EXPOSÉ XXV

LE THÉORÈME D'EXISTENCE

par M. Demazure

Pour être complet, nous donnons dans cet exposé une démonstration du théorème d'existence des groupes déployés. Comme la démonstration originale de Chevalley (« *Sur certains schémas de groupes semi-simples* », Séminaire Bourbaki, Mai 1961, n°219), elle s'appuie sur l'existence de groupes algébriques semi-simples complexes de tous les types possibles. Le principe d'une démonstration plus satisfaisante, prouvant directement l'existence d'un $\mathbb{Z}$-groupe semi-simple déployé simplement connexe correspondant à une matrice de Cartan donnée a été donné par Cartier (non publié). [(1)] Signalons cependant que la difficulté n'est pas de donner une construction explicite d'un schéma en groupes, mais de vérifier que le groupe ainsi construit répond bien aux conditions exigées, c'est-à-dire essentiellement que ses fibres sont bien lisses et réductives. **410**

1. Énoncé du théorème

Théorème 1.1. — *Soit* S *un schéma non vide. Le foncteur*

$$\mathrm{G} \longmapsto \mathscr{R}(\mathrm{G})$$

est une équivalence *de la catégorie des* S*-schémas en groupes réductifs* épinglés *avec la catégorie des données radicielles réduites épinglées.*

En vertu du théorème d'unicité (Exp. XXIII, 4.1), l'énoncé précédent équivaut à : **411**

***Corollaire 1.2* (Existence de groupes déployés)**. — *Pour toute donnée radicielle réduite* $\mathscr{R}$*, il existe un* $\mathbb{Z}$*-groupe réductif déployé* G *tel que* $\mathscr{R}(\mathrm{G}) \simeq \mathscr{R}$. [(2)]

[(1)] N.D.E. : Un tel principe a aussi été esquissé par B. Kostant [**Ko66**] ; une démonstration complète, utilisant les groupes quantiques, a été donnée récemment par G. Lusztig [**Lu09**].

[(2)] N.D.E. : Signalons aussi que l'ouvrage [**BT84**] de F. Bruhat et J. Tits contient une variante de la construction de Chevalley (*loc. cit.*, 2.2.3–2.2.5 et § 3.2), qui fournit en particulier un $\mathbb{Z}$-groupe lisse affine à fibres connexes G, possédant un tore maximal déployé, et dont la fibre générique est un $\mathbb{Q}$-groupe réductif de type $\mathscr{R}$; le fait que les fibres géométriques de G sont réductives découle de l'étude du radical unipotent d'une fibre spéciale faite dans *loc. cit.*, 4.6.12 et 4.6.15 (valables pour des G plus généraux, associés à une donnée radicielle valuée), mais il est plus simple de le déduire de la

En particulier :

Corollaire 1.3. — *Soit k un corps. Pour tout k-groupe réductif déployable* G_k*, il existe un $\mathbb{Z}$-groupe réductif* G *tel que* $\mathrm{G} \otimes_{\mathbb{Z}} k \simeq \mathrm{G}_k$*.*

Réciproquement, remarquons d'abord que pour prouver 1.2, il suffit par Exp. XXII 4.3.1 et Exp. XXI 6.5.10, de considérer le cas où la donnée radicielle $\mathscr{R}$ est simplement connexe (et même irréductible si on y tient, par Exp. XXI, 7.1.6).

D'autre part, sous les conditions de 1.3, le schéma en groupes G est de type constant (car Spec($\mathbb{Z}$) est connexe) donc de type $\mathscr{R}(\mathrm{G}_k)$; par Exp. XXIII, 5.9, il s'ensuit que la validité de 1.3 pour un groupe G_k donné entraîne l'existence d'un $\mathbb{Z}$-groupe *déployé* de type $\mathscr{R}(\mathrm{G}_k)$. [(3)]

Pour démontrer 1.2 et donc 1.1, il suffit donc de prouver 1.3 lorsque k est de caractéristique nulle (par exemple $k = \mathbb{C}$) et G_k simplement connexe (et en particulier semi-simple), ainsi que :

Proposition 1.4. — *Pour toute donnée radicielle réduite* simplement connexe $\mathscr{R}$*, il existe un $\mathbb{C}$-groupe algébrique semi-simple de type $\mathscr{R}$.*

On peut prouver 1.4 de la manière suivante. On sait d'abord qu'il existe une algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{g}$ de type $\mathscr{R}$, cf. par exemple, N. Jacobson, *Lie Algebras*, ch. VII, Th. 5. [(4)] Alors $\mathrm{G} = \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})^0$ est un $\mathbb{C}$-groupe algébrique semi-simple de type ad($\mathscr{R}$). [(5)] Par *Bible*, § 23.1, prop. 1, on en déduit l'existence d'un $\mathbb{C}$-groupe semi-simple de type $\mathscr{R}$.

Le reste de cet exposé est consacré à la démonstration de 1.3 pour k de caractéristique nulle et G_k semi-simple. Celle-ci se fera en deux temps : construction d'un « morceau de $\mathbb{Z}$-schéma en groupes » (n°2), étude du groupe obtenu par application du « théorème de Weil » (n°3).

412 Pour éviter des confusions, *nous n'utiliserons pas* dans le numéro 2 la notation

description de $\mathfrak{g} = \mathscr{L}ie(\mathrm{G})$, de Exp. XIX 1.12 (iii) et de l'existence des éléments $w_\alpha(\mathrm{X})$ de Exp. XX 3.1 (iv) (cf. [**BT84**], 3.2.1).

(3) N.D.E. : En fait, Exp. XXIII, 5.9 n'est pas nécessaire car le présent exposé construit, pour tout $\mathbb{Q}$-groupe semi-simple $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}}$, un $\mathbb{Z}$-groupe semi-simple G de même type que $\mathrm{G}_{\mathbb{Q}}$ et *muni d'un tore maximal déployé* T ; donc, d'après Exp. XXII 2.2, G est déployé.

(4) N.D.E. : Soient Δ une base de R et $\widetilde{\mathfrak{g}}$ la $\mathbb{C}$-algèbre de Lie engendrée par des générateurs $(e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ soumis aux relations $[h_\alpha, h_\beta] = 0$, $[e_\alpha, f_\beta] = h_\alpha$ si $\beta = \alpha$ et $= 0$ sinon, $[h_\alpha, e_\beta] = (\alpha^*, \beta)e_\beta$ et $[h_\alpha, f_\beta] = -(\alpha^*, \beta)f_\beta$. Dans *loc. cit.*, $\mathfrak{g}$ est définie comme le quotient de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ par l'intersection des noyaux des représentations irréductibles de dimension finie de $\widetilde{\mathfrak{g}}$; dans [**Se66**], § VI.5, Th. 9 (voir aussi [**BLie**], VIII, § 4.3, Th. 1) il est montré que $\mathfrak{g}$ est le quotient de $\widetilde{\mathfrak{g}}$ par les relations $(\mathrm{ad}(e_\alpha))^{1-(\alpha^*,\beta)}(e_\beta) = 0$ et $\mathrm{ad}(f_\alpha)^{1-(\alpha^*,\beta)}(f_\beta) = 0$). Pour une description explicite des constantes de structure (en particulier le choix des signes), voir Exp. XXIII 6.5 et 6.7 ainsi que [**Ti66**], § 4, Th. 1 et (pour les types A,D,E) [**Sp98**], 10.2.5.

(5) N.D.E. : On peut supposer $\mathscr{R}$ irréductible, donc $\mathfrak{g}$ *simple*. Par un argument général, on sait que Lie(G) est la $\mathbb{C}$-algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{g}$ (cf. [**DG70**], § II.4, Prop. 2.3), or celles-ci sont toutes intérieures (cf. [**BLie**], I § 6.1, cor. 3 de la prop. 1), donc $\mathrm{Lie}(\mathrm{G}) = \mathfrak{g}$; par conséquent G n'a pas de sous-groupe invariant de dimension > 0, donc G est semi-simple. Son système de racines est alors le même que celui de $\mathfrak{g}$; de plus le centre de G agit à la fois trivialement et fidèlement sur $\mathfrak{g}$, donc est trivial, donc G est adjoint.

abrégée X_k pour désigner le k-schéma $X \otimes_{\mathbb{Z}} k$, où X est un $\mathbb{Z}$-schéma.

2. Théorème d'existence : construction d'un morceau de groupe

2.1. Choisissons une fois pour toutes un déploiement de G_k, noté

$$(G_k, T_k, M, R)$$

(cf. Exp. XXII, 1.13), un système de racines simples Δ de R (définissant le système de racines positives R_+), un *système de Chevalley* $(X_{\alpha,\,k})_{\alpha\in R}$ de G_k (Exp. XXIII, 6.1 et 6.2) vérifiant la condition supplémentaire suivante (cf. XX 2.6) : pour tout $\alpha \in R$, on a

$$X_{\alpha,k}\, X_{-\alpha,k} = 1.$$

Choisissons enfin sur le sous-groupe de M engendré par R une relation d'ordre total compatible avec la structure de groupe, telle que les racines > 0 soient les éléments de R_+. On note alors les racines

$$-\alpha_n < -\alpha_{n-1} < \cdots < -\alpha_1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n.$$

Pour $\alpha \in R$, on note $U_{\alpha,\,k}$ le groupe vectoriel correspondant à la racine α et

$$p_{\alpha,k} : \mathbb{G}_{a,\,k} \xrightarrow{\sim} U_{\alpha,\,k}$$

l'isomorphisme de groupes vectoriels défini par $X_{\alpha,\,k}$.

2.2. Le déploiement de G_k comporte en particulier un isomorphisme de k-groupes

$$T_k \simeq D_k(M).$$

Posons $T = D(M)$; c'est un $\mathbb{Z}$-tore, et on peut considérer l'isomorphisme précédent 413
comme un isomorphisme

$$T_k \simeq T \otimes_{\mathbb{Z}} k.$$

On a

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\text{-gr.}}(T, \mathbb{G}_m) = M,$$

et on considérera les éléments de $R \subset M$ comme des caractères de T. On considérera de même les éléments de R^* comme des morphismes de $\mathbb{Z}$-groupes $\mathbb{G}_m \to T$.

2.3. Pour chaque $\alpha \in R_+$, soit $\mathbb{G}_a(\alpha)$ une copie du groupe $\mathbb{G}_a$; considérons le $\mathbb{Z}$-schéma

$$U = \mathbb{G}_a(\alpha_1) \times \cdots \times \mathbb{G}_a(\alpha_n).$$

Si U_k désigne la partie unipotente du groupe de Borel B_k de G_k défini par R_+, notons

$$a : \quad U \otimes_{\mathbb{Z}} k \xrightarrow{\sim} U_k$$

l'isomorphisme de k-schémas défini par

$$a(x_1, \ldots, x_n) = p_{\alpha_1,\,k}(x_1) \cdots p_{\alpha_n,k}(x_n).$$

2.4. La loi de groupe de U_k se traduit par des relations de la forme

$$a(x_1, \dots, x_n) \cdot a(y_1, \dots, y_n) = a(z_1, \dots, z_n),$$

où chaque z_h $(h = 1, \dots, n)$ s'exprime comme un polynôme

$$z_h = x_h + y_h + \mathrm{Q}_h(x_1, \dots, x_{h-1}, y_1, \dots, y_{h-1}),$$

les coefficients de Q_h étant *entiers* (Exp. XXII, 5.5.8 et Exp. XXIII, 6.4). De plus $\mathrm{Q}_h(x_1, \cdots, x_{h-1}, 0, \cdots, 0) = 0$.

414 Munissons U de la loi composition définie par les formules précédentes (qui sont bien « définies sur $\mathbb{Z}$ »). Comme cette loi induit sur U_k sa loi de groupe, elle est associative, et (0) en est un élément unité (en effet, les deux assertions précédentes s'expriment par des relations entre les polynômes Q_h, et $\mathbb{Z} \to k$ est injectif). Montrons que c'est une loi de groupe : si (x_i) est une section de U (sur un S quelconque), on calcule l'inverse (y_i) de (x_i) par les formules récurrentes :

$$y_i = -x_i - \mathrm{Q}_i(x_i, \cdots, x_{i-1}, y_1, \cdots, y_{i-1})$$

qui sont encore « définies sur $\mathbb{Z}$ ».

En résumé, nous avons construit sur U une loi de groupe telle que l'isomorphisme a précédent soit un isomorphisme de groupes.

Pour chaque $\alpha \in \mathrm{R}_+$, considérons le morphisme

$$p_\alpha : \mathbb{G}_a \longrightarrow \mathrm{U}$$

défini par $p_\alpha(x) = (x_i)$ où $\begin{cases} x_i = x & \text{si} \quad \alpha_i = \alpha \\ x_i = 0 & \text{si} \quad \alpha_i \neq \alpha. \end{cases}$

C'est une immersion fermée et un homomorphisme de groupes ; on note U_α son image. On a $(x_i) = p_{\alpha_1}(x_1) \cdots p_{\alpha_n}(x_n)$, ce qui prouve que U s'identifie au produit

$$\mathrm{U} = \mathrm{U}_{\alpha_1} \cdot \mathrm{U}_{\alpha_2} \cdots \mathrm{U}_{\alpha_n}.$$

2.5. Faisons opérer $\mathrm{T} = \mathrm{D(M)}$ sur chaque U_α par l'intermédiaire du caractère α ; on vérifie aussitôt que cela définit une opération de T sur le groupe U et on peut construire le produit semi-direct $\mathrm{B} = \mathrm{T} \cdot \mathrm{U}$. On a un isomorphisme canonique de k-groupes

$$\mathrm{B} \otimes_{\mathbb{Z}} k \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}_k.$$

415 Si nous prenons maintenant un ordre *quelconque* sur R_+, le morphisme

$$\prod_{\alpha \in \mathrm{R}_+} \mathrm{U}_\alpha \longrightarrow \mathrm{U}$$

défini par le produit dans U est encore un isomorphisme. En effet, comme les deux membres sont des $\mathbb{Z}$-schémas plats et de présentation finie, on peut se contenter de vérifier l'assertion sur les fibres géométriques ; on est alors ramené à la théorie de Lazard (*Bible*, § 13.1, prop. 1) : on considère U comme groupe à opérateurs T, et on utilise le fait que les U_α sont deux à deux non isomorphes comme groupes à opérateurs (car les caractères $\alpha \in \mathrm{R}_+$ de T sont deux à deux distincts sur chaque fibre).

2.6. Remplaçant R_+ par $\mathrm{R}_- = -\mathrm{R}_+$, on construit de même des groupes U^-, B^-, U_α ($\alpha \in \mathrm{R}_-$) et des isomorphismes

$$p_\alpha : \mathbb{G}_a \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_\alpha, \qquad \alpha \in \mathrm{R}_-.$$

Introduisons enfin le schéma produit

$$\Omega = \mathrm{U}^- \times \mathrm{T} \times \mathrm{U};$$

on a un isomorphisme canonique de k-schémas

$$\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} k \xrightarrow{\sim} \mathrm{U}_k^- \times_k \mathrm{T}_k \times_k \mathrm{U}_k \simeq \Omega_k,$$

où Ω_k est la « grosse cellule » de G_k (Exp. XXII, 4.1.2).

À partir de maintenant, nous identifions $\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} k$ à Ω_k par l'isomorphisme précédent ; nous considérons U^-, T, U comme des sous-schémas de Ω, par l'intermédiaire des sections unités. On note $\underline{e} = ((0), e, (0))$ la « section unité » de Ω.

Notre but est maintenant de mettre une loi de morceau de groupe sur Ω.

Lemme 2.7. — *Soit $\alpha \in \Delta$, et soit $w_{\alpha,k}$ l'élément de* $\mathrm{Norm}_{\mathrm{G}_k}(\mathrm{T}_k)(k)$ *défini par* $\mathrm{X}_{\alpha,k}$ **416**
(*rappelons que l'on a par définition*

$$w_{\alpha,k} = p_{-\alpha,k}(-1)p_{\alpha,k}(1)p_{-\alpha,k}(-1)\ ).$$

Il existe un ouvert V_α *de* Ω*, contenant la section* $\underline{e}$*, et un morphisme*

$$h_\alpha : \mathrm{V}_\alpha \longrightarrow \Omega,$$

vérifiant les conditions suivantes :

(i) $h_\alpha(\underline{e}) = \underline{e}$,

(ii) $(h_\alpha) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ *coïncide avec la restriction de* $int(w_{\alpha,k})$ *à* $\mathrm{V}_\alpha \otimes_{\mathbb{Z}} k \subset \mathrm{G}_k$.

(iii) *On a* $\mathrm{T} \subset \mathrm{V}_\alpha$ *et* h_α *envoie* T *dans* T. *Pour tout* $\beta \in \mathrm{R}$*, on a* $\mathrm{U}_\beta \subset \mathrm{V}_\alpha$ *et* h_α *envoie* U_β *dans* $\mathrm{U}_{s_\alpha(\beta)}$.

En vertu de la définition d'un système de Chevalley (Exp. XXIII, 6.1), il existe pour chaque $\beta \in \mathrm{R}$ un entier $e_\beta = \pm 1$ tel que

$$\mathrm{int}(w_{\alpha,k})p_{\beta,\,k}(x) = p_{s_\alpha(\beta),\,k}(e_\beta\, x)$$

pour tout $x \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S})$, $\mathrm{S} \to \mathrm{Spec}(k)$.

Soit S un schéma quelconque, écrivons un élément quelconque de $\Omega(\mathrm{S})$ sous la forme

$$u = \left(\Big(\prod_{\substack{\beta \in \mathrm{R}_- \\ \beta \neq -\alpha}} p_\beta(x_\beta) \Big) \cdot p_{-\alpha}(x_{-\alpha}), \quad t, \quad p_\alpha(x_\alpha) \cdot \Big(\prod_{\substack{\beta \in \mathrm{R}_+ \\ \beta \neq \alpha}} p_\beta(x_\beta) \Big) \right),$$

où on a choisi un ordre (quelconque) sur $\mathrm{R}_- - \{-\alpha\}$ et $\mathrm{R}_+ - \{\alpha\}$ (cf. 2.5).

On définit un morphisme $d : \Omega \to \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ par **417**

$$d(u) = \alpha(t) + x_\alpha x_{-\alpha}.$$

Soit V_α l'ouvert Ω_d (c'est-à-dire l'ouvert de Ω défini par « $d(u)$ inversible ») ; il contient $\underline{e}$, T, et chaque U_β, $\beta \in \mathrm{R}$. Soit

$$h_\alpha : \mathrm{V}_\alpha \longrightarrow \Omega$$

le morphisme défini par $h_\alpha(u) = (a(u), b(u), c(u))$ où

$$\begin{aligned} a(u) &= \Bigg(\prod_{\substack{\beta\in\mathrm{R}_-\\ \beta\neq-\alpha}} p_{s_\alpha(\beta)}(e_\beta x_\beta)\Bigg)\cdot p_{-\alpha}\big(-x_\alpha d(u)^{-1}\big)\\ b(u) &= t\cdot\alpha^*(d(u)),\\ c(u) &= p_\alpha\big(-x_{-\alpha}d(u)^{-1}\big)\cdot\Bigg(\prod_{\substack{\beta\in\mathrm{R}_+\\ \beta\neq\alpha}} p_{s_\alpha(\beta)}(e_\beta x_\beta)\Bigg). \end{aligned}$$

Comme s_α permute les racines positives (resp. négatives) distinctes de α (resp. $-\alpha$), alors $c(u)$ (resp. $a(u)$) est une section de U (resp. U^-) et le morphisme précédent est bien défini. Il vérifie trivialement (i) et (iii). Quant à (ii), cela résulte aussitôt de la définition des e_β, $\beta \in \mathrm{R}$, et de Exp. XX, 3.12.

Lemme 2.8. — *Il existe des ouverts* V *et* V′ *de* Ω *et des morphismes*

$$h : \mathrm{V} \longrightarrow \Omega, \qquad h' : \mathrm{V}' \longrightarrow \Omega,$$

vérifiant les conditions suivantes :

(i) V *et* V′ *contiennent* $\underline{e}$, *et* $h(\underline{e}) = h'(\underline{e}) = \underline{e}$.

418 (ii) *Le morphisme induit par* $h' \circ h : h^{-1}(\mathrm{V}') \to \Omega$ *est la restriction du morphisme identique.*

(iii) *Les* k*-morphismes* $h \otimes_{\mathbb{Z}} k$ *et* $h' \otimes_{\mathbb{Z}} k$ *sont la restriction à* $\mathrm{V} \otimes_{\mathbb{Z}} k$ *et* $\mathrm{V}' \otimes_{\mathbb{Z}} k$ *d'automorphismes du groupe* G_k.

(iv) V *et* V′ *contiennent* U, T *et* U^- ; h *et* h' *envoient* U *dans* U^-, U^- *dans* U, *et* T *dans* T.

Soit $\overline{w}_0$ l'élément du groupe de Weyl de G_k qui transforme R_+ en R_-. Écrivons

$$\overline{w}_0 = s_{\alpha_n} \cdots s_{\alpha_1}, \qquad \alpha_i \in \Delta$$

(aucun rapport avec la numérotation de 2.1). Posons

$$w_0 = w_{\alpha_n, k} \cdots w_{\alpha_1, k} \in \underline{\mathrm{Norm}}_{\mathrm{G}_k}(\mathrm{T}_k)(k).$$

Définissons par récurrence sur $i \leqslant n$ un ouvert V_i de Ω et un morphisme $h_i : \mathrm{V}_i \to \Omega$ par $\mathrm{V}_0 = \Omega$, $h_0 = \mathrm{id}$, et, pour $i = 0, \ldots, n-1$,

$$\mathrm{V}_{i+1} = h_i^{-1}(\mathrm{V}_{\alpha_{i+1}}), \qquad h_{i+1} = h_{\alpha_{i+1}} \circ h_i,$$

où les notations V_{α_j} et h_{α_j} sont celles de 2.7.

Prenons $V = V_n$ et $h = h_n$. Les conditions de (i), (iii) et (iv) portant sur V et h sont bien vérifiées ; pour (i) et (iii) cela résulte aussitôt de 2.8, pour (iv), de ce que $h \otimes_{\mathbb{Z}} k$ est la restriction de $\mathrm{int}(w_0)$ à $V \otimes_{\mathbb{Z}} k$.

Comme $(\overline{w}_0)^2 = 1$, on a aussi

$$\overline{w}_0 = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n} = (s_{\alpha_1}^3) \cdots (s_{\alpha_n}^3).$$

Posant 419

$$w_0' = (w_{\alpha_1, k})^3 \cdots (w_{\alpha_n, k})^3,$$

et effectuant la même construction que ci-dessus, on en déduit un ouvert V' et un morphisme h' vérifiant également (i), (iii), (iv). De plus, $h' \otimes_{\mathbb{Z}} k$ est la restriction de $\mathrm{int}(w_0')$ à $V' \otimes_{\mathbb{Z}} k$. Mais pour chaque racine simple $\alpha \in \Delta$, on a $(w_{\alpha, k})^4 = e$ (cf. Exp. XX, 3.1), donc $w_0' \cdot w_0 = e$, ce qui montre que $h' \circ h$ induit le morphisme identique dans un ouvert non vide de $\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} k$. Mais Ω étant lisse et de présentation finie sur $\mathbb{Z}$, $\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} k$ est schématiquement dense dans Ω, ce qui prouve (ii).

Proposition 2.9. — *Il existe un ouvert* V_1 *de* $\Omega \times \Omega$*, un ouvert* V_2 *de* Ω*, des morphismes*

$$\pi : V_1 \longrightarrow \Omega, \qquad \sigma : V_2 \longrightarrow \Omega,$$

possédant les propriétés suivantes :

(i) *Si* $x \in \Omega(S)$*, alors* $(\underline{e}, x)$ *et* $(x, \underline{e})$ *sont des sections de* V_1 *et*

$$\pi(\underline{e}, x) = \pi(x, \underline{e}) = x.$$

(ii) V_2 *contient* $\underline{e}$ *et* $\sigma(\underline{e}) = \underline{e}$.

(iii) π_k *et* σ_k *sont la restriction des morphismes* $G_k \times_k G_k \to G_k$ *et* $G_k \to G_k$ *définis par le produit* (*resp. l'inverse*).

Démonstration. Soient (v, t, u) et (v', t', u') deux sections de Ω. Alors $h(u)$ est une section de U^-, $h(v')$ est une section de U par 2.8 (iv) et on peut donc considérer $(h(u), e, h(v'))$ comme une section de Ω. Soit V_1 l'ouvert de $\Omega \times \Omega$ défini par la condition :

$$\big((v, t, u), (v', t', u')\big) \in V_1(S) \Longleftrightarrow (h(u), e, h(v')) \in V'(S)$$

(notations de 2.8). Si $\big((v, t, u), (v', t', u')\big)$ est une section de V_1, alors $h'(h(u), e, h(v'))$ 420
est défini ; c'est une section de Ω que l'on peut décomposer :

$$h'(h(u), e, h(v'))) = (v'', t'', u'').$$

On pose alors

$$\pi\big((v, t, u), (v', t', u')\big) = (v \cdot tv''t^{-1},\ tt''t',\ t'^{-1}u''t' \cdot u').$$

La vérification de (i) est immédiate (par 2.8 (ii)). Pour vérifier la condition de (iii) portant sur π, on voit que

$$h'(h(u), e, h(v')) = uv' = v''t''u''$$

lorsque $u \in U(S)$, $v \in U^-(S)$, $S \to k$, en vertu de 2.8 (iii) et (ii). On construit σ de manière semblable : si (v, t, u) est une section de Ω, $h(u^{-1})$ est une section de U^-,

$h(v^{-1})$ une section de U, $h(t^{-1})$ une section de T, donc $(h(u^{-1}), h(t^{-1}), h(v^{-1}))$ est une section de Ω et on peut définir un ouvert V_2 de Ω par

$$(v,t,u) \in \mathrm{V}_2(\mathrm{S}) \Longleftrightarrow (h(u^{-1}), h(t^{-1}), h(v^{-1})) \in \mathrm{V}'(\mathrm{S})$$

et un morphisme $\sigma : \mathrm{V}_2 \to \Omega$ par

$$\sigma(v,t,u) = h'(h(u^{-1}), h(t^{-1}), h(v^{-1})).$$

On vérifie les conditions sur σ comme ci-dessus.

Corollaire 2.10. — *π est « génériquement associatif » et σ est un « inverse générique » : si x, y, $z \in \Omega(\mathrm{S})$ et si les expressions ci-dessous sont définies (ce qui se produit toujours au-dessus d'un ouvert de Ω contenant la section unité), on a :*

$$\pi(x, \pi(y,z)) = \pi(\pi(x,y),z), \qquad \pi(x,\sigma(x)) = \underline{e} = \pi(\sigma(x),x).$$

421 En effet, les deux membres de chacune de ces formules définissent des morphismes entre $\mathbb{Z}$-schémas lisses et de présentation finie, qui coïncident sur les fibres génériques, par 2.10 (iii).

Corollaire 2.11. — *Soit $\alpha \in \mathrm{R}$. Pour tout S et tous x, $y \in \mathbb{G}_a(\mathrm{S})$ tels que $(p_\alpha(x), p_{-\alpha}(y)) \in \mathrm{V}_1(\mathrm{S})$ et $1+xy \in \mathbb{G}_m(\mathrm{S})$ (ce qui définit un ouvert de $\mathbb{G}^2_{a,\mathrm{S}}$ contenant la section $(0,0)$), on a :*

$$\pi(p_\alpha(x), p_{-\alpha}(y)) = \left(p_{-\alpha}\left(\frac{y}{1+xy}\right), \alpha^*(1+xy), p_\alpha\left(\frac{x}{1+xy}\right)\right).$$

La démonstration est la même que précédemment, par Exp. XX, 2.1.

3. Théorème d'existence : fin de la démonstration

Posons pour simplifier le langage la définition suivante.

Définition 3.1. — Soient S un schéma et G un S-schéma en groupes. On dit que G est *admissible* s'il existe une immersion ouverte de S-schémas $i : \Omega_\mathrm{S} = \Omega \times \mathrm{S} \to \mathrm{G}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{V}_1)_\mathrm{S} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & \Omega_\mathrm{S} \times_\mathrm{S} \Omega_\mathrm{S} \arrow[r, "i \times_\mathrm{S} i"] & \mathrm{G} \times_\mathrm{S} \mathrm{G} \arrow[d, "\pi_\mathrm{G}"] \\
\Omega_\mathrm{S} \arrow[rr, "i_\mathrm{S}"] & & \mathrm{G},
\end{tikzcd}$$

où l'on note π_G le morphisme de multiplication dans G, est commutatif.

(ii) Il existe un ensemble fini de sections $a_j \in \Omega(\mathrm{S})$ tel que les $i(a_j)\cdot i(\Omega_\mathrm{S})$ recouvrent G.

422 Par le « théorème de Weil » (Exp. XVIII, 3.13 (iii) et (iv)), on a :

Lemme 3.2. — *Si pour tout schéma S étale et de type fini sur $\mathbb{Z}$, tout S-groupe admissible est affine, alors il existe un $\mathbb{Z}$-groupe admissible et affine.*

Or on a :

Lemme 3.3. — *Soient* S *un schéma et* G *un* S-*groupe admissible. Alors* G *est lisse et de présentation finie sur* S, *à fibres affines connexes et semi-simples.*

Comme Ω_S est lisse et de présentation finie sur S, à fibres connexes, il en est de même pour G, en vertu de la condition (ii). Pour vérifier 3.3, on peut donc supposer que S est le spectre d'un corps K. Identifions Ω_K à son image dans G. Il est clair que Ω_K est le produit

$$\prod_{\alpha\in R_-} U_{\alpha,K}\cdot T_K\cdot\prod_{\alpha\in R_+} U_{\alpha,K}$$

des sous-groupes T_K et $U_{\alpha,K}$ ($\alpha\in R$) de G. L'algèbre de Lie de G s'identifie donc à la somme directe

$$\mathrm{Lie}(T_K)\bigoplus\coprod_{\alpha\in R}\mathrm{Lie}(U_{\alpha,K}).$$

Comme l'automorphisme intérieur défini par une section de T_K opère dans $U_{\alpha,K}$, et donc dans $\mathrm{Lie}(U_{\alpha,K})$, par l'intermédiaire du caractère

$$\alpha\in R\subset M\simeq\mathrm{Hom}_{K\text{-gr.}}(T_K,\mathbb{G}_{m,K}),$$

la décomposition précédente de Lie(G) est exactement la décomposition sous l'opération adjointe de T. Les racines de G_K par rapport à T_K sont donc les $\alpha\in R$. Appliquons Exp. XIX, 1.13. Soit T_α le tore maximal de $\mathrm{Ker}(\alpha)\subset T_K$ et soit $Z_\alpha=\underline{\mathrm{Centr}}_G(T_\alpha)$; il nous suffit de prouver que chaque Z_α est réductif. Or $Z_\alpha\cap\Omega_K$ n'est autre que

$$\prod_{\substack{\beta\in R_-\\ \beta|_{T_\alpha}=e}} U_{\beta,K}\cdot T_K\cdot\prod_{\substack{\beta\in R_+\\ \beta|_{T_\alpha}=e}} U_{\beta,K};$$

mais les racines nulles sur T_α sont les multiples rationnels de α, donc α et $-\alpha$; ce qui **423**
prouve

$$Z_\alpha\bigcap\Omega_K=U_{-\alpha,K}\cdot T_K\cdot U_{\alpha,K}.$$

Pour prouver que Z_α est réductif il suffit, en vertu de Exp. XX 3.4, de prouver que $U_{\alpha,K}$ et $U_{-\alpha,K}$ ne commutent pas, ce qui résulte aussitôt de 2.11.

Il résulte de 3.2 et 3.3 que la démonstration sera achevée si nous prouvons :

Lemme 3.4. — *Si* S *est un schéma localement noethérien de dimension* $\leqslant 1$, *et si* G *est un* S-*groupe lisse et de type fini, à fibres affines connexes et semi-simples, alors* G *est* affine (*et donc semi-simple*).

Nota. — Dans Exp. XVI, on a vu que 3.4 est vrai sans hypothèse sur S, mais la démonstration est relativement délicate ; comme ici nous n'avons besoin que du cas particulier 3.4, nous en donnons une démonstration directe.

Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, qui est un $\mathscr{O}_S$-module localement libre, et la représentation adjointe de G

$$\mathrm{Ad}: G\longrightarrow \mathrm{GL}_{\mathscr{O}_S}(\mathfrak{g}).$$

Pour prouver que G est affine sur S, il suffit de prouver que le morphisme Ad est affine. Comme G est lisse et à fibres connexes, il est séparé sur S ($\mathrm{VI_B}$ 5.5) donc le morphisme Ad est séparé. Utilisant un résultat démontré en appendice (voir 4.1), il suffit de prouver que le morphisme Ad est quasi-fini. On est donc ramené au cas où S est le spectre d'un corps ; en ce cas G est affine, donc semi-simple, et on est ramené à Exp. XXII 5.7.14.

4. Appendice

424 Nous avons utilisé en cours de démonstration la proposition suivante :

Proposition 4.1. — *Soient* S *un schéma localement noethérien* de dimension $\leqslant 1$, G *et* H *deux* S*-schémas en groupes de type fini,* $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *un morphisme de groupes* quasi-fini et séparé. *Si* G *est plat sur* S, [(6)] *alors* f *est affine.*

Nous ne ferons la démonstration que dans le cas où G est lisse sur S, hypothèse qui est bien vérifiée dans l'application que nous avons faite de la proposition.

4.2. Par EGA II, 1.6.4, on peut supposer S réduit. Par les techniques habituelles de passage à la limite, [(7)] on peut supposer S local. Si $\dim(\mathrm{S}) = 0$, l'assertion est triviale, [(8)] supposons $\dim(\mathrm{S}) = 1$. Par descente fidèlement plate, on peut supposer que S est complet à corps résiduel algébriquement clos. Quitte à remplacer S par son normalisé $\widetilde{\mathrm{S}}$, on peut (EGA II, 6.7.1 et EGA 0_{IV} 23.1.5) supposer S normal. [(9)] On est donc ramené au cas où S est le spectre d'un anneau de valuation discrète complet A à corps résiduel algébriquement clos.

4.3. Soit η (resp. s) le point générique (resp. fermé) de S. Considérons l'image $f_\eta(\mathrm{G}_\eta)$ de G_η dans H_η. C'est un sous- schéma en groupes fermé de H_η. Soit H' l'adhérence schématique dans H de $f_\eta(\mathrm{G}_\eta)$. Comme $\mathrm{H}' \to \mathrm{H}$ est affine (c'est une immersion fermée), on peut remplacer H par H' et donc supposer H plat sur S et f_η surjectif. Comme f_η est fini, G et H plats sur S, on a

$$\dim(\mathrm{G}_s) = \dim(\mathrm{G}_\eta) = \dim(\mathrm{H}_\eta) = \dim(\mathrm{H}_s).$$

4.4. Soient $\mathrm{H}_s^0, \dots, \mathrm{H}_s^n$ les composantes irréductibles de H_s, où H_s^0 désigne la com-
425 posante neutre, et soient $z_0, \dots, z_n$ leurs points génériques. Comme chaque anneau local $\mathscr{O}_{\mathrm{H},z_i}$ est de dimension $\leqslant 1$, le morphisme $\mathrm{G} \times_{\mathrm{H}} \mathscr{O}_{\mathrm{H},z_i} \to \mathscr{O}_{\mathrm{H},z_i}$ est affine car quasi-fini et séparé (cf. Exp. XVI, lemme 4.2), donc G est affine sur H au voisinage de z_i. Notant V le plus grand ouvert de H tel que $\mathrm{G}|_{\mathrm{V}}$ soit affine sur V, il en résulte

(6) N.D.E. : Nous avons ajouté l'hypothèse de platitude qui avait été omise.

(7) N.D.E. : cf. EGA IV_3, 8.10.5 (viii).

(8) N.D.E. : En effet, si $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}(k)$ (k un corps), alors f est la composée de la projection $p : \mathrm{G} \to \mathrm{G}/\mathrm{Ker}(f)$ et d'une immersion fermée i, et comme $\mathrm{Ker}(f)$ est fini sur k, alors p est fini ($\mathrm{VI_B}$ 9.2).

(9) N.D.E. : En effet, les composantes irréductibles $\mathrm{S}_1, \dots, \mathrm{S}_r$ de S sont des schémas locaux noethériens intègres complets donc, d'après un théorème de Nagata (cf. EGA 0_{IV}, 23.1.5) le normalisé $\widetilde{\mathrm{S}}_i$ est fini sur S_i, et donc $\widetilde{\mathrm{S}}$ est fini sur S. Alors, d'après un théorème de Chevalley (cf. EGA II, 6.7.1), si $f \times_{\mathrm{S}} \widetilde{\mathrm{S}}$ est un morphisme affine, il en est de même de f.

que V contient tous les z_i,[10] donc contient au moins un point fermé $y_i \in \mathrm{H}_s^i$ (et on a $\kappa(y_i) = \kappa(s)$ puisque $\kappa(s)$ est algébriquement clos).

D'autre part, V est évidemment stable par la translation définie par un élément quelconque $g \in \mathrm{G}(\mathrm{S})$. Mais on a $\dim(\mathrm{G}_s) = \dim(\mathrm{H}_s)$ et f_s est fini, donc

$$f(s): \quad \mathrm{G}_s^0(s) \longrightarrow \mathrm{H}_s^0(s)$$

est surjectif. Comme A est complet et G lisse sur S, l'application canonique $\mathrm{G}^0(\mathrm{S}) \to \mathrm{G}_s^0(s)$ est surjective ; comme $\mathrm{H}_s^0(s)$ opère transitivement dans chaque $\mathrm{H}_s^i(s)$, il en résulte que $\mathrm{V} \supset \mathrm{H}_s(s)$, donc ($\kappa(s)$ étant algébriquement clos) $\mathrm{V} \supset \mathrm{H}_s$.[11]

Comme on a évidemment $\mathrm{V} \supset \mathrm{H}_\eta$, puisque f_η est fini, on a donc $\mathrm{V} = \mathrm{H}$. C.Q.F.D.

Bibliographie

[12]

[BLie] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. I et VII-VIII, Hermann, 1960 et 1975.

[BT84] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local* II. *Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, Publ. Math. I.H.É.S. **60** (1984), 5-184.

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson & North-Holland, 1970.

[Ko66] B. Kostant, *Groups over* $\mathbb{Z}$, pp. 90-98 *in* : Algebraic groups and their discontinuous subgroups (eds. A. Borel & G. D. Mostow), Proc. Symp. Pure Math. IX, Amer. Math. Soc., 1966.

[Lu09] G. Lusztig, *Study of a* $\mathbb{Z}$*-form of the coordinate ring of a reductive group*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), n°3, 739-769.

[Se66] J.-P. Serre, *Algèbres de Lie semi-simples complexes*, Benjamin, 1966.

[Sp98] T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, 2nd ed., Birkhaüser, 1998.

[Ti66] J. Tits, *Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples*, Publ. Math. I.H.É.S. **31** (1966), 21-58.

---

[10] N.D.E. : On a ajouté la phrase qui suit.

[11] N.D.E. : Lorsque G n'est pas supposé lisse sur S, on peut procéder comme suit. Soient h_0 un point rationnel de H_s^0 et g_0 un point rationnel de G_s^0 tel que $f(g_0) = h_0$. D'après $\mathrm{VI_B}$ 5.6.1, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{S}'' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\phi"] & \mathrm{G} \arrow[d] \\
\mathrm{S}' \arrow[r, "w"] & \mathrm{S}
\end{tikzcd}$$

où w est étale et surjectif, π fini et surjectif, et $\phi^{-1}(s)$ est formé d'un seul point s'' tel que $g(s'') = g_0$. Alors le morphisme $\mathrm{G}_{\mathrm{S}''} \to \mathrm{H}_{\mathrm{S}''}$ est affine au-dessus d'un voisinage de $h_0 y_i$, et il en est de même de $\mathrm{G}_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{H}_{\mathrm{S}'}$ (EGA II, 6.7.1) puis de $\mathrm{G} \to \mathrm{H}$ par descente fidèlement plate (EGA IV_2, 2.7.1 (xiii)). Donc $h_0 y_i \in \mathrm{V}$, et il en résulte que V contient $\mathrm{H}_s(s)$ et donc H_s.

[12] N.D.E. : références additionnelles citées dans cet Exposé.