EXPOSÉ XVI

GROUPES DE RANG UNIPOTENT NUL

par M. RAYNAUD (*)

1. Un critère d'immersion 484

1.1. Exemples de monomorphismes de préschémas en groupes qui ne sont pas des immersions.— Nous allons construire un préschéma S, deux S-préschémas en groupes G et H, et un S-monomorphisme de groupes $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$, qui ne soit pas une immersion. Les groupes G et H seront de présentation finie sur S, plats sur S et G sera même lisse sur S (cf. Exp. VIII, paragraphe et note $(*)$ précédant 7.1, voir aussi XVII App. III, 4).

Prenons d'abord pour S le spectre d'un anneau de valuation discrète A, *d'inégale caractéristique* et de caractéristique résiduelle égale à 2. Soit t le point générique de S et s le point fermé.

a) Prenons pour G le sous-groupe ouvert du groupe constant $\mathrm{G}' = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$ obtenu en enlevant le point de la fibre fermée $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_s$ distinct de l'élément neutre, et prenons pour H le groupe de type multiplicatif $(\boldsymbol{\mu}_2)_{\mathrm{S}}$ des racines $2^{\text{èmes}}$ de l'unité (Exp. I 4.4.4). Vu le choix de S, H_t est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_t$ tandis que H_s est un groupe radiciel. On a un morphisme évident $\mathrm{G}' \to \mathrm{H}$, défini par la section (-1) de H, d'où un morphisme $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$, qui est un monomorphisme, mais qui n'est pas une immersion (sinon ce serait nécessairement un isomorphisme (cf. Exp. VIII 7). Ici, Exp. VIII 7.9 ne s'applique pas, car ${}_2\mathrm{G} = \mathrm{G}$ n'est pas fini sur S.

b) Désignons par K le S-préschéma en groupes, étale et non séparé, obtenu à partir 485
du groupe unité en « dédoublant » l'unique point de la fibre fermée. Prenons pour H le groupe produit : $(\boldsymbol{\mu}_2)_{\mathrm{S}} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{K}$. Soit a (resp. b) l'unique section de $\boldsymbol{\mu}_2$ (resp. K), au-dessus de S, qui est distincte de la section unité et soit $h = (a, b)$ la section correspondante de H. La donnée de h définit un S-morphisme de groupes :

$$u : \mathrm{G} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{H}.$$

---

(0) version xy du 1/12/08

(*) Cf. note à la page 1 de Exp. XV.

Il est clair que u est un monomorphisme et ce n'est pas une immersion. Ici, Exp. VIII 7.9 ne s'applique pas, car ${}_2\mathrm{H} = \mathrm{H}$ n'est pas séparé sur S.

c) Plus intéressant est l'exemple suivant, où G est un groupe lisse, à *fibres connexes*, (et même $\mathrm{G} = (\mathbb{G}_a)_\mathrm{S}$) (cf. Exp. VIII 7.10).

Prenons pour S le spectre d'un anneau de valuation discrète A d'*égale caractéristique* 2 et soient π une uniformisante de A, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A.

Considérons le groupe additif $(\mathbb{G}_a)_\mathrm{S}$, le groupe produit $(\mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_a)_\mathrm{S}$ d'anneau $\mathrm{A}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ et soit G_1 le sous groupe fermé d'équation :

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - \pi\mathrm{Y} = 0. \tag{1}$$

Le groupe G_1 est lisse sur S, sa fibre générique est isomorphe à $(\mathbb{G}_a)_t$ et sa fibre fermée est isomorphe au produit de $(\mathbb{G}_a)_s$ par $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_s$. On peut prendre pour facteur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_s$ le sous-groupe N_s de $(\mathrm{G}_1)_s$ d'équation :

$$\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} = 0. \tag{2}$$

486 Soient N' et N'' deux sous-schémas en groupes de G_1, isomorphes à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_\mathrm{S}$, dont les fibres fermées coïncident avec N_s et dont les fibres génériques sont distinctes. Les groupes N' et N'' sont donc définis par la donnée de deux sections de G_1 au-dessus de S de coordonnées (a', b') (resp. (a'', b'')) telles que :

$$\begin{cases} a'^2 + a' - \pi b' = a''^2 + a'' - \pi b'' = 0, \\ \quad a' \text{ et } a'' \quad \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}, \quad a' \neq a'' \\ \quad b' \text{ et } b'' \quad \equiv 0 \pmod{\mathfrak{m}}. \end{cases} \tag{3}$$

(On peut prendre par exemple $(1, 0)$ et $(1 + \pi^2, \pi + \pi^3)$.)

Les groupes quotients $\mathrm{G}' = \mathrm{G}_1/\mathrm{N}'$ et $\mathrm{G}'' = \mathrm{G}_1/\mathrm{N}''$ sont représentables (Exp. V 4.1). Soit u le morphisme canonique :

$$u : \mathrm{G}_1 \longrightarrow \mathrm{G}' \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{G}'',$$

et soit H le sous-schéma en groupes de $\mathrm{G}' \times_\mathrm{S} \mathrm{G}''$ égal à l'adhérence schématique dans $\mathrm{G}' \times_\mathrm{S} \mathrm{G}''$ de $u_t(\mathrm{G}_1)_t$, de sorte que u se factorise à travers H. Le noyau de u est $\mathrm{K} = \mathrm{N}' \cap \mathrm{N}''$, dont la fibre générique est le groupe unité et dont la fibre fermée est égale à N_s ; en particulier, K n'est pas plat sur S. Sur la fibre générique, u_t est donc un isomorphisme de $(\mathrm{G}_1)_t$ sur H_t. Par contre, je dis que H_s n'est pas lisse. En effet, si H_s était lisse, comme u_s est un morphisme à noyau fini et que $(\mathrm{G}_1)_s$ et H_s ont même dimension (à savoir 1), u_s serait un morphisme plat ; comme G_1 et H sont plats, u serait un morphisme plat et par suite $\operatorname{Ker} u$ serait plat sur S, ce qui n'est pas. Il est clair que la restriction de u à la composante neutre G de G_1 est un monomorphisme (les fibres de $\mathrm{K} \cap \mathrm{G}$ sont des groupes unité, donc $\mathrm{K} \cap \mathrm{G}$ est le groupe unité (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 2.9)), mais ce n'est pas une immersion (sinon ce serait une immersion ouverte et H_s
487 serait lisse). Ici, Exp. VIII 7.9 ne s'applique pas, car ${}_2\mathrm{G} = \mathrm{G}$ n'est pas fini sur S.

Pour les amateurs d'équations, disons que dans l'exemple ci-dessus, on peut prendre pour H le sous-groupe fermé de $(\mathbb{G}_a \times_\mathrm{S} \mathbb{G}_a)_\mathrm{S}$ qui a pour anneau : $\mathrm{A}[\mathrm{V}, \mathrm{W}]/(\mathrm{F})$ avec :

$$\mathrm{F} = (a''b' - b''a')(a''^2\mathrm{V} - a'^2\mathrm{W}) - (a''\mathrm{V} - a'\mathrm{W})^2$$

(où a', a'', b', b'' satisfont à (3)). Pour G, on prend le groupe $(\mathbb{G}_a)_S$ d'anneau A[T], et pour morphisme $u : G \to H$, le S-morphisme défini par les applications :

$$V \mapsto a'(a'T + \pi T^2), \qquad W \mapsto a''(a''T + \pi T^2).$$

Remarque 1.2. — La construction précédente est inspirée de la méthode de Koizumi-Shimura[(1)]. Elle ne s'applique pas lorsque S est le spectre d'un anneau d'inégale caractéristique, les points d'ordre fini de G étant alors « trop rigides ».

1.3. Enoncé du critère d'immersion. —

Thèoréme 1.3. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien,* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse sur* S*, de type fini, possédant localement pour la topologie* fpqc *des sous-groupes de Cartan* (Exp. XV 6.1 et 7.3 (i))*,* H *un* S*-préschéma en groupes localement de type fini,* $u : G \to H$ *un* S*-monomorphisme de groupes. Alors :*

a) *Si* G *est à fibres connexes, pour que* u *soit une* immersion, (*il faut et*) *il suffit que pour tout* S*-schéma* S′ *qui est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet, à corps résiduel algébriquement clos, et pour tout sous-groupe de Cartan* C *de* $G_{S'}$, 488
la restriction de $u_{S'}$ *à* C *soit une immersion.*

b) *Pour que* u *soit une* immersion (*resp. une* immersion fermée), (*il faut et*) *il suffit que pour tout* S′ *comme ci-dessus et tout sous-groupe de Cartan* C *de la composante neutre* $(G_{S'})^0$ *de* $G_{S'}$*, la restriction de* $u_{S'}$ *au normalisateur* (Exp. XI 6.11) N *de* C *dans* $G_{S'}$ *soit une immersion* (*resp. une immersion fermée*)*.*

Avant de démontrer 1.3, énonçons quelques applications :

Corollaire 1.4. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse sur* S*, de présentation finie sur* S*, de rang unipotent* (Exp. XV 6.1 ter) *nul et possédant, localement pour la topologie* fpqc*, des tores maximaux,* H *un* S*-préschéma en groupes,* $u : G \to H$ *un* S*-monomorphisme de groupes. On suppose de plus ou bien* H *de présentation finie sur* S *ou bien* S *localement noethérien et* H *localement de type fini. Alors :*

a) *Si* G *est à fibres connexes,* u *est une immersion.*

b) *Si* H *est séparé sur* S *et si pour tout* S′ *au-dessus de* S *et tout tore maximal* T *de* $G_{S'}$*, le groupe de Weyl :*

$$W = \underline{\mathrm{Norm}}_{G_{S'}}(T)/\,\underline{\mathrm{Centr}}_{G^0_{S'}}(T)$$

est représentable (*condition toujours réalisée si* G *est à fibres connexes* (Exp. XV 7.1 (iv))) *et est fini sur* S*, alors* u *est une immersion fermée.*

Corollaire 1.5. — *Soit* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse sur* S*, de présentation finie sur* S*, à fibres connexes,* H *un* S*-préschéma en groupes,* $u : G \to H$ *un* S*-monomorphisme de groupes. On suppose ou bien* H *de présentation finie sur* S*, ou bien* S *localement noethérien et* H *localement de type fini. Alors :* 489

[(1)]N.D.E. : S. Koizumi & G. Shimura, Specialization of abelian varieties, Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo 9 (1959), 187-211.

a) *Si* G *est réductif,* c.-à-d. *est affine sur* S, *à fibres réductives* (cf. Exp. XIX)*, u est une immersion, et une immersion fermée si* H *est séparé.*

b) *Si* G *est à fibres affines, résolubles, connexes, de rang unipotent nul, u est une immersion, et une immersion fermée si* H *est séparé.*

Démonstration de 1.4 *à partir de* 1.3.

Réduction au cas S *noethérien.* Si S est localement noethérien, la réduction est immédiate, les propriétés à démontrer étant locales sur S. Dans le second cas G et H sont de présentation finie sur S. Quitte à restreindre S, nous pouvons supposer S affine. D'après Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 10, il existe un schéma noethérien S_0, un S_0-préschéma en groupes G_0, lisse sur S_0, (à fibres connexes dans le cas a)), de type fini sur S_0, un S_0-préschéma en groupes H_0 de type fini (séparé dans le cas b)), un S_0-morphisme de groupes

$$u_0 : G_0 \longrightarrow H_0,$$

tels que G, H, u, s'obtiennent à partir de G_0, H_0, u_0 par une extension de la base : $S \to S_0$. Le fait que u soit un monomorphisme se traduit par $\mathrm{Ker}\, u$ = groupe unité ; on
490 peut donc supposer que u_0 est un monomorphisme. Comme G est de rang unipotent ρ_u nul et possède localement, pour la topologie fpqc, des tores maximaux, le rang abélien ρ_{ab} des fibres de G est localement constant (Exp. XV 8.18). Mais ρ_u et ρ_{ab} sont des fonctions localement constructibles (Exp. XV. 6.3 bis). Un raisonnement standard (cf. EGA IV 8.3.4) montre que l'on peut choisir S_0 et G_0 de façon que le rang unipotent (resp. le rang abélien) des fibres de G_0 soit nul (resp. localement constant). Mais alors, G_0 possède localement des tores maximaux pour la topologie fpqc (Exp. XV 8.18) et le foncteur $\mathscr{T\!M}_{G_0}$ des tores maximaux de G_0 est représentable par un S_0-schéma X_0, de type fini sur S_0 (Exp. XV 8.15). Soient T_0 le tore maximal « universel » de $(G_0)_{X_0}$, X le S-préschéma $X_0 \times_{S_0} S$, $T = T_0 \times_{S_0} S$ le tore maximal universel pour G. Par hypothèse, dans le cas b), le groupe de Weyl relatif à T est représentable et fini sur X. Ces deux propriétés sont compatibles avec les limites projectives de préschémas (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 10.1 iii) et EGA IV 8.10.5). On peut donc choisir S_0 de façon que le groupe de Weyl de T_0 soit fini sur X_0. Il est clair dans ces conditions que pour prouver 1.4, on peut remplacer S, G, u, H, par S_0, G_0, u_0, H_0, donc supposer S noethérien.

Utilisons le critère valuatif fourni par 1.3. Nous sommes ramenés au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète et au cas où G^0 possède un sous-groupe de Cartan C.

Démonstration de 1.4 a). Nous devons montrer que la restriction de u à C est une immersion (1.3 a)), ce qui nous ramène au cas où G = C est à fibres connexes
491 nilpotentes. Des réductions standard (cf. Exp. VIII preuve de 7.1) nous ramènent au cas où H est plat sur S, u un isomorphisme sur la fibre générique et u un isomorphisme des espaces sous-jacents sur la fibre fermée. Le groupe H est alors à fibres connexes, donc séparé sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.2). Admettons un instant le lemme :

Lemme 1.6. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse sur* S*, à fibres connexes, nilpotentes, de rang unipotent nul. Alors :*

i) G *est commutatif.*

ii) *Pour tout entier* $n > 0$, ${}_n\mathrm{G}$ *est un préschéma en groupes, plat, quasi-fini sur* S, *fini sur* S *si et seulement si le rang abélien, ou le rang réductif de* G, *sont localement constants sur* S.

iii) *Pour tout entier* $q > 0$, *inversible sur* S, *la famille des sous-groupes* ${}_{q^n}\mathrm{G}$ *est universellement schématiquement dense dans* G *relativement à* S (EGA IV 11.10.8).

Le lemme 1.6 s'applique au groupe G, et comme G possède localement des tores maximaux, le rang réductif des fibres de G est localement constant, donc (1.6 ii)), pour tout entier $n > 0$, ${}_n\mathrm{G}$ est fini sur S. Le fait que u soit une immersion résulte alors de Exp. VIII 7.9.

Démonstration de 1.6. Examinons d'abord le cas où S est le spectre d'un corps :

Lemme 1.7. — *Soient k un corps de caractéristique p,* G *un k-groupe algébrique, lisse, connexe, nilpotent, de rang unipotent nul. Alors* G *est un groupe commutatif, extension d'une variété abélienne* A *par un tore* T. *Pour tout entier* $n > 0$, ${}_n\mathrm{G}$ *est un groupe fini, étale si* $(n,p) = 1$, *défini par une k-algèbre de rang* $n^{\rho_r + 2\rho_{ab}}$. *Si* $(q,p) = 1$, *la famille des sous-groupes* ${}_{q^n}\mathrm{G}$ $(n \in \mathbb{N})$ *est schématiquement dense dans* G. 492

Démonstration de 1.7. Soit Z le centre de G. Le groupe G/Z est affine (Exp. XII 6.1), de rang unipotent nul, lisse et connexe, donc est un tore (BIBLE 4 th. 4), mais alors G est commutatif (Exp. XII 6.4). Si T est l'unique tore maximal de G (Exp. XV 3.4), il résulte immédiatement du théorème de Chevalley (Sém. Bourbaki 1956/57, N°145) que G est extension d'une variété abélienne A par T. Pour tout entier $n > 0$, l'élévation à la puissance $n^{\text{ième}}$ est un épimorphisme dans T, on en déduit une suite exacte :

$$0 \longrightarrow {}_n\mathrm{T} \longrightarrow {}_n\mathrm{G} \longrightarrow {}_n\mathrm{A} \longrightarrow 0.$$

Un théorème classique de Weil (A. Weil : Variétés abéliennes et courbes algébriques, § IX th. 33 cor. 1) nous dit que ${}_n\mathrm{A}$ est un groupe fini défini par une k-algèbre de rang $n^{2\rho_{ab}}$. Comme ${}_n\mathrm{T}$ est un groupe fini de rang n^{ρ_r}, on en déduit la structure annoncée de ${}_n\mathrm{G}$.

Soit alors H le plus petit sous-schéma fermé de G qui majore ${}_{q^n}\mathrm{G}$ pour tout n. Il résulte de ce qui précède et de Exp. XV 4.6 que H est un sous-groupe lisse et connexe, donc du même type que G. L'élévation à la puissance $n^{\text{ième}}$ dans H est un épimorphisme (car ${}_q\mathrm{H}$ est fini), de sorte que l'on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow {}_q\mathrm{H} \longrightarrow {}_q\mathrm{G} \longrightarrow {}_q(\mathrm{G/H}) \longrightarrow 0.$$

Il en résulte que ${}_q(\mathrm{G/H}) = 0$, donc $\mathrm{G/H} = 0$. C'est dire que les sous-groupes ${}_{q^n}\mathrm{G}$ sont 493
schématiquement denses dans G.

Suite de la démonstration de 1.6. i). Pour montrer que G est commutatif, on se ramène par le procédé habituel au cas où S est noethérien, puis au cas où S est le spectre d'un anneau local de point fermé s. Le centre de G est représentable par un sous-schéma en groupes fermé Z de G (Exp. XI 6.11). Pour montrer que $\mathrm{Z} = \mathrm{G}$, il suffit de montrer que $\mathrm{Z} = \mathrm{G}$ après réduction par toute puissance de l'idéal maximal de l'anneau de S (car Z sera alors un sous-groupe ouvert de G, donc sera égal à G, puisque G est à fibres connexes). Ceci nous ramène au cas où S est local artinien.

Soit q un entier inversible sur S. Pour tout entier n, ${}_{q^n}\mathrm{G}_s$ est un sous-groupe de type multiplicatif de G_s étale et central (1.7). Comme G est lisse, ${}_{q^n}(\mathrm{G}_s)$ se relève en un S-sous-schéma en groupes étale et *central* M_n de G (Exp. XV 1.2). La famille des sous-groupes plats M_n, $n \in \mathbb{N}$, est alors schématiquement dense dans G (1.7 et EGA IV 11.10.9). Comme Z est fermé dans G et majore tous les M_n, on a bien Z = G.

1.6 ii). Pour voir que ${}_n\mathrm{G}$ est plat et quasi-fini sur S, il suffit de montrer que l'élévation à la puissance $n^{\text{ième}}$ dans G est un morphisme plat et quasi-fini. Comme G est plat sur S, on est ramené au cas où S est le spectre d'un corps (EGA IV 11.3.10),
494 et l'on a remarqué dans la démonstration de 1.7 que l'élévation à la puissance $n^{\text{ième}}$ était un épimorphisme. De plus, ${}_n\mathrm{G}$ est séparé sur S, car G est séparé sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.2). Pour que ${}_n\mathrm{G}$ soit fini sur S, il faut et il suffit alors que les fibres de ${}_n\mathrm{G}$ soient les spectres d'algèbres finies, de rang localement constant (on le voit immédiatement on se ramenant au cas où S est le spectre d'un anneau local hensélien). Mais, d'après 1.7, cette condition équivaut à dire que le rang abélien, ou le rang réductif, des fibres de G est localement constant.

1.6 iii). Pour voir que la famille des sous-groupes ${}_{q^n}\mathrm{G}$ ($n \in \mathbb{N}$) est universellement schématiquement dense dans G, on se ramène encore au cas S noethérien. Compte tenu de 1.7 et 1.6 b), il suffit alors d'appliquer EGA IV 11.10.9.

Démonstration de 1.4 b). Nous nous sommes ramenés au cas où S était le spectre d'un anneau de valuation discrète et au cas où G^0 possédait un sous-groupe de Cartan C. Soit $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{C} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{T}$, où T est l'unique tore maximal de C (Exp. XII 7.1 a) et b)). Comme H est séparé sur S, il résulte de 1.6 ii) et de Exp. VIII 7.12 que la restriction de u à C est une immersion fermée. D'autre part, pour prouver que u est une immersion fermée, il suffit de montrer qu'il en est ainsi de $u|_{\mathrm{N}}$ (1.3 b)). Comme par hypothèse W = N/C est représentable par un schéma en groupes fini, ceci va résulter du lemme suivant, appliqué à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{W} \longrightarrow 1$$

(noter qu'une immersion propre est une immersion fermée).

495 ***Lemme 1.8***. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie sur* S*, extension d'un préschéma en groupes* G''*, propre et de présentation finie sur* S*, par un préschéma en groupes* G'*, de présentation finie et plat sur* S *:*

$$1 \longrightarrow \mathrm{G}' \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}'' \longrightarrow 1.$$

Soient d'autre part H *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie sur* S (*ou localement de présentation finie si* S *est localement noethérien*) *et* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un* S*-morphisme de groupes. Alors si la restriction de* u *à* G' *est propre,* u *est propre.*

Démonstration de 1.8. Nous nous ramenons comme d'habitude au cas où S est noethérien (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 10 et Exp. XV 6.2) et nous pouvons alors appliquer le critère valuatif de propreté (EGA II 7.3.8). Nous supposons donc que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète A, de point fermé s et de point générique t. Soient $\overline{x} \in \mathrm{G}(t)$ et $h \in \mathrm{H(S)}$, tels que $u_t(\overline{x}) = h(t)$. Nous devons montrer que $\overline{x}$ provient d'un unique élément x de G(S). Il suffit même de prouver l'existence et l'unicité de x après extension fidèlement plate de l'anneau de valuation discrète A. Or soit $\overline{y}$ la projection de $\overline{x}$ dans $G''(t)$. Comme G'' est propre sur S, $\overline{y}$ provient d'un unique élément y de $G''(S)$. Soit X l'image réciproque de y dans G. Le préschéma X est fidèlement plat sur S (car G' est fidèlement plat sur S ainsi que le morphisme $G \to G''$ (Exp. VI_B § 9))). Quitte à faire un changement d'anneau de valuation discrète, fidèlement plat, on peut supposer que X possède une section ℓ au-dessus de S (EGA IV 14.5.8). Remplaçant $\overline{x}$ par $\overline{x}\ell_t^{-1}$, on peut supposer que $\overline{x} \in G'(t)$. Mais alors l'existence et l'unicité de x résultent du fait que $u|_{G'}$ est propre.

Démonstration de 1.5. 496

a) Nous verrons dans Exp. XIX que si G est réductif, G possède localement pour la topologie fidèlement plate des tores maximaux, a un groupe de Weyl fini, et un rang unipotent nul. L'assertion a) en résulte, compte tenu de 1.4.

b) Si G est à fibres affines, de rang unipotent nul, G possède des tores maximaux localement pour la topologie fpqc (Exp. XV 8.18). Il suffit alors d'appliquer 1.4, compte tenu du fait que G étant à fibres connexes, lisses, affines, résolubles, son groupe de Weyl est le groupe unité (BIBLE 6 th. 1 cor. 3).

Démonstration de 1.3 a).

Comme le morphisme u est déjà un monomorphisme, pour voir que u est une immersion, il suffit de montrer que u est propre aux points de $u(G)$ (EGA IV 15.7.1) et pour cela, nous pouvons utiliser le critère valuatif de propreté locale (EGA IV 15.7.5). Nous sommes donc ramenés au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet, à corps résiduel algébriquement clos, de point fermé s et de point générique t. Comme G est plat sur S, des réductions standard (cf. Exp. VIII preuve de 7.1) permettent de nous ramener au cas où H est plat sur S, où u_t est un isomorphisme et où u_s est un isomorphisme sur les espaces sous-jacents. Dire que u est une immersion équivaut alors à dire que u est un isomorphisme.

Par hypothèse, le groupe G possède localement des sous-groupes de Cartan pour 497
la topologie fpqc, nous pouvons donc parler de l'ouvert U des points réguliers de G (Exp. XV 7.3 i) et ii)).

Lemme 1.9. — *Avec les hypothèses précédentes, pour que u soit une immersion, il suffit que $u|_U$ soit une immersion.*

En effet, dire que $u|_U$ est une immersion signifie qu'il existe un ouvert V de H et un fermé F de V tels que $u|_U$ se factorise à travers F et induise un isomorphisme de U sur F. Comme H_t, donc aussi V_t, est irréductible, on a nécessairement $V_t = F_t$. Mais alors F_t majore l'adhérence schématique de V_t dans V, qui est égale à V puisque H est plat sur S. Bref, on a V = F. Il en résulte que $u|_U$ est une *immersion ouverte*, donc u est une immersion ouverte (VI_B 2.6).

Il nous reste donc à montrer que $u|_U$ est une immersion, et pour cela appliquons le critère valuatif de propreté locale. Quitte à remplacer S par le spectre d'un anneau de valuation discrète, fidèlement plat sur S, nous devons montrer que si h est une section de H au-dessus de S, dont *l'image* $h(S)$ *est contenue dans* $u(U)$*,* alors h est l'image d'une section g de U au-dessus de S. Il suffit de montrer que h est contenu dans l'image d'un sous-groupe de Cartan C de G. En effet, par hypothèse, $u|_C$ est une immersion, donc h est l'image d'une section g de C, qui est nécessairement une section de U.

498 Soit $a \in \mathrm{U}(s)$ (resp. $b \in \mathrm{U}(t)$) tel que $u_s(a) = h(s)$ (resp. $u_t(b) = h(t)$). Comme u_t est un isomorphisme, $h(t)$ est un point régulier de H_t, donc est contenu dans un unique sous-groupe de Cartan D_t de H_t (Exp. XIII 3.2). Soit D l'adhérence schématique de D_t dans H.

Lemme 1.10. — i) D_s *est un groupe algébrique nilpotent* (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 8).

ii) $\dim \mathrm{D}_s = \nu =$ *rang nilpotent de* $\mathrm{G} =$ *rang nilpotent de* $(\mathrm{H}_s)_{\text{réd}}$.

iii) $h(s) \in \mathrm{D}_s(\kappa(s))$.

i) Comme H est séparé (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.2), il en est de même de D. Par ailleurs, D est plat sur S, et sa fibre générique est nilpotente. Le fait que D_s soit nilpotent résulte alors de Exp. $\mathrm{VI_B}$ 8.4.

ii) Comme $(\mathrm{H}_s)_{\text{réd}} \simeq \mathrm{G}_s$, ces deux groupes ont même rang nilpotent. Le groupe G possédant, localement pour la topologie fpqc, des sous-groupes de Cartan, G_s et G_t ont même rang nilpotent ν. Enfin, le groupe D étant plat sur S, on a $\dim \mathrm{D}_s = \dim \mathrm{D}_t = \nu$ (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 4).

c) Comme h_t se factorise à travers D_t, h se factorise évidemment à travers D, d'où iii).

Ceci étant, le lemme suivant prouve que $(\mathrm{D}_s)_{\text{réd}}$ est un sous-groupe de Cartan de $(\mathrm{H}_s)_{\text{réd}} \cong \mathrm{G}_s$:

499 ***Lemme 1.11***. — *Soient* G *un groupe algébrique lisse et connexe défini sur un corps* k *algébriquement clos,* D *un sous-groupe algébrique lisse, nilpotent, contenant un élément régulier* a *de* $\mathrm{G}(k)$. *Alors* D^0 *est contenu dans un sous-groupe de Cartan de* G. *Si de plus* $\dim \mathrm{D}$ *est égal au rang nilpotent de* G, *alors* D *est un sous-groupe de Cartan de* G (*donc est connexe*).

Soient Z le centre de G, $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ qui est affine (Exp. XII 6.1), a', D' les images de a, D dans G'. Il résulte immédiatement de la correspondance entre sous-groupes de Cartan de G et sous-groupes de Cartan de G' (Exp. XII 6.6 e)) que a' est un élément régulier de G' et qu'il suffit de prouver le lemme pour le couple D', G' ; ceci nous permet de supposer G affine.

Soit alors s la composante semi-simple de a, qui appartient à $\mathrm{D}(k)$ (BIBLE 4 th. 3) et est régulière (BIBLE 7 th. 2 cor. 1). D'après BIBLE 6 th. 2, s centralise D^0, donc D^0 est contenu dans le centralisateur connexe de s, qui est un sous-groupe de Cartan de G (BIBLE 7 th. 2). Si maintenant $\dim \mathrm{D} =$ rang nilpotent de G, D^0 est donc un sous-groupe de Cartan de G, égal à $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, où T est l'unique tore maximal de D^0 (Exp. XII 6.6). Mais D est nilpotent, donc centralise T (BIBLE 6 th. 2), donc $\mathrm{D} = \mathrm{D}^0$.

Travaillons maintenant avec le groupe G. Le groupe $\mathrm{C}_t = u_t^{-1}(\mathrm{D}_t)$ est l'unique sous-groupe de Cartan de G_t qui contient b. Soit C l'adhérence schématique de C_t dans G.

500 Par fonctorialité de l'adhérence schématique, $u|_{\mathrm{C}}$ se factorise à travers D, donc $u_s(\mathrm{C}_s) \subset \mathrm{D}_s$. Comme u_s est un isomorphisme de G_s sur $(\mathrm{H}_s)_{\text{réd}}$, que $\dim \mathrm{C}_s =$

$\dim C_t = \nu = \dim D_s$ (1.10), et que D_s est connexe (1.11), u_s fournit un isomorphisme de $(C_s)_{\text{réd}}$ sur $(D_s)_{\text{réd}}$, donc $(C_s)_{\text{réd}}$ est un sous-groupe de Cartan de G_s. Le lemme suivant montre qu'en fait C est un sous-groupe de Cartan de G.

Lemme 1.12. — *Soient* S *le spectre d'un anneau de valuation discrète,* G *un* S-*préschéma en groupes lisse, de type fini,* C *un sous-préschéma en groupes de* G, plat *sur* S, *tel que la fibre générique* C_t *soit un sous-groupe de Cartan de* G_t *et la fibre fermée géométrique réduite* $(C_{\overline{s}})_{\text{réd}}$ *soit un sous-groupe de Cartan de* $G_{\overline{s}}$. *Alors* C *est un sous-groupe de Cartan de* G.

Nous devons montrer que C est lisse sur S, et il suffit d'établir ce point après extension fidèlement plate de la base. Les hypothèses faites sur C entraînent que le rang nilpotent des fibres de G est constant et nous pouvons donc parler de l'ouvert U des points réguliers de G (Exp. XV 7.3). Comme $(C_{\overline{s}})_{\text{red}}$ est un sous-groupe de Cartan de G_s, $C_{\overline{s}}$ contient un point régulier $a_{\overline{s}}$ de $G_{\overline{s}}$. Mais C est plat sur S, donc (EGA IV 14.5.8), quitte à faire une extension fidèlement plate de la base, nous pouvons supposer que $a_{\overline{s}}$ est un élément de $G(s)$ et se relève en une section a de C(S). Comme U est un ouvert et contient $a(s)$, U contient a. Soit C′ l'unique sous-groupe de Cartan de G qui contient a (Exp. XV 7.3). On a nécessairement $C_t = C'_t$ et par suite C′ et C **501**
coïncident avec la composante neutre de l'adhérence schématique de C_t dans G (noter que C′ et C sont plats sur S).

Fin de la démonstration de 1.3 a). Par hypothèse, la restriction de u au sous-groupe de Cartan C de G est une immersion. Il est clair que $h(S)$ est contenu dans $u(C) = D$, donc h est l'image d'une section g de C(S). C.Q.F.D.

Démonstration de 1.3 b).

Nous allons encore utiliser le critère valuatif de propreté locale (EGA IV 15.5) dans le cas d'une immersion (resp. le critère valuatif de propreté (EGA II 7.3.6) dans le cas d'une immersion fermée). Ceci nous ramène au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet, à corps résiduel algébriquement clos. Soient s le point fermé et t le point générique de S. Remplaçant H par l'adhérence schématique dans H de $u_t(G_t)$, nous pouvons supposer que H est plat sur S et que u_t est un isomorphisme.

Soit G^0 la composante connexe de G. D'après 1.2 a), $u|_{G^0}$ est une immersion, notons H′ le sous-préschéma en groupes de H *image* de G^0. On a donc $H'_s = (H_s)^0_{\text{réd}}$.

Pour vérifier le critère valuatif, nous devons montrer que toute section h de H au-dessus de S, telle que $h(S)$ soit contenu dans $u(G)$ dans le cas d'une immersion (resp. que toute section h de H au-dessus de S, dans le cas d'une immersion fermée) est l'image d'une section g de G au-dessus de S.

Soit C un sous-groupe de Cartan de G, $D = u(C)$ le sous-groupe de Cartan de H′ **502**
image de C. Le S-groupe $D' = \text{int}(h)D$ est à fibres connexes, donc d'espace sous-jacent contenu dans celui de H′ ; d'autre part, étant lisse sur S, il est réduit, et par suite D′ est un sous-préschéma en groupes lisse de H′. Les fibres de D′ sont des sous-groupes de Cartan des fibres de H′, donc D′ est un sous-groupe de Cartan de H′, et $C' = u^{-1}(D')$ est un sous-groupe de Cartan de G. Mais $\underline{\text{Transpstr}}_G(C, C')$ est lisse et surjectif sur S (Exp. XII 7.1 b)). Comme S est hensélien à corps résiduel algébriquement clos, il existe $g \in G(S)$ tel que $\text{int}(g)C = C'$. Quitte à remplacer h par $u(g)^{-1}h$, nous pouvons

supposer que $h(t)$ normalise D_t (et que $h(s)$ est l'image d'un élément du normalisateur de C_s dans G_s dans le cas d'une immersion). Soit $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{C})$. Par hypothèse $u|_{\mathrm{N}}$ est une immersion (resp. une immersion fermée) donc h est bien l'image d'une section de N au-dessus de S, ce qui achève la démonstration.

2. Un théorème de représentabilité des quotients

503 « Rappelons » le résultat suivant :

Théorème 2.1. — *Soient* S *un préschéma,* X *et* Y *deux* S-*préschémas,* $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *un* S-*morphisme. On suppose que l'on se trouve dans l'un des deux cas suivants :*

a) *Le morphisme f est localement de présentation finie.*

b) *Le préschéma* S *est localement noethérien et* X *est localement de type fini sur* S.

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) *Il existe un* S-*préschéma* X′ *et une factorisation de f :*

$$f : \mathrm{X} \xrightarrow{f'} \mathrm{X}' \xrightarrow{f''} \mathrm{Y},$$

où f' est un S-*morphisme fidèlement plat et localement de présentation finie et f'' est un* monomorphisme.

ii) *La* (*première*) *projection :*

$$p_1 : \mathrm{X} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$$

est un morphisme plat.

De plus, si les conditions précédentes sont réalisées, (X', f') *est un quotient de* X *par la relation d'équivalence définie par f* (*pour la topologie* fpqc), *de sorte que la factorisation $f = f'' \circ f'$ de* i) *est unique à isomorphisme près.*

La démonstration de ce théorème délicat se trouvera dans EGA V ; on peut aussi consulter l'exposé de J.-P. Murre, Séminaire Bourbaki, Mai 1965, N°294 th. 2 cor. 2,
504 où est traité le cas Y localement noethérien, X de type fini sur Y. Nous allons voir que l'on peut se ramener à ce cas.

Faisons d'abord quelques remarques :

a) i) ⇒ ii) est trivial. En effet, la première projection :

$$p_1' : \mathrm{X} \underset{\mathrm{X}'}{\times} \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$$

se factorise à travers $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$:

$$p_1' : \mathrm{X} \underset{\mathrm{X}'}{\times} \mathrm{X} \xrightarrow{u} \mathrm{X} \underset{\mathrm{Y}}{\times} \mathrm{X} \xrightarrow{p_1} \mathrm{X}$$

Le morphisme u est un isomorphisme, puisque f'' est un monomorphisme, et p_1' est plat, puisque f' est plat, donc p_1 est plat.

b) Les assertions de 2.1 sont locales sur Y (donc sont locales sur S) ; elles sont aussi locales sur X, comme il résulte facilement du fait qu'un morphisme plat et localement de présentation finie est ouvert (EGA IV 11.3.1).

c) Sous les hypothèses de 2.1 a), vu ce qui précède, nous sommes ramenés au cas où X et Y sont affines et f de présentation finie. Quitte à remplacer S par Y, on peut supposer X et Y de présentation finie sur S. On se ramène alors au cas S noethérien grâce à EGA IV 11.2.6.

d) Sous les hypothèses de 2.1 b), on peut supposer S, X, Y affines, S noethérien et X de type fini sur S. Considérons Y comme limite projective filtrante de schémas affines Y_i de type fini sur S. Les schémas $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}_i} \mathrm{X}$ forment une famille filtrante décroissante de sous-schémas fermés de $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$, dont la limite projective est $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$. Comme $\mathrm{X} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{X}$ est noethérien, on a $\mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}_i} \mathrm{X} = \mathrm{X} \times_{\mathrm{Y}} \mathrm{X}$ pour i assez grand, de sorte que
$f_i : \mathrm{X} \xrightarrow{f} \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}_i$ satisfait aux hypothèses de 2.1 ii) s'il en est ainsi de f. Comme la **505**
relation d'équivalence définie par f sur X coïncide avec celle définie par f_i, il est clair qu'il suffit de prouver ii) $\Rightarrow$ i) pour f_i, ce qui nous ramène au cas où Y est de type fini sur S.

Application aux préschémas en groupes

Théorème 2.2. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes localement de présentation finie sur* S*, qui opère sur un* S*-préschéma* X*. Soit* $\xi \in \mathrm{X}(\mathrm{S})$ *une section de* X *au-dessus de* S*, telle que le stabilisateur* H *de* ξ *dans* G *soit un sous-préschéma en groupes de* G*,* plat sur S*. Alors, si* X *est localement de type fini sur* S*, ou si* S *est localement noethérien, l'espace homogène quotient* G/H *est représentable par un* S*-préschéma, localement de présentation finie sur* S*, et le* S*-morphisme :*

$$f : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{X}, \qquad g \mapsto g \cdot \xi.$$

se factorise en :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathrm{G}/\mathrm{H} \arrow[r, "i"] & \mathrm{X}, \end{tikzcd}$$

où p est la projection canonique, qui est un morphisme fidèlement plat localement de présentation finie, et i est un monomorphisme. (Pour fixer les idées, nous avons supposé que G opérait à gauche sur X.)

Démonstration. Le morphisme f fait de G un X-préschéma. Par définition du stabili- **506**
sateur de ξ, le morphisme :

$$\mathrm{G} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{G} \underset{\mathrm{X}}{\times} \mathrm{G}, \qquad (g, h) \mapsto (g, gh)$$

est un isomorphisme. Comme H est plat sur S, $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{H}$ est plat sur G, donc la première projection $p_1 : \mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ est un morphisme plat. Par ailleurs, si X est localement de type fini sur S, f est localement de présentation finie (EGA IV 1.4.3 v)) et sinon, S est supposé localement noethérien. Il suffit alors d'appliquer 2.1 au morphisme f.

Il reste à voir que G/H est localement de présentation finie sur S, mais cela résulte immédiatement de Exp. V 9.1.

Corollaire 2.3. — *Soient* S *un préschéma,* G *et* H *deux* S*-préschémas en groupes,* $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un* S*-homomorphisme. On suppose* G *localement de présentation finie sur* S *et que, ou bien* H *est localement de type fini sur* S*, ou bien* S *est localement noethérien. Alors, si* $\mathrm{K} = \mathrm{Ker}(u)$ *est* plat *sur* S*, le groupe quotient* G/K *est représentable par un* S*-préschéma en groupes localement de présentation finie sur* S*, et* u *se factorise en :*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathrm{H} \\ & \mathrm{G/K} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

où p *est la projection canonique et* i *un monomorphisme.*

Démonstration : on applique 2.2 en prenant X = H et pour ξ la section unité de H.

Corollaire 2.4. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie sur* S*,* H *un* S*-préschéma en groupes, lisse sur* S*, à fibres connexes* (donc *de présentation finie* sur S, d'après $\mathrm{VI_B}$, 5.5)*,* $i : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *un monomorphisme de* S*-groupes. sorte que* H *est un sous-groupe de* G*.*

Supposons que $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H})$ (*qui est représentable par un sous-préschéma en groupes fermé de* G*, de présentation finie sur* S (Exp. XI 6.11)) *soit* plat *sur* S*. Alors* G/N *est représentable par un* S*-préschéma, de présentation finie sur* S *et* quasi-projectif *sur* S.

Toutes les assertions à démontrer, sauf la dernière, sont locales sur S. Pour les établir, nous pouvons donc supposer S quasi-compact et la dimension relative de H sur S constante et égale à r. Procédons comme dans XV § 5. Soit, pour tout entier $n > 0$, $\mathrm{G}^{(n)}$ (resp. $\mathrm{H}^{(n)}$) le $n^{\text{ième}}$ invariant normal de la section unité de G (resp. de H) (EGA IV 16). Le faisceau de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\mathrm{H}^{(n)}$ est un quotient de $\mathrm{G}^{(n)}$ et, H étant lisse sur S de dimension r, $\mathrm{H}^{(n)}$ définit canoniquement un élément ξ_n de $\mathrm{X}_n = \mathrm{Grass}_{\varphi(n,r)}\,\mathrm{G}^{(n)}$ (EGA I 2e éd. § 9) pour un entier $\varphi(n,r)$ convenable. D'autre part, G opère de façon naturelle sur $\mathrm{G}^{(n)}$ (donc aussi sur X_n) par l'intermédiaire de la représentation :

$$\mathrm{G} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr}}(\mathrm{G}), \qquad g \mapsto \mathrm{int}(g).$$

Comme S est quasi-compact, il existe un entier m tel que pour $n \geqslant m$, on ait :

$$\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{H}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{H}^{(n)} \quad \text{(Exp. XI 6.11 b)).}$$

507 C'est dire que N est le stabilisateur de ξ_n pour n grand. La représentabilité de G/N résulte donc de 2.2. Le fait que G/N soit de présentation finie sur S est une conséquence de Exp. V 9.1. Il reste à voir que G/N est quasi-projectif sur S et pour cela nous allons exhiber un faisceau inversible sur G/N, S-ample, canonique. Considérons le foncteur $\mathscr{F} : (\mathbf{Sch}/\mathrm{S})^{\circ} \to \mathbf{Ens}$, tel que pour tout S-préschéma T, on ait :

$\mathscr{F}(\mathrm{T})$ = ensemble des T-sous-groupes H de $\mathrm{G_T}$, représentables, lisses sur T, à fibres connexes.

Un tel groupe H est de présentation finie sur S (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 5.5) et $\mathrm{H} \to \mathrm{G_T}$ est un morphisme quasi-affine (EGA IV 8.11.2). Par descente effective des morphismes quasi-affines (SGA1 VIII 7.9), on déduit que $\mathscr{F}$ est un faisceau pour la topologie fpqc. Comme G/N est le faisceau associé à un sous-faisceau de $\mathscr{F}$, on voit qu'il existe un monomorphisme canonique $\mathrm{G/N} \to \mathscr{F}$. Il existe donc un sous-groupe H' de $\mathrm{G} \times_{\mathrm{S}} (\mathrm{G/N})$, représentable, lisse sur G/N, à fibres connexes, « universel » pour le foncteur G/N. Je dis que le faisceau inversible $\mathscr{L} = (\mathrm{dét}(\mathrm{Lie}\,\mathrm{H}'))^{-1}$ est S-ample. Sous cette forme, l'assertion devient locale sur S et la démonstration est analogue à celle donnée dans (Exp. XV 5.8).

Le corollaire suivant a été annoncé dans Exp. XIV 4.8 bis.

Corollaire 2.5. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et de présentation finie sur* S*, à fibres connexes,* P *un sous-groupe parabolique de* G (Exp. XIV 4.8 bis). *Alors* G/P *est représentable par un* S*-préschéma lisse et projectif sur* S. **508**

Il reste seulement à montrer (*loc. cit.*) que G/P est représentable par un S-préschéma quasi-projectif, de présentation finie, ce qui résulte de 2.4, compte tenu du fait que $\mathrm{P} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{P})$ (*loc. cit.*) donc est plat sur S.

3. Groupes à centre plat **509**

Proposition 3.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et de présentation finie sur* S*, à fibres connexes. Supposons que le centre* Z *de* G (*qui est représentable d'après* Exp. XI 6.11.) *soit* plat *sur* S. *Pour tout entier* $n > 0$*, notons* $\mathrm{G}^{(n)}$ *le* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module localement libre égal au* $n^{\text{ième}}$ *invariant normal de* G *le long de la section unité, et soit* ρ_n *la « représentation adjointe » naturelle de* G *dans* $\mathrm{GL_S}(\mathrm{G}^{(n)})$. *Alors :*

a) *Le quotient* $\mathrm{G}' = \mathrm{G/Z}$ *est représentable par un* S*-préschéma en groupes, lisse, de présentation finie sur* S*, quasi-affine, à fibres affines et connexes.*

b) *La représentation* ρ_n *se factorise à travers* G' *:*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G} \arrow[rr, "\rho_n"] \arrow[dr] & & \mathrm{GL_S}(\mathrm{G}^{(n)}) \\ & \mathrm{G/Z} \arrow[ur, "i_n"'] & \end{tikzcd}$$

Si S *est quasi-compact,* i_n *est un* monomorphisme *pour* n *assez grand.*

c) *Le foncteur* $\mathscr{T}_{\mathrm{G}'}$ *des sous-tores de* G' *est représentable par un* S*-préschéma, lisse sur* S*, et qui est une somme d'une famille de préschémas* affines *sur* S *si* S *est quasi-compact.*

Démonstration. Les assertions contenues dans a) sont locales sur S, ce qui nous permet de supposer S quasi-compact. D'après Exp. XI 6.11 b), Z est égal à $\mathrm{Ker}\,\rho_n$ pour n assez grand, donc ce dernier est plat sur S. Le fait que G/Z soit représentable et que **510**
i_n soit un monomorphisme résulte donc de 2.3. Comme G est lisse et de présentation

finie sur S, il en est de même de G′ (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 9). Le groupe $\mathrm{GL_S}(\mathrm{G}^{(n)})$ est affine sur S, et un monomorphisme de présentation finie est quasi-affine (EGA IV 8.11.2), donc G′ est quasi-affine sur S et à fibres affines. Comme G′ est lisse sur S, le foncteur $\mathscr{T}_{\mathrm{G}'}$ est formellement lisse (Exp. XI 2.1 bis). Compte tenu de Exp. XI 4.6 et 4.3, les assertions contenues dans 3.1 c) vont donc résulter du lemme suivant :

Lemme 3.2. — *Soient* S *un préschéma,* G *et* H *deux* S-*préschémas en groupes, de présentation finie sur* S, $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un* S-*monomorphisme de groupes,* $\mathscr{T}_{\mathrm{G}}$ (resp. $\mathscr{T}_{\mathrm{H}}$) *les foncteurs des sous-tores de* G (*resp. de* H) (cf. Exp. XV § 8). *Alors, l'application :* $\mathrm{T} \mapsto u(\mathrm{T})$ *définit un monomorphisme* (XV 8.3 c))

$$\widetilde{u} : \mathscr{T}_{\mathrm{G}} \longrightarrow \mathscr{T}_{\mathrm{H}}$$

qui est représentable par une immersion fermée *de présentation finie.*

Par le procédé habituel, nous sommes ramenés au problème suivant : soient T un sous-tore de H, $\mathrm{T}' = \mathrm{G} \times_{\mathrm{T}} \mathrm{H}$ son image réciproque dans G, $u_{\mathrm{T}} : \mathrm{T}' \to \mathrm{T}$ le S-monomorphisme de groupes déduit de u. On doit montrer que le S-foncteur $\prod_{\mathrm{T/S}}(\mathrm{T}'/\mathrm{T})$ est représentable par un sous-préschéma fermé de S, de présentation finie. Mais T étant un tore, est lisse sur S, à fibres connexes, et il suffit d'appliquer Exp. XI 6.10.

511 ***Théorème 3.3***. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S-*préschéma en groupes, lisse et de présentation finie sur* S, *à fibres connexes,* Z *le centre de* G. *Supposons que* Z *soit plat sur* S *et que le rang unipotent* (Exp. XV 6.1 ter) *de* G *soit égal à celui de* Z. *Alors :*

a) *Le groupe* $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ *est représentable, et si* S *est quasi-compact, le morphisme canonique* $i_n : \mathrm{G}' \to \mathrm{GL_S}(\mathrm{G}^{(n)})$ (cf. 3.1 b)) *est une* immersion *pour n grand.*

b) *Le groupe* G′ *est quasi-affine sur* S, *à fibres affines, le centre de* G′ *est le groupe unité, et* G′ *est de rang unipotent nul.*

c) *Le groupe* G′ *possède localement pour la topologie étale des tores maximaux, et ce sont aussi des sous-groupes de Cartan de* G′. *Le foncteur* $\mathscr{T\!M}_{\mathrm{G}'}$ *des tores maximaux de* G′ (Exp. XV § 8) *est représentable par un* S-*préschéma lisse et* affine *sur* S.

d) *Le groupe* G *possède localement pour la topologie étale des sous-groupes de Cartan, et le foncteur* $\mathscr{C}_{\mathrm{G}}$ *des sous-groupes de Cartan de* G *est représentable par un* S-*préschéma, lisse et* affine *sur* S.

Démonstration. D'après 3.1, le groupe G′ est représentable par un S-préschéma, lisse et quasi-affine sur S, à fibres affines. Vu la correspondance entre les sous-groupes de Cartan des fibres de G et des fibres de G′ (Exp. XII 6.6 e)), l'hypothèse faite sur le rang unipotent de Z entraîne que G′ a un rang unipotent nul. Utilisant maintenant
512 Exp. XV 8.18, on voit que G′ possède localement pour la topologie étale des tores maximaux. Le fait que i_n soit une immersion pour n grand résulte alors de 3.1 b) et 1.4 a). Ceci achève de prouver a).

Montrons maintenant c). Comme G′ est de rang unipotent nul, il est clair que tout tore maximal de G′ est aussi un sous-groupe de Cartan de G′. Le foncteur des tores maximaux de G′ est représentable par un sous-préschéma à la fois ouvert et fermé du foncteur des sous-tores de G′, par ailleurs, il est de type fini sur S (Exp. XV 8.15) ; il résulte alors de 3.1 c), que ce foncteur est représentable par un S-préschéma, lisse et *affine* sur S.

Comme G′ possède, localement pour la topologie étale, des sous-groupes de Cartan, il en est de même de G, et le foncteur des sous-groupes de Cartan de G est canoniquement isomorphe à celui de G′ (Exp. XV 7.3 iv)), donc c) ⇒ d).

Il nous reste à montrer b) et plus précisément, il reste à prouver que le centre Z′ de G′ est le groupe unité. Comme Z′ est représentable (Exp. XI 6.11) et de présentation finie sur S, il suffit de montrer que les fibres de Z′ sont réduites au groupe unité (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 2.9), ce qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un corps algébriquement clos. Le centre Z′ est évidemment contenu dans tout sous-groupe de Cartan de G′, donc dans tout tore maximal de G′ d'après c), donc est de type multiplicatif. Par ailleurs, nous verrons dans Exp. XVII que si G est un groupe algébrique, connexe, de centre Z, le centre Z′ de G/Z est unipotent. Dans le cas présent, Z′ étant à la fois de type multiplicatif et unipotent, est réduit au groupe unité (cf. Exp. XVII). **513**

Exemples de groupes dont le centre est plat

Proposition 3.4. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes de présentation finie sur* S*, lisse, à fibres connexes,* Z *le centre de* G*. Alors* Z *est* plat *sur* S *dans les deux cas suivants :*

a) *Le rang unipotent* ρ_u (Exp. XV 6.1 ter) *des fibres de* G *est nul.*

b) i) S *est réduit.*

ii) *La dimension des fibres de* Z *est une fonction localement constante sur* S.

iii) *Le rang unipotent de* G *est égal au rang unipotent de* Z.

Démonstration de 3.4 a). Nous allons prouver en même temps la

Proposition 3.5. — *Sous les hypothèses de* 3.4 a)*, supposons de plus que* G *possède un tore maximal* T *et soit* C = $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ *le sous-groupe de Cartan de* G *associé à* T (Exp. XII 7.1)*. Alors :*

(i) Z ∩ T *est un sous-groupe de type multiplicatif de* G.

(ii) C *est commutatif et égal à* T · Z.

(iii) *Si les quotients* Z/Z∩T *et* C/T *sont représentables, ils sont représentables par des préschémas abéliens* (c.-à-d. *des* S*-préschémas en groupes, lisses sur* S*, dont les fibres sont des variétés abéliennes*) *et le monomorphisme canonique :* Z/Z∩T → C/T *est un isomorphisme.*

En utilisant les propriétés générales de passage à la limite démontrées dans Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 10 et Exp. XV 6.2, 6.3, et 6.3 bis, on se ramène comme d'habitude au cas où S est noethérien (noter que les assertions contenues dans 3.4 et 3.5 sont locales sur S). Nous avons remarqué dans 3.1 que les hypothèses faites sur G entraînent que Z est représentable. Pour montrer que Z est plat sur S, on se ramène alors par EGA 0_{III} 10.2.6, au cas où S est local artinien. Mais alors, G étant lisse, G possède localement pour la topologie étale des tores maximaux (Exp. XV 8.17). Quitte à faire une extension plate finie de S (ce qui est loisible pour prouver que Z est plat), nous pouvons donc supposer que G possède un tore maximal T. **514**

Montrons, de la même façon, que pour établir 3.5, nous pouvons nous ramener au cas S artinien.

i) Comme Z est fermé dans G (Exp. XI 6.11), $Z \cap T$ est un sous-schéma en groupes fermé de T. Il résulte alors de Exp. X 4.8 b), que $Z \cap T$ est de type multiplicatif si et seulement s'il est plat sur S. Comme plus haut, il suffit d'établir que $Z \cap T$ est plat lorsque S est artinien.

ii) Comme G est de rang unipotent nul, tout sous-groupe de Cartan C de G satisfait aux hypothèses du lemme 1.6, donc est commutatif. Le fait que $C = T \cdot Z$ va résulter de iii).

iii) Si C/T est représentable, C/T est lisse sur S (Exp. VI_B 9) et ses fibres sont des variétés abéliennes (1.7) donc C/T est un préschéma abélien. Pour montrer que le monomorphisme canonique

$$Z/Z \cap T \xrightarrow{i} C/T$$

515 est un isomorphisme, il suffit de le vérifier lorsque S est local artinien. En effet on en déduira successivement que $Z/Z \cap T$ est plat sur S (EGA 0_{III} 10.2.6), puis que i est plat (EGA IV 11.3.10), puis que i est une immersion ouverte (EGA IV 17.9.1), puis que i est un isomorphisme (car C/T a des fibres connexes).

Nous supposons désormais que S est local artinien de point fermé s et que G possède un tore maximal T. Soit $C = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T)$. Le groupe C est un sous-groupe de Cartan de G (Exp. XII 7.1) et majore Z.

Le groupe algébrique $M_s = Z_s \cap T_s$ est un sous-groupe de type multiplicatif de G_s qui est central. Comme T est lisse sur S, M_s se relève en un sous-schéma en groupes M de T, de type multiplicatif (Exp. IX 3.6 bis) et contenu dans le centre de G (Exp. IX 3.9), donc contenu dans $Z \cap T$. Comme S est artinien et M et T plats sur S, les groupes quotients $Z \cap T/M$, $Z' = Z/M$ et $A = C/T$ sont représentables (Exp. VI_A §§4 et 5). Par construction, $(Z \cap T/M)_s$ est le groupe unité, donc $Z \cap T = M$ (Exp. VI_B 2.9), a fortiori, il est plat sur S, ce qui prouve 3.5. i).

Par passage au quotient, on a un monomorphisme canonique $i : Z' \to A$, qui est donc une immersion fermée (Exp. VI_B 1.4.2). Nous avons déjà remarqué que A est un schéma abélien. Il reste à montrer que i est un isomorphisme. En effet, cela prouvera 3.5 iii) et entraînera que Z' est plat sur S, donc que Z est plat sur S (comme extension de Z' par le groupe plat M (Exp. VI_B §9)). Comme Z_s a même rang abélien que G_s
516 (Exp. XII 6.1), i_s est un épimorphisme, donc est un isomorphisme. Soit q un entier > 0, inversible sur S. D'après le théorème de densité de 1.6 iii), pour voir que $i(Z') = A$, il suffit de montrer que pour tout entier n égal à une puissance de q, $i(S')$ majore ${}_nA$. Or soit M_s^0 la composante neutre de M_s. Il est immédiat par dualité, que l'élévation à la puissance $q^{\text{ième}}$ dans M_s^0 est un épimorphisme. On en déduit immédiatement que si m_0 est l'exposant de q dans la décomposition en facteurs premiers de $\mathrm{card}(M_s/M_s^0)$, l'image de ${}_{nm_0}Z_s$ dans $A_s \cong Z_s/M_s$, majore ${}_nA_s$. Il existe donc un sous-groupe de type multiplicatif $M_s(n)$ de Z_s dont l'image dans A_s soit ${}_nA_s$. Comme plus haut, on voit que $M_s(n)$ se relève en un sous-groupe de G, *central* et de type multiplicatif $M(n)$. L'image de $M(n)$ dans A est un sous-groupe de type multiplicatif (Exp. IX

6.8), donc nécessairement égal à ${}_n\mathrm{A}$, puisqu'il en est ainsi sur la fibre réduite (Exp. IX 5.1 bis). Ceci achève la démonstration de 3.4 a) et de 3.5.

Démonstration de 3.4 b). L'assertion à démontrer est locale sur S, nous pouvons donc supposer S affine d'anneau A. Considérant A comme limite inductive de ses sous-$\mathbb{Z}$-algèbres de type fini, on se ramène comme plus haut au cas où S est noethérien réduit.

Pour montrer que Z est plat, on dispose alors d'un critère valuatif de platitude (EGA IV 11.8.1) ce qui nous permet de nous ramener au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, complet, à corps résiduel algébriquement clos, de point générique t et de point fermé s. Soit Z' l'adhérence schématique dans Z de Z_t. Il nous faut montrer que $\mathrm{Z}' = \mathrm{Z}$, et il suffit même de montrer que $\mathrm{Z}_s = \mathrm{Z}'_s$ (Exp. $\mathrm{VI_B}$ 2.6). **517**
D'après (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 4), on a les inégalités :

$$\dim \mathrm{Z}_t = \dim \mathrm{Z}'_t = \dim \mathrm{Z}'_s \leqslant \dim \mathrm{Z}_s.$$

Mais par hypothèse, $\dim \mathrm{Z}_t = \dim \mathrm{Z}_s$, donc $\dim \mathrm{Z}'_s = \dim \mathrm{Z}_s$ et par suite Z'_s majore $(\mathrm{Z}_s)^0_{\text{réd}}$. Il en résulte que $\mathrm{G}'_s = \mathrm{G}_s/\mathrm{Z}'_s$ est affine (Exp. XII 6.1). Vu la correspondance entre sous-groupes de Cartan de G et de G' (Exp. XII 6.6 e)), l'hypothèse 3.4 iii) entraîne que le rang unipotent de G'_s est nul, et par suite ses sous-groupes de Cartan sont aussi ses tores maximaux. L'image Z''_s de Z_s dans G'_s est un sous-groupe algébrique central de G'_s, donc contenu dans tout sous-groupe de Cartan de G'_s, c'est-à-dire dans tout tore maximal ; Z''_s est donc un sous-groupe *de type multiplicatif* de G'_s. Dans ces conditions, nous montrerons dans (Exp. XVII § 7) qu'il existe un sous-groupe de type multiplicatif fini M_s de Z_s, dont l'image dans $\mathrm{Z}_s/\mathrm{Z}'_s$ soit Z''_s (nous avons utilisé ce fait dans la démonstration de 3.4 a) lorsque Z''_s est étale). Comme G est lisse sur S et S spectre d'un anneau local *complet*, M_s se relève en un S-sous-groupe de type multiplicatif M de G (Exp. IX 3.6 bis et Exp. XV 1.6 b)) qui est *central* (Exp. IX 5.6 a)). Donc M_t est contenu dans $\mathrm{Z}'_t = \mathrm{Z}_t$ et puisque M est plat, M est contenu dans Z'. Le groupe M_s est donc contenu dans Z'_s, mais cela implique que Z''_s est le groupe unité, c'est-à-dire que $\mathrm{Z}_s = \mathrm{Z}'_s$. Ceci achève la démonstration de 3.4 b).

Exemple de préschéma en groupes lisse à fibres connexes, dont le centre n'est pas plat

Soit S le spectre d'un anneau de valuation discrète A, π une uniformisante de A, **518**
t le point générique de S, s le point fermé. Soit G le S-groupe lisse et affine sur S, d'anneau $\mathrm{B} = \mathrm{A}[\mathrm{T}, \mathrm{T}^{-1}, \mathrm{U}]/\mathrm{F}$ avec $\mathrm{F} = 1 - \mathrm{T} + \pi\mathrm{U}$, la loi de composition étant définie par :

$$(t, u), (t, u') \longmapsto (tt', \pi uu' + u + u').$$

La fibre générique G_t est donc isomorphe au groupe multiplicatif $(\mathbb{G}_m)_t$, tandis que la fibre fermée G_s est isomorphe au groupe additif $(\mathbb{G}_a)_s$. La fonction T est inversible dans $\Gamma(\mathrm{G}, \mathscr{O}_\mathrm{G})$ et définit un S-morphisme de groupes $\varphi : \mathrm{G} \to (\mathbb{G}_m)_\mathrm{S}$ qui est un isomorphisme sur la fibre générique et le morphisme nul sur la fibre fermée. La donnée de φ permet de construire le groupe produit semi-direct $\mathrm{H} = \mathrm{G} \cdot (\mathbb{G}_a)_\mathrm{S}$ (noter que $(\mathbb{G}_m)_\mathrm{S}$ opère sur $(\mathbb{G}_a)_\mathrm{S}$). Le centre Z de H est le groupe unité sur la fibre générique et est égal à H_s sur la fibre fermée, donc n'est pas plat sur S.

4. Groupes à fibres affines, de rang unipotent nul

519 ***Théorème 4.1***. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse sur* S*, de présentation finie, à fibres affines, connexes, de rang unipotent* (Exp XV 6.1 ter) *nul. Alors :*

a) *Le centre* Z *de* G *est un groupe de type multiplicatif* (*et par suite est un centre réductif de* G (Exp. XII 4.1)).

b) G *satisfait aux conditions* a) *à* d) *de* 3.3.

c) G *possède localement pour la topologie étale des tores maximaux, et ce sont aussi des sous-groupes de Cartan de* G*. Le foncteur* $\mathscr{T}\mathscr{M}_{\mathrm{G}}$ *des tores maximaux de* G *est représentable par un* S*-préschéma lisse et* affine *sur* S.

d) G *est quasi-affine sur* S*. De plus, si* T *est un tore maximal de* G*,* $\mathrm{N} = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}\,\mathrm{T}$ *son normalisateur dans* G*,* $\mathrm{W} = \mathrm{N}/\mathrm{T}$ *le groupe de Weyl relatif à* T*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est affine sur* S.
(ii) $\mathrm{G}' = \mathrm{G}/\mathrm{Z}$ *est affine sur* S.
(iii) N *est affine sur* S.
(iv) W *est affine sur* S.

Ces conditions sont toujours réalisées, si S *est localement noethérien de dimension* $\leqslant 1$.

Démonstration. Comme G est à fibres affines (donc de rang abélien nul) et de rang unipotent nul, G possède localement pour la topologie étale des tores maximaux (Exp.
520 XV 8.18) et tout tore maximal de G est évidemment un sous-groupe de Cartan de G, ce qui prouve la première partie de c). Pour voir que Z est de type multiplicatif, on peut supposer, d'après ce qui précède, que G possède un tore maximal T. Comme T est aussi un sous-groupe de Cartan, T majore Z (car $\mathrm{T} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ d'après Exp. XII 7.1) et $\mathrm{Z} = \mathrm{Z} \cap \mathrm{T}$ est de type multiplicatif d'après 3.5 i). Ceci prouve a). L'assertion b) est claire, compte tenu de a). D'autre part le foncteur $\mathscr{T}\mathscr{M}_{\mathrm{G}}$ est isomorphe au foncteur des sous-groupes de Cartan de G (Exp. XII 7.1) donc est lisse et affine sur S (3.3 c)), ce qui achève de prouver c). Il reste à démontrer d).

Démonstration de d). Comme G′ est quasi-affine (3.5 b)) et Z de type multiplicatif, donc affine sur S, G est quasi-affine (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 9).

i) ⇔ ii). Si G est affine, G′ est affine d'après Exp. IX 2.3. Si G′ est affine, G est affine comme extension d'un groupe affine par un groupe affine (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 9).

i) ⇔ iii). Si G est affine, N est affine puisque fermé dans G (Exp. XI 6.11 a)). Par ailleurs G/N est isomorphe au foncteur $\mathscr{T}\mathscr{M}_{\mathrm{G}}$ (conjugaison des tores maximaux cf. Exp. XII 7.1 b)), donc est affine sur S d'après c). Donc si N est affine sur S, G est affine, comme « extension » d'un espace homogène affine par un groupe affine (Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 9).

iii) ⇔ iv). Si N est affine, W = N/T est affine (Exp. IX 2.3) et réciproquement d'après Exp. $\mathrm{VI_B}$ § 9.

521 Par ailleurs, N/T est représentable par un S-préschéma en groupes, étale, séparé

sur S, de type fini (Exp. XV 7.1 iv)) donc quasi-fini sur S. La dernière assertion de d) va donc résulter du lemme suivant, appliqué avec $X = W$ et $Y = S$:

Lemme 4.2. — *Soient* S *un préschéma localement noethérien, de dimension* 1*,* X *et* Y *deux* S*-préschémas localement de type fini sur* S*,* $u : X \to Y$ *un* S*-morphisme quasi-fini et séparé. Supposons que pour tout point* s *de* S*, le morphisme* $u_s : X_s \to Y_s$ *déduit de* u *par le changement de base* $\operatorname{Spec}\kappa(s) \to S$*, soit* fini*. Alors* u *est un morphisme* affine*.*

L'assertion à démontrer est locale sur Y, ce qui nous permet de supposer Y (donc aussi X) de type fini sur S. Par EGA IV 8, on voit qu'il suffit de démontrer 4.2 lorsque S est le spectre d'un anneau local A. Par descente fpqc, on peut supposer A complet, puis A réduit (EGA II 1.6.4), puis A normal (théorème de Nagata (EGA 0_{IV} 22) et théorème de Chevalley (EGA II 6.7.1)). Si A est un corps, u est fini par hypothèse, donc affine. Sinon A est un anneau de valuation discrète, soient s le point fermé de S, t le point générique, π une uniformisante de A. Soit y un point de Y_s. Appliquant encore une fois EGA IV 8, on peut remplacer Y par le spectre Y' de $\mathscr{O}_{Y,y}$ et X par $X' = X \times_Y Y'$; enfin on pout supposer $\mathscr{O}_{Y,y}$ complet. Comme u est quasi-fini et séparé, d'après EGA II 6.2.6, X' est somme de deux schémas X_1 et X_2 avec X_1 *fini* sur Y' (donc affine) et X_2 tel que $u(X_2)$ ne contienne pas le point fermé y de Y'. Je dis que dans ces conditions, X_2 ne rencontre pas la fibre fermée X'_s. En effet, par hypothèse, **522**
$X'_s \to Y'_s$ est fini, donc la restriction de ce morphisme au fermé $(X_2)_s$ est fini et son image dans $(Y')_s$ est un fermé. Comme cette image ne contient pas le point fermé du schéma local $(Y')_s$, $(X_2)_s$ est vide. Comme u_t est fini, la restriction à $(X_2)_t = X_2$ du morphisme $X'_t \to Y'_t$ est finie. Par ailleurs, on a $Y'_t = Y'_\pi$, donc l'immersion ouverte $Y'_t \to Y'$ est affine. Bref, le morphisme composé $X_2 \to Y'_t \to Y'$ est affine, et il en résulte bien que le morphisme $X' = X_1 \coprod X_2 \to Y'$ est affine.

Corollaire 4.3. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse et de présentation finie sur* S*, à fibres* affines, résolubles, connexes, de rang unipotent nul. *Alors* G *est* affine *sur* S*. Si de plus le centre de* G *est le groupe unité et si* S *est quasi-compact, le morphisme canonique* $i_n : G \to \mathrm{GL}_S(G^{(n)})$ (cf. 3.1 b)) *est une* immersion fermée *pour* n *assez grand.*

Pour prouver que G est affine sur S, on peut supposer que G possède un tore maximal T (4.1 c)). Le groupe G ayant ses fibres résolubles, le groupe de Weyl relatif à T est le groupe unité (BIBLE 6 th. 1 cor. 3) et la condition 4.1 d) iv) est satisfaite. Si le centre de G est le groupe unité, i_n est un monomorphisme pour n assez grand (3.1), donc est une immersion fermée (1.5 b)).

5. Application aux groupes réductifs et semi-simples

523

Définition 5.1. — Un S-préschéma en groupes G est dit *réductif* (resp. *semi-simple*) si G est lisse et affine sur S, à fibres réductives (resp. semi-simples).

5.1.1. Les groupes réductifs seront systématiquement étudiés à partir de Exp. XIX. Dans ce paragraphe, nous aurons besoin des propriétés suivantes, qui seront démontrées dans Exp. XIX (sans utiliser les développements du présent exposé).

a) Soient S un préschéma, G un S-préschéma en groupes, lisse et *affine* sur S, à fibres connexes, s un point de S tel que G_s soit réductif (resp. semi-simple). Alors il existe un voisinage U de s tel que $G|_U$ soit réductif (resp. semi-simple).

b) Si G est réductif, G possède localement pour la topologie étale des tores maximaux, et si T est un tore maximal de G, le groupe de Weyl $W = \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)/T$ est fini sur S.

c) Un groupe réductif a un rang unipotent nul.

Ceci étant admis, nous nous proposons d'améliorer l'assertion a) ci-dessus.

Théorème 5.2. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse et de présentation finie sur* S*, à fibres connexes, s un point de* S*. Alors :*

(i) *Si les fibres de* G *sont affines et si* G_s *est réductif, il existe un voisinage ouvert* U *de s tel que* $G|_U$ *soit réductif.*

524 (ii) *Si* G_s *est semi-simple, il existe un voisinage ouvert* U *de s tel que* $G|_U$ *soit semi-simple.*

Utilisant Exp. XV 6.2 i) et Exp. VI_B § 10, on se ramène au cas où S est noethérien.

Dans le cas ii), considérons le centre Z de G, qui est représentable (Exp. XI 6.11 a)). Comme G_s est semi-simple, il est bien connu que Z_s est fini. Par suite (Exp. VI_B § 4), il existe un voisinage U de s, tel que Z soit quasi-fini au-dessus de U. Pour tout point t de U, G_t est alors affine (Exp. XII 6.1). Quitte à restreindre S, nous pouvons donc supposer que les fibres de G sont affines, dans le cas ii) comme dans le cas i).

Pour prouver 5.2 il suffit, compte tenu de a), de prouver que G est affine sur S. Comme G est à fibres affines, nous savons que le foncteur des sous-tores de G est représentable par un S-préschéma lisse (Exp. XV 8.11 et 8.9). Quitte à faire une extension étale couvrant s, ce qui est loisible, nous pouvons donc supposer qu'il existe un sous-tore T de G, tel que T_s soit un tore maximal de G_s. Mais alors, $C = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T)$ est un sous-groupe lisse de G, à fibres connexes, qui majore T, tel que $C_s = T_s$ (car C_s est un sous-groupe de Cartan de G_s et G_s est de rang unipotent nul d'après c)). Il en résulte que $C = T$, donc T est un sous-groupe de Cartan et un tore maximal de G ; a fortiori, le rang unipotent de G est nul et on peut appliquer 4.1.

D'après 4.1 d), il suffit de montrer que le groupe de Weyl W relatif à T est *affine* au-dessus d'un voisinage U de s. En fait nous allons voir que W est même *fini* au-
525 dessus d'un voisinage de s. Comme W est quasi-fini sur S (Exp. XV 7.1 iv)), dire que W est fini au-dessus d'un voisinage U de s équivaut à dire que le morphisme $W \to S$ est propre en s (EGA IV 15.7 et EGA III 4.4.2) et pour établir ce point, on dispose du critère valuatif de propreté locale (EGA IV 15.7) qui nous ramène au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète, de point fermé s. Mais alors, d'après la dernière assertion de 4.1 d), G est affine sur S et on peut appliquer la propriété a) rappelée ci-dessus, pour conclure que G est réductif (resp. semi-simple). Utilisant

maintenant la propriété b), on conclut que W est bien fini sur S, ce qui achève la démonstration de 5.2.

6. Applications : Extension de certaines propriétés de rigidité des tores aux groupes de rang unipotent nul

526

Proposition 6.1. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes lisse sur* S*, de présentation finie, à fibres connexes affines, et dont le centre est de type multiplicatif* (*par exemple* G *de rang unipotent nul,* cf. 4.1 a)). *Alors tout sous-groupe fermé invariant* K *de* G*, de présentation finie sur* S*, quasi-fini sur* S*, est* fini *sur* S.

En effet, pour tout point géométrique $\overline{s}$ au-dessus de S, $(\mathrm{K}_{\overline{s}})_{\mathrm{réd}}$ est un sous-groupe étale fini de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$, invariant donc central (car $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ est connexe). Par suite $\mathrm{K}' = \mathrm{Z} \cap \mathrm{K}$ (où Z désigne le centre de G) a même espace sous-jacent que K, et il suffit de montrer que K′ est fini sur S. Or K′ est un sous-groupe fermé, quasi-fini du groupe de type multiplicatif Z, donc est fini comme on le voit immédiatement (localement sur S, K′ sera majoré par ${}_n\mathrm{Z}$ pour un entier n convenable, et ${}_n\mathrm{Z}$ est fini sur S).

Corollaire 6.2. — *Soient* S *et* G *comme ci-dessus,* K *un sous-préschéma en groupes de* G*, de présentation finie sur* S*, invariant et fermé dans* G*, s un point de* S. *Si* K_s *est fini* (*resp. est le groupe unité*) *il existe un voisinage ouvert* U *de s, tel que* $\mathrm{K}|_{\mathrm{U}}$ *soit fini sur* S (*resp. soit le groupe unité*).

Vu la semi-continuité supérieure de la dimension des fibres de K (Exp. VI_{B} § 4), on peut déjà supposer, quitte à limiter S, que K est quasi-fini sur S, donc fini (6.1). 527
Si de plus K_s est le groupe unité, on en déduit facilement par le lemme de Nakayama que K est le groupe unité au-dessus de $\operatorname{Spec} \mathscr{O}_s$, donc au-dessus d'un voisinage de s.

Proposition 6.3. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse et de présentation finie sur* S*, à fibres affines, connexes, de rang unipotent nul,* H *un* S*-préschéma en groupes, s un point de* S*, $u : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ un* S*-morphisme de groupes tel que* $\operatorname{Ker} u_s$ *soit central. On suppose de plus* H *de présentation finie sur* S *ou* S *localement noethérien et* G *localement de type fini sur* S. *Alors il existe un voisinage ouvert* U *de s tel que si* $\mathrm{K} = \operatorname{Ker} u$, $\mathrm{K}|_{\mathrm{U}}$ *soit central, de type multiplicatif. De plus* $\mathrm{G}' = (\mathrm{G}|_{\mathrm{U}})/(\mathrm{K}|_{\mathrm{U}})$ *est représentable et le morphisme* $u' : \mathrm{G}' \to \mathrm{H}|_{\mathrm{U}}$ *déduit de u par passage au quotient est une immersion.*

Démonstration. Soient Z le centre de G, et $\mathrm{K}' = \mathrm{K} \cap \mathrm{Z}$.

a) K′ est un sous-groupe de type multiplicatif au-dessus d'un voisinage U de s. En effet, quitte à faire une extension étale au-dessus d'un voisinage U de s, ce qui est légitime, nous pouvons supposer que G possède un tore maximal T (4.1 c)). Mais alors $\mathrm{T} \cap \mathrm{K}$ est un groupe de type multiplicatif (Exp. XV 8.3) dont la fibre en s est centrale par hypothèse, donc $\mathrm{T} \cap \mathrm{K}$ est central au-dessus d'un voisinage de s (Exp. IX 5.6 a)) et par suite coïncide avec K′.

b) Montrons que $K' = K$ au-dessus d'un voisinage U de s. D'après a) on peut **528**
déjà supposer que K' est de type multiplicatif, donc est plat sur S. Comme $K'_s = K_s$, l'immersion naturelle $K' \to K$ est alors ouverte au-dessus d'un voisinage U de s (Exp. VI_B 2.6). Si $t \in U$, l'image de K_t dans le groupe $G'_t = G_t/Z_t$ est donc un groupe étale fini invariant dans G'_t (car K_t est invariant dans G_t) donc central, donc réduit au groupe unité (3.3 b)). C'est dire que K_t est contenu dans Z_t donc est égal à K'_t, d'où $K = K'$ au-dessus de U.

c) La représentabilité de G' résulte alors de 2.3 ; le fait que u' soit une immersion est contenu dans 1.3 a), compte tenu de 4.1 c) appliqué à G'.

Proposition 6.4. — *Soient* S *un préschéma,* G *un* S*-préschéma en groupes, lisse, de présentation finie sur* S*, à fibres connexes, s un point de* S*, tel que* G_s *soit engendré par ses sous-tores* (Exp. XII 8.2) (*par exemple* G_s *affine de rang unipotent nul*), H *un* S*-préschéma en groupes, u et v :* $G \to H$ *deux* S*-homomorphismes, tels que* $u_s = v_s$ *et tels que* u_s *soit central. Supposons de plus que* H *soit de présentation finie sur* S*, ou bien que* S *est localement noethérien. Alors il existe un voisinage* U *de s tel que* $u|_U = v|_U$.

On se ramène comme d'habitude au cas où S est noethérien (pour étudier la condition : « G_s est engendré par ses sous-tores », on utilise Exp. VI_B 7.4). Comme G est à
529 fibres connexes, pour montrer que $u = v$ au-dessus d'un voisinage U de s, il suffit de montrer que $u = v$ après réduction par toute puissance de l'idéal maximal de l'anneau local $\mathscr{O}_{S,s}$, ce qui nous ramène au cas où S est local artinien.

Mais alors, le foncteur des sous-tores maximaux de G est représentable par un S-schéma X, lisse de type fini sur S (Exp. XV 8.17). Soit T le sous-tore maximal de G_X, universel pour le foncteur X. L'hypothèse faite sur G_s signifie que le sous-groupe algébrique de G_s, engendré (Exp. VI_B § 7) par le $\kappa(s)$-morphisme $f : T_s \to G_s$ (composé de l'immersion $T_s \to G_{X_s}$ et de la projection canonique $G_{X_s} \to G_s$) est égal à G_s tout entier. Mais X_s est géométriquement connexe (car si $\overline{T}$ est un tore maximal de $G_{\overline{s}}$, N son normalisateur dans $G_{\overline{s}}$, $X_{\overline{s}}$ est isomorphe à $G_{\overline{s}}/N$), et l'image de T_s par f contient la section unité de G_s ; il résulte alors de Exp. VI_B 7.4, qu'il existe un entier $N > 0$ et un certain S-morphisme $f^N : T^N \to G$ (où $T^N = T \times_S \ldots \times_S T$ (N facteurs) et f^N ne dépend que de f et de la loi de multiplication de G) tels que $(f^N)_s$ soit *surjectif.*

Considérons le changement de base $X \to S$ et les restrictions de u_X et v_X au sous-tore T de G_X. Par hypothèse, on a $u_{X_s} = v_{X_s}$ et $u_{X_s} : T_{X_s} \to H_{X_s}$ est un homomorphisme central. Il résulte alors de Exp. IX 5.1 que l'on a $u_X|_T = v_X|_T$. En explicitant la définition de f^N et en tenant compte du fait que u et v sont des homomorphismes, on en déduit immédiatement que $uf^N = vf^N$. Mais le $\kappa(s)$-morphisme f^N_s est surjectif et G_s est lisse, donc réduit, par suite f^N_s est génériquement plat. Comme T est lisse sur S, donc plat, il existe un ouvert non vide V de T tel que $f^N|_V$ soit plat (EGA IV 11.3.10). L'image de V est un ouvert W de G (EGA IV 11.3.1) et $f^N : V \to W$ est
530 fidèlement plat, de présentation finie, donc couvrant pour la topologie fpqc. L'égalité $uf^N = vf^N$ implique alors $u|_W = v|_W$. Comme W est schématiquement dense dans

G (EGA IV 11.10.10) et H séparé sur S (Exp. $\mathrm{VI_A}$ 0.3) on en déduit immédiatement que $u = v$.