EXPOSÉ XIX

GROUPES RÉDUCTIFS - GÉNÉRALITÉS

par M. Demazure

La suite de ce Séminaire est consacrée à l'étude des groupes réductifs. Le but princi- 1
pal en est la généralisation des résultats classiques de Chevalley (*Bible* et *Tôhoku*) [(1)] aux schémas de base arbitraires, les deux résultats centraux étant le *théorème d'unicité* (Exp. XXIII, th. 4.1 et cor. 5.1 à 5.10) et le *théorème d'existence* (Exp. XXV, th. 1.1) des schémas en groupes réductifs « épinglés » correspondant à des « données radicielles » prescrites. Les démonstrations employées sont inspirées de celles de Chevalley, la technique des schémas permettant de leur donner une efficacité accrue.

Les résultats du premier volume de la *Bible* (Exp. 1 à 13) seront systématiquement utilisés. En revanche, nous démontrerons directement sur un schéma quelconque les résultats du second volume (théorème d'isomorphisme en particulier) ; la connaissance des démonstrations sur un corps algébriquement clos n'est donc pas absolument indispensable.

Dans la démonstration de ces deux résultats fondamentaux, nous n'utiliserons que les résultats les plus élémentaires de la théorie des groupes de type multiplicatif, contenus pour l'essentiel dans Exp. VIII et IX ; nous ferons d'autre part un usage essentiel des résultats de l'Exposé XVIII [(2)]. Le lecteur s'intéressant spécialement aux théorèmes d'existence et d'unicité pourra dans une première lecture sauter les Exposés X à XVII.

1. Rappels sur les groupes sur un corps algébriquement clos

2

1.1. *Dans ce numéro, k désignera toujours un corps algébriquement clos.* Comme annoncé ci-dessus, les seuls résultats de *Bible* utilisés par la suite, se trouvent dans le volume 1 (Exposés 1 à 13). Tous les résultats de *Bible* (*loc. cit.*) concernant les groupes

(1) N.D.E. : voir les références bibliographiques à la fin de cet Exposé. En particulier, une réédition du Séminaire Chevalley 1956-58, cité [**Bible**], révisée par P. Cartier, a été publiée en 2005, cf. [**Ch05**].

(2) N.D.E. : Plus précisément, la proposition XVIII 2.3 (extension d'un « homomorphisme générique » entre groupes) est utilisée en XXII 4.1.11 puis dans l'Exp. XXIII (démonstration du théorème d'unicité), et aussi dans l'Exp. XXIV ; le théorème XVIII 3.7 (construction d'un groupe à partir d'un germe de groupe) n'est utilisé que dans l'Exp. XXV.

semi-simples sont valables plus généralement pour des groupes *réductifs* (définition ci-dessous) et leur démonstration est identique, avec les modifications anodines ci-après :

- Exp. 9, § 4, définition 3, voir 1.6.1 ci-dessous.
- Exp. 12, § 4, théorème 2, e), supprimer « fini ».
- Exp. 13, § 3, théorème 2, remplacer « rang » par « rang semi-simple ».
- Exp. 13, § 4, corollaire 2 au théorème 3, remplacer « rang » par « rang réductif ».

1.2. Soit G un k-groupe lisse affine et connexe. Le *radical* de G (*Bible*, § 9.4, prop. 2) (3) est le sous-groupe réduit associé à la composante neutre de l'intersection des sous-groupes de Borel de G ; c'est aussi le plus grand sous-groupe résoluble lisse connexe distingué de G ; nous le noterons rad(G).

Le *radical unipotent* de G est la partie unipotente du radical de G ; c'est aussi le plus grand sous-groupe unipotent lisse connexe distingué de G ; nous le noterons $\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$.

1.3. Soient G un k-groupe lisse affine et connexe, Q un tore de G. Alors le centralisateur $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ de Q dans G est un sous-groupe fermé de G (Exp. VIII, 6.7), lisse (Exp. XI, 2.4) et connexe (cf. *Bible*, § 6.6, th. 6 a) ou [**Ch05**], § 6.7, th. 7 a)).

3 On a la relation fondamentale :

$$\mathrm{rad}^u(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})) = \mathrm{rad}^u(\mathrm{G}) \cap \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}). \tag{1.3.1}$$

(4) D'abord, $\mathrm{U} = \mathrm{rad}^u(\mathrm{G}) \cap \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ est un sous-groupe unipotent distingué de $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$; montrons qu'il est lisse et connexe. Si on fait opérer Q sur $\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$ par automorphismes intérieurs, U n'est autre que le schéma des invariants de cette opération. Or, celui-ci est lisse et connexe, d'après le lemme 1.4 plus bas.

Par conséquent, U est un sous-groupe fermé de $\mathrm{rad}^u(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}))$. D'autre part, d'après *Bible*, Exp. 12, § 3, cor. au th. 1, on a $\mathrm{rad}^u(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}))(k) \subset \mathrm{rad}^u(\mathrm{G})(k)$. L'égalité (1.3.1) en résulte.

Signalons un cas particulier du résultat précédent : si G est un k-groupe lisse affine et connexe et si T est un tore maximal de G,

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T} \cdot (\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) \cap \mathrm{rad}^u(\mathrm{G})). \tag{1.3.2}$$

En effet (cf. *Bible*, § 6.6, th. 6 c) ou [**Ch05**], § 6.7, th. 7 c)), $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ est un groupe résoluble, donc produit semi-direct de son tore maximal T et de son radical unipotent.

4 D'après le théorème de densité (cf. *Bible*, § 6.5, th. 5 a) ou [**Ch05**], § 6.6, th. 6 a)), la réunion des $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$, pour T parcourant l'ensemble des tores maximaux de G, contient un *ouvert dense* de G ; il résulte donc de (1.3.2) :

(3) N.D.E. : On a remplacé la référence 9-06 (= Exp. 9, p. 6) par § 9.4 (= Exp. 9, § 4), qui s'applique aussi bien à [**Bible**] qu'à [**Ch05**]. Lorsque la numérotation de [**Ch05**] diffère de [**Bible**], ce qui est le cas dans l'Exp. 6, on indiquera explicitement les deux références.

(4) N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

Corollaire 1.3.3. — *Si* G *est un k-groupe lisse affine et connexe, la réunion des* $\mathrm{T}\cdot\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$*, où* T *parcourt l'ensemble des tores maximaux de* G*, contient un* ouvert dense *de* G.

Notations 1.4.0. — [5] Nous utiliserons systématiquement la notation suivante : si S est un schéma et s un point de S, on notera $\overline{s}$ le spectre d'une clôture algébrique $\overline{\kappa}(s)$ de $\kappa(s)$.

Lemme 1.4. — [5] *Soient* S *un schéma,* Q *un* S*-tore opérant sur un* S*-schéma en groupes* H*,* séparé et lisse *sur* S.

(i) *Le foncteur des invariants* H^{Q} *est représentable par un sous-schéma fermé de* H*,* de présentation finie sur H *et* lisse sur S*.*

(ii) *Si de plus* H *est affine sur* S*, et à fibres connexes, alors* H^{Q} *l'est aussi.*

D'abord, d'après VIII 6.5 (d), [6] puisque H est séparé sur S et Q essentiellement libre sur S, alors H^{Q} est représentable par un sous-schéma fermé de H. En particulier, si H est affine sur S, alors H^{Q} l'est aussi.

Considérons maintenant le produit semi-direct $\mathrm{G} = \mathrm{H}\cdot\mathrm{Q}$; il est lisse et séparé sur S. Alors, le centralisateur $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ est représentable par un sous-schéma fermé de G, de présentation finie sur G, d'après Exp. XI 6.11 (a),[6] et il est lisse sur S d'après Exp. XI 2.4.

D'autre part, on a évidemment $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}) = \mathrm{H}^{\mathrm{Q}}\cdot\mathrm{Q}$, d'où un diagramme commutatif de S-schémas :

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}) = \mathrm{H}^{\mathrm{Q}}\cdot\mathrm{Q} \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathrm{H}^{\mathrm{Q}} \arrow[d, "q"] \\
& \mathrm{S}.
\end{tikzcd}$$

Comme π, p sont localement de présentation finie et p fidèlement plat, q est de présentation finie (EGA IV_4, 17.7.5) ; puis, comme π est lisse et p fidèlement plat, q est lisse (*loc. cit.*, 17.7.7). Ceci prouve la première assertion de 1.4.

Enfin, supposons H affine sur S et à fibres connexes. Alors, chaque fibre géométrique $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ de G est un $\overline{\kappa}(s)$-groupe lisse, affine et connexe, donc, d'après la première assertion de 1.3, il en est de même de

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\overline{s}}}(\mathrm{Q}_{\overline{s}}) = (\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}))_{\overline{s}} = (\mathrm{H}^{\mathrm{Q}})_{\overline{s}}\cdot\mathrm{Q}_{\overline{s}},$$

et ceci entraîne que $(\mathrm{H}^{\mathrm{Q}})_{\overline{s}}$ est connexe.

[5] N.D.E. : On a inséré ici ces notations, figurant dans 2.3 de l'original ; d'autre part, on a détaillé l'énoncé et la démonstration de 1.4.

[6] N.D.E. : Voir aussi les ajouts faits dans VI_{B}, 6.2.4 (d) et 6.5.5 (a).

1.5. On rappelle que le *rang réductif* du k-groupe lisse et affine G est la dimension commune des tores maximaux de G. Nous le noterons $\mathrm{rgred}(\mathrm{G}/k)$ ou $\mathrm{rgred}(\mathrm{G})$. Pour que $\mathrm{rgred}(\mathrm{G}/k) = 0$, il faut et il suffit que G soit *unipotent* (i.e. que $\mathrm{G} = \mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$), par *Bible*, § 6.4, cor. 1 au th. 4 ou [**Ch05**], § 6.5, cor. 1 au th. 5.

Si H est un sous-groupe invariant du k-groupe lisse et affine G, le quotient G/H est affine et lisse (Exp. $\mathrm{VI_B}$, 11.17 et VIA, 3.3.2 (iii)). De plus (*Bible*, § 7.3, th. 3, a) et c)), on a

$$\mathrm{rgred}(\mathrm{G}) = \mathrm{rgred}(\mathrm{G}/\mathrm{H}) + \mathrm{rgred}(\mathrm{H}).$$

Définition 1.6.1. — [(7)] On dit que le k-groupe G est *réductif* s'il est lisse, affine et connexe, et si $\mathrm{rad}(\mathrm{G})$ est un tore, c'est-à-dire si $\mathrm{rad}^u(\mathrm{G}) = \{e\}$.

Lemme 1.6.2. — *Soit* G *un k-groupe réductif.*

(i) *Si* Q *est un tore de* G*, alors* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *est réductif.*

(ii) *En particulier, si* T *est un tore maximal de* G*, alors* $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}$.

(iii) *Le centre de* G *est contenu dans tout tore maximal, donc est diagonalisable.*

(iv) *Le radical de* G *est le tore maximal* (*unique*) *de* $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$.

En effet, (i) résulte de (1.3.1), (ii) de (1.3.2), et (iii) découle de (ii). Enfin, le tore maximal de $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$ (c.-à-d., la composante neutre $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})^0$) est un sous-groupe lisse résoluble connexe, invariant dans G, donc contenu dans rad(G) ; réciproquement rad(G) est un tore invariant dans G, donc central (*Bible*, § 4.3, cor. à la prop. 2), d'où (iv).

5 ***Remarque 1.6.3***. — Si G est réductif et si $\dim(\mathrm{G}) \neq \mathrm{rgred}(\mathrm{G})$, alors $\dim(\mathrm{G}) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}) \geqslant 2$. En effet, cette différence est toujours paire (cf. 1.10 ci-dessous).

1.7. Soient G un k-groupe lisse affine et connexe et H un sous-groupe lisse et connexe invariant. Alors

$$\mathrm{rad}(\mathrm{H}) = (\mathrm{rad}(\mathrm{G}) \cap \mathrm{H})^0_{\text{réd}} \quad \text{et} \quad \mathrm{rad}^u(\mathrm{H}) = (\mathrm{rad}^u(\mathrm{G}) \cap \mathrm{H})^0_{\text{réd}} \tag{1.7.1}$$

comme on le voit aussitôt. En particulier, si G est réductif, H l'est aussi.

Soit $f : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ un morphisme surjectif de k-groupes lisses affines et connexes. Alors

$$f(\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})) = \mathrm{rad}^u(\mathrm{G}'). \tag{1.7.2}$$

En particulier, si G est réductif, G′ l'est aussi.

Prouvons (1.7.2). D'abord, f envoie $\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$ dans $\mathrm{rad}^u(\mathrm{G}')$. Introduisant $\mathrm{H} = (f^{-1}(\mathrm{rad}^u(\mathrm{G}')))^0_{\text{réd}}$, qui contient $\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$, on a $\mathrm{rad}^u(\mathrm{H}) = \mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$ et on est ramené au cas où G = H, i.e. où G′ est unipotent. Comme la réunion des $\mathrm{T} \cdot \mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$ (T parcourant l'ensemble des tores maximaux de G) est dense dans G, la réunion des $f(\mathrm{T})f(\mathrm{rad}^u(\mathrm{G}))$ est dense dans G′ ; mais $f(\mathrm{T})$ est composé d'éléments semi-simples, donc $f(\mathrm{T}) = \{e\}$, G′ étant unipotent ; ceci montre que $f(\mathrm{rad}^u(\mathrm{G}))$ est dense dans G′.

[(7)] N.D.E. : On a transformé 1.6 en les numéros 1.6.1 à 1.6.3. Noter que dans ce Séminaire tout k-groupe réductif (resp. semi-simple, cf. 1.8) est, par définition, connexe.

Donc, d'après *Bible*, § 5.4, lemme 4 ou [**Ch05**], § 6.1, lemme 1, [8] $f(\mathrm{rad}^u(\mathrm{G}))$ est un sous-groupe ouvert de G' ; celui-ci étant connexe, il en résulte $f(\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})) = \mathrm{G}'$.
(N. B. : on peut prouver sous les mêmes hypothèses que $f(\mathrm{rad}(\mathrm{G})) = \mathrm{rad}(\mathrm{G}'))$.

1.8. On dit que le k-groupe G est *semi-simple* s'il est lisse, affine et connexe et si $\mathrm{rad}(\mathrm{G}) = \{e\}$, c'est-à-dire si G est réductif et $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$ fini. Si G est un k-groupe lisse affine connexe quelconque, alors $\mathrm{G}/\mathrm{rad}(\mathrm{G})$ est semi-simple (*Bible*, § 9.4, prop. 2), et $\mathrm{G}/\mathrm{rad}^u(\mathrm{G})$ est réductif. On appelle *rang semi-simple* de G et on note $\mathrm{rgss}(\mathrm{G}/k)$ ou $\mathrm{rgss}(\mathrm{G})$ le rang réductif de $\mathrm{G}/\mathrm{rad}(\mathrm{G})$.

Si G est réductif, on a donc 6

$$\mathrm{rgred}(\mathrm{G}) = \mathrm{rgss}(\mathrm{G}) + \dim(\mathrm{rad}(\mathrm{G})).$$

Si G est un k-groupe lisse affine et connexe et si Q est un sous-tore central de G, alors G/Q est semi-simple si et seulement si G est réductif et $\mathrm{Q} = \mathrm{rad}(\mathrm{G})$. En effet, si G/Q est semi-simple, $\mathrm{Q} \supset \mathrm{rad}(\mathrm{G})$, donc $\mathrm{rad}(\mathrm{G})$ est un tore, donc G est réductif, donc $\mathrm{rad}(\mathrm{G})$ est le tore maximal de $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$, donc $\mathrm{rad}(\mathrm{G}) = \mathrm{Q}$. Si G est réductif et si Q est un sous-groupe central alors (G/Q est réductif et) $\mathrm{rgss}(\mathrm{G}) = \mathrm{rgss}(\mathrm{G}/\mathrm{Q})$.

1.9. Si K est une extension algébriquement close de k et si G est un k-groupe affine lisse connexe, G est réductif (resp. semi-simple) si et seulement si G_K l'est et on a

$$\mathrm{rgred}(\mathrm{G}/k) = \mathrm{rgred}(\mathrm{G}_\mathrm{K}/\mathrm{K}),$$
$$\mathrm{rgss}(\mathrm{G}/k) = \mathrm{rgss}(\mathrm{G}_\mathrm{K}/\mathrm{K}).$$

1.10. Soit G un k-groupe lisse et connexe et soit T un tore de G. [9] On note $\mathfrak{g}$ la k-algèbre de Lie de G, c.-à-d., $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathrm{G}) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/k)(k)$; on note de même $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(\mathrm{T})$. Alors, $\mathfrak{g}$ se décompose sous l'action de T (par $\mathrm{T} \to \mathrm{G}$ et l'opération adjointe de G) en

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \bigoplus \coprod_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathfrak{g}^\alpha, \tag{1.10.1}$$

où les $\alpha \in \mathrm{R}$ sont des caractères non triviaux de T et où les $\mathfrak{g}^\alpha$ sont $\neq 0$. Les caractères 7
$\alpha \in \mathrm{R}$ sont dits les *racines* de G par rapport à T. Par Exp. II, 5.2.3, (i), on a

$$\mathfrak{g}^0 = \mathrm{Lie}(\underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(\mathrm{T})). \tag{1.10.2}$$

En particulier, [10] comme $\underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(\mathrm{T})$ est connexe (1.3 dans le cas où G est affine, et Exp. XII 6.6 b) dans le cas général), T est son propre centralisateur si et seulement si $\mathfrak{g}^0 = \mathrm{Lie}(\mathrm{T})$.

Cette condition entraîne que T est maximal et que $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) \subset \mathrm{T}$, donc d'après Exp. XII 8.8 d) on a :

$$\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) = \mathrm{Ker}\big(\mathrm{T} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g})\big) = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathrm{Ker}(\alpha)\,; \tag{1.10.3}$$

[8] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.
[9] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.
[10] N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

de plus $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$ est alors affine, donc $\mathrm{G} \to \mathrm{G}/\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})$ affine ; comme ce dernier groupe est affine (Exp. XII 6.1), G l'est aussi.

Lorsque G est réductif et T maximal, les racines au sens précédent coïncident avec les racines au sens de *Bible*, § 12.2, déf. 1 ; ces dernières sont en effet des racines au sens de ce numéro (*Bible*, § 13.2, th. 1, c)) et il y en a $\dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{T})$ (*Bible*, § 13.4, cor. 2 au th. 3). De plus, si α est une racine, $-\alpha$ en est aussi une (*Bible*, § 12.2, cor. à la prop. 1). (Comme à l'habitude, on note indifféremment additivement ou multiplicativement la structure de groupe de $\mathrm{Hom}_{k\text{-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,k})$.) Il s'ensuit que, pour G réductif,

$$\dim(\mathrm{G}) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}) = \mathrm{Card}(\mathrm{R}) \tag{1.10.4}$$

est toujours pair.

Le rang semi-simple du groupe réductif G est le rang de la partie R du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{k\text{-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,k}) \otimes \mathbb{Q}$ (*Bible*, § 13.3, th. 2).

Lemme 1.11. — *Soient k un corps algébriquement clos,* G *un k-groupe lisse affine connexe,* T *un tore de* G, $\mathrm{W}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ *le* groupe de Weyl *de* G *par rapport à* T. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

8 (i) G *est réductif,* T *est maximal,* $\mathrm{rgss}(\mathrm{G}) = 1$.

(ii) G *est réductif,* T *est maximal,* $\mathrm{G} \neq \mathrm{T}$ *; il existe un sous-tore* Q *de* T*, de codimension* 1 *dans* T*, central dans* G.

(iii) G *n'est pas résoluble et* $\dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{T}) \leqslant 2$.

(iv) $\mathrm{W}(\mathrm{T}) \neq \{e\}$ *et* $\dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{T}) \leqslant 2$.

(v) $\mathrm{W}(\mathrm{T}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_k$ *et* $\dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{T}) = 2$.

De plus, sous ces conditions, il y a exactement deux racines de G *par rapport à* T *; elles sont opposées. Sous les conditions de* (ii)*,* $\mathrm{Q} = \mathrm{rad}(\mathrm{G})$.

On a évidemment (v) ⇒ (iv). On a (iv) ⇒ (iii) par *Bible*, § 6.1, cor. 3 au th. 1 ou [**Ch05**], § 6.2, cor. 3 au th. 2. Prouvons (iii) ⇒ (ii) : soit U le radical unipotent de G ; on sait que G/U est réductif et n'est pas un tore (sinon G serait résoluble) ; on a donc, d'après (1.10.4)

$$\dim(\mathrm{G}/\mathrm{U}) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}/\mathrm{U}) = \mathrm{Card}(\mathrm{R}) \geqslant 2;$$

mais

$$\mathrm{rgred}(\mathrm{G}) = \mathrm{rgred}(\mathrm{G}/\mathrm{U}) + \mathrm{rgred}(\mathrm{U}) = \mathrm{rgred}(\mathrm{G}/\mathrm{U}),$$

d'où

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{U}) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}) &= \dim(\mathrm{G}/\mathrm{U}) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}/\mathrm{U})\\ &\geqslant 2 \geqslant \dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{T}) \geqslant \dim(\mathrm{G}) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}).\end{aligned}$$

Cela donne $\dim(\mathrm{U}) = 0$, donc G est réductif, $\mathrm{rgred}(\mathrm{G}) = \dim(\mathrm{T})$, donc T est maximal, $\dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{T}) = 2$. Par *Bible*, § 10.4, prop. 8, il existe un tore singulier Q de codimension 1 dans T ; alors $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ est réductif (1.6.2 (i)), non résoluble (définition d'un tore singulier), donc $\dim(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})) - \mathrm{rgred}(\mathrm{G}) \geqslant 2$, ce qui prouve que $\mathrm{G} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ et Q est central dans G.

Prouvons (ii) $\Rightarrow$ (i). On sait que G/Q est réductif (1.7) et que rgred(G/Q) $= 1$ donc rgss(G/Q) $= 0$ ou 1. Le premier cas est impossible, car il entraînerait rgss(G) $= 0$, donc $\mathrm{G} = \mathrm{T}$; on a donc rgred(G/Q) $=$ rgss(G/Q) $= 1$, ce qui prouve que G/Q est 9
semi-simple ; donc Q est le radical de G et rgss(G) $= 1$.

Prouvons enfin (i) $\Rightarrow$ (v). Si Q est le radical de G, on a $\dim(\mathrm{T}) - \dim(\mathrm{Q}) = 1$ et Q est central dans G, donc $\mathrm{G} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$, ce qui prouve que Q est un tore singulier ; par *Bible*, § 11.3, th. 2, on a $\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_k$; par *Bible*, § 12.1, lemme 1, on a $\dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{T}) = 2$. Il y a donc au plus deux racines de G par rapport à T, or il y en a au moins deux, opposées (1.10).

Proposition 1.12. — *Soient k un corps algébriquement clos,* G *un k-groupe lisse et connexe,* T *un tore de* G, R *l'ensemble des racines de* G *par rapport à* T *et*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \bigoplus \coprod_{\alpha\in\mathrm{R}} \mathfrak{g}^\alpha, \qquad \textit{avec } \mathfrak{g}^\alpha \neq 0,$$

la décomposition de $\mathfrak{g}$ sous Ad(T)*. Pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}$, soient T_α le tore maximal de* $\mathrm{Ker}(\alpha)$ [(11)] *et $\mathrm{Z}_\alpha = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_\alpha)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est affine, réductif ;* T *est maximal.*

(ii) $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{t}$*, chaque* Z_α $(\alpha \in \mathrm{R})$ *est réductif.*

(iii) $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{t}$*, chaque* $\mathfrak{g}^\alpha$ $(\alpha \in \mathrm{R})$ *est de dimension* 1 *; et si $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ et $q \in \mathbb{Q}$ sont tels que $\beta = q\,\alpha$, alors $q = \pm 1$; pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}$, il existe un $w_\alpha \in \mathrm{G}(k)$ qui normalise* T*, centralise* T_α*, mais ne centralise pas* T.

De plus, sous ces conditions, chaque Z_α est de rang semi-simple 1 *et on a* $\mathrm{Lie}(\mathrm{Z}_\alpha) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha}$.

Si G est affine et réductif et si T est maximal, chaque Z_α est affine et réductif (1.6.2 (i)), de tore maximal T ; de plus, T est son propre centralisateur (1.6.2 (ii)), donc $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{t}$, ce qui prouve (i) $\Rightarrow$ (ii).

D'autre part $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{t}$ entraîne que T est maximal et G affine (cf. 1.10) donc chaque 10
Z_α est affine, lisse et connexe, d'après 1.3. De toutes façons, on a par Exp. II, 5.2.2

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Z}_\alpha) = \mathfrak{g}^{\mathrm{T}_\alpha} = \mathfrak{g}^0 \bigoplus \coprod_{\beta\in\mathrm{R}\cap\mathbb{Q}\alpha} \mathfrak{g}^\beta.$$

On a donc

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{Z}_\alpha) \supset \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha},$$

ce qui entraîne $\mathrm{Z}_\alpha \neq \mathrm{T}$. Comme T_α est un sous-tore de codimension 1 dans T, central dans Z_α, on obtient par 1.11, appliqué à Z_α, l'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) et les compléments.

Il reste à prouver (ii) $\Rightarrow$ (i) ; on sait déjà que (ii) entraîne que T est maximal et G affine. Soit U son radical unipotent ; il est distingué dans G, son algèbre de Lie est invariante sous Ad(T). On a donc

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{U}) = \big(\mathrm{Lie}(\mathrm{U}) \cap \mathfrak{g}^0\big) + \coprod_{\alpha\in\mathrm{R}} \big(\mathrm{Lie}(\mathrm{U}) \cap \mathfrak{g}^\alpha\big).$$

(11) N.D.E. : i.e., la composante connexe de $\mathrm{Ker}(\alpha)$.

Par (1.3.1), on a

$$\mathrm{U} \cap \mathrm{T} = \mathrm{U} \cap \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{rad}^u(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})) = \mathrm{rad}^u(\mathrm{T}) = \{e\},$$

$$\mathrm{U} \cap \mathrm{Z}_\alpha = \mathrm{U} \cap \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_\alpha) = \mathrm{rad}^u(\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_\alpha)) = \mathrm{rad}^u(\mathrm{Z}_\alpha) = \{e\}.$$

On a donc [12]

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{U}) \cap \mathfrak{g}^0 = \mathrm{Lie}(\mathrm{U}) \cap \mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(\mathrm{U} \cap \mathrm{T}) = 0\,,$$

$$\mathrm{Lie}(\mathrm{U}) \cap \mathfrak{g}^\alpha \subset \mathrm{Lie}(\mathrm{U}) \cap \mathrm{Lie}(\mathrm{Z}_\alpha) = \mathrm{Lie}(\mathrm{U} \cap \mathrm{Z}_\alpha) = 0\,;$$

d'où $\mathrm{Lie}(\mathrm{U}) = 0$ et $\mathrm{U} = \{e\}$, i.e. G est réductif.

Corollaire 1.13. — *Soient k un corps algébriquement clos,* G *un k-groupe lisse et connexe,* T *un tore de* G, R *l'ensemble des racines de* G *par rapport à* T *et*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \bigoplus \coprod_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathfrak{g}^\alpha$$

11 *comme ci-dessus. Pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}$, soient T_α le tore maximal de $\mathrm{Ker}(\alpha)$ et $\mathrm{Z}_\alpha = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_\alpha)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est affine, semi-simple ;* T *est maximal.*

(ii) $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{t}$*, chaque* Z_α *est réductif et* $\bigcap_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathrm{Ker}(\alpha)$ *est fini.*

[13] Ceci résulte des égalités $\mathrm{rad}(\mathrm{G}) = \underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G})^0$ et $\underline{\mathrm{Centr}}(\mathrm{G}) = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathrm{Ker}(\alpha)$, établies en 1.6.2 (iv) et (1.10.3).

2. Schémas en groupes réductifs. Définitions et premières propriétés

Scholie 2.1. — Si G est un schéma en groupes sur S, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) G est affine et lisse sur S, et à fibres connexes.

(ii) G est affine et plat sur S, de présentation finie sur S, et à fibres géométriques intègres.

Ces propriétés sont stables par changement de base et locales pour (fpqc).

[14] En effet, supposons (i) vérifié. Comme G est affine et lisse sur S, il est de présentation finie sur S ; et comme ses fibres sont lisses et connexes, elles sont géométriquement intègres, d'après VI_{A}, 2.4.

Réciproquement, si (ii) est vérifié, les fibres de G sont connexes et géométriquement réduites, donc lisses (VI_{A}, 1.3.1) ; alors G est lisse sur S, d'après EGA IV_4, 17.5.2.

Bien entendu, ces propriétés sont stables par changement de base : cf. EGA II, 1.5.1 pour « affine », IV_1, 1.6.2 (iii) pour « de présentation finie », IV_2, 2.1.4 pour « plat », et IV_2, 4.6.5 (i) pour « à fibres géométriques intègres ».

[12] N.D.E. : Noter que si U, L sont deux sous-schémas en groupes de G, on a $\mathrm{Lie}(\mathrm{U}) \cap \mathrm{Lie}(\mathrm{L}) = \mathrm{Lie}(\mathrm{U} \cap \mathrm{L})$.

[13] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[14] N.D.E. : On a ajouté ce qui suit.

D'autre part, ces propriétés sont clairement locales pour la topologie de Zariski, donc il suffit de vérifier que si $S' \to S$ est un morphisme fidèlement plat quasi-compact et si $G_{S'} \to S'$ a les propriétés indiquées, il en est de même de $G \to S$. Cela résulte de EGA IV_2, 2.5.1 pour « plat », 2.7.1 (vi) et (xiii) pour « de présentation finie » et « affine », et 4.6.5 (i) pour « à fibres géométriquement intègres » (et aussi EGA IV_4, 17.7.3 (ii) pour « lisse »).

2.2. Soient G un S-schéma en groupes vérifiant les conditions précédentes, et Q un tore (cf. IX, Déf. 1.3) de G. [15] Alors, d'après XI, 6.11 a) et XI, 2.4, $\underline{\mathrm{Centr}}_G(Q)$ est représentable par un sous-schéma en groupes fermé de G (donc affine sur S), de présentation finie et lisse sur S ; de plus, comme chaque fibre géométrique $G_{\overline{s}}$ de G est un $\overline{\kappa}(s)$-groupe lisse, affine et connexe, alors, d'après la première assertion de 1.3, il en est de même de

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{G_{\overline{s}}}(Q_{\overline{s}}) = (\underline{\mathrm{Centr}}_G(Q))_{\overline{s}}\,.$$

Lemme 2.3. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes lisse et affine sur* S*, à fibres connexes,* T *un tore de* G*. L'ensemble des* $s \in S$ *tels que* $G_{\overline{s}}$ *soit un* $\overline{s}$*-groupe réductif, de rang semi-simple* 1 *et de tore maximal* $T_{\overline{s}}$*, est un ouvert* U *de* S*.* **12**

Comme G et T sont plats sur S, la fonction

$$s \longmapsto \dim(G_{\overline{s}}/\overline{s}) - \dim(T_{\overline{s}}/\overline{s})$$

est localement constante ; soit U_1 l'ouvert des points de S où elle vaut 2.

[16] D'après 6.3, le groupe de Weyl

$$W_G(T) = \underline{\mathrm{Norm}}_G(T)/\,\underline{\mathrm{Centr}}_G(T);$$

est représentable par un S-schéma en groupes étale et séparé sur S, et la fonction

$$s \longmapsto \text{ nombre de points de } W_G(T)_{\overline{s}}$$

est semi-continue inférieurement. Soit U_2 l'ensemble des points de S où cette fonction est > 1 ; c'est un ouvert. D'après 1.11, l'ensemble des s tels que $G_{\overline{s}}$ soit réductif, de rang semi-simple 1, de tore maximal $T_{\overline{s}}$, est $U = U_1 \cap U_2$; de plus, pour tout $s \in U$, $W_G(T)_{\overline{s}}$ a exactement deux points.

Par conséquent (cf. SGA 1, I 10.9 et EGA IV_3, 15.5.1 et IV_4, 18.12.4), $W_G(T)_U$ est étale et *fini* sur U.

Remarque 2.4. — *Le groupe* $W_G(T)_U$ *est isomorphe à* $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_U$. En effet, d'après ce qui précède, il est étale et fini sur U ; comme le foncteur des automorphismes de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_U$ est le groupe unité, il suffit de vérifier l'assertion localement, or elle est immédiate si l'algèbre $\mathscr{A}$ qui définit $W_G(T)_U$ est un $\mathscr{O}_U$-module libre. [17]

---

(15) N.D.E. : On a détaillé ce qui suit.

(16) N.D.E. : On a détaillé ce qui suit. Noter, d'autre part, que la section 6 est indépendante du reste de cet Exposé.

(17) N.D.E. : L'hypothèse entraîne que $\mathscr{A}$ est localement libre de rang 2, et comme l'idéal d'augmentation $\mathscr{I}$ est facteur direct de $\mathscr{A}$ alors, remplaçant U par un ouvert affine Spec(R) assez petit, on peut supposer que $I = \Gamma(U, \mathscr{I})$ est un R-module libre de rang 1. Si x est un générateur de I, on a alors $x^2 = ax$ pour un certain $a \in R$, et l'hypothèse que $A = \Gamma(U, \mathscr{A})$ soit étale entraîne que a est

Notations et rappels 2.5.0. — [18] Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes, ε : $\mathrm{S} \to \mathrm{G}$ la section unité de G. On a vu dans II, § 4.11, que le foncteur $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est représentable par la fibration vectorielle $\mathrm{V}(\omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}})$ (où $\omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}} = \varepsilon^*(\Omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}})$), et l'on note

$$\mathfrak{g} = \mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S}) = (\omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}})^\vee$$

le faisceau des sections de cette fibration vectorielle. Supposons de plus G *lisse* sur S, alors $\omega^1_{\mathrm{G}/\mathrm{S}}$ et donc $\mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ sont des $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-modules localement libres de type fini, et l'on a (cf. I 4.6.5.1) :

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) = \mathrm{W}(\mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S})),$$

c.-à-d., pour tout S-schéma S′,

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S})(\mathrm{S}') = \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S}) \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}).$$

D'après II 4.1.1.1, l'action adjointe de G munit $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{G}/\mathrm{S}) = \mathrm{W}(\mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S}))$ d'une structure de G-$\mathbf{O}_\mathrm{S}$-module, donc $\mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est un G-$\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module (cf. I 4.7.1). Si de plus G est *affine* sur S, ceci revient à dire, d'après I 4.7.2, que $\mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ est un $\mathscr{A}(\mathrm{G})$-comodule.

Si T est un tore sur S (IX Déf. 1.3), on dira que T est *déployé* (« trivial » dans l'original) s'il est isomorphe à $\mathbb{G}^r_{m,\mathrm{S}}$ pour un certain entier $r \geqslant 0$, et l'on dira que T est *trivialisé* si l'on a fixé un tel isomorphisme ou, plus généralement, un isomorphisme $\mathrm{T} \simeq \mathrm{D}_\mathrm{S}(\mathrm{M})$, où M est un groupe abélien libre de rang r.

Rappelons enfin (XII Déf. 1.3) qu'un tore T de G est dit *maximal* si, pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{T}_{\overline{s}}$ est un tore maximal de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$.

Théorème 2.5. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes* affine et de présentation finie *sur* S*,* à fibres connexes*, et* s_0 *un point de* S*. Supposons* G plat *sur* S *en*
13 $\varepsilon(s_0)$ *et la fibre géométrique* $\mathrm{G}_{\overline{s_0}}$ (*réduite et*) réductive (*resp. semi-simple*)*. Alors, il existe un ouvert* U *de* S*, contenant* s_0 *et un morphisme étale surjectif* $\mathrm{S}' \to \mathrm{U}$ *tels que :*

(i) G_U *est lisse sur* S*, à fibres géométriques réductives* (*resp. semi-simples*)*, de rang réductif et de rang semi-simple constants.*

(ii) $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ *possède un tore maximal déployé* [19] T*, et le groupe de Weyl* (cf. 6.3)

$$\mathrm{W}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T}) / \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}}(\mathrm{T})/\mathrm{T}$$

est fini *sur* S′*.*

[20] Notons $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{S}$ le morphisme structural et $\varepsilon : \mathrm{S} \to \mathrm{G}$ la section unité. Comme G est plat sur S en $\varepsilon(s_0)$ et $\mathrm{G}_{\overline{s}_0}$ réduit (donc lisse sur $\overline{s}_0$, cf. $\mathrm{VI_A}$ 1.3.1), alors G est lisse sur S au point $\varepsilon(s_0)$ (EGA IV_4, 17.5.1), c.-à-d., il existe un voisinage ouvert V de $\varepsilon(s_0)$ tel que $\pi|_\mathrm{V}$ soit lisse. Alors, $\mathrm{S}' = \varepsilon^{-1}(\mathrm{V})$ est un ouvert de S, et $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ est

inversible dans R, et l'on voit alors facilement que A est l'algèbre affine du R-groupe constant $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (comparer avec les premières lignes de [**TO70**]).

[18] N.D.E. : On a ajouté ce paragraphe de notations et rappels.

[19] N.D.E. : On a ajouté « déployé ».

[20] N.D.E. : On a détaillé la démonstration.

lisse sur S' aux points de $\varepsilon(S')$. Comme G est à fibres connexes, $G_{S'}$ est lisse sur S', d'après VI_B, 3.10. Donc, remplaçant S par S', on peut supposer G lisse sur S.

D'après Exp. XI, th. 4.1, le foncteur des sous-groupes de type multiplicatif de G est représentable par un S-schéma $\mathscr{M}$, lisse et séparé sur S. Notons r_0 le rang de $G_{\overline{s_0}}$ et considérons le sous-schéma ouvert $\mathscr{M}_{r_0}$ de $\mathscr{M}$, qui représente le foncteur des sous-tores de rang r_0 de G (IX.1.4). La lissité entraîne que $\mathscr{M}_{r_0}$ admet un point rationnel sur une extension finie séparable de $\kappa(s_0)$ (cf. EGA IV_4, 17.15.10 (iii)). Ainsi il existe $S' \to S$ étale muni d'un point s'_0 s'appliquant sur s_0 tel que $G_{s'_0}$ admette un tore de rang r_0. Donc, remplaçant S par S', on peut supposer que G_{s_0} admette un tore de rang r_0.

D'après le « lemme de Hensel » (cf. XI, 1.10), la lissité de $\mathscr{M}_{r_0}$ permet de relever ce tore en un S'-tore T de G où $S' \to S$ est étale muni d'un point s'_0 s'envoyant sur s_0. D'après Exp. X, 4.5 (voir aussi 6.1 [(21)]), il existe un morphisme étale $f : S'' \to S'$ déployant T et tel que $f^{-1}(s'_0) \neq \varnothing$. Comme un morphisme étale est ouvert et que les assertions de (i) sont locales pour la topologie étale on peut donc supposer que G possède un tore déployé T, [(22)] maximal en s_0. Écrivons donc $T = D_S(M)$ et soit

$$\mathfrak{g} = \coprod_{m\in M} \mathfrak{g}^m,$$

la décomposition de $\mathfrak{g} = \mathscr{L}ie(G/S)$ sous $\mathrm{Ad}(T)$ (Exp. I, 4.7.3).

On pose $\mathfrak{t} = \mathscr{L}ie(T)$ et, pour tout $m \in M$, on note $\mathfrak{g}^m(s_0) = \mathfrak{g}^m \otimes_{\mathscr{O}_S} \kappa(s_0)$. [(23)] Soit R l'ensemble des $m \in M$, $m \neq 0$, tels que $\mathfrak{g}^m(s_0) \neq 0$. [(24)] Comme $G_{\overline{s}_0}$ est réductif, on a $\mathfrak{g}^0(s_0) = \mathfrak{t}(s_0)$, donc

$$\mathfrak{g}(s_0) = \mathfrak{t}(s_0) \bigoplus \coprod_{\alpha\in R} \mathfrak{g}^\alpha(s_0).$$

Comme les modules en cause sont localement libres, on peut, quitte à restreindre S, **14**
supposer les $\mathfrak{g}^\alpha$ libres et

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \bigoplus \coprod_{\alpha\in R} \mathfrak{g}^\alpha.$$

On rappelle, cf. Exp. XII, 1.12, qu'un groupe de type multiplicatif possède un unique tore maximal (c'est d'ailleurs à peu près trivial par descente, le cas diagonalisable étant évident). Soient alors T_α le tore maximal du noyau de α et $Z_\alpha = \underline{\mathrm{Centr}}_G(T_\alpha)$. [(25)] D'après 2.2, Z_α est affine et lisse sur S, à fibres connexes, et d'après 1.12, sa fibre $(Z_\alpha)_{\overline{s}_0}$ est réductive, de rang semi-simple 1, de tore maximal $T_{\overline{s}_0}$. Par 2.3, il existe donc un ouvert U_α de S, contenant s_0, tel que $Z_\alpha|_{U_\alpha}$ ait ses fibres réductives.

(21) N.D.E. : qui est indépendant du reste de cet exposé.
(22) N.D.E. : Dans tout ce volume, on a remplacé « tore trivial » par « tore déployé ».
(23) N.D.E. : On a ajouté la phrase qui précède.
(24) N.D.E. : Noter que, $\mathfrak{g}$ étant un $\mathscr{O}_S$-module fini localement libre, R est un ensemble *fini*.
(25) N.D.E. : On a détaillé la phrase qui suit.

Posons $\mathrm{U} = \bigcap_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathrm{U}_\alpha$. Par 1.12, pour tout $s \in \mathrm{U}$, $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ est réductif, de tore maximal $\mathrm{T}_{\overline{s}}$ et l'ensemble des racines de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\overline{s}}$ s'identifie à R, de sorte que

$$\mathrm{rgred}(\mathrm{G}_{\overline{s}}) = \dim(\mathrm{T}) = \mathrm{rg}(\mathrm{M}), \qquad \mathrm{rgss}(\mathrm{G}_{\overline{s}}) = \mathrm{rg}(\mathrm{R}) \quad (\text{cf. } 1.10).$$

On a donc prouvé (i) et la première assertion de (ii) ; reste à prouver que le groupe de Weyl $\mathrm{W}_{\mathrm{G}_\mathrm{U}}(\mathrm{T}_\mathrm{U})$ est *fini* sur U, i.e. « qu'il a le même nombre de points dans chaque fibre géométrique » (cf. SGA 1, I 10.9 et EGA IV_3, 15.5.1 et IV_4, 8.12.4).

Pour cela, il suffit de remarquer que la fibre géométrique de ce groupe en $s \in \mathrm{U}$ est déterminée par la situation $\mathrm{R} \subset \mathrm{M}$, comme groupe constant associé au « groupe de Weyl abstrait de ce système de racines », et en particulier est indépendante du point s, cf. *Bible*, § 11.3, th. 2 (voir aussi Exp. XXII, n°3).

Corollaire 2.6. — *Soit* G *un* S*-groupe* affine et lisse *sur* S*, à* fibres connexes. *L'en-*
15 *semble des points* $s \in \mathrm{G}$ *tels que* $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ *soit réductif* (*resp. semi-simple*) *est un ouvert* U *de* S *et les fonctions*

$$s \mapsto \mathrm{rgred}(\mathrm{G}_{\overline{s}}/\overline{s}), \qquad s \mapsto \mathrm{rgss}(\mathrm{G}_{\overline{s}}/\overline{s})$$

sont localement constantes sur U.

Définition 2.7. — Un S-groupe (= S-schéma en groupes) G est dit *réductif* (resp. *semi-simple*) s'il est *affine et lisse* sur S, à fibres géométriques *connexes*, et *réductives* (resp. *semi-simples*).

Le fait d'être réductif (resp. semi-simple) pour un S-groupe G est stable par changement de base et *local* pour la topologie (fpqc).

2.8. Soit G un S-groupe réductif. Pour tout tore (resp. tore maximal) Q de G, $\mathrm{Z}(\mathrm{Q}) = \underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(\mathrm{Q})$ est réductif (resp. est Q). Cela résulte aussitôt de 2.2 et 1.6.
Appliquant 2.5 à $\underline{\mathrm{Centr}}_\mathrm{G}(\mathrm{Q})$ on en déduit que Q est contenu (localement pour la topologie étale) dans un tore maximal.

Remarque 2.9. — Utilisant comme d'habitude la technique de EGA IV_3, § 8, les hypothèses de présentation finie et le théorème 2.5, on voit que si G est un groupe réductif sur S, il existe un recouvrement ouvert de S, soit $\{\mathrm{U}_i\}$, tel que chaque $\mathrm{G}_{\mathrm{U}_i}$ provienne par changement de base d'un groupe réductif sur un anneau noethérien (en fait une algèbre de type fini sur $\mathbb{Z}$). De même, si G possède un tore maximal déployé T, on peut de plus supposer que $\mathrm{T}_{\mathrm{U}_i}$ provient d'un tore maximal déployé du groupe précédent, ...

3. Racines et systèmes de racines des schémas en groupes réductifs

16

3.1. Soient S un schéma, T un S-tore opérant linéairement sur un $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module localement libre de type fini $\mathscr{F}$ (cf. I, § 4.7). Pour tout caractère α de T (c.-à-d., $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$), on définit un sous-foncteur de $\mathrm{W}(\mathscr{F})$ par

$$\mathrm{W}(\mathscr{F})^\alpha(\mathrm{S}') = \{x \in \mathrm{W}(\mathscr{F})(\mathrm{S}') \mid t\, x = \alpha(t) x \text{ pour tout } t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}''),\ \mathrm{S}'' \longrightarrow \mathrm{S}'\}.$$

Lemme. — [26] *Alors* $\mathrm{W}(\mathscr{F})^{\alpha} = \mathrm{W}(\mathscr{F}^{\alpha})$*, où* $\mathscr{F}^{\alpha}$ *est un sous-module de* $\mathscr{F}$, localement facteur direct *dans* $\mathscr{F}$*, donc aussi localement libre.*

En effet, l'assertion est locale pour la topologie (fpqc) et on peut supposer $\mathrm{T} = \mathrm{D}_{\mathrm{S}}(\mathrm{M})$, où M est un groupe abélien (libre) de type fini. Alors α s'identifie à une fonction localement constante de S dans M (Exp. VIII 1.3), et quitte à restreindre S, on peut supposer que cette fonction est constante. On est alors ramené à Exp. I, 4.7.3.

Définition 3.2. — Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes lisse à fibres connexes, [27] T un tore de G. On note $\mathfrak{g} = \mathscr{L}ie(\mathrm{G}/\mathrm{S})$ et on fait opérer T sur $\mathfrak{g}$ par l'intermédiaire de la représentation adjointe de G.

On dit que le caractère α de T est une *racine de* G *par rapport à* T si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites :

(i) Pour chaque $s \in \mathrm{S}$, $\alpha_{\overline{s}}$ est une racine de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\overline{s}}$ (1.10).

(ii) α est non trivial sur chaque fibre et $\mathfrak{g}^{\alpha}(s) \neq 0$ pour chaque $s \in \mathrm{S}$.

Lemme 3.3. — *Soient* S *un schéma,* T *un* S*-tore,* α *un caractère de* T*. Les conditions suivantes sont équivalentes :* 17

(i) *α est non trivial sur chaque fibre, c'est-à-dire : pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\alpha_{\overline{s}}$ est distinct du caractère unité de $\mathrm{T}_{\overline{s}}$.*

(ii) *Pour tout* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\mathrm{S}' \neq \varnothing$, $\alpha_{\mathrm{S}'}$ *est distinct du caractère unité de* $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$.

(iii) *Le morphisme α est fidèlement plat.*

[28] Il est clair que (ii) $\Rightarrow$ (i) et l'on voit facilement que (iii) $\Rightarrow$ (i). On a (i) $\Rightarrow$ (ii) car si $s' \in \mathrm{S}'$ est au-dessus de s et si $\alpha_{s'}$ est le caractère unité, il en est de même de α_s. Enfin, pour prouver (i) $\Rightarrow$ (iii), on se ramène au cas où T est diagonalisable et on conclut par Exp. VIII 3.2 a).

3.4. [29] Soient G un S-schéma en groupes *réductif*, T un tore maximal de G. Soit α une racine de G par rapport à T. Alors, d'après 2.5.0 et 1.12, $\mathfrak{g}^{\alpha}$ est un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module localement libre de rang un. De plus, d'après 1.10, $-\alpha$ est aussi une racine de G par rapport à T. En particulier, si G est de rang semi-simple 1, on a par 1.11 et 1.12 :

---

[26] N.D.E. : On a fait de cet énoncé un lemme, pour le mettre en évidence.

[27] N.D.E. : L'original ajoutait l'hypothèse que G soit de présentation finie sur S, qui ne semble pas utilisée dans la suite. De toutes façons, G étant lisse sur S et à fibres connexes, il est quasi-compact et séparé sur S (VI_{B}, 5.5), donc de présentation finie sur S.

[28] N.D.E. : On a simplifié l'original, qui invoquait Exp. IX, 5.2. Notons toutefois que *loc. cit.*, 5.3 montre que si S est *connexe*, alors les condition du lemme sont vérifiées dès lors que (i) est vérifié en *un* point s de S.

[29] N.D.E. : On a modifié ce qui suit, pour rappeler les hypothèses de 3.2 et ajouter que T est un tore *maximal*.

Lemme 3.5. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif de rang semi-simple* 1*,* T *un tore maximal de* G*. Si* α *est une racine de* G *par rapport à* T*, alors* $-\alpha$ *en est aussi une et on a*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha},$$

où $\mathfrak{g}^{\alpha}$ *et* $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ *sont localement libres de rang* 1*.*

Définition 3.6. — Soient S un schéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G, R un ensemble de racines de G par rapport à T. On dit que R est *un système de*
18 *racines* de G par rapport à T si les conditions *équivalentes* suivantes sont satisfaites :

(i) Pour chaque $s \in \mathrm{S}$, $\alpha \mapsto \alpha_{\overline{s}}$ est une bijection de R sur l'ensemble des racines de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\overline{s}}$.

(ii) Les éléments de R sont distincts sur chaque fibre (i.e. si α, $\alpha' \in \mathrm{R}$, $\alpha \neq \alpha'$, alors $\alpha - \alpha'$ $(= \alpha\,\alpha'^{-1})$ est non trivial sur chaque fibre) et pour chaque $s \in \mathrm{S}$, on a

$$\dim(\mathrm{G}_s/\kappa(s)) - \dim(\mathrm{T}_s/\kappa(s)) = \mathrm{Card}(\mathrm{R}).$$

(iii) On a $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \coprod_{\alpha \in \mathrm{R}} \mathfrak{g}^{\alpha}$.

L'équivalence de ces diverses conditions est triviale.

Lemme 3.7. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe réductif,* T *un tore maximal de* G*,* R *un système de racines de* G *par rapport à* T*. Toute racine de* G *par rapport à* T *est localement sur* S *égale à un élément de* R*.*

C'est visible sur la condition (iii).

Posons $\mathscr{M} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$; c'est un S-schéma en groupes constant tordu (Exp. X 5.6). Si G admet un système de racines R par rapport à T, alors l'inclusion $\mathrm{R} \hookrightarrow \mathscr{M}(\mathrm{S})$ définit un morphisme $\mathrm{R}_{\mathrm{S}} \to \mathscr{M}$, où R_{S} est le S-schéma constant défini par R ; grâce à la condition (ii), on voit facilement que ce morphisme est une immersion ouverte et fermée dont l'image n'est autre que $\bigcup_{\alpha \in \mathrm{R}} \alpha(\mathrm{S})$ (chaque $\alpha \in \mathrm{R}$ étant considéré comme une section $\mathrm{S} \to \mathscr{M}$).

Soit $\mathcal{R}$ le *foncteur des racines* de G par rapport à T : par définition, $\mathcal{R}(\mathrm{S}')$ est l'ensemble des racines de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$ pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$; si $\mathrm{S}' = \varnothing$, on pose $\mathcal{R}(\varnothing) = \{e\}$, et si $\mathrm{S}' \neq \varnothing$ alors l'inclusion $\mathrm{R} \hookrightarrow \mathscr{M}(\mathrm{S}')$ identifie R à un système de racines de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ par rapport à $\mathrm{T}_{\mathrm{S}'}$, et donc, d'après 3.7, on a

$$\mathcal{R}(\mathrm{S}') = \mathrm{Hom}_{\text{loc. const.}}(\mathrm{S}', \mathrm{R}),$$

19 ce qui montre que $\mathcal{R}$ est représentable par R_{S}.

Si maintenant on ne suppose plus nécessairement que G possède un système de racines relativement à T, $\mathcal{R}$ est de toute façon un sous-faisceau de $\mathscr{M}$ pour (fpqc). Localement pour cette topologie, G possède un système de racines par rapport à T (prendre par exemple T déployé). Par Exp. IV 4.6.8 et la théorie de la descente des sous-schémas ouverts (resp. fermés), [30] on obtient :

[30] N.D.E. : voir SGA 1, VIII 4.4 ou EGA IV_2, 2.7.1.

Proposition 3.8. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-groupe,* T *un tore maximal de* G*. Le foncteur* $\mathcal{R}$ *des racines de* G *par rapport à* T *est représentable par un* S*-schéma* fini constant tordu (Exp. X 5.1) *qui est un sous-schéma ouvert et fermé de* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$.

Pour que $\mathrm{R} \subset \mathrm{Hom}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$ *soit un système de racines de* G *par rapport à* T*, il faut et il suffit que le morphisme* $\mathrm{R}_{\mathrm{S}} \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{T}, \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}})$ *défini par l'inclusion précédente induise un isomorphisme* $\mathrm{R}_{\mathrm{S}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{R}$.

3.9. Soient S un schéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G, α une racine de G par rapport à T (i.e. une section de $\mathcal{R}$). Considérons le noyau $\mathrm{Ker}(\alpha)$ de R, son unique tore maximal T_α et le centralisateur de ce dernier, $\mathrm{Z}_\alpha = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}_\alpha)$. C'est un S-groupe fermé dans G, *réductif* (2.8) de *rang semi-simple* 1 (1.12). De plus,

$$\mathscr{L}ie(\mathrm{Z}_\alpha/\mathrm{S}) = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}^\alpha \oplus \mathfrak{g}^{-\alpha},$$

donc $\{\alpha, -\alpha\}$ est un système de racines de Z_α par rapport à T.

3.10. Soient S un schéma, G un S-groupe réductif, T un tore maximal de G, α une racine de G par rapport à T. Si $q \in \mathbb{Q}$ et si $q\,\alpha$ est une racine de G par rapport à T, alors $q = 1$ ou $q = -1$. Cela résulte aussitôt de 1.12.

4. Racines et schémas en groupes vectoriels 20

4.1. Soient S un schéma, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module *localement libre de type fini.* Le S-schéma $\mathrm{W}(\mathscr{F})$ est *lisse* sur S. Son algèbre de Lie est canoniquement isomorphe à $\mathscr{F}$. En effet, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{W}(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{W}(\mathscr{F})/\mathrm{S}) = \mathrm{W}(\mathscr{L}ie(\mathrm{W}(\mathscr{F})/\mathrm{S})).$$

(Exp. II, 4.4.1 et 4.4.2). Nous identifierons toujours $\mathscr{F}$ et $\mathscr{L}ie(\mathrm{W}(\mathscr{F})/\mathrm{S})$.

Lemme 4.2. — *Soient* S *un schéma,* V *une fibration vectorielle sur* S*,* lisse *sur* S*. Il existe alors un isomorphisme unique de* $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$*-modules*

$$\exp : \mathrm{W}(\mathscr{L}ie(\mathrm{V}/\mathrm{S})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{V}$$

qui induise l'identité sur les algèbres de Lie. [31]

[31] N.D.E. : On a conservé la démonstration de l'original ; on peut aussi la détailler comme suit. Soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent, $\mathrm{V} = \mathbb{V}(\mathscr{F})$. On note π la projection $\mathrm{V} \to \mathrm{S}$ et ε la section nulle $\mathrm{S} \to \mathrm{V}$. Alors $\Omega^1_{\mathrm{V}/\mathrm{S}} = \pi^*\mathscr{F}$, d'où

$$\omega^1_{\mathrm{V}/\mathrm{S}} = \varepsilon^*\Omega^1_{\mathrm{V}/\mathrm{S}} \simeq \varepsilon^*\pi^*\mathscr{F} \simeq \mathscr{F}, \tag{1}$$

et donc $\mathscr{L}ie(\mathrm{V}/\mathrm{S}) = (\omega^1_{\mathrm{V}/\mathrm{S}})^\vee \simeq \mathscr{F}^\vee$. Si on suppose V *lisse* sur S alors, d'après (1), $\mathscr{F}$ est localement libre de type fini, et donc

$$\mathrm{V} = \mathbb{V}(\mathscr{F}) \simeq \mathrm{W}(\mathscr{F}^\vee) \simeq \mathrm{W}(\mathscr{L}ie(\mathrm{V}/\mathrm{S})). \tag{2}$$

Maintenant, si U est un S-schéma muni d'une section $\tau : \mathrm{S} \to \mathrm{U}$, et si l'on s'est donné un isomorphisme $\phi : \mathrm{V} \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}$ de S-schémas « pointés », i.e. tel que $\phi \circ \varepsilon = \tau$ (par exemple si U est un S-groupe), alors

En effet, on a $\mathrm{V} = \mathbb{V}(\mathscr{F})$ pour un certain $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}$. Comme V est lisse sur S, alors $\mathscr{F} \simeq \omega^1_{\mathrm{V/S}}$ est localement libre de type fini, et donc

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{V/S}) = \mathbb{V}(\omega^1_{\mathrm{V/S}}) \simeq \mathrm{W}(\mathscr{L}\!ie(\mathrm{V/S})).$$

De plus, d'après Exp. II *loc. cit.*, on a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{V} \xrightarrow{\ \sim\ } \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{V/S}) \simeq \mathrm{W}(\mathscr{L}\!ie(\mathrm{V/S}))$$

et on a aussitôt l'unicité de exp, car W est pleinement fidèle.

4.3. Notations. — Si V est un fibré vectoriel sur S, on désignera par $\mathrm{V}^{\times}$ l'ouvert de V obtenu en retirant la section 0. Notons la loi de groupe de V en notation multiplicative. L'opération de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$ sur V définissant la structure de module sera alors notée exponentiellement

$$\mathbf{O}_{\mathrm{S}} \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{V}, \qquad (x, v) \longmapsto v^x.$$

21 On a $(vv')^x = v^x v'^x$, $v^{x+x'} = v^x v^{x'}$, $v^{xx'} = (v^x)^{x'}$. En particulier, si on restreint la loi d'opérateurs à $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$, alors $\mathrm{V}^{\times}$ est stable et est donc muni d'une structure d'objet à groupe d'opérateurs $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$. On notera encore cette loi par $(z, v) \mapsto v^z$.

Définition 4.4.1. — [32] Soit $\mathscr{L}$ un module inversible sur S et $\mathrm{W}(\mathscr{L})$ le fibré vectoriel associé. Alors $\mathrm{W}(\mathscr{L})^{\times}$ est un fibré principal homogène (localement trivial) sous $\mathbb{G}_{m,\mathrm{S}}$. On note $\Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{L})^{\times} = \mathrm{W}(\mathscr{L})^{\times}(\mathrm{S})$.

Scholie 4.4.2. — Il y a correspondance bijective entre les *isomorphismes* de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\mathscr{O}_{\mathrm{S}} \simeq \mathscr{L}$, les *isomorphismes* de $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules $\mathbf{O}_{\mathrm{S}} \simeq \mathrm{W}(\mathscr{L})$ [33], et les sections $\mathrm{S} \to \mathrm{W}(\mathrm{L})^{\times}$.

Cette correspondance s'effectue par $f \mapsto \mathrm{W}(f) \mapsto \mathrm{W}(f)(1)$. Elle est compatible avec l'extension de la base. On peut donc considérer $\mathrm{W}(\mathscr{L})^{\times}$ comme le « *schéma des trivialisations de* $\mathrm{W}(\mathscr{L})$ ».

ϕ induit un isomorphisme $d\phi : \mathscr{F}^{\vee} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathscr{L}\!ie(\mathrm{U/S})$, d'où un isomorphisme ψ :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{W}(\mathscr{F}^{\vee}) \arrow[r, equal] & \mathrm{V}(\mathscr{F}) \arrow[r, "\phi", "\sim"'] & \mathrm{U} \\
& \mathrm{W}(\mathscr{L}\!ie(\mathrm{U/S})) \arrow[ul, "\simeq"', "\mathrm{W}(d\phi^{-1})"] \arrow[ur, "\simeq", "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

qui permet d'identifier U à $\mathrm{W}(\mathscr{L}\!ie(\mathrm{U/S}))$. Comme le foncteur W est pleinement fidèle, il existe un *unique* isomorphisme $\exp : \mathrm{W}(\mathscr{L}\!ie(\mathrm{U/S})) \xrightarrow{\ \sim\ } \mathrm{U}$ tel que $\mathscr{L}\!ie(\psi^{-1} \circ \exp) = \mathrm{id}$. En fait, on peut voir directement que $\mathscr{L}\!ie(\psi) = \mathrm{id}$, de sorte que $\exp = \psi$.

[32] N.D.E. : Pour des références ultérieures, on a transformé 4.4 en 4.4.1 et 4.4.2.

[33] N.D.E. : Ici, on identifie le fibré vectoriel $\mathrm{W}(\mathscr{L})$ au *foncteur* en $\mathbf{O}_{\mathrm{S}}$-modules qu'il représente.

4.5. Soient S un schéma, T un tore sur S, P un S-groupe à groupe d'opérateurs $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ (par exemple un fibré vectoriel), α un caractère de T. On note $\mathrm{T}\cdot_\alpha \mathrm{P}$ le produit semi-direct de P par T, où T opère sur P par le morphisme composé

$$\mathrm{T} \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{S\text{-}gr.}}(\mathrm{P}).$$

Définition 4.6. — Soient S un schéma, G un S-schéma en groupes, T un sous-groupe de G, α un caractère de T, $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module. Soit

$$p : \mathbf{W}(\mathscr{L}) \longrightarrow \mathrm{G} \qquad {}^{(34)}$$

un morphisme de S-foncteurs en groupes. On dit que p est *normalisé par* T *avec le multiplicateur* α s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) p est un morphisme d'objets à groupes d'opérateurs T, si on fait opérer T sur $\mathbf{W}(\mathscr{L})$ par α et sur G par automorphismes intérieurs. En d'autres termes, pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et tous $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$ et $x \in \mathbf{W}(\mathscr{L})(\mathrm{S}') = \Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{L} \otimes \mathscr{O}_{\mathrm{S}'})$, on a **22**

$$\mathrm{int}(t)p(x) = p(\alpha(t)x).$$

(ii) Le morphisme $\mathrm{T}\cdot_\alpha \mathbf{W}(\mathscr{L}) \to \mathrm{G}$ défini par le produit dans G (i.e. par $(t,x) \mapsto t\cdot p(x)$) est un morphisme de groupes.

Lemme 4.7. — *Sous les conditions de* 4.6*, supposons de plus* G lisse *et* à fibres connexes*,* [35] T *tore maximal de* G*,* $\mathscr{L}$ *inversible. Si* p *est un* monomorphisme *et* α *non nul sur chaque fibre, alors* α *est une racine de* G *par rapport à* T.

En effet $\mathscr{L}ie(p) : \mathscr{L} \to \mathfrak{g}$ est un monomorphisme qui se factorise par $\mathfrak{g}^\alpha$.

Proposition 4.8. — *Sous les conditions de* 4.7*, supposons que* G *soit réductif, et que* p *soit un* monomorphisme. *Alors* α *est une racine de* G *par rapport à* T *et* $\mathscr{L}ie(p)$ *induit un isomorphisme*

$$\mathscr{L}ie(p) : \mathscr{L} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathfrak{g}^\alpha.$$

En effet, en vertu de 4.7 et du fait que $\mathfrak{g}^\alpha$ est inversible, il suffit de prouver que α est non nul sur chaque fibre. Soit donc $s \in \mathrm{S}$ tel que $\alpha_{\overline{s}} = 0$ ($= 1$ en notation multiplicative). Si X est une section non nulle de $\mathscr{L} \otimes_\mathrm{S} \kappa(\overline{s})$, $p(\mathrm{X})$ est un élément unipotent $\neq e$ de $\mathrm{G}(\overline{s})$ qui centralise $\mathrm{T}_{\overline{s}}$, ce qui est impossible, car celui-ci est son propre centralisateur.

Corollaire 4.9. — *Sous les conditions de* 4.8*, il existe un monomorphisme de groupes à opérateurs* T (*i.e. normalisé par* T *avec le multiplicateur* α)

$$\mathrm{W}(\mathfrak{g}^\alpha) \longrightarrow \mathrm{G}$$

qui induit sur les algèbres de Lie le morphisme canonique $\mathfrak{g}^\alpha \to \mathfrak{g}$.

Nous verrons bientôt que 4.9 est vérifiée en fait chaque fois que G est un groupe **23**

---

[34] N.D.E. : Ici, on a noté $\mathbf{W}(\mathscr{L})$ (avec $\mathbf{W}$ en *gras*) car, pour un $\mathscr{O}_\mathrm{S}$-module $\mathscr{L}$ arbitraire, $\mathbf{W}(\mathscr{L})$ n'est pas nécessairement représentable. Mais dans la suite, $\mathscr{L}$ sera supposé localement libre de rang fini (et même *inversible*), auquel cas le foncteur est représentable par le fibré vectoriel $\mathrm{V}(\mathscr{L}^\vee)$, et on le notera simplement $\mathrm{W}(\mathscr{L})$.

[35] N.D.E. : cf. la N.D.E. (27).

réductif et α une racine de G par rapport à T, et qu'un tel morphisme est unique.

Rappel 4.10. — Soient k un corps algébriquement clos, G un k-groupe réductif, T un tore maximal de G, α une racine de G par rapport à T. Il existe un monomorphisme

$$p : \mathbb{G}_{a,\,k} \longrightarrow \mathrm{G}$$

normalisé par T avec le multiplicateur α.

Voir *Bible*, § 13.1, th. 1.

4.11. Terminons cette section par un résultat technique qui nous sera utile. Soient S un schéma, et $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module inversible. Soit q un entier > 0 tel que $x \mapsto x^q$ soit un endomorphisme du S-groupe $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$. (Si $\mathrm{S} \neq \varnothing$, on a $q = 1$, ou $q = p^n$, p étant un nombre premier nul sur S ; cela résulte aussitôt du fait élémentaire suivant : le pgcd des coefficients binomiaux $\binom{q}{i}$, pour $i \neq 0, q$, est p si $q = p^n$, p premier, et 1 dans le cas contraire). Le morphisme défini par la puissance q-ième

$$\mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{L}^{\otimes q}$$

est un morphisme de faisceaux de groupes abéliens. Il définit par changement de base un morphisme de S-schémas en groupes :

$$\mathrm{W}(\mathscr{L}) \longrightarrow \mathrm{W}(\mathscr{L}^{\otimes q}).$$

En particulier, si $\mathscr{L}'$ est un autre module inversible et si on a un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-modules

$$h : \mathscr{L}^{\otimes q} \longrightarrow \mathscr{L}',$$

24 on en déduit un morphisme de S-schémas en groupes :

$$\mathrm{W}(\mathscr{L}) \longrightarrow \mathrm{W}(\mathscr{L}'), \qquad x \mapsto h(x^q).$$

Ces notations posées, on a

Proposition 4.12. — *Soient* S *un schéma,* T (*resp.* T′) *un* S*-tore,* $\mathscr{L}$ (*resp.* $\mathscr{L}'$) *un* $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$*-module inversible,* α (*resp.* α') *un caractère de* T (*resp.* T′). [36] *Soient* $f : \mathrm{T} \to \mathrm{T}'$ *un morphisme de groupes et* $g : \mathrm{W}(\mathscr{L}) \to \mathrm{W}(\mathscr{L}')$ *un morphisme de* S*-schémas* (*pas nécessairement un morphisme de* S*-groupes*) *vérifiant la condition suivante :*

$$(\star) \qquad g(\alpha(t)x) = \alpha'(f(t))\, g(x)$$

pour tous $x \in \mathrm{W}(\mathscr{L})(\mathrm{S}')$, $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$, $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$. *Soit* $s_0 \in \mathrm{S}$ *tel que* $\alpha_{\overline{s}_0} \neq 0$.

a) *Supposons que* g *envoie la section* 0 *sur la section* 0 *et que pour tout entier* $n > 0$, *on ait* $(\alpha' \circ f)_{\overline{s}_0} \neq n\,\alpha_{\overline{s}_0}$. *Alors* $g = 0$ *au voisinage de* s_0.

b) *Supposons que* g *soit un morphisme de groupes tel que* $g_{\overline{s}_0} \neq 0$. *Il existe alors un ouvert* U *de* S *contenant* s_0 *et un entier* $q > 0$ *tel que* $x \mapsto x^q$ *soit un endomorphisme de* $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{U}}$ *et que* $(\alpha' \circ f)_{\mathrm{U}} = q\,\alpha_{\mathrm{U}}$.

[36] N.D.E. : On a supprimé « considérons le produit semi-direct $\mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathrm{W}(\mathscr{L})$, resp. $\mathrm{T}' \cdot_{\alpha'} \mathrm{W}(\mathscr{L}')$ ». Par contre, l'hypothèse dans (b) que g soit un morphisme de groupes, combinée avec $(\star)$, équivaut à dire que le morphisme $(t, x) \mapsto (f(t), g(x))$ est un morphisme de groupes de $\mathrm{T} \cdot_{\alpha} \mathrm{W}(\mathscr{L})$ vers $\mathrm{T}' \cdot_{\alpha'} \mathrm{W}(\mathscr{L}')$.

c) *Supposons que* $(\alpha' \circ f)_{\overline{s}_0} = q\,\alpha_{\overline{s}_0}$, *où* q *est un entier* > 0 *tel que* $x \mapsto x^q$ *soit un endomorphisme de* $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$. *Il existe alors un ouvert* U *de* S *contenant* s_0 *et un unique morphisme de* $\mathscr{O}_\mathrm{S}$*-modules*

$$h : \mathscr{L}^{\otimes q}|_\mathrm{U} \longrightarrow \mathscr{L}'|_\mathrm{U}$$

tels que g_U *soit le morphisme composé*

$$\mathrm{W}(\mathscr{L})_\mathrm{U} \xrightarrow{x \mapsto x^q} \mathrm{W}(\mathscr{L}^{\otimes q})_\mathrm{U} \xrightarrow{\mathrm{W}(h)} (\mathscr{L}')_\mathrm{U}.$$

Démontrons (a). Comme la conclusion est locale sur S, on peut supposer que 25
$\mathrm{W}(\mathscr{L}) = \mathrm{W}(\mathscr{L}') = \mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$ et donc que g s'exprime comme un polynôme

$$g(\mathrm{X}) = \sum_{n \geqslant 0} a_n \mathrm{X}^n, \qquad a_n \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S}).$$

La condition $(\star)$ qui lie f et g s'écrit comme une identité dans $\Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{O}_{\mathrm{S}'})[\mathrm{X}]$:

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n \alpha'(f(t))\mathrm{X}^n = \sum_{n \geqslant 0} a_n \alpha(t)^n \mathrm{X}^n,$$

soit, pour tout $n \geqslant 0$, tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et tout $t \in \mathrm{T}(\mathrm{S}')$,

$$a_n(\alpha'(f(t)) - \alpha(t)^n) = 0.$$

Pour chaque $n \geqslant 0$, soit S_n l'ensemble des $s \in \mathrm{S}$ tels que $(\alpha' \circ f)_{\overline{s}} = n\,\alpha_{\overline{s}}$. On sait (Exp. IX 5.3) que les S_n sont ouverts et fermés, et que $(\alpha' \circ f)_{\mathrm{S}_n} = n\,\alpha_{\mathrm{S}_n}$. De plus, comme $\alpha_{\overline{s}_0} \neq 0$, on peut, quitte à restreindre S, supposer que α est non nul sur chaque fibre (même référence), ce qui entraîne que les S_n sont disjoints. Quitte à restreindre S, on peut donc supposer que l'on est dans l'un des deux cas suivants : il existe un n tel que $\mathrm{S} = \mathrm{S}_n$ ou bien tous les S_n sont vides.

Soit $m \geqslant 0$ tel que $\mathrm{S}_m = \varnothing$, je dis qu'alors $a_m = 0$; en effet $\alpha' \circ f$ et $m\,\alpha$ sont distincts sur chaque fibre de S, et on a :

Lemme 4.13. — *Soient* S *un schéma,* T *un* S*-tore,* α *et* α' *deux caractères de* T *distincts sur chaque fibre ; il existe une famille* $\{\mathrm{S}_i \to \mathrm{S}\}$ *couvrante pour* (fpqc)*, et pour chaque* i *un* $t_i \in \mathrm{T}(\mathrm{S}_i)$*, tels que* $\alpha(t_i) - \alpha'(t_i) = 1$.

Le lemme est trivial, par réduction au cas diagonalisable, puis au cas $\mathrm{T} = \mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$.

Reprenons la démonstration de la proposition 4.12 ; on vient de prouver (a). Dans 26
les cas (b) et (c), il existe un n tel que $\mathrm{S} = \mathrm{S}_n$ ($n = q$ dans (c)). Par le résultat précédent on a donc $a_m = 0$ pour $m \neq n$, ce qui prouve que g s'écrit

$$g(\mathrm{X}) = a_n \mathrm{X}^n, \qquad a_n \in \Gamma(\mathrm{S}, \mathscr{O}_\mathrm{S}).$$

Cela prouve aussitôt (c). Dans le cas (b), on sait que $a_n(s_0) \neq 0$, on peut donc supposer a_n inversible sur S, ce qui entraîne que $x \mapsto x^n$ est un endomorphisme de $\mathbb{G}_{a,\,\mathrm{S}}$ (en vertu de l'hypothèse de (b)) et achève la démonstration.

5. Un exemple instructif

5.1. Soient k un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Posons $\mathrm{A} = k[t]$, anneau des polynômes à une variable sur k et $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$. Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$ suivante : comme module, elle est libre de dimension 3, de base $\{\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{H}\}$; la table de multiplication est

$$[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = 2t\mathrm{H}, \quad [\mathrm{H}, \mathrm{X}] = \mathrm{X} \quad \text{et} \quad [\mathrm{H}, \mathrm{Y}] = -\mathrm{Y}.$$

Pour $s \in \mathrm{S}$, $s \neq s_0$ (point défini par $t = 0$) la fibre $\mathfrak{g}(s) = \mathfrak{g} \otimes_{\mathrm{A}} \kappa(s)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe $\mathrm{PGL}_{2,\,\kappa(s)}$. Pour $s = s_0$, c'est une algèbre de Lie résoluble.

5.2. Soit G_1 le schéma en groupes des automorphismes de $\mathfrak{g}$: pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$, $\mathrm{G}_1(\mathrm{S}')$ est le groupe des automorphismes de la $\mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$. C'est un sous-schéma fermé du groupe $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ des automorphismes du $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module $\mathfrak{g}$. Soient $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ et $u \in \mathrm{M}_3(\Gamma(\mathrm{S}', \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}))$ considéré comme un endomorphisme du $\mathscr{O}_{\mathrm{S}}$-module
27 $\mathfrak{g} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathrm{S}}} \mathscr{O}_{\mathrm{S}'}$:

$$\begin{aligned} u(\mathrm{X}) &= a\mathrm{X} + b\mathrm{Y} + e\mathrm{H}, \\ u(\mathrm{Y}) &= b'\mathrm{X} + a'\mathrm{Y} + e'\mathrm{H}, \\ u(\mathrm{H}) &= c\mathrm{X} + c'\mathrm{Y} + d\mathrm{H}. \end{aligned}$$

On voit aussitôt que u est une section de G_1 si et seulement si $\mathrm{dét}(u)$ est inversible et si on a les relations : [37]

$$\begin{array}{lcl} (1)\ a(d-1) = ec & , & (1')\ a'(d-1) = e'c'\ , \\ (2)\ b(d+1) = ec' & , & (2')\ b'(d+1) = e'c\ , \\ (3)\ e = 2t(bc - ac') & , & (3')\ e' = 2t(b'c' - a'c)\ , \\ (4)\ 2tc = eb' - ae' & , & (4')\ 2tc' = be' - ea'\ , \end{array}$$
$$(5)\ 2t(aa' - bb') = 2td.$$

Lemme 5.3. — *Les relations* (1), (1′), (2), (2′) *impliquent*

$$\begin{aligned} \mathrm{dét}(u) &= aa'(2-d) + bb'(d+2), \\ aa' - bb' &= d \cdot \mathrm{dét}(u). \end{aligned}$$

En effet, la première assertion s'obtient aussitôt en reportant les relations (1), (1′), (2), (2′) dans le développement de $\mathrm{dét}(u)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{dét}(u) &= aa'd + be'c + b'c'e - a'ec - ae'c' - bb'd \\ &= aa'd + bb'(d+1) + bb'(d+1) - aa'(d-1) - bb'd - aa'(d-1) \\ &= aa'(d - d + 1 - d + 1) + bb'(d + 1 + d + 1 - d) \\ &= aa'(2-d) + bb'(d+2). \end{aligned}$$

Multipliant alors cette relation par d, on obtient

$$d \cdot \mathrm{dét}(u) = aa'(2d - d^2) + bb'(d^2 + 2d).$$

(37) N.D.E. : L'égalité $[u(\mathrm{X}), u(\mathrm{Y})] = 2\,t\,u(\mathrm{H})$ (resp. $[u(\mathrm{H}), u(\mathrm{X})] = u(\mathrm{X})$, resp. $[u(\mathrm{H}), u(\mathrm{Y})] = -u(\mathrm{Y})$) donne les relations (4), (4′) et (5) (resp. (1–3), resp. (1′–3′)).

Mais la relation $(1) \times (1') = (2) \times (2')$ donne aussitôt

$$aa'(d-1)^2 = bb'(d+1)^2.$$

Combinant les deux relations précédentes, on trouve aussitôt la seconde formule cher- 28
chée.

5.4. Considérons alors $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \cap \mathrm{SL}(\mathfrak{g})$. C'est le sous-groupe fermé de G_1 défini par l'équation $\mathrm{dét}(u) = 1$. C'est donc un groupe affine sur S.

Proposition 5.5. — *Le groupe* G *est* lisse *sur* S.

Pour démontrer la proposition, on aura besoin des lemmes qui suivent.

Lemme 5.6. — *Soit* U *l'ouvert de* $\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g}) \simeq \mathrm{W}(\mathrm{M}_3(\mathscr{O}_{\mathrm{S}}))$ *défini par la condition « le produit ad est inversible », i.e. l'ouvert* $\underline{\mathrm{End}}_{\mathrm{A}}(\mathfrak{g})_f$*, où* f *est la fonction définie par* $f(u) = ad$*. Alors* $\mathrm{U} \cap \mathrm{G}$ *est le sous-schéma fermé de* U *défini par les* 6 *équations :*

$$(1), \quad (2), \quad (2'), \quad (3), \quad (3') \quad \textit{et} \quad (\mathrm{D}) : aa' - bb' = d.$$

Il est d'abord clair que ces 6 relations sont vérifiées par tout « point » de G (lemme 5.3), en particulier par tout « point » de $\mathrm{U} \cap \mathrm{G}$. Réciproquement, il faut montrer que si $u \in \mathrm{U}(\mathrm{S}')$ (pour tout $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$), et si u vérifie les 6 conditions de l'énoncé, alors $\mathrm{dét}(u) = 1$ et u vérifie aussi $(1')$, (4), $(4')$ et (5).

On a d'abord $(\mathrm{D}) \Rightarrow (5)$. D'après (2) et $(2')$, on a

$$bb'(d+1) = bce' = b'c'e.$$

Mais par (3) et $(3')$, on a, en écrivant de deux manières $2t(bc - ac')(b'c' - a'c)$:

$$(bc - ac')e' = (b'c' - a'c)e.$$

Combinant avec la relation précédente, cela donne $ac'e' = a'ce$. Mais par (1), $a'ce = a'a(d-1)$, ce qui prouve $a(a'(d-1) - e'c') = 0$ et entraîne $(1')$, puisque a est supposé inversible.

Ainsi, (1), (2), $(2')$ et $(1')$ sont vérifiées, donc par le lemme 5.3 et (D) on a $d(\mathrm{dét}(u) - 1) = 0$. Comme d est supposé inversible, ceci entraîne $\mathrm{dét}(u) = 1$.

Prouvons (4) et $(4')$. Faisons-le par exemple pour $(4')$, l'autre calcul s'en déduisant 29
par symétrie. Par (3), $(3')$ et (D), on a aussitôt

$$a'e + be' = -2t(aa' - bb')c' = -2tdc'.$$

Combinant $(1')$ et (2), on a aussi [38]

$$a'e + be' = -d(be' - ea'),$$

ce qui termine la démonstration de $(4')$, d étant supposé inversible.

Lemme 5.7. — G *est lisse sur* S *le long de la section unité.*

---

[38] N.D.E. : On a corrigé le signe.

Par 5.6 et SGA 1, II 4.10, il suffit de prouver que les différentielles des fonctions

$$a(d-1)-ec, \qquad b(d+1)-ec', \qquad b'(d+1)-e'c,$$
$$e-2t(bc-ac'), \qquad e'-2t(b'c'-a'c), \qquad aa'-bb'-d,$$

aux points de la section unité de G sont linéairement indépendantes. Or notant par une majuscule la différentielle de la minuscule correspondant, ce sont [39]

$$\mathrm{D}, \qquad 2\mathrm{B}, \qquad 2\mathrm{B}', \qquad \mathrm{E}+2t\mathrm{C}', \qquad \mathrm{E}'+2t\mathrm{C}, \qquad \mathrm{A}+\mathrm{A}'-\mathrm{D},$$

qui sont bien linéairement indépendantes modulo tout $(t-\lambda)$, $\lambda \in k$. [40]

Lemme 5.8. — *Pour $s \in \mathrm{S}$, $s \neq s_0$, la fibre G_s est connexe et semi-simple.*

[41] En effet, comme $s \neq s_0$, $\mathfrak{g}(s)$ est isomorphe à l'algèbre de Lie de $\mathrm{PGL}_{2,\,\kappa(s)}$ et, d'autre part, on a $\mathrm{G}_s = (\mathrm{G}_1)_s$; or il est connu que le groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie de PGL_2 sur un corps de caractéristique 0 est PGL_2 lui-même, qui est connexe et semi-simple.

Lemme 5.9. — *La fibre G_{s_0} est résoluble et a deux composantes connexes qui sont de la forme suivante :*

$$\mathrm{G}^0_{s_0} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ c & c' & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad et \quad \mathrm{G}^-_{s_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ b^{-1} & 0 & 0 \\ c & c' & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

30 En effet, on a $e = e' = 0$, car $t = 0$ en s_0. On résout alors immédiatement les équations (1), (1′), … (5) et (D).

Lemme 5.10. — $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ *est une section de* G *sur* S*, telle que $w(s_0) \in \mathrm{G}^-_{s_0}$.*

Démontrons maintenant 5.5. [42] Notons G^0 la réunion des composantes neutres des fibres de G (c'est-à-dire le complémentaire de $\mathrm{G}^-_{s_0}$) ; comme G est lisse sur S le long de la section unité (5.7), alors G^0 est un sous-groupe ouvert de G lisse sur S, d'après $\mathrm{VI_B}$, 3.10. Comme, par translation, G est évidemment lisse aux points de $w(\mathrm{S})$, G est lisse sur S.

5.11. Considérons le morphisme $\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}} \to \mathrm{G}^0$ défini par $z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & 1/z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est un monomorphisme qui définit un tore T de G^0. Je dis qu'on a

$$\mathrm{T} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_0}(\mathrm{T}).$$

[39] N.D.E. : On a corrigé $\mathrm{A}+\mathrm{A}'+\mathrm{B}$ en $\mathrm{A}+\mathrm{A}'-\mathrm{D}$.

[40] N.D.E. : On a corrigé « $(t-a)$, $a \in \mathrm{A}$ » en « $(t-\lambda)$, $\lambda \in k$ ».

[41] N.D.E. : On a modifié légèrement la phrase qui suit.

[42] N.D.E. : On a modifié la phrase qui suit, en ajoutant la référence à $\mathrm{VI_B}$, 3.10.

Il suffit en effet de vérifier la première égalité. Comme il s'agit de sous-groupes lisses sur S de G, il suffit de vérifier qu'ils ont les mêmes points géométriques. Pour les fibres aux points $s \neq s_0$, cela résulte de ce que $\mathrm{PGL}_{2,\,\kappa(s)}$ est réductif et de ce que T_s en est un tore maximal pour des raisons de dimensions (cf. 1.11). Sur la fibre de s_0, le calcul se fait immédiatement. Il en résulte en particulier que T est un tore maximal de G et de G^0.

5.12. La section w de G définie en 5.9 normalise T. Il en résulte aussitôt (cf. 2.4) 31
que le groupe de Weyl de G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$, et en particulier fini sur S.

$$\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})/\mathrm{T} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}.$$

En revanche $\mathrm{W}_{\mathrm{G}^0}(\mathrm{T})$ *n'est pas fini* sur S : il lui « manque un point » au-dessus de s_0.

5.13. L'immersion ouverte $\mathrm{G}^0 \to \mathrm{G}$ n'est pas une immersion fermée (car G^0 est dense dans G) ; elle est cependant un morphisme *affine* (et donc G^0 est *affine* sur S). En effet, comme $\mathrm{G}^0_{s_0}$ est fermé dans G_{s_0}, qui est fermé dans G, le complémentaire U de $\mathrm{G}^0_{s_0}$ dans G est ouvert ; G^0 et U forment un recouvrement ouvert de G et il suffit de vérifier que les immersions $\mathrm{G}^0 \to \mathrm{G}^0$ et $\mathrm{G}^0 \cap \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ sont affines ; pour la première c'est trivial, pour la seconde, on remarque que $\mathrm{U} \cap \mathrm{G}^0$ est défini dans U par l'équation $t \neq 0$.

On a donc construit un S-groupe affine lisse, à fibres connexes, G^0, possédant un tore maximal T qui est son propre centralisateur et dont le groupe de Weyl $\mathrm{W}_{\mathrm{G}^0}(\mathrm{T})$ *n'est pas fini* (comparer au théorème 2.5).

6. Existence locale de tores maximaux. Le groupe de Weyl

Au cours de la démonstration de 2.5, nous avons utilisé un résultat de Exp. XI sur l'existence locale pour la topologie étale de tores maximaux ; la démonstration de Exp. XI utilise un résultat fin de représentabilité (XI 4.1). Dans le cas particulier qui nous occupe, on peut en donner une autre démonstration, basée sur les idées de Exp. XII n°7, et de nature beaucoup plus élémentaire.

Proposition 6.1. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes lisse, affine et à* 32
fibres connexes sur S*,* s_0 *un point de* S *tel que les tores maximaux de la fibre géométrique* $\mathrm{G}_{\overline{s}_0}$ *soient leur propre centralisateur. Il existe un morphisme étale* $\mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ *couvrant* s_0*, et un tore maximal déployé* T *de* $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$*.*

D'abord, on peut supposer S affine. [43] Comme G est de présentation finie sur S, on peut supposer S noethérien, puis local, puis hensélien à corps résiduel séparablement clos (cf. EGA IV, 8.12, § 8.8, et § 18.8). Posons donc $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$, A hensélien à corps résiduel $k = \kappa(s_0)$ séparablement clos. Choisissons un tore maximal T_0 de G_0 ($= \mathrm{G}_k$) (il en existe, par exemple parce que le schéma des tores maximaux de G_0 est lisse sur

[43] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui précède ainsi que la référence à EGA IV dans ce qui suit.

k, Exp. XII, 7.1 c)) ; comme k est séparablement clos, T_0 est déployé (cf. X 1.4) et est donc donné par un monomorphisme de groupes

$$f_0 : \mathbb{G}^r_{m,\,k} \longrightarrow \mathrm{G}_0\,.$$

Soit m un entier > 1 premier à la caractéristique de k. D'après Exp. VIII 6.7, pour tout $h > 0$, $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_0}({}_{m^h}\mathrm{T}_0)$ est représentable par un sous-schéma fermé de G_0. Comme les ${}_{m^h}\mathrm{T}_0$ sont schématiquement denses dans T_0 (cf. Exp. IX 4.10) et que G_0 est noethérien, il existe un h tel que

$$\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_0}({}_{m^h}\mathrm{T}_0) = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}_0}(\mathrm{T}_0) = \mathrm{T}_0.$$

Posons $n = m^h$; comme n est inversible sur S, ${}_n\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}$; f_0 définit donc un monomorphisme de groupes

$$u_0 : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r_k \longrightarrow \mathrm{G}_0$$

tel que $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(u_0) = \mathrm{T}_0$. Or le S-foncteur

$$\mathrm{P} = \underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r_{\mathrm{S}}, \mathrm{G})$$

est représentable par un S-schéma de type fini (comme sous-schéma fermé de ${}_n\mathrm{G} =$
33 $\underline{\mathrm{Hom}}_{\text{S-gr.}}((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{\mathrm{S}}, \mathrm{G}) = \mathrm{Ker}(\mathrm{G} \xrightarrow{n} \mathrm{G})$). Mais P est lisse sur S (Exp. IX 3.6), donc $u_0 \in \mathrm{P}(k)$ se relève en une section $u \in \mathrm{P}(\mathrm{S})$ (lemme de Hensel, Exp. XI 1.11) :

$$u : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^r_{\mathrm{S}} \longrightarrow \mathrm{G}\,.$$

Considérons $\mathrm{H} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(u)$; c'est un sous-schéma en groupe fermé de G, d'après Exp. VIII 6.5 e), et l'on a $\mathrm{H}_0 = \mathrm{T}_0$ par hypothèse. [44] De plus, H est lisse sur S : en effet, soient $\mathrm{S}' = \mathrm{Spec}(\mathrm{A})$ un schéma affine au-dessus de S, $u' : {}_n\mathbb{G}_{m,\,\mathrm{S}'} \to \mathrm{G}_{\mathrm{S}'}$ le morphisme déduit de u par changement de base, $\mathrm{S}'_{\mathrm{J}} = \mathrm{Spec}(\mathrm{A}/\mathrm{J})$, où J est un idéal de carré nul, et soit $x \in \mathrm{H}(\mathrm{S}'_{\mathrm{J}})$; comme G est lisse, x se relève en un élément g de $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$, alors $v = \mathrm{int}(g)(u')$ vérifie $v_{\mathrm{J}} = u'_{\mathrm{J}}$ et donc, d'après IX 3.2, il existe un élément g' de $\mathrm{G}(\mathrm{S}')$ tel que $g'_{\mathrm{J}} = e$ et $\mathrm{int}(g')(v) = u'$, alors $h = g'g$ appartient à $\mathrm{H}(\mathrm{S}')$ et vérifie $h_{\mathrm{J}} = x$.

Soit alors H^0 la composante neutre de H ; c'est un sous-schéma en groupes de G, lisse et à fibres connexes, dont la fibre spéciale est un tore. Par Exp. X 8.1, c'est un tore, nécessairement déployé (Exp. X 4.6). Posons $\mathrm{H}^0 = \mathrm{T}$ et soit $\mathrm{C} = \underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{T})$ qui est un sous-groupe fermé de G (Exp. VIII 6.5 e)), lisse (Exp. XI 2.4). Considérons C^0 (on a en fait $\mathrm{C}^0 = \mathrm{C}$, mais nous n'avons pas besoin de le savoir) ; alors $\mathrm{C}^0 \supset \mathrm{T}$ et ce sont deux groupes lisses et à fibres connexes. Ils coïncident en s_0, donc au voisinage. Quitte à restreindre S, on peut donc supposer $\mathrm{C}^0 = \mathrm{T}$, donc *a fortiori* T maximal.

Remarque 6.2. — La démonstration montre en particulier que le rang réductif de $\mathrm{G}_{\overline{s}}$ est constant au voisinage de $s = s_0$.

Proposition 6.3. — *Soient* S *un schéma,* G *un* S*-schéma en groupes lisse et de présentation finie sur* S*,* Q *un sous-tore de* G*.*

[44] N.D.E. : On a ajouté la référence VIII 6.5 e) dans ce qui précède, et l'on a détaillé la phrase qui suit.

(i) $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *et* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *sont représentables par des sous-schémas en groupes fermés, lisses (et donc de présentation finie) sur* S.

(ii) $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *est un sous-schéma ouvert et fermé de* $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$. *Le quotient* $\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q}) = \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})/\,\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *est représentable par un sous-schéma en groupes* 34
ouvert de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\text{S-gr.}}(\mathrm{Q})$, *c'est donc un* S*-schéma en groupes* quasi-fini, étale et séparé sur S.

(iii) *Pour tout* $s \in \mathrm{S}$, *posons*

$$w(s) = \left|\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}(\overline{s})}(\mathrm{Q}(\overline{s}))/\,\mathrm{Centr}_{\mathrm{G}(\overline{s})}(\mathrm{Q}(\overline{s}))\right|.$$

Alors $s \mapsto w(s)$ *est semi-continue inférieurement, et est constante au voisinage de* s *si et seulement si* $\mathrm{W}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ *est* fini *sur* S *au voisinage de* s.

Par Exp. XI 6.11, $\underline{\mathrm{Centr}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ et $\underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}}(\mathrm{Q})$ sont représentables par des sous-schéma fermés et de présentation finie de G. Ceux-ci sont lisses par Exp. XI 2.4 et 2.4 bis, ce qui prouve (i). Les assertions (ii) et (iii) se démontrent alors comme dans Exp. XI 5.9 et 5.10, dont la démonstration n'utilise en fait que (i) et non les théorèmes fins Exp. XI 4.1 et 4.2.

Bibliographie

[Bible] C. Chevalley (avec la collaboration de P. Cartier, A. Grothendieck, M. Lazard), *Classification des groupes de Lie algébriques*, 1956-58.

[Ch05] C. Chevalley, *Classification des groupes algébriques semi-simples* (avec la collaboration de P. Cartier, A. Grothendieck, M. Lazard), Collected Works, vol. 3, Springer, 2005.

[Tô55] C. Chevalley, *Sur certains groupes simples*, Tôhoku Math. J. (2) **7** (1955), 14-66.

[TO70] J. Tate & F. Oort, *Group schemes of prime order*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. (4), t. **3** (1970), 1-21.