 de G qui relève g_0 ; soit $\mathrm{H}' = \mathrm{int}(g_1)\mathrm{H}$. C'est donc un élément de $\mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S})$ tel que $\mathrm{H}'_0 \subset \mathrm{L}_0$. D'après ii), H′ est le centralisateur dans G d'un tore T′ de G. Comme L est lisse, le tore T'_0 de L_0 se relève en un tore T″ de L (Exp. XI 3.6 bis). Le groupe $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{L}}\mathrm{T}''$ est contenu dans $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\mathrm{T}''$, a même fibre que ce dernier (à savoir H'_0) et est lisse, donc est égal à $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}\mathrm{T}'' = \mathrm{H}''$. Les sous-tores T′ et T″ de G sont deux relèvements de T'_0, donc sont conjugués par un élément h de G(S) se réduisant suivant la section unité de G_0 (Exp. IX 3.3 bis) ; il en est donc de même de leurs centralisateurs H′ et H″ dans G. La section $g = hg_1$ relève g_0 et l'on a bien $\mathrm{int}(g)\mathrm{H} \subset \mathrm{L}$. **449**

Si maintenant $g \in \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{L})(\mathrm{S})$, pour que $\mathrm{int}(g)\mathrm{H} = \mathrm{L}$, il faut et il suffit que pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\dim \mathrm{H}_s = \dim \mathrm{L}_s$. Il en résulte que si U désigne le sous-préschéma de S à la fois ouvert et fermé au-dessus duquel les fibres de H ont même dimension que celles de L, le transporteur strict de H dans L, $\underline{\mathrm{Transpstr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{L})$, est représentable par le S-préschéma :

$$\mathrm{U} \times_{\mathrm{S}} \underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H},\mathrm{L}).$$

Démonstration de iv). Pour voir que si $\mathrm{H} \in \mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S})$, H est fermé dans G, on peut supposer S affine noethérien, puis S spectre d'un anneau local complet (EGA IV 8), mais alors H est le centralisateur dans G d'un sous-groupe de type multiplicatif (d'après ii)) donc est fermé puisque G est séparé sur S (Exp. VI_{B} 5.2).

D'après iii), $N = \underline{\mathrm{Norm}}_G(H) = \underline{\mathrm{Transpstr}}_G(H, H)$ est représentable par un sous-préschéma en groupes lisse sur S et fermé dans G. Considérons le S-morphisme :

$$G \longrightarrow \mathscr{C}\mathscr{T}, \qquad g \mapsto \mathrm{int}(g)H.$$

Il résulte de iii) que ce morphisme est lisse, son image est donc un ouvert U de $\mathscr{C}\mathscr{T}$. On prouve alors comme dans Exp. XI 5.3 que G/N est représentable par U, donc en particulier est quasi-projectif.

Étudions maintenant le quotient N/H. Grâce à EGA IV 8, pour prouver que N/H
450 est représentable, on peut supposer S affine noethérien, puis S spectre d'un anneau local A donc de dimension[10] finie. Nous allons procéder par récurrence croissante sur la dimension de S. Si $\dim S = 0$, la propriété résulte de Exp. $\mathrm{VI_A}$ §4. Notons maintenant que si N/H est représentable, il est séparé sur S (car H est fermé dans N d'après iv)), de type fini et étale sur S (car N est lisse sur S, de type fini et H est ouvert dans N), donc N/H est nécessairement quasi-affine sur S (SGA1 VIII.6.2). Par descente effective des schémas quasi-affines (*loc. cit.* 7.9), on peut remplacer A par son complété donc supposer S spectre d'un anneau local noethérien complet. Soient s son point fermé et $U = S \setminus s$. Par hypothèse de récurrence, $(N|_U)/(H|_U)$ est représentable par un U-groupe K. Soient alors T_s le tore central maximal de H_s, q un entier inversible sur S, ℓ une puissance de q, M_ℓ l'unique sous-groupe de type multiplicatif de H, central, qui relève ${}_\ell T_s$ (cf. ii)). Choisissons ℓ assez grand pour que $\underline{\mathrm{Centr}}_G(M_\ell) = H$, et soit $N' = \underline{\mathrm{Norm}}_G(M_\ell)$. Comme $\underline{\mathrm{Centr}}_G(M_\ell) = H$, on a $N' \subset \underline{\mathrm{Norm}}_G(H)$. De plus, on vérifie immédiatement que T_s (donc aussi $(M_\ell)_s$) est un sous-groupe caractéristique de H_s (c.-à-d. stable par $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{gr}}(H_s)$), donc N_s normalise $(M_\ell)_s$ et par suite $N_s = N'_s$. La démonstration de Exp. XI 5.9 prouve alors que le quotient $N'/H = \underline{\mathrm{Norm}}_G(M_\ell)/\,\underline{\mathrm{Centr}}_G(M_\ell)$ est représentable par un S-groupe K′. Comme N′ est lisse sur S et que $N'_s = N_s$, N′ est un sous-groupe ouvert de N (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 2.5) qui contient H, donc l'image de $N'|_U$ dans K est un sous-groupe ouvert, isomorphe à $K'|_U$. Soit L le S-préschéma obtenu par recollement de K et de K′ grâce à l'isomorphisme précédent et soit p le S-morphisme $N \to L$, obtenu par recollement
451 des projections canoniques $N|_U \to K$ et $N' \to K'$. Il est clair que (L, p) représente le quotient N/H.

Démonstration de v). Supposons d'abord que S soit le spectre d'un corps k. L'image H′ de H est alors un sous-groupe lisse de G′. Nous devons montrer que $H' \in \mathscr{C}\mathscr{T}_{G'}(S)$, ce qui va résulter du lemme plus précis suivant :

Lemme 7.2. — *Soient* $u : G \to G'$ *un épimorphisme de* k*-groupes algébriques lisses et connexes,* T *un tore de* G*,* T′ *son image dans* G′*, alors :*

$$u(\underline{\mathrm{Centr}}_G\, T) = \underline{\mathrm{Centr}}_{G'}\, T'.$$

Notons $H = \underline{\mathrm{Centr}}_G\, T$, $H' = \underline{\mathrm{Centr}}_{G'}\, T'$, $H'' = u(H)$. On a $H'' \subset H'$. Pour prouver que $H' = H''$, on peut supposer le corps de base algébriquement clos et il suffit de prouver que tout sous-groupe de Cartan de H′ est contenu dans H″. En effet, H″ contiendra alors l'ouvert des points réguliers de H′, donc H″ sera un sous-groupe

[10] N.D.E. : (de Krull)

ouvert de H' et par suite sera égal à H' puisque ce dernier a ses fibres connexes. Soit donc C' un sous-groupe de Cartan de H' ; C' est aussi un sous-groupe de Cartan de G', puisque H' est le centralisateur d'un tore T', donc a même rang réductif et même rang nilpotent que G'. Posons $K = (u^{-1}(C'))^0_{\text{réd}}$. Comme T' est dans le centre de H', C' contient T', donc K contient T. Soit alors C un sous-groupe de Cartan de K qui contient T. Le tore T est contenu dans l'unique tore maximal de C qui est central dans C (Exp. XII 6.6 c)) donc C est contenu dans $H = \underline{\mathrm{Centr}}_G\, T$. Utilisant maintenant le fait que deux sous-groupes de Cartan de G sont conjugués et que l'image d'un sous-groupe de Cartan de G est un sous-groupe de Cartan de G' (Exp. XII 6.6), on en **452**
déduit que C est aussi un sous-groupe de Cartan de G, son image est donc un sous-groupe de Cartan de G' ; comme elle est contenue dans C', on a $u(C) = C'$, donc C' est bien contenu dans H''.

Nous avons donc établi v) lorsque S est le spectre d'un corps k. Étudions maintenant le cas général. Comme G, H et G' sont de présentation finie sur S, pour prouver que $u(H)$ est représentable et est un élément de $\mathscr{C}\mathscr{T}_{G'}(S)$, on se ramène par la technique habituelle au cas où S est affine noethérien, puis au cas où S est le spectre d'un anneau local. Par descente fpqc des sous-préschémas de G', on peut même supposer que S est le spectre d'un anneau local noethérien complet A.

Reprenons les notations de ii), c.-à-d. : Soient T_s le tore central maximal de H_s (s est le point fermé de S), M_ℓ un sous-groupe de type multiplicatif de H qui relève ${}_\ell T_s$ et tel que $H = \underline{\mathrm{Centr}}_G\, M_\ell$. Soit T'_s l'image de T_s dans G'_s. Comme G' est séparé sur S (Exp. VI_B 5.2), l'image de M_ℓ par u est un sous-groupe de type multiplicatif M'_ℓ de G' (Exp. IX 6.8). Posons alors $H' = \underline{\mathrm{Centr}}_{G'}\, M'_\ell$, qui est un sous-préschéma en groupes lisse de G'. Pour tout entier ℓ' égal à une puissance de q, il existe ℓ tel que $(M'_\ell)_s$ majore ${}_{\ell'}T'_s$, on peut donc supposer ℓ choisi assez grand pour que $H'_s = \underline{\mathrm{Centr}}_{G'_s}\, T'_s = u_s(H_s)$, où la dernière égalité résulte de 7.2. La restriction de u à H, soit v, se factorise évidemment à travers H'. Prouvons que $v : H \to H'$ est un morphisme plat. Comme H et H' sont plats sur S et que $H_s \to H'_s$ est plat, v est plat sur un voisinage de H_s (EGA IV 11.3.10 et 11.3.1). Le morphisme v est donc plat sur un sous-groupe ouvert de H (Exp. VI_B 2.2) donc v est plat, H ayant ses fibres **453**
connexes. L'image ensembliste de H est donc un ouvert de H' (nécessairement égal à $(H')^0$) qui, muni de sa structure induite, représente le faisceau image $u(H)$ (pour la topologie fpqc). Le fait que $u(H)$ soit un élément de $\mathscr{C}\mathscr{T}_{G'}(S)$ résulte alors de 7.2.

Supposons maintenant que H soit le centralisateur dans G d'un tore T et soit T' l'image de T par u, qui est un sous-tore de G' (Exp. IX 6.8). L'image de H par u est contenue dans $\underline{\mathrm{Centr}}_{G'}(T')$, coïncide fibre par fibre avec ce dernier (7.2) et est lisse sur S, donc $u(H) = \underline{\mathrm{Centr}}_{G'}(T')$.

Démonstration de vi). Pour montrer que $\widetilde{u}$ est un S-morphisme fidèlement plat, sachant que $\mathscr{C}\mathscr{T}_G$ et $\mathscr{C}\mathscr{T}_{G'}$ sont lisses sur S (d'après i)), il suffit de le vérifier sur les fibres géométriques. Nous sommes donc ramenés au cas où S est le spectre d'un corps k algébriquement clos. Soient $H' \in \mathscr{C}\mathscr{T}_{G'}(k)$, T' son tore central maximal, T un sous-tore de G dont l'image est T', $H = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T)$, de sorte que $H' = u(H)$ (7.2), $N = \underline{\mathrm{Norm}}_G(H)$, $N' = \underline{\mathrm{Norm}}_{G'}(H')$. Nous avons montré dans iv) que G/N (resp. G'/N') s'identifient canoniquement à des voisinages ouverts de H dans $\mathscr{C}\mathscr{T}_G$

(resp. de H' dans $\mathscr{C}\mathscr{T}_{\mathrm{G}'}$). Moyennant ces identifications, la restriction de $\widetilde{u}$ à G/N coïncide avec le morphisme naturel :

$$w : \mathrm{G}/\mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{G}'/\mathrm{N}'$$

déduit de u par passage au quotient. Or w est un épimorphisme d'espaces homogènes sous G donc est fidèlement plat. Ceci prouve que $\widetilde{u}$ est un morphisme plat tel que $u(\mathscr{C}\mathscr{T}_{\mathrm{G}})$, qui est donc un ouvert de $\mathscr{C}\mathscr{T}_{\mathrm{G}'}$, contienne tout point de $\mathscr{C}\mathscr{T}_{\mathrm{G}'}(k)$. Comme
454 $\mathscr{C}\mathscr{T}_{\mathrm{G}'}$ est de type fini sur k, on en déduit que $\widetilde{u}$ est surjectif, donc est fidèlement plat.

Les assertions complémentaires contenues dans vi) dans le cas où $\operatorname{Ker} u$ est central résultent de Exp. XII 7.12.

Le théorème suivant généralise le théorème 7.1 de Exp. XII :

Théorème 7.3. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie sur* S*, lisse, à fibres connexes et considérons le* S*-foncteur* $\mathscr{C} : (\mathbf{Sch}/\mathrm{S})^{\circ} \to \mathbf{Ens}$ *tel que :*

$$\mathscr{C}(\mathrm{S}') = \textit{ ensemble des sous-groupes de Cartan de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}.$$

i) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Le foncteur* $\mathscr{C}$ *est représentable.*

b) *Le foncteur* $\mathscr{C}$ *est représentable par un* S*-préschéma lisse, quasi-projectif, de présentation finie sur* S *à fibres affines.*

c) *Le groupe* G *possède localement pour la topologie étale un sous-groupe de Cartan.*

d) *Le groupe* G *possède localement pour la topologie fidèlement plate un sous-groupe de Cartan.*

e) *Le rang nilpotent des fibres de* G *est une fonction localement constante sur* S*.*

ii) *Si les conditions précédentes sont réalisées, deux sous-groupes de Cartan de* G
455 *sont localement conjugués pour la topologie étale. L'ensemble des points réguliers des fibres de* G (Exp. XIII 2.7) *est un ouvert* $\mathrm{G}_{\text{rég}}$*, de présentation finie sur* S*, et toute section de* $\mathrm{G}_{\text{rég}}$ *au-dessus de* S *est contenue dans un sous-groupe de Cartan de* G *et un seul.*

iii) *Soit* G' *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie sur* S *et* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ *un* S*-morphisme de groupes fidèlement plat, de sorte que* G' *est lisse sur* S*, à fibres connexes. Alors si* C *est un sous-groupe de Cartan de* G*,* $u(\mathrm{C}) = \mathrm{C}'$ *est représentable par un sous-groupe de Cartan de* G' *et* $\mathrm{C} \to \mathrm{C}'$ *est fidèlement plat.*

iv) *Sous les conditions de* i) *et* iii) *le morphisme :*

$$\widetilde{u} : \mathscr{C}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathscr{C}_{\mathrm{G}'}, \qquad \mathrm{C} \mapsto u(\mathrm{C}) = \mathrm{C}'$$

est fidèlement plat. Si de plus $\operatorname{Ker}(u)$ *est central,* $\widetilde{u}$ *est un isomorphisme.*

v) *Pour tout renseignement complémentaire concernant les transporteurs, les relations avec les tores maximaux, on pourra consulter* 7.1 *et* Exp. XII 7.1.

Démonstration. i) On va montrer que b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ e) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ d).

b) $\Rightarrow$ c). Soit s un point de S. Comme $\mathscr{C}_s$ est lisse sur $\kappa(s)$, il existe des points de $\mathscr{C}_s$ dont le corps résiduel est une extension finie séparable de $\kappa(s)$. Appliquant Exp. XI 1.10, on voit qu'il existe un voisinage ouvert U de s et un morphisme étale surjectif **456** $\mathrm{U}' \to \mathrm{U}$ tel que $\mathrm{G}_{\mathrm{U}'}$ possède un sous-groupe de Cartan.

c) $\Rightarrow$ d) est bien clair.

d) $\Rightarrow$ e). Soit $s \in \mathrm{S}$. Par hypothèse, il existe un S-préschéma S′, plat sur S, dont l'image contient s, tel que $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ possède un sous-groupe de Cartan. Soit s' un point de S′ au-dessus de s. Le rang nilpotent des fibres de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ est donc constant sur Spec $\mathscr{O}_{\mathrm{S}',s'}$ et par suite le rang nilpotent des fibres de G est constant sur Spec $\mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ qui est l'image de Spec $\mathscr{O}_{\mathrm{S}',s'}$ (EGA IV 2.3.4 ii)). Soit r sa valeur. Il résulte de 6.3 bis que l'ensemble E_r formé des points x de S tels que le rang nilpotent de G_x soit égal à r est une partie ind-constructible de S, donc contient un voisinage de s (EGA IV 1.10.1).

e) $\Rightarrow$ b). L'assertion est locale sur S, on peut donc supposer que le rang nilpotent des fibres de G est constant et égal à r. Pour tout S-préschéma S′, il y a alors identité entre les sous-groupes de Cartan de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ et les sous-préschémas en groupes de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, lisses sur S′, de dimension relative r, dont les fibres géométriques sont les centralisateurs d'un tore. Comme $\mathscr{C}\mathscr{T}$ est représentable, d'après 7.1, $\mathscr{C}$ est représentable par le sous-préschéma à la fois ouvert et fermé de $\mathscr{C}\mathscr{T}$, qui représente le sous-foncteur de $\mathscr{C}\mathscr{T}$ formé des groupes de dimension relative r. Les autres assertions figurant dans b) sont contenues dans 7.1 i), sauf le fait que les fibres de $\mathscr{C}$ sont affines qui, lui, résulte de Exp. XII 7.1 d).

Il est clair que b) $\Rightarrow$ a). Montrons que a) $\Rightarrow$ d). Il résulte de 6.2 iii) que le foncteur **457** $\mathscr{C}$ commute aux limites inductives filtrantes d'anneaux, donc si $\mathscr{C}$ est représentable, il est nécessairement représentable par un S-préschéma localement de présentation finie (EGA IV 8.14.2). Pour prouver que $\mathscr{C}$ est lisse sur S, on est ramené à montrer que si S est affine et si S_0 est le sous-schéma fermé défini par un idéal nilpotent J, alors tout sous-groupe de Cartan C_0 de $\mathrm{G}_0 = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_0$ se relève en un sous-groupe de Cartan C de G. Mais l'existence de C_0 entraîne que la condition e) est satisfaite pour S_0 donc pour S qui a même espace sous-jacent, et on conclut du fait que d) $\Rightarrow$ b). Puisque $\mathscr{C}$ est lisse sur S et que $\mathscr{C} \to \mathrm{S}$ est surjectif, on voit que a) $\Rightarrow$ d).

ii) Soient C et C′ deux sous-groupes de Cartan de G. Alors $\underline{\mathrm{Transp}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C}, \mathrm{C}')$ est représentable par un préschéma lisse sur S (7.1 iii)), à fibres non vides (confer Exp. XII 6.6 a) et c)). Le fait que C et C′ soient localement conjugués pour la topologie étale est alors une conséquence du lemme de Hensel (Exp. XI 1.10).

Les autres assertions de ii) sont des conséquences de XIII 3.1 et XIII 3.2, compte tenu de i).

iii) Soit C un sous-groupe de Cartan de G. On sait (7.1 v)) que $u(\mathrm{C})$ est représentable par un sous-groupe lisse C′ de G′. Comme les fibres de C′ sont des sous-groupes de Cartan des fibres de G′ (Exp. XII 6.6 d)), C′ est un sous-groupe de Cartan de G′.

iv) Pour prouver que le morphisme $\widetilde{u}$ est fidèlement plat, on procède comme dans 7.1 vi).

Si maintenant $\operatorname{Ker} u$ est central et si C′ est un sous-groupe de Cartan de G′, **458** $u^{-1}(\mathrm{C}') = \mathrm{C}$ est lisse, à fibres connexes (7.1 vi)) et ses fibres sont des sous-groupes de

Cartan (Exp. XII 6.6 f)), donc C est un sous-groupe de Cartan de G, ce qui achève la démonstration de iv), compte tenu de 7.1 vi).

8. Critère de représentabilité du foncteur des sous-tores d'un groupe lisse

459 **8.0.** Dans ce paragraphe, si S est un préschéma et G un S-préschéma en groupes, $\mathscr{T}_{\mathrm{G}}$ (ou simplement $\mathscr{T}$ s'il n'y a pas d'ambiguité) désigne le S-foncteur $(\mathbf{Sch}/\mathrm{S})^{\circ} \to \mathbf{Ens}$ tel que, pour tout S-préschéma S′, on ait :

$$\mathscr{T}(\mathrm{S}') = \text{ ensemble des sous-tores de } \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}.$$

On définit de même $\mathscr{T}\mathscr{C}$ comme étant le foncteur des sous-tores centraux de G.

Proposition 8.1. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien et* G *un* S*-préschéma en groupes de type fini. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Le foncteur* $\mathscr{T}_{\mathrm{G}}$ *« commute aux limites adiques d'anneaux locaux artiniens »,* c.-à-d. *pour tout* S*-préschéma de la forme* Spec(A) = S′*, où* A *est un anneau local noethérien complet pour la topologie définie par son idéal maximal* $\mathfrak{m}$*, l'application canonique :*

$$\mathscr{T}(\mathrm{S}') \longrightarrow \varprojlim_{n} \mathscr{T}(\mathrm{S}'_n) \quad (\text{où } \mathrm{S}'_n = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n))$$

est bijective.

ii) *Comme dans* i) *mais on se limite au cas où* A *est un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos.*

460 iii) *Comme dans* ii)*, mais on se limite au sous-foncteur* $\mathscr{T}^{(1)}$ *de* $\mathscr{T}$ *relatif aux sous-tores de* G *de dimension relative* 1*.*

i bis) *Pour tout* S*-préschéma* S′ *comme dans* i) *et pour tout* S′*-tore* T*, l'application canonique :*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'\text{-gr}}(\mathrm{T}, \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}) \longrightarrow \varprojlim_{n} \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}'_n\text{-gr}}(\mathrm{T}_{\mathrm{S}'_n}, \mathrm{G}_{\mathrm{S}'_n})$$

est bijective.

ii bis) *Comme* i bis)*, mais on se limite au cas où* A *est un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos.*

iii bis) *Comme* ii bis)*, mais on se limite au cas où* T *est le groupe multiplicatif* $\mathbb{G}_m$*.*

Remarque 8.2. — On a une proposition analogue en se restreignant aux sous-tores centraux de G et aux homomorphismes centraux d'un tore dans G.

Démonstration. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 8.3. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes,* T *un* S*-tore,* $u : \mathrm{T} \to \mathrm{G}$ *un* S*-morphisme de groupes. On suppose de plus que* G *est de présentation finie sur* S *ou bien que* S *est localement noethérien et* G *localement de type fini. Alors :*

a) $\mathrm{Ker}\, u$ *est un sous-groupe de type multiplicatif de* T*.*

b) *Le quotient* $\mathrm{T}' = \mathrm{T}/\mathrm{Ker}\, u$ *est un tore.*

461 c) *Le monomorphisme canonique* $\mathrm{T}' \to \mathrm{G}$*, déduit de* u *par passage au quotient, est une immersion.*

Ce lemme est une conséquence de Exp. IX 6.8 lorsque G est séparé sur S. Dans le cas général, on se ramène comme d'habitude au cas où S est noethérien. Montrons d'abord que $K = \operatorname{Ker} u$ est plat. Nous pouvons supposer que S est le spectre d'un anneau local artinien (EGA 0_{III} 10.2.6), auquel cas G est séparé (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.2), donc K est de type multiplicatif (Exp. IX 6.8) et a fortiori plat sur S. Prouvons maintenant que $\operatorname{Ker} u$ est fermé dans T, ce qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète (EGA II 7.2.1). Comme T est plat, à fibres connexes, u se factorise à travers la composante neutre de l'adhérence schématique dans G de la fibre générique de G. Nous pouvons donc supposer G plat à fibres connexes, mais alors G est séparé (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.2), donc K est fermé. Ceci étant, il résulte de Exp. X 4.8 b) que K est un sous-groupe de type multiplicatif de T. Le quotient $T' = T/K$ est alors représentable et T' est un groupe de type multiplicatif (Exp. IX 2.7) dont les fibres sont des tores, c'est donc un tore. Le fait que le monomorphisme $T' \to G$ soit une immersion résulte alors de Exp. VIII 7.9.

Démonstration de 8.1.

i) $\Rightarrow$ i bis). Posons $T_n = T_{S'_n}$, $G_n = G_{S'_n}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}'}$ un élément de $\varprojlim_n \operatorname{Hom}_{S'_n\text{-gr}}(T_n, G_n)$. Pour tout entier n, $u_n(T_n)$ est donc un sous-tore T'_n de G_n (lemme 8.3). Par hypothèse, il existe un unique sous-tore T' de G qui relève T'_n pour tout n. Comme T' est à fibres affines, on conclut grâce à 4.4.

i bis) $\Rightarrow$ i). Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\varprojlim_n \mathscr{T}(S_n)$. D'après Exp. X 4.6, il existe **462**
un S'-tore T' et un S_0-isomorphisme :

$$u_0 : T'_0 \xrightarrow{\sim} T_0.$$

Comme T_n est lisse sur S'_n, u_0 se relève en un S'_n-morphisme

$$u_n : T'_n \longrightarrow T_n \quad \text{(Exp. IX 3.6)}$$

et on peut supposer la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cohérente, donc provenant d'un morphisme $u : T' \to G$. L'image de T' par u est alors un sous-tore de G (lemme 8.3) qui relève T_n pour tout n.

Les implications i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) d'une part et i bis) $\Rightarrow$ ii bis) $\Rightarrow$ iii bis) d'autre part sont évidentes. L'implication iii) $\Rightarrow$ iii bis) se démontre comme i) $\Rightarrow$ i bis). Il nous suffit donc de prouver : iii bis) $\Rightarrow$ ii bis) $\Rightarrow$ i bis).

ii bis) $\Rightarrow$ i bis). Avec la terminologie introduite dans 4.3, l'assertion i bis) est vraie si et seulement si tout élément $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\varprojlim_n \operatorname{Hom}_{S_n\text{-gr}}(T_n, G_n)$ est « admissible ». Pour tout point t de S' distinct du point fermé s de S', il existe un S-schéma S'', spectre d'un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos, dont le point générique se projette sur t et le point fermé se projette sur s (EGA II 7.1.9). On en déduit immédiatement un critère valuatif pour qu'une famille de morphismes soit admissible. C'est dire que ii bis) $\Rightarrow$ i bis).

iii bis) $\Rightarrow$ ii bis). Soit T un S-tore, où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos. Le tore T est alors trivial (Exp. X 4.6), c.-à-d. isomorphe à $(\mathbb{G}_{m,\,S})^r$ pour un entier r convenable. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élé- **463**
ment de $\varprojlim_n \operatorname{Hom}_{S_n\text{-gr}}((\mathbb{G}_m)^r_{S_n}, G_n)$. Par hypothèse, les restrictions des u_n à chaque

facteur de $(\mathbb{G}_m)^r_{\mathrm{S}}$ proviennent d'un morphisme de groupes :

$$\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G}.$$

D'où un morphisme produit $(\mathbb{G}_m)^r_{\mathrm{S}} \to \mathrm{G}^r$ qui, composé avec le morphisme $\mathrm{G}^r \to \mathrm{G}$ défini par la loi de composition dans G, fournit un morphisme :

$$v : (\mathbb{G}_m)^r_{\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G}.$$

Vu l'existence du morphisme de groupes u_n, il est clair que $u_n = v_n$. Il reste à voir que v est un morphisme de groupes, ce qui se traduit par le fait que deux morphismes évidents $f, g : \mathrm{X} = (\mathbb{G}_m)^r_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} (\mathbb{G}_m)^r_{\mathrm{S}} \to \mathrm{G}$ coïncident. Soit Z le sous-schéma des coïncidences de f et g. Comme $(\mathbb{G}_m)^r_{\mathrm{S}}$ est à fibres connexes et que $v(\mathbb{G}_m)^r_{\mathrm{S}}$ contient la section unité, on voit comme dans 8.3 que v se factorise à travers la composante neutre de G, ce qui nous permet de supposer G séparé (Exp. VI_{B} 5.2), donc Z est fermé. Par ailleurs, comme v_n est un morphisme de groupes, on a $f_n = g_n$ pour tout n, donc Z contient un voisinage de la fibre fermée de X (EGA I 10.9.4), donc est schématiquement dense dans X, X ayant ses fibres lisses et irréductibles (Exp. IX 4.6) et par suite $\mathrm{Z} = \mathrm{X}$, donc $f = g$.

Définition 8.4. — Soient S un préschéma localement noethérien, G un S-préschéma en groupes de type fini et $\mathscr{S}$ l'ensemble des S-schémas S′, spectre d'un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel algébriquement clos, de point fermé s, de
464 point générique t, tels que $(\mathrm{G}_t)^0_{\mathrm{réd}}$ soit lisse et possède une décomposition de Chevalley, c.-à-d. soit extension d'une variété abélienne par un sous-groupe algébrique linéaire, lisse et connexe L_t (cette décomposition est alors unique). Si $\mathrm{S}' \in \mathscr{S}$, désignons par G′ (resp. L′) l'adhérence schématique dans $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ de G_t (resp. L_t).

Dans ces conditions, nous dirons que

> « la partie abélienne de G ne dégénère pas en une partie torique », ou plus brièvement que G satisfait à la propriété AT,

si pour tout $\mathrm{S}' \in \mathscr{S}$, L_s a même rang réductif que G'_s. (*Intuitivement, supposons que le quotient* $\mathrm{A} = \mathrm{G}'/\mathrm{L}$ *soit représentable, auquel cas* A *est un préschéma en groupes plat tel que* $(\mathrm{A}_t)^0_{\mathrm{réd}}$ *soit une variété abélienne. La condition* « AT » *signifie alors que* A_s *a un rang réductif nul, donc que* $(\mathrm{A}_s)^0_{\mathrm{réd}}$ *est extension d'une variété abélienne par un groupe unipotent.*)

De même, supposant de plus G à fibres connexes, nous dirons que

G satisfait à la propriété ATC

si pour tout $\mathrm{S}' \in \mathscr{S}$, l'adhérence schématique Z du centre Z_t de G_t satisfait à AT.

Ces définitions techniques sont justifiées par la proposition suivante :

Proposition 8.5. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien,* G *un* S-*préschéma en groupes de type fini. Alors :*

a) *Pour que le foncteur* $\mathscr{T}$ *des sous-tores de* G *« commute aux limites adiques d'anneaux locaux artiniens »* (cf. 8.1)*, il faut et il suffit que* G *satisfasse à la propriété* AT (8.4).

b) *Si* G *est à fibres connexes, pour que le foncteur* $\mathscr{T}\mathscr{C}$ *des* sous-tores centraux *de* G *commute aux limites adiques d'anneaux locaux artiniens, il faut et il suffit que* G **465**
satisfasse à la propriété ATC (8.4).

Nous aurons besoin du lemme technique suivant :

Lemme 8.6. — *Soient* S *le spectre d'un anneau de valuation discrète, s le point fermé de* S*,* G *un* S*-préschéma en groupes plat et de type fini,* T_s *un sous-tore de* G_s*. Alors il existe un* S*-schéma* S'*, spectre d'un anneau de valuation discrète, fidèlement plat sur* S*, de point fermé s', et un sous-schéma en groupes* C *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$, plat sur S', commutatif, *à fibres connexes, tel que* $\mathrm{C}_{s'}$ *majore* $\mathrm{T}_s \times_s s'$*.*

Quitte à remplacer S par S', spectre d'un anneau de valuation discrète fidèlement plat sur S, on peut supposer que T_s est égal à $(\mathbb{G}_m)^r_s$ et que le degré de transcendance de $\kappa(s)$ sur le corps premier est $\geqslant r$ (EGA 0_{III} 10.3.1 et EGA II 7.1.9). Il existe alors un élément $\overline{x}$ de $\mathrm{T}_s(s)$ tel que tout sous-groupe algébrique de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ qui « contient » $\overline{x}$, majore $\mathrm{T}_{\overline{s}}$ (cf. Exp. XIII preuve de 2.1 (ii) $\Rightarrow$ (vii)). Comme G est plat sur S, par $\overline{x}$ passe une quasi-section (EGA IV 14.5.8) et par suite, quitte à remplacer S par le spectre d'un anneau de valuation discrète fidèlement plat sur S, on peut supposer qu'il existe une section x de G au-dessus de S qui relève $\overline{x}$. Soit C_t le sous-groupe algébrique commutatif de G_t engendré par x_t (Exp. VI_{B} 7) et soit C l'adhérence schématique de C_t dans G. Il est clair que C_s contient $\overline{x}$, donc majore T_s, et par suite, la « *composante neutre* » de C sera un schéma en groupes plat et commutatif qui répondra à la question.

Démonstration de 8.5 a). **466**

Supposons que le foncteur $\mathscr{T}$ commute aux limites adiques d'anneaux artiniens et montrons que G satisfait à la propriété AT. Soit donc $\mathrm{S}' \in \mathscr{S}$, et soit T_s un tore maximal de G'_s. Nous devons prouver que T_s est contenu dans L_s. La formation de L et de G' commute évidemment aux extensions fidèlement plates $\mathrm{S}'' \to \mathrm{S}'$ d'anneaux de valuation discrète. Quitte à changer S', nous pouvons donc, d'après le lemme 8.6, supposer qu'il existe un sous-schéma en groupes C de $\mathrm{G}'_{\mathrm{S}'}$, plat et commutatif, tel que C_s majore T_s. Mais alors T_s est un sous-tore *central* de C_s et par suite se relève infinitésimalement en un sous-tore central (cor. 2.3). Vu l'hypothèse faite sur G, T_s se relève en un sous-tore T de G. Évidemment T_t est contenu dans la composante linéaire L_t de G_t, donc T est contenu dans L.

Supposons maintenant que G satisfasse à la propriété AT et montrons que la condition 8.1 iii) bis est vérifiée. Soit donc S le spectre d'un anneau de valuation discrète A, complet, à corps résiduel algébriquement clos, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A, $\mathrm{S}_n = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathfrak{m}^n)$, u_n, $n \in \mathbb{N}$, un système cohérent de morphismes de groupes $u_n : (\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})_n \to \mathrm{G}_n = \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}_n$. Soit q un nombre premier inversible sur S. L'entier ℓ parcourant les puissances de q, il existe un unique S-morphisme de groupes :

$$ {}_\ell u : {}_\ell\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G} $$

qui relève $u_n|_{\ell(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})_n}$ pour tout n (prop. 1.6 a)). Par suite, s'il existe un S-morphisme de groupes $u : \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{T}$, qui relève u_n pour tout n, sa restriction à ${}_\ell\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$ est uniquement déterminée. Compte tenu du théorème de densité (Exp. IX 4.8 (a)) ceci prouve **467** l'unicité de u et le fait que pour prouver l'existence de u, nous pouvons nous permettre une extension fidèlement plate de la base. Or $(\mathrm{G}_{\bar{t}})^0_{\text{réd}}$ possède une décomposition de Chevalley et celle-ci est déjà définie sur une extension finie L du corps des fractions K de A. Quitte à remplacer S par le normalisé de S dans L, nous pouvons donc supposer que $\mathrm{S} \in \mathscr{S}$. Le morphisme ${}_{\ell}u_t$ se factorise à travers $(\mathrm{G}_t)_{\text{réd}}$, donc ${}_{\ell}u$ se factorise à travers l'adhérence schématique G'' de $(\mathrm{G}_t)_{\text{réd}}$ dans G'. Toujours grâce au théorème de densité, on en déduit que u_n se factorise à travers G''_n pour tout n. Comme G possède la propriété AT, tout sous-tore de G'_s, et a fortiori de G''_s, est contenu dans L_s, donc u_s se factorise à travers L_s. Je dis que pour tout n, u_n se factorise à travers L_n. En effet, comme L_t est invariant dans $(\mathrm{G}'')_t$, L est invariant dans G'', d'autre part L est plat sur S, donc pour tout entier n, le quotient $\mathrm{H}_n = \mathrm{G}''_n/\mathrm{L}_n$ est représentable (Exp. $\mathrm{VI_A}$ § 4). L'image de $(\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})_n$ dans H_n, est un sous-tore de H_n (Exp. IX 6.8), dont la fibre fermée est nulle, donc cette image est nulle et par suite u_n se factorise à travers L_n. Mais comme L_t est affine, on en déduit que la famille u_n est admissible (prop. 4.3), ce qui achève la démonstration.

La démonstration de 8.5 b) est tout-à-fait analogue à celle de 8.5 a), compte tenu de 8.2 et de Exp. IX 5.6 a).

Proposition 8.7. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien,* G *un* S*-préschéma en groupes de type fini. Alors :*

468 i) *Si* G *est à fibres connexes et satisfait à* AT, *il satisfait à* ATC.

ii) *Si* G *satisfait à* AT, *tout sous-préschéma en groupes de* G *satisfait à* AT.

iii) *Si* G *est plat sur* S *et si le rang abélien des fibres de* G *est une fonction localement constante sur* S, *alors* G *satisfait à* AT.

i) résulte immédiatement de 8.5 et de Exp. IX 5.6 a).

ii) Soit H un sous-préschéma en groupes de G. Pour prouver que H satisfait à la propriété AT, nous pouvons supposer que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet et nous devons montrer que toute famille cohérente de S_n-morphismes de groupes

$$u_n : (\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})_n \longrightarrow \mathrm{H}_n$$

est admissible (8.5 et 8.1 iii bis)). Or par hypothèse, G satisfait à la propriété AT, donc il existe un S-morphisme de groupes

$$u : (\mathbb{G}_m)_{\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G}$$

qui relève u_n pour tout n. Procédant comme dans la démonstration de 8.5, on voit que $u|_{{}_{\ell}\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}}$ (où ℓ parcourt les puissances d'un nombre premier q inversible sur S) se factorise à travers H. Par densité, on en déduit que sur la fibre générique, u_t se factorise à travers H_t. Comme $(\mathbb{G}_m)_{\mathrm{S}}$ est réduit, il en résulte bien que u se factorise à travers H.

469 iii) Soit $\mathrm{S}' \in \mathscr{S}$ (notations de 8.4). Le groupe L est plat sur S, sa fibre générique L_t est affine ; dans ces conditions, on peut montrer que L_s est nécessairement affine

(XVII App. III, 2). Comme G et L sont plats, on a $G = G'$ et la dimension des fibres de G et L est constante sur S (Exp. VI_B 4) de sorte que l'on a les inégalités :

$$\mathrm{rg\ abélien\ } G_s \leqslant \dim G_s - \dim L_s = \dim G_t - \dim L_t = \mathrm{rg\ abélien\ } G_t.$$

L'hypothèse entraîne que ces inégalités sont des égalités. Il en résulte que $(G_s/L_s)^0_{\text{réd}}$ est une variété abélienne, donc a un rang réductif nul, et par suite L_s a même rang réductif que G_s.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver les théorèmes principaux de ce paragraphe :

Théorème 8.8. — *Soit* G *un préschéma en groupes de type fini sur un préschéma* S *localement noethérien. Supposons* G plat *sur* S *et à fibres connexes. Alors :*

a) *Pour que le foncteur* $\mathscr{TC}$ *des sous-tores centraux de* G *soit représentable, il faut et il suffit que* G *possède la propriété* ATC (8.4). *De plus, dans ce cas,* $\mathscr{TC}$ *est représentable par un* S*-préschéma* étale et séparé *sur* S.

b) *Sous les conditions de* a), *pour tout* S*-tore, le foncteur* $\underline{\mathrm{Hom\ cent}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{T}, \mathrm{G})$ *des homomorphismes centraux de* T *dans* G *est représentable par un* S*-préschéma étale et séparé sur* S.

Théorème 8.9. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien et* G *un* S*-préschéma en groupes de type fini,* lisse *sur* S.

a) *Pour que le foncteur* $\mathscr{T}$ *des sous-tores de* G *soit représentable, il faut et il suffit* 470
que G *possède la propriété* AT (8.4). *De plus dans ce cas,* $\mathscr{T}$ *est représentable par un* S*-préschéma lisse et séparé sur* S *; plus précisément, le morphisme structural* $\mathscr{T} \to \mathrm{S}$, *admet une factorisation canonique :*

$$\mathscr{T} \xrightarrow{u} \mathrm{Y} \xrightarrow{v} \mathrm{S}$$

où v *est un morphisme lisse et quasi-projectif* (*donc de type fini*) *et* u *est un morphisme étale séparé.*

b) *Sous les conditions de* a), *pour tout* S*-tore* T, *le foncteur* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{T}, \mathrm{G})$ *des homomorphismes de* T *dans* G *est représentable par un* S*-préschéma lisse et séparé sur* S.

Démonstration de 8.8 a).

Si le foncteur $\mathscr{TC}$ est représentable, il commute aux limites adiques d'anneaux artiniens, et par suite, (8.2 et 8.5 b)) G possède la propriété ATC. Pour établir la réciproque, nous utiliserons le résultat suivant, qui sera démontré dans EGA VI, et se trouve également dans l'exposé de Murre : Sém. Bourbaki, Mai 1965, N°294, Théorème 1, corollaire 2.

Lemme 8.10. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien, et* $\mathscr{F}$ *un foncteur contravariant défini sur* **Sch**/S, *à valeurs dans la catégorie des ensembles. Pour que* $\mathscr{F}$ *soit représentable par un* S*-préschéma étale et séparé,* (*il faut et*) *il suffit que* $\mathscr{F}$ *satisfasse aux cinq propriétés suivantes :*

i) $\mathscr{F}$ *est un faisceau pour la topologie* fpqc (Exp. IV).

ii) $\mathscr{F}$ *commute aux limites inductives d'anneaux* (Exp. XI 3.2). **471**

iii) $\mathscr{F}$ *commute aux limites adiques d'anneaux locaux artiniens* (8.1 i)).

iv) $\mathscr{F}$ *satisfait au « critère valuatif de séparation »,* c.-à-d. *que pour tout* S*-schéma* S′ *qui est le spectre d'un anneau de valuation discrète, de point générique t, l'application canonique :*

$$\mathscr{F}(\mathrm{S}') \longrightarrow \mathscr{F}(t)$$

est injective.

v) $\mathscr{F}$ *est infinitésimalement étale* (Exp. XI 1.8).

Montrons que le foncteur $\mathscr{T}\mathscr{C}$ de 8.8 satisfait aux cinq conditions de 8.10.

i) Le foncteur $\mathscr{T}$ (resp. $\mathscr{T}\mathscr{C}$) est un faisceau pour la topologie fpqc dès que G est de présentation finie sur S. En effet, tout monomorphisme d'un tore dans G est alors une immersion (Exp. VIII 7.9), et la propriété résulte de la descente fpqc des sous-préschémas.

ii) Le corollaire 6.3 prouve que le foncteur $\mathscr{T}$ commute aux limites inductives d'anneaux si G est de présentation finie sur S ; on en déduit immédiatement qu'il en est de même de $\mathscr{T}\mathscr{C}$.

iii) En vertu de 8.5, la condition iii) équivaut précisément à la propriété ATC.

iv) résulte simplement du fait que si S est le spectre d'un anneau de valuation
472 discrète, deux sous-tores de G qui ont même fibre générique, coïncident et plus précisément coïncident avec la composante neutre de l'adhérence schématique dans G de leur fibre générique.

v) résulte de 2.3 puisque G est plat sur S.

Démonstration de 8.8 b).

Procédant comme dans Exp. XI 4.2, on voit qu'il suffit de prouver que le groupe produit $\mathrm{T} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G}$ satisfait encore à la propriété ATC, ce qui est immédiat sur la définition.

Démonstration de 8.9 a).

Quitte à remplacer G par sa composante neutre (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 3.10), on peut supposer G à fibres connexes. Si T est un sous-tore de G, son centralisateur $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ est alors représentable (Exp. XI 6.11) par un sous-préschéma en groupes de G, lisse sur S (Exp. XI 2.4), à fibres connexes (Exp. XII 6.6 b)), donc est un élément de $\mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S})$, où $\mathscr{C}\mathscr{T}$ est le foncteur défini dans 7.1 i). Il est clair que l'application :

$$\mathrm{T} \longmapsto \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$$

définit un S-morphisme :

$$u : \mathscr{T} \longrightarrow \mathscr{C}\mathscr{T}$$

Comme $\mathscr{C}\mathscr{T}$ est représentable par un S-préschéma lisse et quasi-projectif sur S (7.1 i)), il nous suffit de prouver que le morphisme u est représentable par un morphisme séparé et étale.

473 Après changement de base convenable $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ (avec $\mathrm{S}' = \mathscr{C}\mathscr{T}$, donc S′ localement noethérien), nous sommes ramenés au problème suivant : soient S un préschéma localement noethérien, G un S-préschéma en groupes, lisse et de type fini sur S, à fibres connexes, H un sous-groupe de G, lisse sur S et à fibres connexes. Considérons le sous-foncteur X de $\mathscr{T}\mathscr{C}_{\mathrm{H}}$ tel que, pour tout S-préschéma S′, X(S′) soit l'ensemble des sous-tores centraux T de $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$, tels que $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T}) = \mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$. Nous allons montrer que X est représentable par un S-préschéma étale et séparé sur S.

En effet, par hypothèse, G satisfait à la propriété AT, il en est donc de même de H (8.7 ii)), et comme H est à fibres connexes, H satisfait aussi à la propriété ATC (8.7 i)). D'autre part H est lisse sur S, donc plat. D'après 8.8 a) $\mathscr{T}\mathscr{C}_{\mathrm{H}}$ est représentable par un S-préschéma étale et séparé sur S. Il nous suffit alors de montrer que le monomorphisme canonique : $\mathrm{X} \to \mathscr{T}\mathscr{C}_{\mathrm{H}}$ est représentable par une immersion ouverte.

Posons $\mathrm{S}' = \mathscr{T}\mathscr{C}_{\mathrm{H}}$ et soit K le centralisateur dans $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ du tore central « universel » de $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$. Le groupe K est un schéma en groupes lisse sur S′, à fibres connexes, qui majore $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$. Par définition, on a $\mathrm{X} = \prod_{\mathrm{K}/\mathrm{S}'} \mathrm{H}_{\mathrm{S}'}/\mathrm{K}$ qui est bien représentable par le sous-préschéma à la fois ouvert et fermé de S′, au-dessus duquel $\mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$ et K ont même dimension relative.

On prouve 8.9 b) de façon analogue à 8.8 b).

Corollaire 8.11. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse sur* S *et de présentation finie. Alors, si le rang abélien des fibres de* G *est une fonction localement constante sur* S (*en particulier si les fibres de* G *sont affines*)*, le foncteur* **474**
des sous-tores de G *est représentable par un* S*-préschéma, lisse et séparé sur* S*, et il en est de même du foncteur* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{T}, \mathrm{G})$*, pour tout* S*-tore* T.

En effet, l'assertion est locale sur S, nous pouvons donc supposer S affine et le rang abélien des fibres de G constant. On peut alors trouver (Exp. VI_{B} § 10) un schéma affine *noethérien* S_0 et un S_0-préschéma en groupes G_0, lisse, de type fini sur S_0, tel que G soit S-isomorphe à $\mathrm{G}_0 \times_{\mathrm{S}_0} \mathrm{S}$. Par ailleurs, le rang abélien des fibres d'un S-préschéma en groupes de présentation finie sur S est une fonction ind-constructible (6.3 bis). Par un raisonnement standard (EGA IV 8), on conclut que dans le cas présent, on peut supposer le rang abélien des fibres de G_0 constant sur S_0. Mais alors G_0 possède la propriété AT (8.7 iii)), et par suite (8.10) le foncteur des sous-tores de G_0 est représentable par un S_0-préschéma lisse et séparé sur S_0, d'où la propriété annoncée pour G. Pour ce qui est du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{T}, \mathrm{G})$, on procède de manière analogue.

Généralisation de 8.9.

Le foncteur $\mathscr{T}$ des sous-tores d'un groupe lisse G n'étant par nécessairement représentable, nous allons énoncer des conditions suffisantes pour qu'un sous-foncteur de $\mathscr{T}$ soit représentable.

Proposition 8.12. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien,* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse sur* S*, à fibres connexes et* $\mathscr{F}$ *un sous-*S*-foncteur du foncteur* $\mathscr{T}$ *des* **475**
sous-tores de G*, vérifiant les propriétés suivantes :*

i) $\mathscr{F}$ *est un faisceau pour la topologie* fpqc (Exp. IV).

ii) $\mathscr{F}$ *commute aux limites inductives d'anneaux* (Exp. XI 3.2).

iii) $\mathscr{F}$ *commute aux limites adiques d'anneaux locaux artiniens* (Exp. XI 3.3).

iv) $\mathscr{F}$ *est infinitésimalement lisse sur* S (Exp. XI 1.8).

v) $\mathscr{F}$ *est stable par automorphismes intérieurs de* G, c.-à-d. *pour tout* S*-préschéma* S′*, on a :*

$$\mathrm{T} \in \mathscr{F}(\mathrm{S}') \text{ et } g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \Rightarrow \mathrm{int}(g)\mathrm{T} \in \mathscr{F}(\mathrm{S}').$$

Alors $\mathscr{F}$ *est représentable par un* S*-préschéma, lisse et séparé sur* S.

Proposition 8.12. bis. — *Soient* S *et* G *comme ci-dessus,* T *un* S*-tore et* $\mathscr{F}$ *un sous-foncteur de* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{T}, \mathrm{G})$*, vérifiant les propriétés suivantes :*

i), ii), iii), iv) *comme ci-dessus.*

v) $\mathscr{F}$ *est stable par automorphismes intérieurs de* G, c.-à-d. *pour tout* S*-préschéma* S′*, on a :*

$$u \in \mathscr{F}(\mathrm{S}') \textit{ et } g \in \mathrm{G}(\mathrm{S}') \Rightarrow \mathrm{int}(g)u \in \mathscr{F}(\mathrm{S}').$$

Alors $\mathscr{F}$ *est représentable par un* S*-préschéma lisse et séparé sur* S.

Démonstration de 8.12. (La démonstration de 8.12 bis est tout-à-fait analogue et est laissée aux soins du lecteur.)

476 Soit $u : \mathscr{F} \to \mathscr{C}\mathscr{T}$ (7.1 i)) le S-morphisme qui à tout élément T de $\mathscr{F}(\mathrm{S}')$ associe l'élément $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T})$ de $\mathscr{C}\mathscr{T}(\mathrm{S}')$. Comme $\mathscr{C}\mathscr{T}$ est représentable par un S-préschéma lisse et quasi-projectif (7.1 i)), nous sommes ramenés à prouver la représentabilité de u. Après changement de base $\mathscr{C}\mathscr{T} \to \mathrm{S}$, nous sommes ramenés au problème suivant : étant donnés S et G comme ci-dessus, H un sous-groupe lisse de G, à fibres connexes, nous devons représenter le foncteur $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}$ tel que $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}(\mathrm{S}')$ = ensemble des éléments $\mathrm{T} \in \mathscr{F}(\mathrm{S}')$, tels que :

$$\mathrm{H}_{\mathrm{S}'} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T}).$$

Nous allons montrer que $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}$ est étale et séparé sur S. Pour ce faire, il nous suffit de vérifier les cinq conditions de 8.10.

Les conditions i), ii) et iii) de 8.10 résultent facilement de 8.12 i), ii) et iii). On a déjà remarqué que $\mathscr{T}\mathscr{C}_{\mathrm{H}}$ était un foncteur séparé et infinitésimalement étale, donc $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}$, qui est un sous-foncteur de $\mathscr{T}\mathscr{C}_{\mathrm{H}}$, est séparé et infinitésimalement non ramifié (Exp. XI 1.8). Il nous suffit donc de montrer que $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}$ est infinitésimalement lisse (*loc. cit.*). Soit S le spectre d'un anneau local artinien, S_0 un sous-schéma de S défini par un idéal nilpotent, T_0 un élément de $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}(\mathrm{S}_0)$; prouvons que T_0 se relève en un élément T de $\mathscr{F}_{\mathrm{H}}(\mathrm{S})$. Par hypothèse (8.12 iv)), T_0 se relève en un élément T′ de $\mathscr{F}(\mathrm{S})$. D'autre part, H étant lisse, T_0 se relève en un sous-tore T″ de H_{S} (Exp. IX 3.6 bis) qui est conjugué de T′ par un élément $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$ (*loc. cit.*), donc $\mathrm{T}'' \in \mathscr{F}(\mathrm{S})$ (8.12 v)). Comme $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}}}(\mathrm{T}'')$ est lisse sur S et coïncide avec $\mathrm{H}_{\mathrm{S}_0}$ au-dessus de S_0, T″ est dans le centre
477 de H_{S} (Exp. IX 5.6 a)) et son centralisateur dans G est égal à H_{S}, bref $\mathrm{T}'' \in \mathscr{F}_{\mathrm{H}}(\mathrm{S})$, et on prend $\mathrm{T} = \mathrm{T}''$.

Corollaire 8.13. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et de présentation finie sur* S*, à fibres connexes et soit* $\mathscr{T}\mathscr{D}$ *le sous-foncteur de* $\mathscr{T}$*, dont l'ensemble des points à valeurs dans un* S*-préschéma* S′ *est l'ensemble des sous-tores* T *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *tels que, pour tout point* s' *de* S′, $\mathrm{T}_{s'}$ *soit contenu dans le* sous-groupe dérivé

(Exp. $\mathrm{VI_B}$ 7) *de* $\mathrm{G}_{s'}$. *Alors* $\mathscr{T}\mathscr{D}$ *est représentable par un* S*-préschéma lisse et séparé sur* S.

Corollaire 8.13. bis. — *Soient* S *et* G *comme ci-dessus,* T *un* S*-tore et soit*

$$\underline{\mathrm{Hom\,der}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{T},\mathrm{G})$$

le sous-foncteur de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{T},\mathrm{G})$ *dont l'ensemble des points à valeur dans* S' *est l'ensemble des* S'*-morphismes* $u : \mathrm{T}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *tels que, pour tout point* s' *de* S', $u_{s'}$ *se factorise à travers le* groupe dérivé *de* $\mathrm{G}_{s'}$. *Alors ce foncteur est représentable par un* S*-préschéma lisse et séparé sur* S.

Le corollaire 8.13 et le corollaire 8.13 bis se démontrent de façon analogue ; prouvons par exemple 8.13 bis. Par le procédé habituel, nous nous ramenons au cas où S est noethérien. Vérifions que les cinq conditions de 8.12 bis sont vérifiées :

Les conditions i) et iv) résultent immédiatement des propriétés correspondantes du foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{T},\mathrm{G})$. La condition v) est vérifiée car le groupe dérivé d'un groupe algébrique est invariant (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 7). Pour établir ii), nous sommes ramenés par une réduction standard (EGA IV 8) à prouver que si S est un schéma intègre noethérien de point générique η et si $u : \mathrm{T} \to \mathrm{G}$ est un S-morphisme de groupes qui sur la fibre **478**
générique se factorise à travers le groupe dérivé de G_η, alors il existe un voisinage U de η tel que, pour tout point s de U, u_s se factorise à travers le groupe dérivé de G_s. Mais cela résulte immédiatement de Exp. $\mathrm{VI_B}$ 10.12. Pour établir iii), reprenons les notations de 4.3. Pour montrer qu'un élément $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\varprojlim_m \underline{\mathrm{Hom\,der}}_{\mathrm{S}_m\text{-gr}}(\mathrm{T}_m,\mathrm{G}_m)$ est « admissible », au sens de 4.3, et provient d'un élément de $\underline{\mathrm{Hom\,der}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{T},\mathrm{G})$, on se ramène immédiatement au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet (cf. 8.1). Soient t le point générique et s le point fermé de S, D l'adhérence schématique dans G du groupe dérivé D_t de G_t.

a) D_s contient le groupe dérivé de G_s. En effet, comme D_t est invariant dans G_t et G plat sur S, D est invariant dans G. De plus le morphisme :

$$\mathrm{G}\underset{\mathrm{S}}{\times}\mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}, \qquad (x,y) \mapsto xyx^{-1}y^{-1}$$

se factorise à travers D_t sur la fibre générique, donc il se factorise à travers D. Par suite le groupe algébrique $\mathrm{G}_s/\mathrm{D}_s$ est commutatif, d'où l'assertion a).

b) Si $u_m \in \underline{\mathrm{Hom\,der}}_{\mathrm{S}_m\text{-gr}}(\mathrm{T}_m,\mathrm{G}_m)$, u_m se factorise à travers D_m. En effet, par hypothèse, u_s se factorise à travers le groupe dérivé de G_s, donc a fortiori se factorise à travers D_s, d'après a). Comme D_m est plat sur S_m et invariant dans G_m, le groupe quotient $\mathrm{H}_m = \mathrm{G}_m/\mathrm{D}_m$ est représentable (Exp. $\mathrm{VI_A}$ § 4). Comme l'image de T_m dans H_m est un tore (Exp. IX 6.8) dont la fibre fermée est nulle, l'image de T_m est nulle ; c'est dire que u_m se factorise à travers D_m. **479**

c) La famille $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est « admissible » et se relève en un morphisme $\mathrm{T} \to \mathrm{G}$ qui appartient à $\underline{\mathrm{Hom\ der}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{T},\mathrm{G})$. Vu ce qui précède et 4.1 bis, il suffit de prouver que D_t est un groupe algébrique affine, ce qui résulte du lemme suivant :

Lemme 8.14. — *Soit* G *un groupe algébrique, lisse et connexe, défini sur un corps* k. *Alors le groupe dérivé* D *de* G *est affine.*

Comme la formation de D commute à l'extension du corps de base (Exp. VI_{B} 7), on peut supposer k algébriquement clos. Mais alors G est extension d'une variété abélienne A par un groupe linéaire L. Comme A est commutatif, D est nécessairement contenu dans L donc est affine.

Tores maximaux.

Théorème 8.15. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien et* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse et de type fini sur* S*. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *Le* S*-foncteur* $\mathscr{TM}$*, dont l'ensemble des points à valeurs dans un* S*-préschéma* S′ *est égal à l'ensemble des tores maximaux de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ (Exp. XII 1.3)*, est représentable.*

ii) *Le foncteur* $\mathscr{TM}$ *précédent est représentable par un* S*-préschéma lisse et quasi-projectif sur* S*, à fibres affines.*

iii) *Le groupe* G *possède localement pour la topologie étale un tore maximal.*

480 iv) *Le groupe* G *possède localement pour la topologie fidèlement plate un tore maximal.*

v) *Le groupe* G *possède la propriété* AT (8.4)*, et le rang réductif de ses fibres est une fonction localement constante sur* S.

Démonstration : ii) $\Rightarrow$ i) est clair.

i) $\Rightarrow$ iii). En effet, comme G est de présentation finie sur S, il résulte de 6.3 que $\mathscr{TM}$ commute aux limites inductives d'anneaux, donc est localement de présentation finie s'il est représentable (EGA IV 8.14). Par ailleurs $\mathscr{TM}$ est formellement lisse (Exp. XI 2.1 bis). Donc s'il est représentable, il est représentable par un préschéma lisse sur S et iii) résulte alors du lemme de Hensel (Exp. XI 1.10).

iii) $\Rightarrow$ iv) est clair.

iv) $\Rightarrow$ v). Soit s un point de S. Par hypothèse, il existe un S-préschéma S′, plat sur S, dont l'image contient s, tel que $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ possède un tore maximal T′. Soit s' un point de S′ au-dessus de s. Le rang réductif des fibres de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ est donc constant sur $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{S}',s'}$ et par suite, le rang réductif des fibres de G est constant sur l'image de $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{S}',s'}$, qui est $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_{\mathrm{S},s}$ (EGA IV 2.3.4 ii)). Or le rang réductif des fibres de G est une fonction localement constructible sur S (6.3 bis), donc ce rang est constant sur un voisinage de s (EGA IV 1.10.1).

Pour voir que G possède la propriété AT, considérons un S-schéma S_1, spectre
481 d'un anneau de valuation discrète, le point fermé s_1 de S_1 se projetant sur le point s précédent. Le préschéma $\mathrm{S}'_1 = \mathrm{S}_1 \times_{\mathrm{S}} \mathrm{S}'$ est fidèlement plat sur S_1 et $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'_1}$ possède un tore maximal. Soient A (resp. A′) l'anneau de S_1 (resp. S'_1). Considérant A′ comme limite inductive de ses sous-A-algèbres de type fini, il résulte de 6.3 qu'il existe un S_1-schéma S''_1 tel que $\mathrm{G}_{\mathrm{S}''_1}$ possède un tore maximal et tel que le morphisme structural $\mathrm{S}''_1 \to \mathrm{S}_1$ soit de type fini et surjectif. Utilisant maintenant EGA II 7.1.9, nous pouvons supposer que S'_1 est le spectre d'un anneau de valuation discrète. Mais alors il est clair que $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'_1}$, donc aussi $\mathrm{G}_{\mathrm{S}_1}$, possède la propriété AT. Comme ceci est vrai pour tout S-préschéma S_1, spectre d'un anneau de valuation discrète, G possède la propriété AT.

v) $\Rightarrow$ i). En effet d'après 8.9, le foncteur $\mathscr{T}$ des sous-tores de G est représentable et il est clair que $\mathscr{TM}$ est représentable par le sous-préschéma à la fois ouvert et fermé de $\mathscr{T}$, qui représente le sous-foncteur des tores de rang r, où r désigne le rang réductif de G (que l'on peut supposer constant).

iii) $\Rightarrow$ ii). En effet, si la condition iii) est réalisée, nous pouvons utiliser les résultats de Exp. XII 7.1. Le foncteur $\mathscr{T}\mathscr{M}$ est donc canoniquement isomorphe au foncteur des sous-groupes de Cartan de G et il suffit d'appliquer 7.3 i).

Remarque 8.16. — On peut montrer que le préschéma $\mathscr{T}\mathscr{M}$ des tores maximaux de G est *affine sur* S [(*)], ce qui généralise Exp. XII 5.4.

Corollaire 8.17. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse et de présentation finie sur* S*. Supposons que le rang abélien et le rang réductif des fibres de* G *soient des fonctions localement constantes sur* S*, alors* G *vérifie les propriétés* (*équivalentes*) i) *à* iv) *de* 8.15. **482**

Nous pouvons supposer que le rang abélien et le rang réductif des fibres de G sont constants. Procédant comme dans 8.11, et compte tenu de 6.3 bis, on se ramène au cas où S est noethérien. Mais alors G possède la propriété AT (8.7) et on conclut par 8.15 v).

Corollaire 8.18. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse sur* S*. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Le rang unipotent* ρ_u *et le rang abélien* ρ_{ab} (6.1 ter) *des fibres de* G *sont des fonctions localement constantes sur* S.

b) *Le rang unipotent* ρ_u *est localement constant et* G *possède localement pour la topologie* fpqc *des tores maximaux.*

c) *Le rang réductif* ρ_r (6.1 ter) *et le rang abélien* ρ_{ab} *des fibres de* G *sont des fonctions localement constantes sur* S.

Remarques 8.19. — Sous les hypothèses de 8.18, un raisonnement plus précis, utilisant la semi-continuité inférieure du rang abélien (annoncée dans Exp. X 8.7) permet de montrer que si deux des trois rangs ρ_u, ρ_r, ρ_{ab} sont localement constants, alors il en est de même du troisième.

Démonstration de 8.18. Quitte à remplacer G par sa composante neutre, nous pouvons supposer G de présentation finie sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.3.3). **483**

a) $\Rightarrow$ c). Soit s un point de S. Comme ρ_{ab} est localement constant, il résulte de 8.11 que, quitte à faire une extension étale, couvrant S, on peut supposer qu'il existe un sous-tore T de G, dont la fibre T_s est un tore maximal de G_s. Soit $\mathrm{C} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, qui est un sous-préschéma en groupes de G, lisse sur S, à fibres connexes. Pour tout point t de S, C_t contient évidemment un sous-groupe de Cartan C'_t de G_t. Quitte à

[(*)] cf. M. Raynaud, Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes (thèse, à paraître)(N.D.E. : voir Lecture Notes Math. 119 (1970), Springer), notamment IX 2.9.

restreindre S, on peut supposer ρ_u, ρ_{ab} et la dimension relative de C sur S constants. On a alors les inégalités :

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{C}_s = \dim \mathrm{C}_t \geqslant \dim \mathrm{C}'_t \geqslant \rho_u(t) + \rho_{\text{ab}}(t) + \dim \mathrm{T}_t \\ = \rho_u(s) + \rho_{\text{ab}}(s) + \dim \mathrm{T}_s = \rho_\nu(s) = \dim \mathrm{C}_s.\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{C}_t = \mathrm{C}'_t$, donc que T est un tore maximal de G et a fortiori, $\rho_r(t) = \rho_r(s)$.

c) $\Rightarrow$ b) d'après 8.17.

b) $\Rightarrow$ a). En effet, puisque G possède localement pour la topologie fpqc des tores maximaux, il possède localement pour la topologie fpqc des sous-groupes de Cartan, et par suite (Exp. XII 7.3) le rang nilpotent $\rho_\nu = \rho_u + \rho_r + \rho_{\text{ab}}$ est localement constant. Comme ρ_r et ρ_{ab} sont localement constants, ρ_u est localement constant.