L' *Éloge des mathématiques* d'Alain Badiou ou le fantasme d'une théorie absolue

Pierre Schapira*

31 octobre 2016

Ainsi qu'il l'annonce dans son ouvrage [1], Alain Badiou fait l' *Éloge des mathématiques*. Louable entreprise et tout mathématicien ne peut que se réjouir de cet éloge, à moins bien sûr qu'il ait mauvais esprit. Et ce d'autant plus que Badiou étend son éloge aux mathématiciens ce qui, soit dit en passant, est une tout autre affaire. À la lecture de ce titre, on peut se demander : pourquoi un éloge des mathématiques ? En ont-elles besoin ? Il faut se méfier des hommages qui ne sont souvent que prétexte à parler de soi ou à faire passer des idées étrangères au sujet. Et à la lecture du livre se pose une autre question : pourquoi un éloge des mathématiciens ? De l'éloge à la flatterie, il n'y a qu'un pas.

L'ambition de ce texte est de mettre en évidence l'incompréhension qu'a Badiou de ce que sont vraiment les mathématiques, sa méconnaissance des mathématiques et du monde des mathématiciens, et de dénoncer l'usage qu'il fait de la théorie des ensembles dans des contextes où celle-ci n'a rien à faire.

Que sont les mathématiques ?

Les mathématiques sont-elles une suite d'énoncés logiques, un langage formel, comme le soutient la philosophie analytique, ou bien le langage universel de la Nature et des Idées, vision platonicienne revendiquée par Badiou ? Cette antinomie anime un débat toujours actuel. Je crois que quiconque pratique les mathématiques éprouve une relation presque physique avec cette discipline, il s'agit d'un monde vivant, qui existe indépendamment de nous et que l'on crée à la fois. Dans la recherche, l'intuition est première et la logique (la vérification) est seconde. Malheureusement, si Badiou prétend défendre ce point de vue, une bonne partie de son livre dit le contraire. Pour lui, un énoncé mathématique est juste ou faux « Et si la démonstration est fausse, on le lui dira. » (page 30), ce que personne ne conteste, mais là

*Sorbonne Universités, UPMC Paris 6, Institut de Mathématiques de Jussieu. Adresse electronique pierre.schapira@imj-prg.fr. url : http ://webusers.imj-prg.fr/~pierre.schapira/

1. Alain Badiou avec Gilles Haéri, *Éloge des mathématiques*, Paris, Flammarion, 2015. Dans ce livre, Alain Badiou répond à une série de questions posées par Gilles Haéri. Note pour la suite : les références dans le texte ne comportant que l'indication de la page renvoient à cet *Éloge*.

n'est pas le problème. D'ailleurs il y a eu dans l'histoire des énoncés faux qui se sont révélés fertiles et il ne faut pas oublier que l'écrasante majorité des articles publiés, sans être radicalement faux, contiennent leur quota d'erreurs.

Badiou, parce qu'il fréquente les mathématiques en amateur éclairé et qu'il ne prétend pas les faire progresser, ne peut répondre à la question essentielle : qu'est-ce qui fait qu'un énoncé mathématique est intéressant ou non ? Qu'est-ce qui différencie un énoncé formel d'un énoncé porteur de sens, d'idées nouvelles, de concepts nouveaux, etc. La même question se pose dans d'autres domaines, comme l'art, et la réponse n'est pas évidente. S'il est bien sûr nécessaire qu'un texte mathématique soit essentiellement juste, cette problématique du vrai et du faux est très secondaire et n'apporte rien à la compréhension de ce que sont les mathématiques.

Il semble malheureusement que le grand public, y compris sa composante la plus éduquée, n'ait aucune idée de la réponse. Je ne peux qu'approuver Badiou lorsqu'il écrit « Les mathématiques [...] devraient [...] faire partie intégrante de notre culture générale » (page17). On rencontre en effet des gens qui seront scandalisés si vous ne connaissez pas la différence entre art gothique et art roman mais qui eux ne savent pas la différence entre un nombre rationnel et un nombre irrationnel. D'ailleurs, qui, hormis les mathématiciens, sait ce qu'est un nombre rationnel ?

La plupart des non-scientifiques réduisent les mathématiques à la théorie des nombres et un peu de géométrie plane. C'est une vision archaïque qui ne correspond en rien à la pratique quotidienne des chercheurs de cette discipline. Quel est l'objet des mathématiques, de quoi parlent-elles ? Je défends la thèse que les concepts mathématiques ne diffèrent pas fondamentalement des concepts philosophiques, ni même des idées du quotidien. Cela ne veut pas dire que les mathématiques valident l'intuition ordinaire, c'est même souvent le contraire comme on le voit par exemple avec la notion d'infini. Les mathématiques traitent dans un langage spécifique, celui de la théorie des ensembles (dite axiomatique ZFC, pour Zermelo, Fraenkel et l'axiome du choix) [2], de très nombreuses questions de tous les jours et de très nombreux sujets. Si chaque sujet a ses axiomes, son style et ses théorèmes, il est en général extrêmement fécond de construire des ponts entre différents sujets, ce que l'on traduit en langage des catégories par « trouver des équivalences de catégories ». La symétrie miroir de la théorie des cordes (en physique), dans sa traduction mathématique par Maxim Kontsevich, en est un exemple remarquable.

Au début de leur histoire, les mathématiques s'identifient à la théorie des nombres et à la géométrie Euclidienne classique. On a maintenant une vision assez claire de ce que sont les nombres entiers et leurs opérations, l'addition, la multiplication, le nombre 0 et le nombre 1, autant de choses évidentes aujourd'hui mais qui ne l'ont pas toujours été. On sait depuis Euclide ce qu'est un nombre premier et qu'il en existe une infinité, ce qui présuppose d'avoir une notion (vague) de l'infini. On sait depuis 1993-95, avec Andrew Wiles, que le «théorème de Fermat» est effectivement un théorème. Cela n'épuise pas le sujet de la théorie des nombres qui est en fait inépuisable (en un sens précis) comme l'a démontré Kurt Gödel.

Mais à coté de la théorie des nombres, il y a la topologie, la géométrie algébrique, la théorie des équations aux dérivées partielles, les systèmes dynamiques, les probabilités, la théorie

2. Pour une présentation de cette théorie, voir le livre classique Jean-Louis Krivine, *Théorie des ensembles*, Paris, Cassini, 1998.

des groupes, la physique mathématique, la combinatoire, etc. Chacune de ces théories traite de familles de concepts d'un certain type, certains concepts plus fondamentaux apparaissant presque partout et bien sûr ces théories ne sont pas étanches et interagissent les unes avec les autres. Donnons quelques exemples.

— (i) Comment les choses (les ondes, les maladies, les idées) se propagent-elles ? Les mathématiciens étudient la propagation des ondes (D'Alembert) et la propagation des fluides (Navier-Stokes), et leurs travaux sont indispensables à l'industrie aéoronautique. Et la propagation des idées ? Nulle trace de l'équation des ondes ni de modèles mathématiques épidémiologiques dans l'essai de Dan Sperber [3] ou d'autres ouvrages du même type, et c'est peut-être dommage.
— (ii) Une autre notion essentielle en mathématiques comme dans bien d'autres domaines, est celle de local/global. Localement, on peut assimiler la surface de la terre à un plan, mais ce n'est pas possible globalement. Sur un plan, on a une notion d'angle orienté, mais ce n'est plus vrai sur la bande de Moëbius. De tels exemples sont légion. Trouver des *obstructions* qui empêchent de passer du local au global et, inversement, construire des objets qui n'ont pas d'existence locale mais seulement globale, c'est le travail quotidien de beaucoup de mathématiciens.

— (iii) Un dernier concept : la dualité. Ce concept d'essence philosophique traverse aussi toutes les mathématiques et la physique. On rencontre la dualité des espaces vectoriels de dimension finie en Licence et on la rencontre ensuite en théorie des groupes, en topologie algébrique (Poincaré), en théorie des faisceaux, etc. La symétrie miroir est une forme de dualité, de même que le lemme de Yoneda en théorie des catégories. L'espace de phase des physiciens est le lieu de la dualité observateur/observé et le principe d'incertitude de Heisenberg nous dit essentiellement que l'on ne peut pas être local simultanément sur un espace et sur son dual.

On le voit, les mathématiques ne sont pas loin de la philosophie. Badiou veut faire entrer la philosophie et les mathématiques à l'école, dès le plus jeune âge, dès la maternelle (page 125). Il pense (page 116) que « [...] tout le monde [...] devrait acquérir avant vingt ans une connaissance étendue des mathématiques modernes [...] ». Ce «tout le monde» est à la fois quelque peu optimiste et terriblement dirigiste. Les mathématiques sont-elles la seule manière d'appréhender le monde ? On peut en douter. Rendons cependant justice à Badiou sur un point : il est l'un des rares philosophes à défendre l'idée que les mathématiques sont partie prenante de la culture et aussi l'un des rares pour qui cette discipline ne s'arrête pas à Euclide ou Leibniz. [4]

Du rôle du mathématicien et de la communauté des mathématiciens

Gilles Deleuze a écrit « [...] la philosophie est l'art de former, d'inventer, de fabriquer des concepts. » [5]. Mais fabriquer des concepts, c'est aussi le rôle du mathématicien, c'est

3. *La Contagion des Idées*, Paris, Odile Jacob, 1996
4. Pour une épistémologie des mathématiques contemporaines, voir l'excellent livre de Fernando Zalamea *Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics*, New York, Sequence Press, 2012 .
5. Gilles Deleuze, «les conditions de la question : qu'est-ce que la philosophie», Chimères n. 8, 1990 (disponible à l'adresse http ://www.revue-chimeres.fr/drupal-chimeres/files/08chi09.pdf).

même sans doute *son rôle principal*. Grothendieck écrit à ce propos « Le simple fait d'*écrire*, de *nommer*, de *décrire* [...] a un pouvoir créateur » et « Par la seule vertu d'un effort de formulation, ce qui était informe prend forme [...] » [6]. Grothendieck a maintes fois expliqué que la meilleure manière de démontrer un théorème était de dégager une suite de concepts qui le rende évident et la démonstration n'est plus alors qu'une suite de définitions ! Bien sûr, c'est excessif, mais une démonstration ne doit pas être une suite de calculs, elle doit être portée par l'intuition.

Un nouveau concept permet parfois de donner un nouvel éclairage à une foule de résultats disparates, d'unifier et de simplifier un ensemble de savoirs, de résumer de très nombreux travaux en quelques lignes et de transformer des théories en exercices. On entend souvent dire que le rôle des universitaires est double : transmettre le savoir et créer de nouveaux savoirs. C'est une vision cumulative du savoir un peu angoissante qui implique que l'on soit très vite complètement écrasé sous le poids des connaissances. Heureusement, il y a un troisième rôle à jouer : transformer le savoir, trouver de nouveaux concepts unificateurs.

Une erreur d'Alain Badiou, d'une naïveté rare, est qu'il confond les mathématiques et les mathématiciens. Il déteste « les nouveaux philosophes » et écrit qu'il ne pourrait exister de nouveaux mathématiciens « C'est d'ailleurs une vertu importante des mathématiques : des impostures de ce genre y sont impossibles. » (page 25) comme si la rigueur de la science mathématique rejaillissait sur la communauté mathématique ! Mais les mathématiciens forment un groupe social qui obéit aux mêmes lois que les autres groupes du même type, avec ses codes, ses réseaux et ses hiérarchies, ses sectes, ses honnêtes gens et ses escrocs, et surtout son immense majorité de gens ordinaires. C'est peut-être décevant pour ceux qui rêvent du paradis mais les mathématiciens sont des mortels comme les autres. Badiou ne fait aucune analyse critique du monde mathématique, il répète les clichés les plus plats à la fois sur la communauté et aussi sur les hommes, sur le mathématicien génial, forcément génial, un peu fou et à l'écart des passions (pages 48-49).

Badiou cite, en les mettant sur le même plan (p. 88), Zermelo, Fraenkel et Bourbaki. Il n'est peut-être pas inutile de remettre ici les choses à leur juste place. Le groupe Nicolas Bourbaki fonctionne, encore aujourd'hui, à visage caché avec l'ambition d'orienter les mathématiques dans les directions qui lui semblent les plus novatrices. Il utilise pour cela deux outils, son séminaire trimestriel et ses livres, ces derniers se voulant les bases immuables et exhaustives de diverses théories. Il a eu une influence considérable en France depuis les années 1950 avec un pic autour des années 1970, mais n'en n'a plus trop aujourd'hui. Si Bourbaki a certainement eu un rôle très positif à ses débuts en mettant un peu d'ordre dans les mathématiques, il s'est finalement révélé comme une force conservatrice, un frein aux idées nouvelles. Ce groupe a ignoré la logique mathématique, les probabilités et la physique mathématique, ce qui a sans doute contribué à la faiblesse de la France dans ces disciplines. Il s'est refusé dans les années 70 à intégrer dans son corpus la théorie des catégories, ce qui l'aurait obligé à tout réécrire depuis le début. Enfin, il n'a jamais produit de mathématiques nouvelles. Le problème de Bourbaki est que, en mathématiques comme ailleurs, les bases ne sont pas stables, pas plus que les sujets d'intérêt. Ainsi la théorie des catégories a complète-

6. Alexandre Grothendieck, *Récoltes et semailles, réflexion et témoignage sur un passé de mathématicien*, 1985-1986, p. 209-211, consultable à l'adresse
https ://webusers.imj-prg.fr/ leila.schneps/grothendieckcircle/recoltesetc.php.

ment modifié le paysage et les livres écrits dans les années 1950 ou 1960 auraient sérieusement besoin d'un coup de peinture. Il est étonnant de constater que Bourbaki conserve encore une telle aura dans le grand public intellectuel malgré son échec flagrant. Il serait temps que des historiens des sciences analysent sérieusement ce phénomène Bourbaki, loin des clichés dominants [7].

On ne reprochera évidemment pas à Badiou de ne pas être un mathématicien professionnel (lire sa définition de la continuité à la page 79 pour s'en convaincre) mais il ne connaît pas non plus le fonctionnement de cette discipline. Il l'idéalise. Pourquoi parler des mathématiciens pour parler du rôle central des mathématiques dans la pensée ? Est-il nécessaire de flatter son clergé pour louer Dieu ?

L'absolu, le relativisme et la théorie des ensembles

Mais abandonnons les mathématiciens et revenons aux mathématiques. Alain Badiou croit aux vérités absolues, en sciences comme en politique. Il définit ce qu'est une « ontologie absolue » (pages 85-90). Pour résumer, une ontologie absolue est un lieu pour la pensée qui doit satisfaire à quatre conditions : (1) il est immobile (2) il est intelligible dans son être à partir de rien, (3) il n'existe que par la pensée et est radicalement non empirique (4) il obéit à un principe de maximalité. Un peu plus loin (pages 89-90), Badiou « démontre » que « La théorie des ensembles [...] est une théorie absolue du multiple indifférencié [...] ». Sa démonstration n'est pas tout à fait convaincante. Analysons ces quatre conditions. (1) : « Il est immobile au sens où, rendant possible la pensée du mouvement, [...], il est cependant par lui-même étranger à cette catégorie. ». N'est-ce pas le propre de toute axiomatique ? (2) Ici Badiou se moque un peu de ses lecteurs en identifiant l'ensemble vide à rien, c'est comme identifier le chiffre 0 à rien, identifier le mot « rien » à rien. En tant que concept, l'ensemble vide, ou le nombre 0 ne sont pas rien. La condition (3) est un point capital. Si les mathématiques ne sont en rien empiriques, alors c'est une construction formelle et on est loin de la vision platonicienne invoquée justement par Badiou. Ce dernier donne d'ailleurs lui-même (page 122) l'exemple de $\sqrt{2}$ dont la découverte est motivée par le problème de calculer la longueur du coté d'un carré dont la surface est double d'un autre. C'est une découverte fondatrice, le premier pont peut-être entre la géométrie et l'algèbre. Et $\sqrt{2}$ n'est pas une exception. Les mathématiques sont une science empirique en deux sens complémentaires (a) on fait des expériences en traitant des exemples (avant d'énoncer son théorème, Fermat avait certainement expérimenté la validité de son affirmation dans de nombreux cas particuliers, ce qui n'est pas une preuve bien sûr), (b) les mathématiques et la physique interagissent en permanence et beaucoup de problèmes mathématiques viennent de la physique, donc, indirectement, de l'expérience. S'agissant enfin du principe de maximalité, la condition (4), Badiou dit lui-même que l'on peut rajouter des axiomes à la théorie des ensembles, comme par exemple l'existence d'ensembles dont le cardinal serait strictement compris entre celui des entiers et celui des nombres réels (Paul Cohen 1963). La réponse de Badiou pour justifier son dernier axiome est qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ensembles (Bertrand Russell, 1901), mais en quoi cela implique-t-il que la théorie des ensembles vérifie un principe de maximalité ?

7. Voir cependant Liliane Beaulieu, «Bourbaki's Art of memory», Osiris Vol. 14, University of Chicago Press 1999, p. 219-251.

Badiou veut par son principe d'ontologie absolue s'opposer aux relativistes (page84) ce qui est louable, car ces derniers, au moins les plus radicaux d'entre eux, développent les thèses les plus absurdes et les plus dangereuses, assimilant la réalité physique à une pure construction sociale. Heureusement, ceux-ci sont largement décrédibilisés depuis le fameux article d'Alan Sokal [8]. Mais faut-il sombrer dans l'absolutisme pour combattre le relativisme ?

Badiou considère donc la théorie des ensembles comme un absolu. On peut se poser la question de savoir ce qu'apporte ce qualificatif d'« absolu » à la théorie des ensembles ? Ensuite cette théorie, qui a incontestablement dominé les mathématiques du XX-ème siècle, jouera-t-elle le même rôle au siècle suivant ? Cette théorie est basée sur la notion d'égalité ($a = b$ ou $a \neq b$) et sur la notion d'appartenance ($a \in A$, l'élément a appartient à l'ensemble A). Mais déjà la théorie des catégories (apparue dans les années 1950) a montré la nécéssité d'affaiblir la notion d'égalité en celle d'« isomorphisme » et la théorie (en gestation) des ∞-catégories va encore plus loin. Dans cette nouvelle théorie, les égalités existent encore mais sont le niveau 0 d'une suite infinie de relations de plus en plus faibles, les isomorphismes occupant le niveau 1. Par exemple, sur une partie A du plan, au lieu de considérer la relation $a = b$ entre deux points a et b, on a une relation plus faible, à savoir qu'il existe un chemin continu dans A qui va de a à b et étant donnés deux tels chemins, on peut se demander s'il existe une déformation continue de l'un dans l'autre, une deformation de ces déformations, etc. C'est la théorie de l'homotopie. Cette idée que des propriétés ne sont satisfaites qu'à homotopie près est en train de gagner la logique mathématique et Vladimir Voevodsky a le projet, pour le moins ambitieux, de remplacer la vieille théorie des ensembles ZFC par une nouvelle théorie dans laquelle, à la notion d'égalité, on substituerait celle d'égalité à homotopie près : c'est l'axiome d'univalence [9]. Dans ce nouveau cadre, les ∞-catégories redeviendraient des catégories usuelles, mais dans un contexte ensembliste totalement nouveau. C'est une révolution conceptuelle majeure qui est en préparation, voir [10] et [11].

Une parenthèse : qu'en est-il des vérités absolues en Physique ? La physique actuelle est pour le moins déconcertante et Richard Feynman a écrit «Je crois pouvoir dire sans risque de me tromper que personne ne comprend la physique quantique» [12]. Rien ne permet d'affirmer que les lois de la physique soient conservées sur des échelles inférieures à la longueur de Planck (environ 10^{-35} mètres) ou dans des intervalles de temps très petits ni qu'une physique hypothétique à cette échelle obéisse encore à la logique aristétolicienne. Il n'est pas exclu que l'espace-temps comporte des boucles causales, ni d'ailleurs qu'il ne soit pas unique (multivers). En bref, l'absolu est très relatif et c'est un concept à manier avec précaution, au moins en physique.

---

8. Alan Sokal, «Transgressing the Boundaries : Towards a Transformative Hermeneutics of Quantum Gravity», Social Text, Vol. 46-47, 1996, p. 217–252.

9. Voir The Univalent Foundations Program, Homotopy Type Theory : Univalent Foundations of Mathematics, Princeton, Institute for Advanced Study 2013.

10. Julie Rehmeyer, «Voevodsky Mathematical Revolution», Scientific American, 1er octobre 2013, http ://blogs.scientificamerican.com/guest-blog/voevodskye28099s-mathematical-revolution/

11. Pierre Schapira, «Categories : From Zero to Infinity», Inference, International Review of Science, Vol. 2, I, 2016, http ://inference-review.com/ et https ://webusers.imj-prg.fr/ pierre.schapira/mispapers/

12. Richard Feynman, *The Character of Physical Law*, Cambridge, MIT Press, 1965, p. 129

Conclusions. Mathématiques, physique, politique

Mais après tout, que Badiou considère la théorie des ensembles comme un «absolu ontologique» n'est pas un drame. Là où les chosent se gâtent c'est quand il tire des conclusions philosophiques hâtives à partir d'énoncés mathématiques. Il écrit (pages 101-102) « Le théorème de Cantor réfute, à un niveau abstrait, le règne contemporain de l'individualisme. ». Le théorème en question affirme que pour un ensemble A, l'ensemble $P(A)$ des parties de A a un nombre d'éléments strictement plus grand que A. Par exemple l'ensemble $A = \{a, b\}$ a 2 éléments, a et b, mais $P(A) = \{A, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}$ a 4 éléments. L'intérêt de ce théorème est qu'il est encore vrai quand A est infini, ce qui démontre qu'il y a pas qu'un seul infini. Tirer des conclusions de ce résultat dans le champ politique est se moquer du lecteur ou est ne pas avoir compris que les mathématiques se développent dans un univers (qui s'appelle « les mathématiques ») et que transposer ses résultats dans d'autres domaines peut certes se révéler extrêmement fécond, mais demande le plus grand sérieux. Considérons le théorème de Banach-Tarski qui affirme que étant donné une boule (pleine) de rayon 1 dans l'espace à 3 dimensions, on peut la découper en un nombre fini de parties et rassembler ces parties de manière à obtenir deux boules de rayon 1 ! La solution mathématique de cet énoncé paradoxal réside dans l'existence d'ensembles non mesurables (personne n'en a jamais construit explicitement), conséquence de l'axiome du choix. Je suis persuadé que le premier sophiste venu pourra tirer n'importe quelle conclusion philosophique de ce paradoxe. D'ailleurs, le miracle de la « multiplication des pains » dans le Nouveau Testament ne serait-il pas tout simplement un corollaire de ce théorème ?

Badiou a exprimé son rejet de l'expérience et son amour des constructions abstraites. Il appelle à « [...] vivre sous l'autorité d'une Idée. », « Je suis convaincu [...] qu'il existe des vérités absolues, [...] » (page 84). On comprend qu'il n'aime pas trop la physique quantique où l'on semble bien loin des vérités absolues. Le problème, c'est qu'il incorpore la politique à sa vision philosophico-mathématique. Mais la théorie politique n'est pas une pure construction théorique et s'il faut la rapprocher d'une science, ce serait évidemment de la physique plutôt que des mathématiques. La notion de vérité en physique est très pragmatique : on propose des théories et on essaie de les valider par l'expérience. Si l'on n'y arrive pas, cela ne veut pas dire que la théorie est fausse (c'est le problème de la théorie des cordes) mais si l'expérience contredit la théorie, cela veut au moins dire qu'il faut en changer quelques paramètres. Les exemples de l'échec de la théorie politique du communisme sont légion et si les erreurs en mathématiques risquent au pire de faire perdre du temps aux lecteurs et parfois de décrédibiliser les auteurs, il en va bien différemment en politique, comme chacun sait.