Mikio Sato, un visionnaire des mathématiques

Pierre Schapira[1]

Comme les singularités, les idées se propagent, mais leur vitesse de propagation dépend fortement de l'énergie mise dans leur promotion, et l'on ne peut pas dire que Sato ait fait des efforts démesurés pour populariser les siennes. Espérons que l'attribution du prix Wolf 2002/2003 aidera à faire connaître une œuvre profonde et sans doute trop originale pour être immédiatement acceptée. Sato écrit très peu, ne communique pas facilement, ne fréquente qu'épisodiquement les congrès et pas du tout les institutions. Mais Sato a inventé une nouvelle manière de faire de l'analyse, l'« Analyse Algébrique », et a créé une école, l'École de Kyoto.

Si Mikio Sato est né en 1928[2], il ne s'est fait connaître qu'en 1959-60, avec sa théorie des hyperfonctions. Sa scolarité a en effet été fortement perturbée par la guerre et en particulier par les bombardements américains sur Tokyo. Il doit travailler comme livreur de charbon pour aider sa famille dont la maison a brûlé, puis est professeur d'école à 19 ans et ce jusqu'en 1958, date à laquelle il devient assistant à l'Université de Tokyo. Il étudie les mathématiques et la physique, seul.

Pour comprendre l'originalité de la théorie des hyperfonctions de Sato, il faut se souvenir de l'ambiance mathématique de l'époque. L'Analyse Mathématique dans les années 50-70 était sous l'influence directe de l'analyse fonctionnelle et fortement marquée par le succès de la théorie des distributions. On cherchait essentiellement des théorèmes d'existence et la plupart des démonstrations consistaient à définir « le bon espace fonctionnel », à démontrer une « inégalité a priori », et à appliquer le théorème de Hahn-Banach. C'est dans ce contexte que Mikio Sato définit en 59-60 les hyperfonctions comme valeurs au bord de fonctions holomorphes, découverte qui lui permettra d'obtenir un poste à l'Université de Tokyo, et ce, grâce à la protection éclairée du Professeur Iyanaga, personnalité d'une ouverture d'esprit exceptionnelle et grand ami de la culture française. Sato part ensuite deux ans aux États-Unis, à New York et à Princeton, où il essaie sans succès de convaincre André Weil de la pertinence de son approche cohomologique de l'analyse.

La méthode de Sato est radicalement nouvelle car elle n'utilise en aucune manière la notion de limite. Ses hyperfonctions ne sont des limites de fonctions dans aucun sens raisonnable, et l'espace des hyperfonctions n'a aucune topologie naturelle autre que grossière. Pour sa construction Sato invente en parallèle avec Grothendieck la cohomologie locale, un outil purement algébrique. Il s'agit vraiment d'un regard révolutionnaire sur l'analyse, une rupture épistémologique, dirait-on dans les années 70. Mais outre son originalité incontestable,

[1]Université Pierre et Marie Curie, Institut de Mathématiques, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France, `schapira@math.jussieu.fr`, `http://www.math.jussieu.fr/~schapira/`

[2]Nous avons utilisé le texte d'un entretien accordé par Mikio Sato en 1990 à Emmanuel Andronikof, tristement disparu en 1994. Ce texte devrait néanmoins voir prochainement le jour, grâce aux efforts de A. D'Agnolo. Nous avons aussi bénéficié des commentaires scientifiques de J-B. Bost et de A. Chambert-Loir, ce dont nous les remercions chaleureusement.

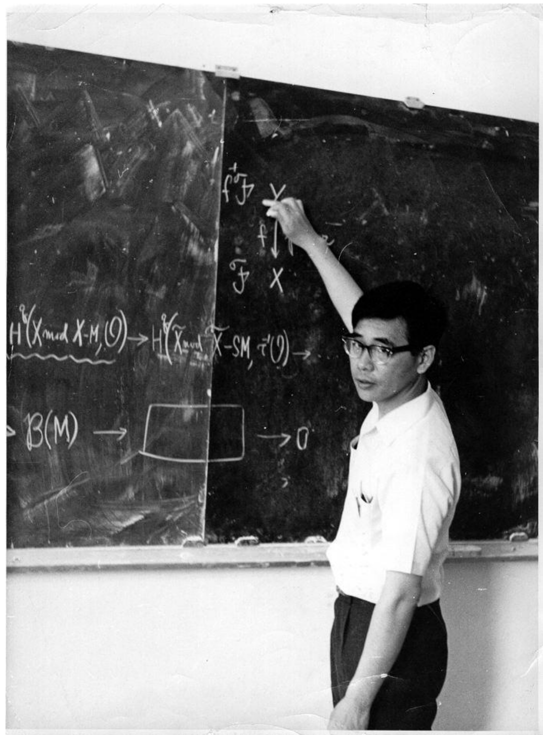

FIG. 1. Mikio Sato vers 1972

FIG. 2. Mikio Sato et Pierre Schapira vers 1972

l'approche de Sato a des implications profondes car elle débouche naturellement sur l'analyse microlocale, comme je vais tenter de l'expliquer.

La théorie des équations aux dérivées partielles (EDP) linéaires à coefficients variables en était à ses tout débuts dans les années 65-70, et était sous le choc de l'exemple de Hans Lewy qui montrait que l'équation linéaire du premier ordre $(-\sqrt{-1}\partial_1+\partial_2-2(x_1+\sqrt{-1}x_2)\partial_3)u=v$ n'a pas de solution, même locale, même dans l'espace des distributions [3]. Le fait qu'une équation n'ait pas de solution était à l'époque un peu choquant. On pensait que c'était un défaut de la théorie, que les espaces que l'on avait construit n'étaient pas assez gros pour contenir ces solutions. Bien sûr, c'est au contraire souvent quand il y a une obstruction cohomologique qu'il se passe des choses intéressantes : l'absence de solutions est la manifestation d'un phénomène géométrique caché et profond. Dans le cas de l'équation de Hans Lewy, la géométrie cachée est « microlocale » et cette équation est microlocalement équivalente à une équation de Cauchy-Riemann induite sur une hypersurface réelle de l'espace complexe.

En mathématique comme en physique, pour traiter un problème dans un espace (affine), on est amené à calculer dans l'espace dual. Une méthode pour cela, celle employée en analyse, est la transformée de Fourier. Mais cette transformation est fort peu locale, et se prête très mal au passage aux variétés. La méthode de Sato au contraire est beaucoup plus adaptée à ce passage : une variété réelle se complexifie, et au lieu de regarder le comportement à l'infini de la transformée de Fourier, on peut regarder « d'où viennent » les valeurs au bord. En termes techniques, on regarde le fibré cotangent (plus exactement, $\sqrt{-1}$-fois le fibré cotangent) comme le fibré conormal au réel dans le complexe. Sato définit ainsi le front d'onde analytique des hyperfonctions (donc en particulier des distributions), un fermé conique du cotangent, et montre que si une hyperfonction u est solution d'une équation $Pu=0$, alors son front d'onde est contenu dans la variété caractéristique réelle de l'opérateur P. C'est le début de l'Analyse Microlocale, inventée donc par Sato, et qui a révolutionné l'analyse.

Bien sûr, d'autres mathématiciens et physiciens ont eu à cette période (si ce n'est bien avant, avec Hadamard et Leray) l'intuition de ce qu'il fallait travailler dans l'espace cotangent, et les opérateurs pseudo-différentiels existaient avant le front d'onde. Mais Sato est le premier à faire vivre les objets de l'analyse (comme les distributions) dans l'espace cotangent et il construit pour cela un outil fondamental de la théorie des faisceaux, le foncteur de microlocalisation, « transformé de Fourier-Sato » du foncteur de spécialisation. C'est le point de départ de la théorie microlocale des faisceaux de [3]. Sato et ses deux étudiants de l'époque, Kashiwara et Kawai, publient en 73 un traité sur l'analyse microlocale des EDP, traité qui a certainement eu une influence considérable, même si la plupart des analystes n'y ont pas compris grand chose et, entraînés par Hörmander, ont su adapter la transformée de Fourier classique à ces nouvelles idées.

Dès les années 60, Sato avait l'intuition de la théorie des $\mathcal{D}$-modules, des systèmes holonômes et de la b-fonction (dite de Bernstein-Sato). Il donne une

[3]L'équation un peu plus simple $(\partial_1+\sqrt{-1}x_1\partial_2)u=v$ n'a pas non plus de solutions dans l'espace des germes de distributions à l'origine dans $\mathbb{R}^2$, pas plus d'ailleurs que dans l'espace des germes d'hyperfonctions.

série de conférences sur ce thème à l'Université de Tokyo, mais celles-ci doivent s'interrompre, faute de combattants. Ces idées sont reprises systématiquement et développées par Masaki Kashiwara dans sa thèse de 1969 ([1], [2]). Comme son nom l'indique, un $\mathcal{D}$-module est un module sur l'anneau $\mathcal{D}$ des opérateurs différentiels, et un module sur un anneau veut essentiellement dire « un système d'équations linéaires » à coefficients dans cet anneau. Il s'agit donc de traiter les systèmes (généraux) d'EDP linéaires. Cette théorie qui est aussi apparue simultanément à Moscou dans un cadre plus algébrique avec J. Bernstein, élève de Gelfand, a rapidement eu un succès considérable dans plusieurs branches des mathématiques. Dans les années 70-80, Kashiwara obtient d'ailleurs à lui seul l'essentiel des résultats fondamentaux de la théorie, en particulier ceux concernant les systèmes holonômes, avec le théorème de constructibilité (en 1975), le théorème de l'indice, le théorème sur la rationalité des zéros de la b-fonction et sa théorie des systèmes holonômes réguliers.

Le paysage mathématique des années 70-80 a donc considérablement changé : non seulement on traite les équations à coefficients variables, mais on traite des systèmes et on travaille microlocalement, *i.e.*, dans l'espace cotangent, l'espace de phase des physiciens. Mais il y a vraiment deux écoles dans le monde : l'école C^∞ issue de l'analyse classique, et dont le chef de file est Hörmander qui a mis au point le calcul des opérateurs intégraux de Fourier, et l'école analytique, derrière Sato et fort peu representée en dehors du Japon et de la France.

La France était particulièrement bien placée pour comprendre les idées de Sato car celles-ci s'appuient à la fois sur celles de Jean Leray et de Alexandre Grothendieck. Comme Leray, Sato a compris qu'il faut chercher les singularités dans le domaine complexe (même pour comprendre les phénomènes purement réels) et l'analyse algébrique de Sato repose sur la théorie des faisceaux, inventée par Leray en 1944 alors qu'il était prisonnier de guerre, clarifiée par Cartan, et rendue d'une efficacité redoutable par Grothendieck avec son formalisme des catégories dérivées et des « six opérations ».

Sato, toujours motivé par la physique, aborde ensuite l'analyse de la matrice S à la lumière de l'analyse microlocale, puis, avec ses deux élèves Jimbo et Miwa, construit explicitement la solution de la fonction à n-points du modèle de Ising en dimension 2 en utilisant la théorie classique de Schlesinger des déformations isomonodromiques des équations différentielles ordinaires. Cela l'amène naturellement aux équations différentielles non linéaires du type KdV. En 81, en collaboration avec sa femme Yasuko Sato, il interprète les solutions des hiérarchies K-P comme des points d'une Grassmannienne de dimension infinie et introduit sa fameuse fonction τ. Ces travaux seront appliqués à d'autres classes d'équations et auront un grand impact en physique mathématique dans l'étude des systèmes intégrables et dans la théorie des champs en dimension 2.

Parallèlement à ses travaux d'analyse ou de physique mathématique, Sato a obtenu des résultats remarquables en théorie des groupes. Il introduit notamment une théorie des « espaces vectoriels préhomogènes », c'est-à-dire des représentations linéaires d'un groupe réductif complexe ayant une orbite dense. Le cas important où le complémentaire de cette orbite est une hypersurface fournit de très jolis exemples de b-fonctions.

On doit aussi à M. Sato d'avoir découvert en 1962 comment déduire la conjecture de Ramanujan sur les coefficients de la forme modulaire Δ des conjectures de Weil concernant le nombre de solutions d'équations polynomiales sur les corps finis. Ses idées ont permis à Kuga et Shimura de traiter le cas des quotients compacts du demi-plan de Poincaré et il faudra attendre encore 10 ans avant que P. Deligne ne démontre définitivement que les conjectures de Weil impliquent la conjecture de Ramanujan-Petersson.

Outre ce prix Wolf, Sato partage avec J. Tate une célèbre conjecture en théorie des nombres à propos de la répartition des angles de Frobenius. Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients entiers, à racines simples ; Hasse a démontré que pour tout nombre premier p qui ne divise pas le discriminant de P, le nombre de solutions de la congruence $y^2 = P(x) \pmod p$ est de la forme $p - a_p$, avec $|a_p| \leqslant 2\sqrt{p}$. On peut écrire $a_p = 2\sqrt{p}\cos\theta_p$, avec $0 \leqslant \theta_p \leqslant \pi$ et la conjecture de Sato–Tate prédit que ces angles θ_p ont pour loi $(2/\pi)\sin^2\theta$. Si Tate est arrivé à cette conjecture par l'étude des cycles algébriques, Sato, lui, l'a découverte expérimentalement, par des calculs sur ordinateur !

Les derniers travaux de Sato sont essentiellement non publiés et ont donné lieu à quelques exposés semi-confidentiels. Ils portent sur une approche algébrique des systèmes d'équations non linéaires, en particulier sur les systèmes holonômes non linéaires dont par exemple les fonctions thêtas seraient solutions.

On voit ainsi que si finalement (c'est-à-dire, avec 40 ans de recul) l'approche de Sato des mathématiques n'est sans doute pas si différente de celle de Grothendieck, Sato a eu l'audace assez inouie de traiter l'Analyse comme de la géométrie algébrique, et a eu le génie de forger des outils algébriques et géométriques adaptés à ses problèmes. Son influence sur les mathématiques est et restera considérable.

Références

[1] M. Kashiwara, *Algebraic study of systems of partial diffential equations,* Thesis, Tokyo Univ. (1970), translated by A. D'Agnolo and J-P. Schneiders, Mémoires Soc. Math. France **63** (1995)

[2] M. Kashiwara, *D-modules and Microlocal Calculus,* Translations of Mathematical Monographs, **217** American Math. Soc. (2003)

[3] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on manifolds,* Grundlehren der Math. Wiss. **292** Springer (1990)

[4] M. Sato, *Theory of hyperfunctions,* I & II Journ. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **8** 139–193 487–436 (1959–1960)

[5] M. Sato, *D-modules and nonlinear systems,* Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics, Adv. Stud. Pure Math.,**19** 417–434, Academic Press, (1989)

[6] M. Sato, *The KP hierarchy and infinite-dimensional Grassmann manifolds,* Theta functions—Bowdoin 1987, Part 1 (Brunswick, ME, 1987), 51–66, Proc. Sympos. Pure Math., 49, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989

[7] M. Sato, T. Kawai, and M. Kashiwara, *Microfunctions and pseudo-differential equations,* in Komatsu (ed.), *Hyperfunctions and pseudo-differential equations,* Proceedings Katata 1971, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag **287** p. 265–529 (1973)

[8] M. Sato and T. Kimura, *A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants,* Nagoya Math. J. **65** 1–155, (1977)

[9] M. Sato, T. Miwa and M. Jimbo, *Holonomic quantum fields,* I–V Publ. Res. Inst. Math. Sci. **16**, 531–584 (1980), **15**, 871–972 (1979), **15**, 577–629 (1979), **15**, 201–278 (1979), **14**, 223–267 (1978)

[10] M. Sato and Y. Sato, *Soliton equations as dynamical systems on infinite-dimensional Grassmann manifold,* in Nonlinear partial differential equations in applied science, 259–271, North-Holland Math. Stud., **81**, (1983)

[11] M. Sato and T. Shintani, *On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces,* Ann. of Math. **100** 131–170, (1974)