Théorème d'Unicité de Holmgren et Opérateurs Hyperboliques dans l'Espace des Hyperfonctions *

PIERRE SCHAPIRA **

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Nice, France et
Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, GB, Brasil

1. PRÉLIMINAIRES

En ce qui concerne la théorie des équations aux dérivées partielles nous suivrons les notations de HÖRMANDER [3].

En ce qui concerne la théorie des espaces vectoriels topologiques nous suivrons les notations de GROTHENDIECK [2].

Nous renvoyons en particulier à ce livre pour la définition (et les propriétés) des espaces $\mathcal{FS}$, $\mathcal{DFS}$, $\mathcal{LF}$.

Nous placerons notre étude dans $\mathbf{R}^n$ ou son complexifié $\mathbf{C}^n$.

On désignera par K (par Ω) un compact (un ouvert) de l'un de ces espaces.

On désignera par $\mathcal{A}$ le faisceau [1] des germes de fonctions analytiques (à valeurs complexes) sur $\mathbf{R}^n$.

Si Ω est un ouvert de $\mathbf{C}^n$ on désignera par $H(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω muni de sa topologie naturelle d'espace de Fréchet.

2. FONCTIONNELLES ANALYTIQUES. HYPERFONCTIONS

Soit K un compact de $\mathbf{R}^n$. On munit l'espace $\mathcal{A}(K)$ des fonctions analytiques au voisinage de K de la topologie:

$$\mathcal{A}(K) = \varinjlim_{\Omega \supset K} H(\Omega)$$

où Ω parcourt la famille des voisinages ouverts de K dans $\mathbf{C}^n$. C'est un espace du type $\mathcal{DFS}$ et $H(\mathbf{C}^n)$ est dense dans $\mathcal{A}(K)$. Soit X un ouvert ou un fermé de $\mathbf{R}^n$. On munit l'espace $\mathcal{A}(X)$ des fonctions analytiques au voisinage de X de la topologie:

$$\mathcal{A}(X) = \varprojlim_{K \supset X} \mathcal{A}(K)$$

THÉORÈME 2.1. [7].

On a un isomorphisme vectoriel topologique

$$\mathcal{A}(X) = \varinjlim_{\Omega \supset X} H(\Omega)$$

où Ω parcourt la famille des voisinages ouverts de X dans $\mathbf{C}^n$.

En particulier le premier espace est ultrabornologique et réflexif.

L'espace $\mathcal{A}'(X)$ s'identifie à l'espace $\bigcup_{K \subset X} \mathcal{A}(K)$ (la réunion est prise dans $H'(\mathbf{C}^n)$). C'est un espace $\mathcal{LF}$.

DEFINITION 1.1.

On appelle fonctionelles analytiques sur $\mathbf{R}^n$ les éléments de

$$\mathcal{A}'(\mathbf{R}^n) \bigcup_{K \subset \mathbf{R}^n} \mathcal{A}'(K).$$

Si $u \in \mathcal{A}'(\mathbf{R}^n)$ *on dit que* u *est portable par un compact* K *si* u *provient de* $\mathcal{A}'(K)$.

Reçu le 10 Août, 1970; presenté par L. NACHBIN.

Cet article a été rédigé alors que l'auteur était "Professor visitante" à *l'Instituto de Matemática Pura e Aplicada* de Rio de Janeiro.

** 26, rue Monge, Paris (V.°), France.

THÉORÈME 2.2. [5]

Soit $u \in \mathcal{a}'(\mathbf{R}^n)$, $u \neq 0$. *Il existe un plus petit compact qui porte* u. *On l'appelle le support de* u *et on le note* $\sigma(u)$.

Il est immédiat de véifier le résultat suivant qui nous sera utile. Soit $u \in \mathcal{a}'(\mathbf{R}^n)$, K un compact de $\mathbf{R}^n$. Supposons que:

$$\sigma(u) \not\subset K$$

alors il existe une suite $(f_p)_p$ avec:

$f_p \in H(\mathbf{C}^n)$

f_p tend vers 0 dans $\mathcal{a}(K)$

$\langle u, f_p \rangle$ ne tend pas vers 0.

Nous désignerons par B le faisceau des germes d'hyperfonctions sur $\mathbf{R}^n$. Ce faisceau est caractérisé par le théoıème suivant:

THÉORÈME 2.3. [6].

1) *Le faisceau* B *est flasque* (i. e.: *les opérations de restrictions sont surjectives*).

2) *Pour tout compact* K *de* $\mathbf{R}^n$

$$\Gamma_K(\mathbf{R}^n, B) = \mathcal{a}'(K).$$

(Si F est un fermé d'un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, $\Gamma_F(\Omega, B)$ désigne l'ensemble des sections de B sur Ω à support dans F. On pose $\Gamma_\Omega(\Omega, B) = B(\Omega)$.)

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ il résulte du théorème précédent que l'on a un isomorphisme:

$$B(\Omega) \simeq \frac{\mathcal{a}'(\bar{\Omega})}{\mathcal{a}'(\partial\Omega)}$$

Le faisceau B a en outre les propriétés ci-dessous.

THÉORÈME 2.4. [6].

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$, $F = \bigcup_{i=1}^{p} F_i$ *des fermés de* Ω, $T \in \Gamma_F(\Omega, B)$. *Il existe* $T_i \in \Gamma_{F_i}(\Omega, B)$ *avec:*

$$T = \sum_{i=1}^{p} T_i$$

Nous avons défini en [9] la notion de faisceau d'ultra-distribution.

THÉORÈME 2.5. [9].

Soit $\mathfrak{D}^{*\prime}$ *un faisceau d'ultra-distribution sur* $\mathbf{R}^n$. *C'est un sous-faisceau de* B.

On pourra consulter [10] pour un exposé détaillé de la théorie des hyperfonctions.

3. THÉORÈME DE CAUCHY-KOWALEWSKI

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}^n$, a un point de Ω de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$. On désigne par Ω'_a l'intersection de Ω et de l'hyperplan complexe d'équation $z_n = a_n$. On désigne par $H(\Omega'_a)$ l'espace des fonctions holomorphes au voisinage de Ω'_a dans Ω et par $\tilde{H}(\Omega'_a)$ l'espace des fonctions holomorphes dans Ω'_a (fonctions de "n-1 variables"). Soit $P(z, D_z)$ (on écrira aussi P pour $P(z, D_z)$) un opérateur différentiel (linéaire, en $\frac{\partial}{\partial z_i}$ $(i = 1 \ldots n)$) à coefficients holomorphes dans Ω et d'ordre m.

THÉORÈME 3.1. (Cauchy-Kowalewski).

On suppose que le coefficient de $D^m_{z_n}$ *dans* P *ne s'annule pas au voisinage de* Ω'_a. *Pour tout* $g \in H(\Omega'_a)$, $h_i \in \tilde{H}(\Omega'_a)$ $(i = 1 \ldots m)$ *le système*

$$\left.\begin{array}{ll} Pf = g & \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial z_n}\right)^i f \,|\, \Omega'_a = h_i & i = 0 \ldots m-1 \end{array}\right\}$$

a une et une seule solution $f \in H(\Omega'_a)$.

La démonstration de ce théorème (cf. (3)) donne la précision suivante qui nous sera utile:

THÉORÈME 3.2.

Plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 3.1. *Pour tout compact* K *de* Ω'_a *il existe un voisinage ouvert* ω *de* K, *un* $\varepsilon > 0$ *tel que:* $\forall g \in H(\mathbf{C}^n)$, $\forall b_n \in \mathbf{C}$ *avec* $|a_n - b_n| < \varepsilon$ *le système:*

$$\left.\begin{array}{ll} Pf = g & \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial z_n}\right)^i f \Big|_{z_n = b_n} = 0 & i = 0 \ldots m-1 \end{array}\right\}$$

a une solution et une seule $f \in H(\omega)$.

Le théorème 3.1. peut aussi s'énoncer dans le réel. Il faut alors remplacer "complexe" par "réel" et "holomorphe" par "analytique".

Soit K un compact de $\mathbf{R}^{n-1} \times \{0\}$. On désigne par $\tilde{\mathfrak{a}}(K)$ l'espace des fonctions analytiques au voisinage de K dans $\mathbf{R}^{n-1}$. Soit γ_0 l'application

$$f \longmapsto f \,|\, \mathbf{R}^{n-1} \times \{0\}$$

qui envoie $\mathfrak{a}(K)$ dans $\tilde{\mathfrak{a}}(K)$. On pose:

$$\gamma_i = \gamma_0 \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^i$$

$$\gamma = (\gamma_i)_{i=0}^{m-1}$$

Le théorème 3.1. entraîne que si $P(x, D_x)$ est un opérateur différentiel à coefficients analytiques d'ordre m défini au voisinage de K, et si le coefficient de $D_{x_n}^m$ ne s'annule pas au voisinage de K, l'application

$$f \longmapsto (Pf, \gamma(f))$$

$$\mathfrak{a}(K) \longrightarrow \mathfrak{a}(K) \times \tilde{\mathfrak{a}}(K)^m$$

est un isomorphisme. D'après le théorème du graphe fermé ce sera un isomorphisme vectoriel topologique. Par transposition on en déduit:

THÉORÈME 3.3.

Sous les hypothèses précédentes l'application

$$\mathfrak{a}'(K) \times \tilde{\mathfrak{a}}'(K)^m \longrightarrow \mathfrak{a}'(K)$$

$$(u, (u_i)_{i=0}^{m-1}) \longmapsto \left({}^tPu + \sum_{i=0}^{m-1} u_i \oplus \delta_n^i\right)$$

est un isomorphisme.

(δ_n^i désigne la i-ième dérivée de la masse de Dirac à l'origine de la droite $\underbrace{(0, \ldots, 0)}_{n-1} \times \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^n$).

4. THÉORÈME DE HOLMGREN

Nous allons étendre les résultats développés par HÖRMANDER dans le chapitre 5, § 3, de son livre (3) au cas des hyperfonctions.

LEMME 4.1.

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbf{R}^n$, $P(x, D_x)$ *un opérateur différentiel d'ordre* m *à coefficients analytiques dans* Ω *et* $u \in \mathfrak{a}'(\Omega)$. *On suppose que le coefficient de* D_n^m *dans* $P(x, D)$ *ne s'annule pas dans* Ω *et que pour un* $c \in \mathbf{R}$

$$\sigma(P(x, D)u) \cap \Omega_0 = \emptyset$$

où

$$\Omega_0 = \Omega \cap \{x_n < c\}.$$

Alors

$$\sigma(u) \cap \Omega_0 = \emptyset.$$

Démonstration.

Raisonnons par l'absurde. On peut supposer Ω borné, le coefficient de D_n^m égal à 1, les coefficients de P analytiques au voisinage de $\bar{\Omega}$ et

$$0 \in \sigma(u) \subset \{x_n \geq 0\}$$

$$\sigma(P(x, D)u) \subset \{x_n > 0\}.$$

Soit B_ε^α l'ensemble:

$$B_\varepsilon^\alpha = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, d(x, \bar{\Omega} \cap \{x_n = \alpha\}) < \varepsilon\}$$

où d est la distance euclidienne de $\mathbf{R}^n$.

Il résulte du théorème 3.2. que $\exists\, \alpha_0 > 0$, $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $\forall\, \alpha < \alpha_0$ le problème de Cauchy

$$\left.\begin{array}{l} {}^tP(x, D)g = f \\ D_{x_n}^i g\,|_{x_n = \alpha} = 0 \;\; (i = 0, \ldots, m-1) \end{array}\right\}$$

a une solution $g \in \mathfrak{a}(B_\varepsilon^\alpha)$ pour tout $f \in H(\mathbf{C}^n)$ (${}^tP$ désigne le transposé de P). En découpant u en somme de fonctionnelles analytiques (i. e.: en appliquant le théorème 2.4.) on peut supposer

$$\sigma(u) \subset B_\varepsilon^{\varepsilon/2} \cap \Omega$$

$$\sigma(P(x, D)u) = K \subset \left\{x_n = \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap \Omega$$

Soit alors $(f_p)_p \in H(\mathbf{C}^n)$ une suite telle que

$$\left\{\begin{array}{l} f_p \text{ tend vers } 0 \text{ dans } \mathfrak{a}'(K) \\ \langle u, f_p \rangle \text{ ne tend pas vers } 0. \end{array}\right.$$

Soit g_p la solution du problème de Cauchy:

$$\left.\begin{array}{l} {}^tP(x,\,D)\;g_p = f_p \\ D^i_{x_n}\,g_p\,|_{x_n=\varepsilon/2} = 0 \;\; (i = 0,\ldots,m-1) \end{array}\right\}$$

On a

$$g_p \in \mathcal{A}\,(B_2^{\varepsilon/2})$$

et il résulte du théorème du graphe fermé que g_p tend vers 0 dans $\mathcal{A}(K)$. Donc

$$\langle u, f_p\rangle = \langle u, {}^tP(x,D)g_p\rangle = \langle P(x,D)u, g_p\rangle$$

tend vers 0, ce qui est contradictoire.

LEMME 4.2.

Soit Ω *un ouvert de* R^n *et* $P(x, D)$ *un opérateur différentiel vérifiant les hypothèses du lemme* 2.1. *Si* $u \in B(\Omega)$ *vérifie:*

$$Pu = 0 \;\textit{dans}\; \Omega_c = \Omega \cap \{x_n < c\}$$

pour un $c \in R$ *et si* $\sigma(u) \cap \Omega_c$ *est relativement compact dans* Ω *on a* $u = 0$ *dans* Ω_c.

Démonstration.

Soit $L = \overline{\sigma(u) \cap \Omega_c}$. D'après le théorème 2.4. on peut écrire:

$$u = v + w$$

$$v \in \mathcal{A}'(L),\; \sigma(w) \cap \Omega_c = \varnothing.$$

Il suffit alors d'appliquer le lemme 2.1. à v. On constate alors que toutes les démonstrations des théorèmes du paragraphe 5.3. de (3) sont basées sur des changements analytiques de coordonnées et s'étendent donc (le lemme 4.2. remplaçant le lemme 5.3.2. de (3)) au cadre des hyperfonctions. Nous n'énoncerons que deux de ces théorèmes.

THÉORÈME 4.1. (Théorème de Holmgren). *Soit* φ *une fonction à valeurs réelles de classe* C^1 *sur* Ω *et* $P(x, D)$ *un opérateur différentiel d'ordre* m *à coefficients analytiques sur* Ω. *Soit* x_o *un point de* Ω *où*

$$[P_m(x_o,\; \text{Grad}\;\varphi(x_o)) \neq 0.$$

Il existe un voisinage Ω' *de* x_o *tel que les conditions:*

$$\begin{cases} u \in B(\Omega),\; P(x,\,D)u = 0, \\ u = 0 \;\textit{dans l'ouvert}\; \{x \in \Omega \,|\, \varphi(x) > \varphi(x_o)\} \end{cases}$$

entraînent $u = 0$ *dans* Ω'.

THÉORÈME 4.2.

Soit Ω_1 *et* Ω_2 *deux ouverts convexes de* R^n *avec* $\Omega_1 \subset \Omega_2$ *et soit* P *un opérateur différentiel à coefficients constants tel que tout hyperplan caractéristique pour* P *qui rencontre* Ω_2 *rencontre* Ω_1. *Les conditions* $u \in B(\Omega_2)$, $Pu = 0$, $u|\Omega_1 = 0$ *entraînent* $u = 0$ *dans* Ω_2.

5. OPÉRATEURS HYPERBOLIQUES

Dans ce paragraphe les opérateurs différentiels considérés seront à coefficients constants. Soit N le vecteur $(0, \ldots, 0, 1)$ de R^n. Rappelons qu'un opérateur *homogène* P d'ordre m est hyperbolique pour N si:

Le coefficient de $D^m_{x_n}$ dans P est non nul (i. e.: $P(N) \neq 0$);

$P(\xi + \tau N) = 0$ n'a que des racines en τ réelles pour $\xi \in R^n$.

On désignera par H l'hyperplan $x_n = 0$, par H^+ et H^- les demi-espaces ouverts:

$$H^+ = \{x \in R^n \,|x_n > 0\},$$

$$H^- = \{x \in R^n \,|x_n < 0\},$$

par $\overline{H}^+$ et $\overline{H}^-$ leurs fermetures. On designera, conformément aux notations du paragraphe 3 par $\tilde{\mathcal{A}}$ le faisceau des fonctions analytiques sur H, par γ_o l'application

$$f \longmapsto f\,|\,H$$

et par γ l'application:

$$\gamma = \left(\gamma_o \circ \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^i\right)_{i=o}^{m-1}$$

γ est une application linéaire continue de $\mathcal{A}(H)$ dans $\tilde{\mathcal{A}}(H)^m$.

THÉORÈME 5.1.

Soit P *un opérateur différentiel d'ordre* m *à coefficients constants, et* N *un vecteur de* R^n *non caractéristique pour* P (on peut prendre $N = (0, \ldots 0, 1)$). *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

1) P_m *est hyperbolique pour* N.

2) P *a une solution élémentaire ultra-distribution à support dans un cône convexe* Γ *contenu dans* $H^+ \cup \{0\}$.

3) P *a une* ... *fonction* ... *vexe* Γ *c*...

4) P *a une* ... *fonction* ...

5) *Le probl*...

$$\begin{cases} Pf \\ \gamma(f) \end{cases}$$

a une s... $g \in \mathcal{A}(\overline{H}$...

6) *Le probl*...

$$\begin{cases} Pf \\ \gamma(f) \end{cases}$$

a une s... $g \in \mathcal{A}(R^n$...

Démonstratio...

L'implicatior ... [9]. L'implicati... rème 2.5. 4) ... 3) et 4) $\Longrightarrow$ 3) résu... corollaire 5.3.2. ... tion 5) dans laque... D'après l'unicité ... de Cauchy 5) et ... l'assertion P_m *est* ... P_m *est hyperboliq*... 5), c'est que 1) ... ou 6) entraîne:

7) *Le probl*...

a une solution f $\in$ ...

Il suffit don... 7) $\Longrightarrow$ 1).

Démonstratic...

Soit E la ... support dans le ... obtenue à parti... de 0. On a:

$\sigma(\check{E}) \subset$ ...

3) P *a une solution élémentaire hyperfonction à support dans un cône convexe* Γ *contenu dans* $H^+ \cup \{0\}$.

4) P *a une solution élémentaire hyperfonction à support dans* $\overline{H}^+$.

5) *Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} Pf = g \\ \gamma(f) = h \end{cases}$$

a une solution $f \in \mathfrak{a}(\overline{H}^+)$ *pour tout* $g \in \mathfrak{a}(\overline{H}^+)$, $h \in (\tilde{\mathfrak{a}}(H))^m$.

6) *Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} Pf = g \\ \gamma(f) = h \end{cases}$$

a une solution $f \in \mathfrak{a}(R^n)$ *pour tout* $g \in \mathfrak{a}(R^n)$, $h \in (\tilde{\mathfrak{a}}(H))^m$.

Démonstration.

L'implication 1) $\Longrightarrow$ 2) est démontrée dans [9]. L'implication 2) $\Longrightarrow$ 3) découle du théorème 2.5. 4) est un affaiblissement de 3) et 4) $\Longrightarrow$ 3) résulte du théorème 4.2. (cf. (3), corollaire 5.3.2.). Désignons par 5^-) l'assertion 5) dans laquelle H^+ est remplacé par H^-. D'après l'unicité de la solution du problème de Cauchy 5) et 5^-) entraînent 6). Comme l'assertion P_m *est hyperbolique pour* N entraîne P_m *est hyperbolique pour* $-N$, si 1) entraîne 5), c'est que 1) entraîne 6). D'autre part 5) ou 6) entraîne:

7) *Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} Pf = 0 \\ \gamma(f) = h \end{cases}$$

a une solution $f \in \mathfrak{a}(\overline{H}^+)$ *pour tout* $h \in \tilde{\mathfrak{a}}(H)^m$.

Il suffit donc de démontrer 3) $\Longrightarrow$ 5) et 7) $\Longrightarrow$ 1).

Démonstration de 3) $\Longrightarrow$ *5).*

Soit E la solution élémentaire de P à support dans le cône Γ et $\check{E}$ l'hyperfonction obtenue à partir de E par symétrie autour de 0. On a:

$${}^tP\,\check{E} = \delta$$

$$\sigma(\check{E}) \subset -\Gamma \subset H^- \cup \{0\}$$

si $u \in \mathfrak{a}'(\overline{H}^+)$, $\sigma(\check{E} * u) \cap H^+$ est borné. On peut donc écrire d'après le théorème 1.4.:

$$\check{E} * u = v + v'$$

avec

$$v \in \mathfrak{a}(\overline{H}^+),\ v' \in B(R^n),\ \sigma(v') \cap H^+ = \varnothing.$$

Donc

$$u = {}^tP(E * u) = {}^tPv + w$$

où $v \in \mathfrak{a}'(\overline{H}^+)$, $w \in \mathfrak{a}'(H)$. D'après le théorème 3.3. on peut écrire de manière unique

$$w = \sum_{i=0}^{m-1} w_i \otimes \delta_n^i \quad w_i \in \tilde{\mathfrak{a}}'(H).$$

Donc l'application

$$\mathfrak{a}'(\overline{H}^+) \times \tilde{\mathfrak{a}}'(H)^m \longrightarrow \tilde{\mathfrak{a}}'(\overline{H}^+)$$

$$(v,\ (w_i)_{i=0}^{m-1}) \longmapsto \left({}^tPv + \sum_{i=0}^{m-1} w_i \otimes \delta_n^i\right)$$

est surjective, et d'après le théorème 4.2., si

$${}^tPv + \sum_{i=0}^{m-1} w_i \otimes \delta_n^i = 0$$

c'est que $v \in \mathfrak{a}'(\partial H)$, donc que $v = 0$ (théorème 3.3.). Cette application est donc un isomorphisme, et même un isomorphisme vectoriel topologique car les espaces considérés sont du type $\mathcal{LF}$. On en déduit 5) par transposition.

Démonstration de 7) $\Longrightarrow$ *1).*

Soit $\mathfrak{a}_P$ le faisceau des germes de solutions analytiques de l'équation $Pf = 0$. L'hypothèse 7) et le théorème de Cauchy-Kowalewski entraînent:

$$\mathfrak{a}_P(H) = \mathfrak{a}_P(\overline{H}^+)$$

Pour tout ouvert Ω de C^n désignons par $H_P(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes solutions de l'équation $Pf = 0$ dans Ω. Soit H_ε l'ouvert complexe:

$$H_\varepsilon = \{z \in C^n \quad d(z, H) < \varepsilon\}$$

(d = distance euclidienne de R^{2n}). Pour tout compact K de $\overline{H}^+$ l'application

$$\mathfrak{a}_P(H) \longrightarrow \mathfrak{a}_P(\overline{H}^+)$$

induit une application

$$H_P(H_\varepsilon) \longrightarrow \mathfrak{a}_P(K)$$

qui sera continue d'après le théorème du graphe fermé. Donc:

$$\forall\, K \subset \overline{H}^{+},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, C > 0,$$

$\exists\, L \subset\subset H_\varepsilon$ tels que:

$$\forall\, f \in H_P(C^n)$$

$$\sup_K |f| \leq C \sup_L |f|.$$

Soit $\xi \in C^n$, $|\xi| = 1$, avec $P_m(\xi) = 0$.

On peut trouver une suite $\lambda_j \in C^n$ avec:

$$|\lambda_j| \longrightarrow \infty$$

$$P(\lambda_j) = 0$$

$$\frac{\lambda_j}{|\lambda_j|} \longrightarrow \xi$$

(Pour le voir on remarque que le polynôme est t, $P\left(t\frac{\lambda}{|\lambda|}\right)$ a une racine qui tend vers l'infini quand $\frac{\lambda}{|\lambda|}$ tend vers ξ avec $P_m\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}\right) \neq$ $\neq 0$, sauf si $P_p(\xi) = 0\ \forall_p = 0 \ldots m$, auquel cas on peut prendre $\lambda_j = j\ \xi$).

La fonction $z \longmapsto e^{i\langle x, \lambda_j\rangle}$ appartient à $H_P(C^n)$. Donc si $x \in \overline{H}^{+}$ on a:

$$|e^{i\langle x, \lambda_j\rangle}| \leq C \sup_L |e^{i\langle z, \lambda_j\rangle}|$$

pour une constante $C > 0$ et un compact L de H_ε. En prenant le logarithme il vient: $-\operatorname{Im}\langle x, \lambda_j\rangle = \operatorname{Log} C - \sup_{z\in L} \operatorname{Im}\langle z, \lambda_j\rangle$.

Divisons par $|\lambda_j|$ et faisons tendre j vers l'infini

$$-\operatorname{Im}\langle x, \xi\rangle \leq -\sup_{z\in L}\langle \operatorname{Im} z, \xi\rangle .$$

Comme $P_m(\xi) = 0$ entraîne $P_m(-\xi) = 0$,

$$\operatorname{Im} > x, \xi < \leq \sup_{z\in H_\varepsilon} > \operatorname{Im} z, \xi < .$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $x \in \overline{H}^{+}$ et tout $\varepsilon > 0$, on a:

$$\sup_{x\in \overline{H}^{+}} \operatorname{Im}\langle x, \xi\rangle = \sup_{x\in H} \operatorname{Im}\langle x, \xi\rangle .$$

Ceci pour tout $\xi \in C^n$ avec $P_m(\xi) = 0$.

Soit $\xi' \in R^n$, $\tau \in C$ racine de l'équation

$$P_m(\xi' + \tau N) = 0;$$

on a

$$\operatorname{Im}\langle x, \xi' + \tau N\rangle = x^n \operatorname{Im}\tau$$

et cette quantité est nulle si $x \in H$. C'est donc que $\operatorname{Im}\tau = 0$.

Remarques.

1) La démonstration de l'implication 7) $\Longrightarrow$ 1) dans le Théorème 5.1. est analogue à une démonstration de Kiselman [4]. On pourrait d'ailleurs utiliser les résultats de cet article pour démontrer directement l'implication 1) $\Longrightarrow$ 6).

2) Le Théorème 4.2. a été démontré pour n = 2 par Kiselman (non publié). La démonstration de Kiselman est très différente puisqu'elle utilise la représentation de Sato des hyperfonctions.

RÉSUMÉ

On démontre le théorème Holmgren (3, théorème 5.3.1.) dans le cadre des hyperfonctions [6, 8] et on caractérise les opérateurs différentiels à coefficients constants ayant une solution élémentaire hyperfonction à support dans un cône.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Godement, R., (1964), *Théorie des faisceaux.* Hermann, Paris.

[2] Grothendieck, A., (1964), *Espaces vectoriels topologiques.* Soc. Mat. São Paulo.

[3] Hörmander, L., (1963), *Linear partial differential operators.* Springer-Verlag.

[4] Kiselman, C.-O., (1965), Existence and approximation theorems for solutions of complex analogues of boundary problems. *Archiv. för Mat.*, B 6, n.º 11, p. 193-207.

[5] Martineau, A., (1963), Sur les fonctionnelles analytiques et la transformée de Fourier-Borel. *Journ. Anal. Math. Jérusalem*, t. 9, p. 1-164.

[6] Martineau, A., (1960-1), Les hyperfonctions de M. Sato. *Sém. Bourbaki*, 13e année, n.º 214.

[7] Martineau, A., (1966), Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes. *Math. Annalen*, 1963, p. 62-88.

[8] Sato, M., (1959-60), Theory of hyperfunctions I, II. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, t. 8, p. 139-193 et p. 387-433.

[9] Schapira, P., (1968), Sur les ultra-distributions. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4e série*, t. 1, Fasc. 3, p. 397-415.

[10] Schapira, P., (1970), *Théorie des hyperfonctions.* Cours donné a l'I.M.P.A. Lecture Notes in Math. Springer, 126.