Propriétés de dualité dans les algébroïdes de Lie

Sophie Chemla

July 8, 2005

1 Introduction

La notion d'algébroïde de Lie ou d'algèbre de Lie-Rinehart intervient constamment dans mon travail de recherche. Elle était déjà présente dans ma thèse (effectuée sous la direction de M. Duflo [1], [2], [3]) dans un cas particulier fourni par les représentations coinduites. Pendant mes séjours à Harvard et à Utrecht, j'ai poursuivi mes recherches dans le prolongement de ma thèse ([4]). Ces années de postdoc m'ont aussi permis de me familiariser avec la géométrie symplectique au contact de J. Kalkman, Y. Karshon, H. Duistermaat et S. Sternberg. C'est lors de mon séjour à Utrecht que j'eu l'idée de regarder l'induction des algèbres de Lie comme un cas particulier d'image directe. J'étais convaincue que la propriété de dualité concernant l'image directe des $\mathcal{D}$-modules s'étendait au cadre des algébroïdes de Lie sans pouvoir écrire une preuve. Ce n'est qu'une fois recrutée à Paris 6, au contact de Pierre Schapira, que je parvins à surmonter ces difficultés techniques ([5], [7]). J'ai ensuite tout naturellement traité le cas de l'image inverse en bénéficiant de la présence de Kashiwara à l'institut de mathématiques ([8]). Un peu plus tard, M. Duflo et T. Levasseur m'ont signalé les liens d'un article de Yekutieli avec certains de mes travaux. Je me suis intéressée à la théorie des complexes dualisants rigides développée par Yekutieli et van den Bergh et j'ai écrit [9].

Les algébroïdes de Lie généralisent à la fois le faisceau des champs de vecteurs sur une variété et les algèbres de Lie de dimension finie. Les variétés de Poisson et les variétés munies d'une action de groupe fournissent de nombreux exemples d'algébroïdes de Lie. Un algébroïde de Lie $\mathcal{L}_X$ définit un faisceau d'algèbres d'opérateurs généralisés $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$ engendré par par $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{L}_X$. Si $\mathcal{L}_X$ est le faisceau des champs de vecteurs sur une variété X, $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$

n'est autre que le faisceau des opérateurs différentiels sur X. Si X est un point, $\mathcal{L}_X$ est une algèbre de Lie et $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$ est son algèbre enveloppante. Ainsi, $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$ peut être vu à la fois comme une généralisation de l'algèbre enveloppante et une généralisation du faisceau d'algèbres des opérateurs différentiels. Je me suis intéressée au second point de vue et j'ai généralisé une partie de la théorie des $\mathcal{D}$-modules (plus précisément les opérations) aux $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-modules. Les $\mathcal{D}$-modules m'ont servi de source d'inspiration pour démontrer des propriétés de dualité dans les algébroïdes de Lie et plus particulièrement dans les algèbres de Lie.

J'exprime ma gratitude envers M. Duflo pour m'avoir formée. Ses conseils m'ont toujours été précieux.

Pendant mes premières années de recherche, Y. Benoist a su m'encourager et me faire bénéficier de son expérience. Qu'il en soit remercié.

Ma reconnaissance va à B. Keller et T. Levasseur pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mes travaux et pour leur disponibilité.

Je remercie P. Schapira de m'avoir initiée à la théorie des $\mathcal{D}$-modules et à son langage.

J'ai bénéficié de fructueuses conversations avec beaucoup de mathématiciens, entre autres : J. Bernstein, H. Duistermaat, J. Kalkman, Y. Karshon, M. Kashiwara, W. van der Kallen, A. Yekutieli ...

Quatre laboratoires m'ont accueillie et m'ont fourni un environnement propice et agréable ainsi que d'excellentes conditions de travail : dans l'ordre chronologique l'équipe de théorie des groupes, le département de mathématiques de Harvard, le département de mathématiques de Utrecht et l'équipe d'analyse algébrique.

2 Algébroïdes de Lie

Pour la théorie des faisceaux, nous adopterons les notations de [K-S1].

2.1 Définitions

Soit X une variété $\mathcal{C}^\infty$, analytique complexe ou algébrique lisse sur $\mathbb{C}$ et soit $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, holomorphes ou régulières sur X. Soit Θ_X le $\mathcal{O}_X$-module des champs de vecteurs sur X. On pose $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ selon le cadre dans lequel on se place.

Définition 2.1.1 *Un faisceau de k-algèbres de Lie $\mathcal{L}_X$ est un faisceau de*

k_X-modules tel que pour ouvert U, $\mathcal{L}_X(U)$ est muni d'une structure de k-algèbre de Lie, les morphismes de restriction étant des morphismes d'algèbres de Lie.

Un morphisme entre deux faisceaux d'algèbres de Lie $\mathcal{L}_X$ et $\mathcal{M}_X$ est un morphisme de k_X-modules qui est un morphisme d'algèbres de Lie sur chaque ouvert.

Définition 2.1.2 *Un algébroide de Lie sur X est une paire $(\mathcal{L}_X, \omega)$ où*

- *$\mathcal{L}_X$ est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini*
- *$\mathcal{L}_X$ est un faisceau d'algèbres de Lie sur k*
- *$\omega : \ \mathcal{L}_X \to \Theta_X$ est un morphisme de faisceaux de k-algèbres de Lie et de $\mathcal{O}_X$-modules tel que la relation de compatibilité suivante soit vérifiée :*
$$\forall (\xi, \zeta) \in \mathcal{L}_X^2, \ \ \forall f \in \mathcal{O}_X, \ \ [\xi, f\zeta] = \omega(\xi)(f)\zeta + f[\xi, \zeta]$$

Le morphisme ω s'appelle l'ancre. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité, nous omettrons l'ancre dans la notation de l'algébroïde de Lie. Remarquons que si $(\mathcal{L}_X, \omega)$ est un algébroïde de Lie sur X, alors $\left(\mathcal{L}_{X|U}, \omega_{|U}\right)$ est un algébroïde de Lie sur U que l'on notera $\mathcal{L}_U$.

Si, au lieu de se placer dans un cadre faisceautique, on se place dans un cadre algébrique, on obtient la notion d'algèbre de Lie-Rinehart ([R]). Ainsi, si $(X, \mathcal{L}_X, \omega_X)$ est un algébroïde de Lie sur X, alors pour tout ouvert U de X, $(\mathcal{L}_X(U), \omega_X(U))$ est une $k - \mathcal{O}_X(U)$-algèbre de Lie-Rinehart.

Un algébroïde de Lie $(\mathcal{L}_X, \omega)$ définit un faisceau d'algèbres d' opérateurs généralisés que l'on notera $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$:

Définition 2.1.3 *$\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$ est le faisceau associé au préfaisceau :*
$$U \mapsto T^+_{\mathbb{C}} \left(\mathcal{O}_X(U) \oplus \mathcal{L}_X(U)\right) / J_U$$
où J_U est l'idéal bilatère engendré par les relations
$$\forall (f, g) \in \mathcal{O}_X(U), \ \ \forall (\xi, \zeta) \in \mathcal{L}_X(U)^2$$
$$\begin{array}{l} 1) f \otimes g - fg \\ 2) f \otimes \xi - f\xi \\ 3) \xi \otimes \zeta - \zeta \otimes \xi - [\xi, \zeta] \\ 4) \xi \otimes f - f \otimes \xi - \omega(\xi)(f) \end{array}$$

Autrement dit $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$ est le faisceau engendré par les éléments $\mathcal{O}_X$ et $\mathcal{L}_X$ et par les relations 1,2,3 et 4.

La définition de $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$ par générateurs et relations est très analogue à celle du faisceau $\mathcal{D}_X$ des opérateurs différentiels sur X. Nous verrons que ces ressemblances permettent d'étendre la théorie des $\mathcal{D}$-modules aux faisceaux d'algèbres d'opérateurs généralisés.

Notons $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)^{op}$ le faisceau d'algèbres opposées de sorte qu'un $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module à droite est un $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)^{op}$-module (à gauche).

2.2 Morphismes d'algébroïdes de Lie

Définition 2.2.1 *Soient $(\mathcal{L}_X, \omega_X)$ et $(\mathcal{L}_Y, \omega_Y)$ des algébroïdes de Lie sur X et Y respectivement. Un morphisme Φ de $(\mathcal{L}_X, \omega_X)$ vers $(\mathcal{L}_Y, \omega_Y)$ est une paire (f, F) telle que*

- *$f : X \to Y$ est un morphisme de variétés ($\mathcal{C}^\infty$, analytiques, algébriques)*
- *$F : \mathcal{L}_X \to f^*\mathcal{L}_Y = \mathcal{O}_X \underset{f^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{-1}\mathcal{L}_Y$ est un morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules tels que les deux conditions suivantes soient satisfaites:*

  1) Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_X & \xrightarrow{F} & f^*\mathcal{L}_Y \\ {\scriptstyle \omega_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*\omega_Y} \\ \Theta_X & \xrightarrow[Tf]{} & f^*\Theta_Y \end{array}$$

  est commutatif (Tf étant la différentielle de f).

  2) Soient ξ et η deux sections $\mathcal{L}_X$. Posons $F(\xi) = \sum_{i=1}^{m} a_i \otimes \xi_i$ et $F(\eta) = \sum_{j=1}^{m} b_j \otimes \eta_j$ avec $a_i, b_j \in \mathcal{O}_X$ et $\xi_i, \eta_j \in f^{-1}\mathcal{L}_Y$. Alors

$$F([\xi,\eta]) = \sum_{j=1}^{n} \omega_X(\xi)(b_j) \otimes \eta_j - \sum_{i=1}^{n} \omega_X(\eta)(a_i) \otimes \xi_i + \sum_{i,j} a_i b_j \otimes [\xi_i, \eta_j].$$

La condition 2) équivaut à la propriété suivante : $\mathcal{O}_X \underset{f^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{-1}\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)$, muni des deux opérations ci-dessous, est un $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module à gauche.

$$\forall (a,b) \in \mathcal{O}_X^2,\ \forall \xi \in \mathcal{L}_X,\ \forall v \in f^{-1}\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)$$

$$\begin{aligned} a \cdot (b \otimes v) &= ab \otimes v \\ \xi \cdot (b \otimes v) &= \omega_X(\xi)(b) \otimes v + \textstyle\sum_i ba_i \otimes \xi_i v \end{aligned}$$

(où $F(\xi) = \sum_i a_i \otimes \xi_i$ avec $a_i \in \mathcal{O}_X$ et $\xi_i \in f^{-1}\mathcal{L}_Y$).

Notre définition ([5], [7]) est une reformulation de celle d'Almeida et de Kumpera ([A-K]).

Notation :
Le $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)\otimes_k f^{-1}\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)^{op}$-module $\mathcal{O}_X \underset{f^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{-1}\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)$ (la structure de $f^{-1}\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)$-module à droite est donnée par la multiplication à droite) sera noté $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_X \to \mathcal{L}_Y}$ (comme dans cas des $\mathcal{D}$-modules [Bo], [7]).

La composition de deux morphismes d'algébroïdes de Lie est un morphisme d'algébroïdes de Lie.

2.3 Exemples

1) Le faisceau d'algèbres d'opérateurs différentiels généralisés associé à l'algébroide de Lie (X, Θ_X, id) n'est autre que le faisceau d'algèbres d'opérateurs différentiels sur X. De plus, si $f : X \to Y$ est un morphisme de variétés ($\mathcal{C}^\infty$, analytiques, algébriques), sa différentielle $Tf : \Theta_X \to \mathcal{O}_X \underset{f^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{-1}\Theta_Y$ définit un morphisme d'algébroides de Lie (f, Tf) de (X, Θ_X) vers (Y, Θ_Y).

2) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. C'est un algébroïde sur un point avec une ancre triviale. L'algèbre d'opérateurs différentiels généralisés associée à cet algébroide de Lie n'est autre que l' algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Les morphismes d'algébroïdes de Lie généralisent les morphismes d'algèbres de Lie.

3) Soit S une variété analytique. Une variété analytique relative sur S, $X \mid S$, est une variété analytique X muni d'une submersion surjective $\epsilon_X : X \to S$. La différentielle $T\epsilon_X : TX \to X \times_S TS$ est surjective. Son noyau est un sous fibré de TX noté $T(X \mid S)$ et appelé fibré tangent relatif à S. Le $\mathcal{O}_X$-module des sections de $T(X \mid S)$, $\Theta_{X|S}$, est un algébroïde de Lie

ayant pour ancre l'inclusion naturelle $\Theta_{X|S} \hookrightarrow \Theta_X$. L'algèbre d'opérateurs différentiels généralisés définie par cet algébroïde de Lie est l'algèbre des opérateurs différentiels relatifs sur $X \mid S$ ([S1], [S-S]).

4) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. Supposons qu'il existe un morphisme d'algèbres de Lie $\sigma : \mathfrak{g} \to \Theta_X$. Alors $\mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{g}$ a une structure naturelle d' algébroïde de Lie avec pour ancre l'application ω définie par

$$\forall f \in \mathcal{O}_X,\ \forall \xi \in \mathfrak{g},\ \ \omega(f \otimes \xi) = f\sigma(\xi).$$

Le crochet de Lie sur $\mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{g}$ est donné par

$$[f \otimes \xi, g \otimes \eta] = f\sigma(\xi)(g) \otimes \eta - g\sigma(\eta)(f) \otimes \xi + fg \otimes [\xi, \eta].$$

Soient G et G' deux groupes de Lie complexes d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}'$ et soit $\chi\ :\ G \to G'$ un morphisme de groupes de Lie dont la différentielle en l'unité sera encore notée χ. Soit X (respectivement X') une variété analytique avec action de G (respectivement G'). Soit $f\ :\ X \to X'$ un morphisme équivariant dans le sens où

$$\forall g \in G,\ \forall x \in X,\ \ f(g \cdot x) = \chi(g) \cdot f(x).$$

Définissons $F\ :\ \mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{g} \to \mathcal{O}_X \underset{f^{-1}\mathcal{O}_{X'}}{\otimes} f^{-1}(\mathcal{O}_{X'} \otimes \mathfrak{g}')$ par

$$F(f \otimes \xi) = f \otimes 1 \otimes \mathrm{d}\chi(\xi).$$

Alors (f, F) est un morphisme d'algébroïdes de Lie de $\mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{g}$ vers $\mathcal{O}_{X'} \otimes \mathfrak{g}'$.

5) Conservons les notations de l'exemple 4. Supposons que $X = V$ soit un espace vectoriel de dimension finie et que G soit un groupe algébrique connexe agissant sur V. Posons $LieG = \mathfrak{g}$ et $\mathcal{L}_V = \omega(\mathcal{O}_V \otimes \mathfrak{g})$. Si $max_{v \in V} dimG \cdot v = dimG$, alors $\mathcal{L}_V$ est un $\mathcal{O}_V$-module localement libre ([P] p. 186) et $(V, \mathcal{L}_V)$ (avec pour ancre l'injection naturelle) est un algébroïde de Lie.

6) Soit X une variété de Poisson. Notons $\{\ ,\ \}$ le crochet de Poisson sur $\mathcal{O}_X$. Le $\mathcal{O}_X$-module des formes différentielles de degré 1 , Ω^1_X, est muni d'une structure naturelle d'algébroïde de Lie ([Hu1]) avec pour ancre

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1_X & \to & \Theta_X \\ f\mathrm{d}g & \mapsto & f\{g, \bullet\}. \end{array}$$

Rappelons que le crochet de Lie sur Ω^1_X est donné par

$$[f \otimes \mathrm{d}a, g \otimes \mathrm{d}b] = fg \otimes \mathrm{d}\{a, b\} + f\{a, g\} \otimes \mathrm{d}b - g\{b, f\} \otimes \mathrm{d}a.$$

On sait ([Hu2]) que $\mathcal{O}_X$, muni des opérations suivantes,

$$\begin{array}{l} \forall (a,h,g) \in \mathcal{O}_X^3, \\ a \cdot h = ah \\ a \cdot hdg = \{ah, g\} \end{array}$$

est un $\mathcal{D}(\Omega_X^1)$-module à droite. L'un des intérêts de l'algébroïde de Lie (X, Ω_X^1) est qu'elle permet d'exprimer ([Hu1]) l'homologie canonique ([Br], [Ko], [Li]) et la cohomologie canonique des variétés de Poisson comme des foncteurs dérivés. Soit Y une autre variété de Poisson et soit $f : X \to Y$ un morphisme de variétés de Poisson. Il n'y a pas de raison pour que f définisse un morphisme d'algébroïdes de (X, Ω_X^1) vers (Y, Ω_Y^1). Cependant f permet de définir une correspondance entre (X, Ω_X^1) et (Y, Ω_Y^1). Munissons le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{O}_X \underset{f^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{-1}\Omega_Y^1$ d'une structure d'algébroïde de Lie : le crochet de Lie est défini par

$$\begin{array}{rcl} \forall (a,a') \in \mathcal{O}_X, & \forall (b,b',v,v') \in \mathcal{O}_Y & \\ {[a \otimes \mathrm{d}v, a' \otimes \mathrm{d}v']} & = & a\{v \circ f, a'\} \otimes \mathrm{d}v' - a'\{v' \circ f, a\} \otimes \mathrm{d}v \\ & + & aa' \otimes \mathrm{d}\{v, v'\} \end{array}$$

et l'ancre par

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_X \underset{f^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{-1}\Omega_Y^1 & \to & \Theta_X \\ a \otimes \mathrm{d}v & \mapsto & a\{v \circ f, .\}. \end{array}$$

Le couple (f, id) est un morphisme d'algébroïdes de Lie de $\left(X, \mathcal{O}_X \underset{f^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{-1}\Omega_Y^1 \right)$ vers (Y, Ω_Y^1).

Construisons la correspondance suivante :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathcal{O}_X \underset{f^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{-1}\Omega_Y^1 \arrow[dl, "(id,F)"'] \arrow[dr, "(f,id)"] & \\ (X, \Omega_X^1) & & (Y, \Omega_Y^1), \end{tikzcd}$$

où F est défini comme suit : pour tout α dans $\mathcal{O}_X$ et tout β dans $\mathcal{O}_Y$,

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_X \underset{f^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{-1}\Omega_Y^1 & \to & \Omega_X^1 \\ \alpha \otimes \beta \mathrm{d}q & \mapsto & \alpha(\beta \circ f)\mathrm{d}(q \circ f). \end{array}$$

7) Soit $(X, \mathcal{L}_X)$ un algébroïde de Lie. Associons-lui l' algébroïde abélien $(X, \mathcal{L}_X^{ab})$ défini par

- $\mathcal{L}_X^{ab} = \mathcal{L}_X$
- Le crochet de Lie sur $\mathcal{L}_X^{ab}$ est nul
- L'ancre sur $\mathcal{L}_X^{ab}$ is 0.

Soit $\Phi = (f, F)$ un morphisme d'algébroïdes de Lie de $(X, \mathcal{L}_X)$ vers $(Y, \mathcal{L}_Y)$. Il induit un morphisme d'algébroïdes de Lie $\Phi^{ab} = (f, F^{ab})$ de $(X, \mathcal{L}_X^{ab})$ vers $(Y, \mathcal{L}_Y^{ab})$.

8) Soit $(\mathcal{L}_X, \omega_X)$ (respectivement $(\mathcal{L}_Y, \omega_Y)$) un algébroïde de Lie sur X (respectivement Y). Soit p_1 (respectivement p_2) la projection de $X \times Y$ sur X (respectivement Y). Le $\mathcal{O}_{X\times Y}$-module

$$\mathcal{L}_{X\times Y} = \mathcal{O}_{X\times Y} \underset{p_1^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} p_1^{-1}\mathcal{L}_X \oplus \mathcal{O}_{X\times Y} \underset{p_2^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} p_2^{-1}\mathcal{L}_Y$$

est muni d'une structure naturelle d'algébroïde de Lie sur $X \times Y$. L'ancre de $\mathcal{L}_{X\times Y}$, $\omega_{X\times Y} : \mathcal{L}_{X\times Y} \to \Theta_{X\times Y}$, est déterminée par

$$\begin{array}{l} \forall (f,g) \in \mathcal{O}_X \times \mathcal{O}_Y, \;\; \forall (\xi, \zeta) \in \mathcal{L}_X \times \mathcal{L}_Y \\ \omega_{X\times Y}(\xi)(f \otimes g) = \omega_X(\xi)(f)g \\ \omega_{X\times Y}(\zeta)(f \otimes g) = f\omega_Y(\zeta)(g). \end{array}$$

Sur $\mathcal{L}_{X\times Y}$, on met le crochet de Lie étendant celui de $\mathcal{L}_X$ et de $\mathcal{L}_Y$ et satisfaisant de surcroît la relation $[p_1^{-1}\mathcal{L}_X, p_2^{-1}\mathcal{L}_Y] = 0$.

On construit ainsi l'algébroïde de Lie sur $X \times Y$

$$\mathcal{P}_{X\times Y} = \mathcal{O}_{X\times Y} \underset{p_1^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} p_1^{-1}\Theta_X \oplus \mathcal{O}_{X\times Y} \underset{p_2^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} p_2^{-1}\mathcal{L}_Y.$$

Soit $\Phi = (f, F)$ un morphisme d'algébroïdes de Lie de $(\mathcal{L}_X, \omega_X)$ vers $(\mathcal{L}_Y, \omega_Y)$. La factorisation suivante est utile: $\Phi = \Pi \circ \Upsilon_2 \circ \Upsilon_1$ où

- $\Upsilon_1 = (u_1, U_1)$ est le morphisme d'algébroïdes de $(\mathcal{L}_X, \omega_X)$ vers $(\mathcal{L}_{X\times Y}, \omega_{X\times Y})$ défini par

$$\begin{array}{rcl} u_1 \;:\; X & \to & X \times Y \\ x & \mapsto & (x, f(x)) \\ U_1 \;: \mathcal{L}_X & \to & \mathcal{O}_X \underset{p_1^{-1}\mathcal{O}_{X\times Y}}{\otimes} p_1^{-1}\mathcal{L}_{X\times Y} \simeq \mathcal{O}_X \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} f^{-1}\mathcal{L}_Y \oplus \mathcal{L}_X \\ D & \mapsto & F(D) + D \end{array}$$

- $\Upsilon_2 = (id, U_2)$ est le morphisme d'algébroïdes de $(\mathcal{L}_{X\times Y}, \omega_{X\times Y})$ vers $(\mathcal{P}_{X\times Y}, \overline{\omega}_{X\times Y})$ défini par

$$\forall D \in p_1^{-1}\mathcal{L}_X,\ \forall \Delta \in p_2^{-1}\mathcal{L}_Y,\ U_2(1{\otimes}D) = \omega_{X\times Y}(1{\otimes}D),\ \ U_2(1{\otimes}\Delta) = 1{\otimes}\Delta$$

- $\Pi = (p_2, \pi)$ est le morphisme d'algébroïdes de $(\mathcal{P}_{X\times Y}, \overline{\omega}_{X\times Y})$ to $(\mathcal{L}_Y, \omega_Y)$ défini par les projections naturelles.

Dans cette décomposition, Υ_1 se comporte comme une immersion fermée, Υ_2 se comporte comme un morphisme d'algèbres de Lie et Π se comporte comme une projection.

2.4 Propriétés de $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$

$\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$ est muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n\mathcal{D}(\mathcal{L}_X))_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme suit :

$$\begin{array}{l} \mathcal{F}_0\mathcal{D}(\mathcal{L}_X) = \mathcal{O}_X \\ \mathcal{F}_n\mathcal{D}(\mathcal{L}_X) = \mathcal{F}_{n-1}\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)\cdot\mathcal{L}_X + \mathcal{F}_{n-1}\mathcal{D}(\mathcal{L}_X) \end{array}$$

Comme nous supposons que $\mathcal{L}_X$ est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre, le faisceau d'algèbres d'opérateurs généralisés vérifie le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt ([R]) :

Théorème 2.4.1 *Les $\mathcal{O}_X$-algèbres $S_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_X)$ et $Gr\mathcal{F}\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$ sont isomorphes.*

Par suite, $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$ jouit des mêmes propriétés homologiques que $\mathcal{D}_X$. Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt nous permettra de définir la notion de variété caractéristique et de nous ramener au cas commutatif pour faire certaines démonstrations.

Proposition 2.4.2 *Le faisceau $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$ est noethérien et est de dimension cohomologique finie. De plus, il existe un entier p tel que, localement, tout $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module cohérent $\mathcal{M}$ a une résolution de longueur inférieure ou égale à p. En d'autres termes, tout point x admet un voisinage ouvert V tel qu'il existe une résolution du type*

$$0 \to \mathcal{D}(\mathcal{L}_V)^{l_p} \to \ldots \to \mathcal{D}(\mathcal{L}_V)^{l_0} \to \mathcal{M}_{|V} \to 0.$$

2.5 La variété caractéristique

Soit $(X, \mathcal{L}_X)$ un algébroïde sur X. Soit L_X le fibré vectoriel associé à $\mathcal{L}_X$ et π la projection de L_X^* sur X. Comme dans le cas des $\mathcal{D}$-modules ([S2]), on définit la notion de bonne filtration pour un $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module cohérent (see [Bj] p. 24). Tout $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module cohérent admet localement une bonne filtration. Soit $\mathcal{N}$ un $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module cohérent et soit U un ouvert sur lequel $\mathcal{N}_{|U}$ admet une bonne filtration. Le sous ensemble Supp $\left(\mathcal{O}_{L_U^*} \underset{\pi^{-1}S(\mathcal{L}_U)}{\otimes} \pi^{-1} Gr \mathcal{N}_{|U}\right)$ ne dépend pas de la bonne filtration. La variété caractéristique, $\mathrm{char}(\mathcal{N})$, est le sous ensemble fermé et conique de L_X^* défini par

$$\mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_{L_U^*} \underset{\pi^{-1}S(\mathcal{L}_U)}{\otimes} \pi^{-1} Gr \mathcal{N}\right) = \mathrm{char}(\mathcal{N}) \bigcap L_U^*.$$

Soit $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X))$ la catégorie abélienne des $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-modules (à gauche) et $D^b\left(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)\right))$ sa catégorie dérivée bornée. Notons $D^b_{coh}\left(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)\right)$ la sous catégorie pleine de $D^b\left(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)\right)$ consistant en les objets de $D^b\left(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)\right)$ ayant des groupes de cohomologie cohérents. Si $\mathcal{N}^\bullet$ est un objet de $D^b_{coh}\left(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)\right)$, on pose

$$\mathrm{char}(\mathcal{N}^\bullet) = \bigcup_{j \in Z} \mathrm{char} H^j\left(\mathcal{N}^\bullet\right).$$

3 Opérations sur les $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-modules

Dans cette section, nous généralisons aux $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-modules des notions de base de la théorie des $\mathcal{D}$-modules due à Bernstein et à Kashiwara. Nous renvoyons le lecteur à [Bj], [Bo], [Ho], [S2] et [Ka2] pour un exposé détaillé. Les résultats de cette section se trouvent dans [4], [5], [7], [8].

3.1 Modules à droite et modules à gauche

La proposition suivante est classique pour les $\mathcal{D}$-modules et se généralise aisément aux algébroïdes de Lie ([5], [7]).

Proposition 3.1.1 *a) Soient $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ deux $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-modules à gauche. Alors $\mathcal{N} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{N}'$ est un $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module à gauche si on le munit des deux opérations suivantes :*

$$\begin{array}{l} \forall a \in \mathcal{O}_X,\ \forall n \in \mathcal{N}, \forall n' \in \mathcal{N}', \forall D \in \mathcal{L}_X \\ a \cdot (n \otimes n') = a \cdot n \otimes n' = n \otimes a \cdot n' \\ D \cdot (n \otimes n') = D \cdot n \otimes n' + n \otimes D \cdot n'. \end{array}$$

b) Soit $\mathcal{M}$ (respectivement $\mathcal{N}$) un $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module à droite (respectivement à gauche). Alors $\mathcal{M} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{N}$ est $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module à droite si on le munit des opérations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\forall a \in \mathcal{O}_X,\ \forall m \in \mathcal{M}, \forall n \in \mathcal{N}, \forall D \in \mathcal{L}_X\\
&(m \otimes n) \cdot a = m \otimes a \cdot n = m \cdot a \otimes n\\
&(m \otimes n) \cdot D = m \cdot D \otimes n - m \otimes D \cdot n.
\end{aligned}$$

c) Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ deux $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-modules à droite. Alors $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ est un $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module à gauche si on le munit des opérations suivantes

$$\begin{aligned}
&\forall \phi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M}'),\ \forall m \in \mathcal{M}, \forall a \in \mathcal{O}_X, \forall D \in \mathcal{L}_X\\
&(a \cdot \phi)(m) = \phi(m) \cdot a\\
&(D \cdot \phi)(m) = -\phi(m) \cdot D + \phi(m \cdot D).
\end{aligned}$$

d) Soient $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ deux $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-modules à gauche. Alors $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{N}')$ est un $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module à gauche si on le munit des opérations suivantes

$$\begin{aligned}
&\forall \phi \in \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{N}, \mathcal{N}'),\ \forall n \in \mathcal{N}, \forall a \in \mathcal{O}_X, \forall D \in \mathcal{L}_X\\
&(a \cdot \phi)(n) = a \cdot \phi(n)\\
&(D \cdot \phi)(n) = D \cdot \phi(n) - \phi(D \cdot n).
\end{aligned}$$

Le théorème suivant est une conséquence de la proposition précédente.

Théorème 3.1.2 *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module à droite qui est localement libre de rang un en tant que $\mathcal{O}_X$-module. Le foncteur $\mathcal{N} \mapsto \mathcal{E} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{N}$ établit une équivalence de catégories entre les $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-modules à gauche et $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-modules à droite. Son foncteur inverse est donné par $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{M})$.*

Il est bien connu que $\Omega_X^{\dim X}$ (le faisceau des formes differentielles de degré maximal) est muni d'une structure de $\mathcal{D}_X$-module à droite (voir [S2] p.9, [Bo] p. 226). En utilisant le morphisme $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X) \to \mathcal{D}_X$, on munit $\Omega_X^{\dim X}$ d'une structure de $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module à droite. Le théorème 3.1.2 s'applique en particulier si $\mathcal{E} = \Omega_X^{dim X}$. Etendons la construction de Bernstein aux algébroïdes de Lie. Posons

$$\mathcal{L}_X^* = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_X, \mathcal{O}_X)$$

et soit $d_{\mathcal{L}_X}$ le rang de $\mathcal{L}_X$. Alors on peut choisir $\mathcal{E} = \Lambda^{d_{\mathcal{L}_X}}(\mathcal{L}_X^*)$. En effet, $\mathcal{L}_X$ agit sur $\mathcal{L}_X^*$ comme suit :

$$< D, \Delta \cdot \lambda > = < [D, \Delta], \lambda > + \Delta(< D, \lambda >)$$

pour tout $(D,\Delta) \in \mathcal{L}_X^2$ et tout $\lambda \in \mathcal{L}_X^*$. Alors $\mathcal{L}_X$ agit sur $\Lambda(\mathcal{L}_X^*)$. L'action d'un élément D de $\mathcal{L}_X$ sur $\Lambda(\mathcal{L}_X^*)$ est appelé dérivée de Lie de D et est notée L_D. Posons $\det(\mathcal{L}^*) = \Lambda^{d_{\mathcal{L}_X}}(\mathcal{L}_X^*)$. Alors $\det(\mathcal{L}_X^*)$, muni des deux opérations suivantes,

$$\begin{array}{l} \forall \sigma \in \det(\mathcal{L}_X^*),\ \forall D \in \mathcal{L}_X, \forall a \in \mathcal{O}_X \\ \sigma \cdot a = a \cdot \sigma \\ \sigma \cdot D = -L_D(\sigma) \end{array}$$

est un $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module à droite ([4]).

Considérons

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\mathcal{L}_X} &= \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}\left(\Lambda^{d_{\mathcal{L}_X}}(\mathcal{L}_X^*), \mathcal{D}(\mathcal{L}_X)\right) = \mathcal{D}(\mathcal{L}_X) \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Lambda^{d_{\mathcal{L}_X}}(\mathcal{L}_X) \\ \mathcal{K}_{\mathcal{L}_X} &= \Omega_X \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{D}(\mathcal{L}_X). \end{aligned}$$

$\mathcal{H}_{\mathcal{L}_X}$ est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X) \otimes_k \mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module à gauche (la première structure de $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module à gauche est donnée par la multiplication à gauche, la seconde est obtenue à partir de la multiplication à droite par la proposition 3.1.1 c) . De même $\mathcal{K}_{\mathcal{L}_X}$ est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)^{op} \otimes_k \mathcal{D}(\mathcal{L}_X)^{op}$ -module à gauche (la première structure de $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module à droite est donnée par la multiplication à droite, la seconde est obtenue à partir de la multiplication à gauche par la proposition 3.1.1b).

3.2 Foncteur dualité

Rappelons que $D^b_{coh}(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X))$ est la sous catégorie pleine de $D^b(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X))$ consistant en les objets de $D^b(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X))$ ayant des groupes de cohomologie cohérents. Si $\mathcal{N}^\bullet$ est un élément de $D^b_{coh}(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X))$, on pose

$$\underline{D}_{\mathcal{L}_X}(\mathcal{N}^\bullet) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)}(\mathcal{N}^\bullet, \mathcal{H}_{\mathcal{L}_X})[d_{\mathcal{L}_X}].$$

Comme la flèche naturelle $\mathcal{N}^\bullet \mapsto \underline{D}_{\mathcal{L}_X}(\underline{D}_{\mathcal{L}_X}(\mathcal{N}^\bullet))$ est un isomorphisme (voir [7]), on dit que $\underline{D}_{\mathcal{L}_X}$ est un foncteur dualité. De même, si $\mathcal{M}$ est un objet de $D^b(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)^{op})$ on pose

$$\underline{\Delta}_{\mathcal{L}_X}(\mathcal{M}^\bullet) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)}(\mathcal{M}^\bullet, \mathcal{K}_{\mathcal{L}_X})[dimX].$$

$\underline{\Delta}_{\mathcal{L}_X}$ est un foncteur dualité dans $D^b(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)^{op})$.

Si $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont deux $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-modules à gauche. On munit $R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{N},\mathcal{N}')$ d'une structure de $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module à gauche comme suit. Soit $\mathcal{I}^\bullet$ une résolution injective de $\mathcal{N}'$ dans la catégorie des $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-modules à gauche. Alors, comme $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$ est un $\mathcal{O}_X$-module plat, $\mathcal{I}^\bullet$ est une résolution injective de $\mathcal{N}'$ dans la catégories des $\mathcal{O}_X$-modules. Alors, on a

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{N},\mathcal{N}') \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{N},\mathcal{I}^\bullet)\,.$$

Comme, par la proposition 3.1.1, le membre de droite est muni d'une structure de $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module à gauche, il en est de même du membre de gauche. En d'autres termes, il revient au même de dériver le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{N},\bullet)$ dans la catégorie des $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-modules à gauche et dans la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules.

Proposition 3.2.1 *Si $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module à gauche qui est cohérent comme $\mathcal{O}_X$-module, alors $\underline{D}_{\mathcal{L}_X}(\mathcal{N})$ et $R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{N},\mathcal{O}_X)$ sont isomorphes dans $D^b(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X))$.*

Cette proposition est bien connue pour les $\mathcal{D}$-modules (voir [Ho] p. 93). Notons que dans le cas des $\mathcal{D}$-modules, le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{N}$ est nécessairement localement libre de rang fini.

3.3 Images directes

Dans ce paragraphe nous rappelons les résultats de [5] et [7].

Soit $\Phi = (f,F)$ un morphisme d'algébroïdes de Lie de $(\mathcal{L}_X,\omega_X)$ vers $(\mathcal{L}_Y,\omega_Y)$. Soit $\mathcal{M}^\bullet$ un objet de $D^b(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)^{op})$. Dans [7], le foncteur image directe est défini par

$$\underline{\Phi}_!(\mathcal{M}^\bullet) = Rf_!\left(\mathcal{M}^\bullet \overset{L}{\underset{\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)}{\otimes}} \mathcal{D}_{\mathcal{L}_X\to\mathcal{L}_Y}\right).$$

Alors $\underline{\Phi}_!(\mathcal{M}^\bullet)$ est dans $D^b(\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)^{op})$. Si $\Phi = (f,Tf)$, nous retrouvons la construction connue dans le cadre des $\mathcal{D}$-modules (voir [S2] par exemple). Dans ce cas, $\mathcal{D}_{\Theta_X\to\Theta_Y}$ est noté $\mathcal{D}_{X\to Y}$ et $\underline{\Phi}_!$ est noté $\underline{f}_!$.

Pour définir l'image directe d'un objet de $D^b(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X))$, comme dans le cas des $\mathcal{D}$-modules, on utilise le $\left(f^{-1}\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)\otimes\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)^{op}\right)$-bimodule $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_Y\leftarrow\mathcal{L}_X}$ défini par

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}_Y\leftarrow\mathcal{L}_X} = \Lambda^{d_{\mathcal{L}_X}}(\mathcal{L}_X^*)\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}\mathcal{D}_{\mathcal{L}_X\to\mathcal{L}_Y}\underset{f^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{-1}\Lambda^{d_{\mathcal{L}_Y}}(\mathcal{L}_Y).$$

Proposition 3.3.1 *Soient Φ et Ψ deux morphismes d' algébroïdes de Lie de $(\mathcal{L}_X, \omega_X)$ vers $(\mathcal{L}_Y, \omega_Y)$ et de $(\mathcal{L}_Y, \omega_Y)$ vers $(\mathcal{L}_Z, \omega_Z)$ respectivement, alors*

$$\underline{\Psi}_! \circ \underline{\Phi}_! = (\underline{\Psi \circ \Phi})_! \,.$$

La démonstration de la proposition 3.3.1 est semblable au cas des $\mathcal{D}$-modules (voir [Bo] p. 251).

Remarque : Le théorème de Kashiwara

Dans le cas des $\mathcal{D}$-modules [Bo], le théorème de Kashiwara affirme que, pour une immersion fermée $X \hookrightarrow Y$, on a une équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathcal{D}_Y$-modules à support dans X et la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules. Soit $\Phi = (f, F)$ un morphisme d'algébroïdes de Lie de $(X, \mathcal{L}_X)$ vers $(Y, \mathcal{L}_Y)$. On dit que Φ est une immersion fermée si f est une immersion fermée. Le théorème de Kashiwara n'est pas vrai pour une immersion fermée d'algébroïdes de Lie en général (puisqu'il est faux dans le cadre des $\mathcal{O}_X$-modules). Donnons une condition suffisante pour que le théorème de Kashiwara soit vérifié. A partir de maintenant, $\Phi = (f, F)$ désignera une immersion fermée. Posons $f_*\mathcal{O}_X = \dfrac{\mathcal{O}_Y}{\mathcal{I}}$. Supposons que Φ satisfasse la condition suivante :

Soit y_0 un point quelconque de Y. Il existe un voisinage U de y_0, un système de générateurs $(f_1, \ldots, f_n) \in \Gamma(U, \mathcal{I})$ de $\mathcal{I}_{|U}$, des éléments $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ de $\mathcal{L}_Y(U)$ tels que $\omega_Y(\partial_i)(f_j) = \delta_{i,j}$.

Posons

$$\mathcal{L}(\mathcal{I}) = \{D \in \mathcal{L}_X \ \mid \ D(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}\}.$$

Alors $\dfrac{\mathcal{L}_Y(\mathcal{I})}{\mathcal{I}\mathcal{L}_Y}$ est muni d'une structure naturelle d'algébroïde de Lie sur X et Φ induit une immersion fermée Φ_1 de $\left(X, \dfrac{\mathcal{L}_Y(\mathcal{I})}{\mathcal{I}\mathcal{L}_Y}\right)$ vers $(Y, \mathcal{L}_Y)$. L'immersion fermée Φ_1 vérifie le théorème de Kashiwara ([5]) (qui se démontre en utilisant l'image directe).

Théorème 3.3.2 *Il y a une équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)$-modules à droite (respectivement à gauche) à support dans X et la catégorie des $\mathcal{D}\left(\dfrac{\mathcal{L}_Y(\mathcal{I})}{\mathcal{I}\mathcal{L}_Y}\right)$-modules à droite (respectivement à gauche).*

Ce théorème a été démontré par Levasseur ([Le]) dans le cas particulier où X est un point.

En général, le foncteur image directe ne préserve pas la cohérence. La notion de module "good" due à Kashiwara ([S-S]) fournit une condition suffisante pour que l'image directe préserve la cohérence.

Si X est algébrique, un $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module cohérent admet une bonne filtration globale. Dans le cas analytique, c'est faux. C'est même faux au voisinage de tout compact.

Définition 3.3.3 *Un $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module à droite cohérent est "good" si, pour tout sous-ensemble compact K de X, il existe un voisinage ouvert U de K tel que $\mathcal{M}_{|U}$ ait une filtration $(\mathcal{M}_k)_{k\in[1,n]}$ par des $\mathcal{D}(\mathcal{L}_U)$-sous-modules à droite cohérents tel que chaque quotient $\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k-1}$ soit engendré par un $\mathcal{O}_U$-module cohérent.*

Comme nous l'avons déjà remarqué si X est une variété algébrique lisse, tous les $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-modules cohérents sont "good". La sous catégorie pleine de $D^b(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)^{op})$ consistant en les objets ayant une cohomologie "good" est notée $D^b_{good}(\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)^{op})$

Théorème 3.3.4 *Supposons que $\mathcal{M}^\bullet$ soit dans $D^b_{good}(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)^{op})$ et que f soit propre sur Supp($\mathcal{M}$), alors $\underline{\Phi}_!(\mathcal{M}^\bullet)$ est dans $D^b_{good}(\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)^{op})$.*

La preuve de Schneiders ([S2] p. 38) dans le cas des $\mathcal{D}$-modules s'étend sans aucun changement à notre situation. Le cas particulier où f est projective et $\mathcal{M}$ a une bonne filtration globale a été traité dans [Ka1].

3.4 Image Inverse ([8])

Soit $\Phi = (f, F)$ un morphisme d'algébroïdes de Lie de $(\mathcal{L}_X, \omega_X)$ vers $(\mathcal{L}_Y, \omega_Y)$. Soit $\mathcal{R}^\bullet$ un objet de $D^b(\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y))$. Posons

$$\underline{\Phi}^{-1}(\mathcal{R}^\bullet) = \mathcal{D}_{\mathcal{L}_X\to\mathcal{L}_Y} \overset{L}{\underset{f^{-1}\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)}{\otimes}} f^{-1}\mathcal{R}^\bullet.$$

Alors $\underline{\Phi}^{-1}(\mathcal{R}^\bullet)$ est dans $D^b(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X))$. Nous l'appellerons l'image inverse de $\mathcal{R}^\bullet$ par Φ. Si $\Phi = (f, Tf)$, nous retrouvons la construction des $\mathcal{D}$-modules (voir [S2] par exemple). Alors $\mathcal{D}_{\Theta_X\to\Theta_Y}$ est noté $\mathcal{D}_{X\to Y}$ et $\underline{\Phi}^{-1}$ est noté $\underline{f}^{-1}$.

Remarque :
Si $X = Y$ et $f = id$, alors $\underline{\Phi^{-1}}(\mathcal{R}^\bullet)$ n'est autre que $\mathcal{R}^\bullet$ considéré comme un élément de $D^b\left(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)\right)$. Nous écrirons $\underline{\Phi^{-1}}(\mathcal{R}^\bullet) = \mathcal{R}^\bullet_{|\mathcal{L}_X}$.

Pour définir l'image inverse d'un objet de $D^b\left(\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)^{op}\right)$, comme dans le cas des $\mathcal{D}$-modules, on utilise le $\left(f^{-1}\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y) \otimes \mathcal{D}(\mathcal{L}_X)^{op}\right)$-bimodule $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_Y \leftarrow \mathcal{L}_X}$.

Proposition 3.4.1 *Soient Φ et Ψ des morphismes d'algébroïdes de Lie de $(\mathcal{L}_X, \omega_X)$ vers $(\mathcal{L}_Y, \omega_Y)$ et de $(\mathcal{L}_Y, \omega_Y)$ vers $(\mathcal{L}_Z, \omega_Z)$ respectivement. Alors*

$$\underline{\Phi}^{-1} \circ \underline{\Psi}^{-1} = (\underline{\Psi \circ \Phi})^{-1}.$$

La démonstration de la proposition 3.4.1 est analogue au cas des $\mathcal{D}$-modules (voir [Bo] p. 251).

La question suivante se pose naturellement : Soit $\mathcal{R}^\bullet$ un objet de $D^b_{coh}\left(\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)\right)$. Donner une condition suffisante pour que $\underline{\Phi}^{-1}(\mathcal{R}^\bullet)$ soit dans $D^b_{coh}(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X))$.

Pour ce faire, nous introduisons, comme dans le cas des $\mathcal{D}$-modules, la notion de non caractéristicité.

Soit L_X (respectivement L_Y) le fibré vectoriel associé à $\mathcal{L}_X$ (respectivement $\mathcal{L}_Y$). Nous avons le diagramme suivant :

$$L_X^* \xleftarrow{\ {}^tF\ } X \times_Y L_Y^* \xrightarrow{F_\pi} L_Y^*$$

où, pour $x \in X$ et $\lambda \in L^*_{f(x)}$, on a

$$\begin{aligned} {}^tF\left(x, f(x), \lambda\right) &= \left(x, {}^tF(\lambda)\right) \\ F_\pi\left(x, f(x), \lambda\right) &= \left(f(x), \lambda\right). \end{aligned}$$

Notons $NS(X \times_Y L_Y^*)$ la section nulle de $X \times_Y L_Y^*$. Soit $\mathcal{R}^\bullet$ dans $D^b_{coh}\left(\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)\right)$. On dira que $\mathcal{R}^\bullet$ est non caractéristique par rapport à Φ si on a l'inclusion suivante.

$$F_\pi^{-1}\left(char(\mathcal{R}^\bullet)\right) \bigcap \{(x, f(x), \lambda) \in X \times_Y L_Y^* \mid \lambda \circ F_x = 0\} \subset NS(X \times_Y L_Y^*).$$

La notion de non caractéristicité est à rapprocher de celle de transversalité. Kashiwara a démontré que, dans le cas des $\mathcal{D}$-modules, la condition de non caractéristicité assure que $\underline{\Phi}^{-1}(\mathcal{R}^\bullet)$ est dans $D^b_{coh}(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X))$ ([S2]). Nous avons généralisé ce résultat aux algébroïdes de Lie.

Théorème 3.4.2 *Soient* $(X, \mathcal{L}_X)$ *et* $(Y, \mathcal{L}_Y)$ *deux algébroïdes sur deux variétés complexes* X *et* Y *respectivement. Soit* $\Phi = (f, F)$ *un morphisme d'algébroïdes de Lie de* $(X, \mathcal{L}_X)$ *vers* $(Y, \mathcal{L}_Y)$. *Soit* $\mathcal{R}^\bullet$ *un élément de* $D^b_{coh}(\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y))$ *supposé non caractéristique par rapport à* Φ. *Alors* $\underline{\Phi}^{-1}(\mathcal{R}^\bullet)$ *est dans* $D^b_{coh}(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X))$ *et*

$$\mathrm{Char}(\underline{\Phi}^{-1}(\mathcal{R}^\bullet)) \subset^t FF_\pi(\mathrm{Char}\mathcal{R}^\bullet).$$

La démonstration consiste à travailler sur des $\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)$-modules filtrés afin de se ramener au cas abélien (exemple 7 paragraphe 2.3).

4 Théorèmes de dualité

4.1 Théorème de dualité pour l'image directe ([7])

Théorème 4.1.1 *Soient* X *et* Y *deux variétés complexes. Soient* $(\mathcal{L}_X, \omega_X)$ *et* $(\mathcal{L}_Y, \omega_Y)$ *des algébroïdes sur* X *et* Y *respectivement. Soit* $\Phi = (f, F)$ *un morphisme d'algébroïdes de Lie de* $(\mathcal{L}_X, \omega_X)$ *vers* $(\mathcal{L}_Y, \omega_Y)$. *Soit* $\mathcal{M}^\bullet$ *un objet de* $D^b_{good}(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)^{op})$ *tel que* f *soit propre sur le support de* $\mathcal{M}^\bullet$. *Alors il existe un isomorphisme fonctoriel de* $\underline{\Phi}_! \Delta_{\mathcal{L}_X}(\mathcal{M}^\bullet)$ *vers* $\Delta_{\mathcal{L}_Y} \underline{\Phi}_!(\mathcal{M}^\bullet)$ *dans* $D^b_{good}(\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)^{op})$.

Le théorème 4.1.1 généralise un résultat de la thèse de Schneiders [S1] (voir aussi le travail de Schapira-Schneiders [S-S]) où le cas des opérateurs différentiels relatifs est traité. Le cas algébrique lisse avait été précédemment traité par Bernstein (dans le cas des $\mathcal{D}$-modules [Be], [Bo], [Ho]) pour un morphisme propre. De plus Mebkhout avait traité le cas absolu (i.e Y consiste en un seul point, [Me1], [Me2]). Dans le cas où $\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_Y = \{0\}$, on retrouve la dualité de Ramis-Ruget-Verdier dans le cas des variétés analytiques.

Notre démonstration s'inspire de celle de [S-S] et utilise la factorisation du paragraphe 2.3 exemple 8.

Corollaire 4.1.2 *Soit* X *une variété analytique complexe compacte de dimension complexe* x. *Soit* $(\mathcal{L}_X, \omega_X)$ *un algébroïde de Lie de rang* $d_{\mathcal{L}_X}$. *Soit* $\mathcal{N}$ *un* $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$*-module à gauche localement libre de rang fini comme* $\mathcal{O}_X$*-module. Alors, pour tout* i *dans* $\mathbb{Z}$, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{N})$ *est de dimension finie et*

$$\mathrm{Ext}^{d_{\mathcal{L}_X}+x-i}_{\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)}\left(\mathcal{O}_X, \mathcal{N}^* \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}\left(\Lambda^{d_X}\mathcal{L}_X^*, \Omega_X\right)\right) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{N})^*.$$

Remarques :

1) Si X est un point, nous retrouvons la dualité de Poincaré pour les algèbres de Lie de dimension finie.

2) Si $\mathcal{L}_X = 0$, nous retrouvons la dualité de Serre.

3) Le cas $\mathcal{C}^\infty$ a été étudié dans [E-L-W].

4) Le corollaire 4.1.2 a été conjecturé indépendamment par Huebschmann dans [Hu3].

Corollaire 4.1.3 *Soient X, Y, Z trois variétés analytiques complexes de dimension respective x, y et z. Soit $\mathcal{L}_X$ (respectivement $\mathcal{L}_Y$, $\mathcal{L}_Z$) un algébroïde sur X (respectivement Y, Z) de rang $d_{\mathcal{L}_X}$ (respectivement $d_{\mathcal{L}_Y}$, $d_{\mathcal{L}_Z}$). Soit $\Phi = (f, F)$ (respectivement $\Psi = (g, G)$) un morphisme d'algébroïdes de Lie de $\mathcal{L}_X$ (respectivement $\mathcal{L}_Z$) vers $\mathcal{L}_Y$. On suppose que f et g sont propres. Soit $\mathcal{M}$ (respectivement $\mathcal{N}$) un $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$ (respectivement $\mathcal{D}(\mathcal{L}_Z)$)- module à droite localement libre de type fini comme $\mathcal{O}_X$ (respectivement $\mathcal{O}_Z$)-module. Introduisons le $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module à droite (respectivement $\mathcal{D}(\mathcal{L}_Z)$-module à droite) $\widetilde{\mathcal{M}}$ (respectivement $\widetilde{\mathcal{N}}$)*

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \Omega_X) \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \bigwedge\nolimits^{d_{\mathcal{L}_X}} \mathcal{L}_X^*$$
$$\widetilde{\mathcal{N}} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{M}, \Omega_Z) \underset{\mathcal{O}_Z}{\otimes} \bigwedge\nolimits^{d_{\mathcal{L}_Z}} \mathcal{L}_Z^*.$$

Pour tout n dans $\mathbb{Z}$, on a un isomorphisme

$$\mathcal{E}xt^{n-d_{\mathcal{L}_Z}+z}_{\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)}\left(\underline{\Phi}_!(\widetilde{\mathcal{M}}), \underline{\Psi}_!(\widetilde{\mathcal{N}})\right) \simeq \mathcal{E}xt^{n-d_{\mathcal{L}_X}+x}_{\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)}\left(\underline{\Psi}_!(\mathcal{N}), \underline{\Phi}_!(\mathcal{M})\right).$$

4.2 Théorème de dualité pour l'image inverse ([8])

Construisons un morphisme fonctoriel $\underline{D}_{\mathcal{L}_X}\underline{\Phi}^{-1}(\mathcal{R}^\bullet) \to \underline{\Phi}^{-1}\underline{D}_{\mathcal{L}_Y}(\mathcal{R}^\bullet)$ pour tout objet $\mathcal{R}^\bullet$ dans $D^b(\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y))$ tel que $\underline{\Phi}^{-1}(\mathcal{R}^\bullet)$ soit dans $D^b_{coh}(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X))$. Notre construction (inspirée du cas des $\mathcal{D}$-modules [Ka2]) sera valable dans le cas particulier où $\mathcal{R}^\bullet$ est non caractéristique par rapport à Φ. Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2.1 *Soient $\mathcal{M}^\bullet$ et $\mathcal{N}^\bullet$ deux éléments de $D^b_{coh}(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X))$. Les groupes $Hom_{D^b(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X))}(\mathcal{M}^\bullet, \mathcal{N}^\bullet)$ et $Hom_{D^b(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X))}\left(\mathcal{O}_X, \underline{D}_{\mathcal{L}_X}(\mathcal{M}^\bullet) \overset{L}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} \mathcal{N}^\bullet\right)$ sont isomorphes.*

En utilisant le lemme 4.2.1 , l'élément 1 de $\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y))}(\mathcal{R}^\bullet, \mathcal{R}^\bullet)$ fournit une flèche

$$\mathcal{O}_Y \to \underline{D}_{\mathcal{L}_Y}(\mathcal{R}^\bullet) \overset{L}{\underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes}} \mathcal{R}^\bullet$$

dans $D^b(\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y))$. D'où une flèche

$$\begin{aligned} \underline{\Phi}^{-1}(\mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_X \quad \to \quad & \underline{\Phi}^{-1}\left(\underline{D}_{\mathcal{L}_Y}(\mathcal{R}^\bullet) \overset{L}{\underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes}} \mathcal{R}^\bullet\right) \\ & \simeq \underline{\Phi}^{-1}\left(\underline{D}_{\mathcal{L}_Y}(\mathcal{R}^\bullet)\right) \overset{L}{\underset{\mathcal{O}_X}{\otimes}} \underline{\Phi}^{-1}(\mathcal{R}^\bullet) \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\underline{D}^2_{\mathcal{L}_X}(\underline{\Phi}^{-1}(\mathcal{R}^\bullet)) \simeq \underline{\Phi}^{-1}(\mathcal{R}^\bullet)$ et le lemme à nouveau, nous obtenons une flèche

$$\underline{D}_{\mathcal{L}_X}\underline{\Phi}^{-1}(\mathcal{R}^\bullet) \to \underline{\Phi}^{-1}\underline{D}_{\mathcal{L}_Y}(\mathcal{R}^\bullet).$$

Théorème 4.2.2 *Soit Φ un morphisme d'algébroïdes de Lie de $(X, \mathcal{L}_X)$ vers $(Y, \mathcal{L}_Y)$. Soit $\mathcal{R}^\bullet$ un objet de $D^b_{coh}(\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y))$ supposé non caractéristique par rapport à Φ. Le morphisme fonctoriel de $\underline{D}_{\mathcal{L}_X}\underline{\Phi}^{-1}(\mathcal{R}^\bullet)$ vers $\underline{\Phi}^{-1}\underline{D}_{\mathcal{L}_Y}(\mathcal{R}^\bullet)$ construit ci-dessus est un isomorphisme.*

Ce théorème est la généralisation d'un théorème de dualité dû à Kashiwara, Kawai and Sato dans le cas des $\mathcal{D}$-modules ([SKK], [Ka2]). Cependant, la démonstration de Kashiwara-Kawai-Sato ne s'étend pas aux cas des algébroïdes de Lie et, même dans le cas des $\mathcal{D}$-modules, ma démonstration est différente de Kashiwara-Kawai-Sato. Comme dans le cas du théorème 3.4.2, je me ramène au cas abélien.

4.3 Formules d'adjonction ([8])

En généralisant les résultats de [K-S 2] (chapitre 7), on obtient les formules d' adjonction suivantes.

Théorème 4.3.1 *Soient $(X, \mathcal{L}_X)$ et $(Y, \mathcal{L}_Y)$ deux algébroïdes sur X et Y respectivement. Soit $d_{\mathcal{L}_X} = \mathrm{rank}(\mathcal{L}_X)$ et $d_{\mathcal{L}_Y} = \mathrm{rank}(\mathcal{L}_Y)$. Soit $\Phi = (f, F)$ un morphisme d'algébroïdes de Lie de $(X, \mathcal{L}_X)$ vers $(Y, \mathcal{L}_Y)$.*

a) Soit $\mathcal{M} \in D^b(\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y))$ et $\mathcal{N} \in D^b(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)^{op})$. Alors $\underline{\Phi}_!(\mathcal{N}) \overset{L}{\underset{\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)}{\otimes}} \mathcal{M}$ et $Rf_!\left(\mathcal{N} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)}{\otimes}} \underline{\Phi}^{-1}(\mathcal{M})\right)$ sont isomorphes dans $D^b(\mathbb{C}_Y)$.

b) Supposons que $\mathcal{M}$ soit dans $D^b_{coh}(\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y))$ et que Φ soit non caractéristique pour $\mathcal{M}$. Les objets $Rf_! R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)}\left(\underline{\Phi}^{-1}(\mathcal{M}),\mathcal{N}\right)[d_{\mathcal{L}_X} - d_{\mathcal{L}_Y}]$ et $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)}(\mathcal{M}, \underline{\Phi}_!(\mathcal{N}))$ sont isomorphes dans $D^b(\mathbb{C}_Y)$

c) Supposons que $\mathcal{N}$ soit dans $D^b_{good}(\mathcal{D}(\mathcal{L}_X))$ et que f soit propre sur $Supp\mathcal{N}$. Alors $Rf_* R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)}\left(\mathcal{N}, \underline{\Phi}^{-1}\mathcal{M}\right)[dimX - dimY]$ et $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}(\mathcal{L}_Y)}\left(\underline{\Phi}_!(\Omega_X \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mathcal{N}), \Omega_Y \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \mathcal{M}\right)$ sont isomorphes dans $D^b(\mathbb{C}_Y)$

Application 1

Notre preuve du théorème 4.2.2 est valable dans le cas d'une algèbre de Lie sur un corps k. Comme corollaire du théorème 4.3.1, nous obtenons le résultat suivant où nous adoptons la notation : si V un espace vectoriel de dimension n, on pose $\det(V) = \Lambda^n(V)$.

Corollaire 4.3.2 *Soient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}$ deux algèbres de dimension finie sur un corps k et soit ϕ un morphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{h}$ vers $\mathfrak{g}$. Soit M un $U(\mathfrak{g})$-module de type fini. Supposons*

$$char(M) \cap \{\lambda \in \mathfrak{g}^* \mid \lambda_{|\phi(\mathfrak{h})} = 0\} = \{0\}.$$

Soit N un $\mathfrak{h}$-module. Alors, pour tout i dans $\mathbb{Z}$, nous avons un isomorphisme

$$Ext^{i+dim\mathfrak{h}}_{U(\mathfrak{h})}\left(M_{|\mathfrak{h}}, N\right) \simeq Ext^{i+dim\mathfrak{g}}_{U(\mathfrak{g})}\left(M \otimes \det(\mathfrak{g}^*), (N \otimes \det(\mathfrak{h}^*)) \overset{L}{\underset{U(\mathfrak{h})}{\otimes}} U(\mathfrak{g})\right).$$

Application 2

Soit X une variété de Poisson analytique. On considère l'algébroïde de Lie (X, Ω^1_X) (voir section 2.3 exemple 6). Soit $\mathcal{R}^\bullet$ un objet de $D^b(\mathcal{D}(\Omega^1_X))$. La cohomologie du complexe $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}(\Omega^1_X)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{R}^\bullet)$ est appelée cohomologie canonique de X à valeurs dans $\mathcal{R}^\bullet$ ([Li],[Hu1]). Posons

$$\mathcal{C}^\bullet_{can}(\mathcal{R}^\bullet) = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}(\Omega^1_X)}(\mathcal{O}_X, \mathcal{R}^\bullet).$$

Soit (Y, Ω^1_Y) une autre variété analytique munie d'une structure de Poisson et soit $f : X \to Y$ un morphisme de Poisson. On considère la correspondance définie en 2.3 exemple 6.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathcal{O}_X \underset{f^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{-1}\Omega^1_Y \arrow[dl, "\Phi=(id,F)"'] \arrow[dr, "\Psi=(f,id)"] & \\
(X,\Omega^1_X) & & (Y,\Omega^1_Y),
\end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{N}$ un $\mathcal{D}\left(\mathcal{O}_X \underset{f^{-1}\mathcal{O}_Y}{\otimes} f^{-1}\Omega^1_Y\right)$-module à gauche. En remarquant que $\underline{\Psi}_!(\mathcal{N})$ n'est rien d'autre que $\mathcal{N}$ considéré comme $\mathcal{D}\left(\Omega^1_Y\right)$-module à gauche, nous déduisons l'isomorphisme suivant du théorème 4.3.1.

$$\mathcal{C}^\bullet_{can,Y}(\mathcal{N}) \quad \simeq \quad Rf_!\mathcal{C}^\bullet_{can,X}(\underline{\Phi}_!\mathcal{N})[dimX - dimY].$$

Cette relation fournit un éclairage sur la transformation induite par un morphisme de Poisson sur la notion de cohomologie canonique.

5 Propriété de dualité dans les représentations coinduites de superalgèbres de Lie

Dans ce paragraphe k désignera un corps commutatif de caractéristique nulle.

5.1 Définitions et conventions

On désigne par le préfixe "super" un objet gradué sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ainsi, on appelle "superespace" un k-espace vectoriel V gradué sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$. Si v est dans V_i, on définit sa parité $\mid v \mid$ par $\mid v \mid = i$. Si V et W sont deux superespaces, alors $Hom_k(V,W)$ est muni d'une structure naturelle de superespaces. Si f est un morphisme de degré i de V dans W et si v est dans V_j, on pose

$$< v, f >= (-1)^{ij} f(v).$$

On définit le superespace ΠV qui, en tant qu'espace vectoriel est égal à V mais dont la graduation est :

$$(\Pi V)_{\bar{0}} = V_{\bar{1}}, \quad (\Pi V)_{\bar{1}} = V_{\bar{0}}.$$

Introduisons l'application $\pi : V \to \Pi V$ qui, en tant que morphisme d'espaces vectoriels, est égal à l'identité. Elle est de degré $\bar{1}$.

Soit A une k-superalgèbre associative, supercommutative, avec élément unité. Désignons par $Der(A)$ la superalgèbre de Lie des dérivations de A. Soit M un A-module. Une base de M est une famille $(e_i)_{i\in I\bigsqcup J} \in M_0^I \times M_1^J$ telle que tout élément de M s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire des $(e_i)_{i\in I\bigsqcup J}$. Si I et J sont finis, leurs cardinaux sont indépendants de la base du A-module M. On définit la dimension de M sur A comme étant l'élément $\mid I \mid +\epsilon \mid J \mid$ de $Z[\epsilon]/(\epsilon^2-1)$. Si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base du A-module M, alors la famille $(e^1,\ldots,e^n)$ où e^j est défini par $< e_i, e^j >= \delta_{i,j}$ est une base de $Hom_A(M,A)$ appelée base duale. Rappelons aussi que ΠM a une structure naturelle de A-module donnée par

$$\forall a \in A,\ \forall m \in M, \quad a\cdot \pi m = (-1)^{|a|}\pi(a\cdot m).$$

On désignera par $Mat(m+\epsilon n, A)$ la superalgèbre des matrices à coefficients dans A avec m lignes (respectivement colonnes) paires et n lignes (respectivement colonnes) impaires. Munie de sa structure naturelle de superalgèbre de Lie, on la notera $\mathfrak{gl}(m+\epsilon n, A)$.

Les $A-\mathfrak{g}$-modules

Soient $\mathfrak{g}$ une k-superalgèbre de Lie, A une k-superalgèbre supercommutative associative avec unité et σ un morphisme de k-superalgèbres de Lie de $\mathfrak{g}$ dans $Der(A)$. Alors $A\otimes\mathfrak{g}$ est une superalgèbre de Lie-Rinehart (version algébrique des algébroïdes de Lie, [R]) de façon analogue à ce que nous avons vu dans l'exemple 4 du paragraphe 2.3 . Soit $\mathcal{D}(A,\sigma,\mathfrak{g})$ la superalgèbre associative unitaire engendrée par $\mathfrak{g}$, A et les relations suivantes :

$$\begin{array}{l}\forall (X,Y)\in\mathfrak{g}^2, \forall (a,b)\in A^2\\ X\cdot Y-(-1)^{|X||Y|}Y\cdot X=[X,Y]\\ a\cdot b=ab\\ X\cdot a-(-1)^{|X||a|}a\cdot X=\sigma(X)(a)\end{array}$$

$\mathcal{D}(A,\sigma,\mathfrak{g})$ est la superalgèbre d'opérateurs différentiels généralisés définie par $A\otimes\mathfrak{g}$ (voir la définition 2.1.3). On démontre que $\mathcal{D}(A,\sigma,\mathfrak{g})$ est libre comme A-module à droite. On dira que M est un $A-\mathfrak{g}$-module si M est un $\mathcal{D}(A,\sigma,\mathfrak{g})$-module.

Un superespace n'admet pas de puissance extérieure maximale mais la notion de module Bérézinien est une généralisation au cas gradué de la puissance extérieure maximale d'un module non gradué.

Module Bérézinien

Soit A une superalgèbre associative supercommutative avec élément unité et M un A-module libre de dimension $m_0 + \epsilon m_1$. Soit $(e_1, \ldots, e_{m_0+m_1})$ une base de M telle que $(e_1, \ldots, e_{m_0})$ soient pairs et $(e_{m_0+1}, \ldots, e_{m_0+m_1})$ soient impairs. Désignons par d la multiplication à gauche par

$$\sum_{i=1}^{m_0+m_1} (-1)^{|e_i|+1} \pi e_i \otimes e^i$$

dans la superalgèbre supersymétrique $S_A(\Pi M \oplus M^*)$. L'endomorphisme d ne dépend pas du choix de la base.

Proposition 5.1.1 *Le complexe*

$$K(M) = \left(S(\Pi M \oplus M^*) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S^n(\Pi M) \otimes S(M^*), d \right)$$

a une cohomologie nulle en tout degré sauf en le degré m_0. *Le* A*-module* $H^{m_0}(K(M))$ *est libre de dimension* 1 *ou* ϵ *et l'élément*

$$\pi e_1 \ldots \pi e_{m_0} e^{m_0+1} \ldots e^{m_0+m_1}$$

est un cycle dont la classe est une base de $H^{m_0}(K(M))$.

La démonstration de cette proposition se trouve dans [Ma] page 172. On appelle module bérézinien et on note $Ber(M)$ le A module $H^{m_0}(K(M))$. La superalgèbre $\mathfrak{gl}_A(M)$ opère dans $S(\Pi M \oplus M^*)$ et son action commute avec la différentielle de $K(M)$. Elle opère donc dans $Ber(M)$ au moyen d'un caractère appelé supertrace et noté str.

Proposition 5.1.2 *Si* M *est un* $A - \mathfrak{g}$*-module (libre comme* A*-module) , alors* $Ber(M)$ *est muni d'une structure naturelle de* $A - \mathfrak{g}$*-module. En particulier, si* $Der(A)$ *est un* A*-module libre, alors* $Ber(Der(A)^*)$ *est muni d'une structure naturelle de* $A - Der(A)$*-module.*

Cette proposition est à rapprocher de la structure de $\mathcal{D}(\mathcal{L})$-module à droite de $\Lambda^{max}(\mathcal{L}^*)$ pour un algébroïde de Lie $\mathcal{L}$ (voir section 3.1).

5.2 Représentations coinduites de superalgèbres de Lie

Soit $\mathfrak{g}$ une k-superalgèbre de Lie, $\mathfrak{h}$ une sous-superalgèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ et (π, V) une représentation de $\mathfrak{h}$ dans un superespace V. On définit le superespace coinduit à partir de π, $Coind_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$, par

$$Coind_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi) = Hom_{U(\mathfrak{h})}\left(U(\mathfrak{g}), V\right).$$

Considérons l'application de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{gl}(Coind_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi))$ définie par : pour tout X dans $\mathfrak{g}$ et tout λ dans $Coind_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$, on pose

$$\forall u \in U(\mathfrak{g}), \ \ < u, X \cdot \lambda >=< uX, \lambda > .$$

Elle définit une représentation de $\mathfrak{g}$ appelée représentation coinduite à partir de (π, V). Désignons par 0 le caractère nul de $\mathfrak{h}$ et posons $A = Coind_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(0)$. Soit $\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ le coproduit de $U(\mathfrak{g})$. On définit une structure de superalgèbre sur A, puis une structure de A-module sur $Coind_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ comme suit. Pour tout élément f dans A, λ dans $Coind_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ et u dans $U(\mathfrak{g})$, on pose :

$$< u, f \cdot \lambda >= \sum_j < u'_j, f >< u''_j, \lambda > (-1)^{|f||u''_j|} \ \text{ où } \ \Delta(u) = \sum_j u'_j \otimes u''_j.$$

Alors $f \cdot \lambda$ appartient à $Coind_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$. La superalgèbre A est associative, unitaire, supercommutative et locale d' idéal maximal $\mathfrak{a}$. Supposons maintenant que $\mathfrak{h}$ soit de codimension finie. Soient $(X_1, \dots, X_p)$ une base d'un supplémentaire gradué $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ telle que $(X_1, \dots, X_{d_0})$ soient pairs et $(X_{d_0}, \dots, X_p)$ soient impairs. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les éléments de $\mathfrak{a}$ définis comme suit : pour tout entier naturel i compris entre 1 et p, on a

$$< X_1^{\alpha_1} \dots X_p^{\alpha_p}, \lambda_i >= \delta_{\alpha_1,0} \dots \delta_{\alpha_i,1} \dots \delta_{\alpha_p,0}.$$

Alors l'algèbre A est isomorphe (de façon non canonique) à $k[[\lambda_1, \dots, \lambda_p]]$. Le A-module $Der(A)$ est donc libre.

La représentation coinduite définit un morphisme de superalgèbres de Lie, σ_0, de $\mathfrak{g}$ dans $Der(A)$. On pose $\mathcal{V} = \mathcal{D}(A, \sigma_0, \mathfrak{g})$. On vérifie que les actions de A et $\mathfrak{g}$ munissent $Coind_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ d'une structure de $A - \mathfrak{g}$-module.

Désignons par $\check{}$ l'antiautomorphisme de $U(\mathfrak{g})$ défini comme suit. Si X est dans $\mathfrak{g}$, on a $\check{X} = -X$ et si u et v sont deux éléments homogènes de $U(\mathfrak{g})$, on a $(uv)\check{} = (-1)^{|v||u|}\check{v}\check{u}$. Notons I_π (avec $I_\pi \subset U(\mathfrak{g})$) le noyau de la représentation coinduite à partir de (π, V). La représentation contragrédiente de π sera notée π^*. Remarquons enfin que $\mathfrak{h}$ agit naturellement dans le superespace $Ber\,((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)$ par le caractère $-str\ ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$. Dans [1], [2] et [3], nous proposons deux démonstrations différentes du théorème suivant.

Théorème 5.2.1 *Si $\mathfrak{h}$ est de codimension finie, on a la relation*

$$\check{I}_\pi = I_{\pi^* \otimes Ber((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)}.$$

Le théorème 5.2.1 a été démontré par M. Duflo [D1] dans le cas d'une algèbre de Lie de dimension finie. La démonstration de [D1] ne s'étend pas au cas où seulement $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est de dimension finie.

Décrivons en quelques mots les grandes lignes de nos deux démonstrations. Elles sont toutes deux liées à la théorie des $\mathcal{D}$-modules et à son extension aux algèbres de Lie-Rinehart.

Première démonstration

Soit $\mathcal{D}_\pi$ la superalgèbre des opérateurs différentiels sur $Coind_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$. Soit X un élément de $\mathfrak{g}$. Son action sur $Coind_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ définit un opérateur différentiel de degré inférieur ou égal à 1 de $Coind_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(\pi)$ que l'on notera $D_\pi(X)$. Le principe de la démonstration consiste à munir $Coind_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}\,(\pi^* \otimes Ber\,((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$ d'une structure de $\mathcal{D}_\pi$-module à droite telle que : pour tout X dans $\mathfrak{g}$ et tout λ dans $Coind_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}\,(\pi^* \otimes Ber\,((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$, on ait

$$\lambda \cdot D_\pi(X) = -(-1)^{|\lambda||X|} X \cdot \lambda.$$

La relation ci-dessus nous fournit l'inclusion $\check{I}_\pi \subset I_{\pi^* \otimes Ber((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)}$. En appliquant la même relation à la représentation $\pi^* \otimes Ber\,((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*)$, on obtient l'inclusion inverse. Le théorème de coinduction de Blattner ([Bl]) joue un rôle clef dans la démonstration. Il permet d'établir l'existence d' un isomorphisme de $A - \mathfrak{g}$-modules, Φ, entre $Ber\,(Der(A)^*)$ et $Coind_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}(Ber\,((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$. Or $Ber\,(Der(A)^*)$ est muni d'une structure de $\mathcal{D}_0$-module à droite (analogue à celle de $\mathcal{D}_X$ module à droite de Ω_X) que l'on peut transposer à $Coind_{\mathfrak{h}}^{\mathfrak{g}}\,(Ber\,((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^*))$ via Φ. La démontration en découle dans le cas où $\pi = 0$.

Deuxième démonstration

La deuxième démonstration est une conséquence de la réalisation de la représentation induite d'une superalgèbre de Lie en termes de cohomologie locale de Grothendieck. Soit W un A-module. Pour j dans $\mathbb{N}$, posons

$$\begin{aligned}\Gamma^j_{\mathfrak{a}}(W) &= \{x \in W \mid \mathfrak{a}^j W = 0\}\\ \Gamma_{\mathfrak{a}}(W) &= \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Gamma^j_{\mathfrak{a}}(W)\end{aligned}$$

Le foncteur $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ de la catégorie des A-modules dans elle-même est exact à gauche. Son $j^{\text{ième}}$ foncteur dérivé à droite sera noté $H^j_{\mathfrak{a}}(-)$. Si W est un $A-\mathfrak{g}$-module alors $\Gamma_{\mathfrak{a}}(W)$ est aussi un $A-\mathfrak{g}$-module. Comme le A-module à droite $\mathcal{V}$ est plat sur A, les foncteurs dérivés $\Gamma_{\mathfrak{a}}$ dans la catégorie des A-modules et dans celle des $A-\mathfrak{g}$-modules sont les mêmes. On en déduit que les $H^j_{\mathfrak{a}}(W)$ sont canoniquement munis d'une structure de $A-\mathfrak{g}$-module.

Si V est un $\mathfrak{h}$-module à gauche. On appelle représentation induite à partir de V le superespace $Ind^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{h}}(V) = U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{h})}{\otimes} V$ muni de l'action naturelle de $\mathfrak{g}$, à savoir la multiplication à gauche. Remarquons que $\mathcal{V}/\mathcal{V}\mathfrak{a}$ et $U(\mathfrak{g})$ sont isomorphes en tant que $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h})^{op}$-module. On peut donc écrire $Ind^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{h}}(V) = \mathcal{V}/\mathcal{V}\mathfrak{a} \underset{U(\mathfrak{h})}{\otimes} V$. L'induction apparait ainsi comme l'image directe pour le morphisme de superalgèbres de Lie-Rinehart $(\{pt\}, \mathfrak{h}) \to (A, A \otimes \mathfrak{g})$ qui est une immersion fermée pour laquelle le théorème de Kashiwara (théorème 3.3.2) s'applique. La deuxième démonstration du théorème 5.2.1 découle du théorème suivant.

Théorème 5.2.2 *Si d_0 désigne la dimension de la partie paire de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, on a*

a) Si $j \neq d_0$, alors $H^j_{\mathfrak{a}}\left(Coind^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{h}}(\pi)\right) = 0$.

b) Les $A-\mathfrak{g}$-modules $H^{d_0}_{\mathfrak{a}}\left(Coind^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{h}}(\pi)\right)$ et $Ind^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{h}}\left(Ber(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \otimes V\right)$ sont isomorphes.

Le théorème 5.2.2 est démontré pour $\pi = 0$ et $\mathfrak{g}$ de dimension finie dans [B-B (théorème 3.5)], puis partiellement redémontré dans [Le (théorème 6.2)] pour illustrer un critère d'induction. Comme dans [B-B], nous calculons les groupes de cohomologie locale en utilisant la cohomologie de Čech après l'avoir adaptée au cas gradué. Pour montrer que $H^{d_0}_{\mathfrak{a}}\left(Coind^{\mathfrak{g}}_{\mathfrak{h}}(\pi)\right)$ est une représentation induite, nous utilisons un critère d'induction (généralisé aux superalgèbres de Lie) dû à Levasseur et Fel'dman ([F], [Le]). Ce critère d'induction n'est autre que le théorème de Kashiwara (généralisé aux superalgèbres de Lie-Rinehart).

6 Dualité de Poincaré

Dans ce paragraphe, k désignera un corps de caractéristique nulle.

6.1 Enoncé

Soit $\mathfrak{g}$ une superalgèbre de Lie de dimension $d_0 + \epsilon d_1$. Nous considérerons $Ber(\mathfrak{g}^*)$ comme un $U(\mathfrak{g})$-module à droite (de façon analogue à ce que nous avons fait précédemment pour $\Lambda^{d_{\mathcal{L}_X}}(\mathcal{L}_X^*)$, voir paragraphe 3.1). Si M est un $U(\mathfrak{g})$-module à gauche, alors on regardera $Ber(\mathfrak{g}^*) \otimes M$ comme un $U(\mathfrak{g})$-module à droite de la façon suivante :

$$\forall m \in M,\ \forall X \in \mathfrak{g},\ \forall \omega \in Ber(\mathfrak{g}^*),$$
$$(\omega \otimes m) \cdot X = -(-1)^{|X||m|}\omega \otimes X \cdot m + (-1)^{|X||m|} str\, ad(X)\omega \otimes m.$$

Théorème 6.1.1 *Soit $X^\bullet$ un objet de $D^-(U(\mathfrak{g}))$. Il existe un morphisme $\Psi(X^\bullet)$ (fonctoriel en $X^\bullet$) de $(Ber(\mathfrak{g}^*)[d_0] \otimes X^\bullet) \overset{L}{\underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes}} k$ vers $RHom_{U(\mathfrak{g})}(k, X^\bullet)$ qui soit un isomorphisme si $X^\bullet$ est de dimension projective finie.*

Remarques

1) On se convainc aisément que la dernière assertion ne peut s'étendre à tout complexe de $D^-(U(\mathfrak{g}))$. On construit un contrexemple en prenant pour $\mathfrak{g}$ la superalgèbre de Lie Πk abélienne et totalement impaire et pour $X^\bullet$ le module trivial k.

2) Dans [4], nous établissons ce théorème dans le cadre plus général des superalgèbres de Lie-Rinehart.

Corollaire 6.1.2 *Soit M un $U(\mathfrak{g})$-module à gauche et soit i dans $\mathbb{Z}$. Il existe un morphisme de superespaces $\Psi_i(M)$ de $Tor_{d_0-i}^{U(\mathfrak{g})}(Ber(\mathfrak{g}^*) \otimes M, k)$ vers $Ext^i_{U(\mathfrak{g})}(k, M)$ qui soit un isomorphisme si M est de dimension projective finie.*

De notre théorème de dualité, nous déduisons ([4]) des théorèmes de dualité sur les représentations induites de superalgèbres de Lie.

6.2 Propriétés de dualité dans les représentations induites de superalgèbres de Lie

Théorème 6.2.1 *Soit $\mathfrak{g}$ une superalgèbre de Lie. Soient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{t}$ deux sous-superalgèbres de Lie de dimension finie. Posons $h_0 = dim\mathfrak{h}_{\bar{0}}$ et $s_0 = dim\mathfrak{t}_{\bar{0}}$.*

Soit V (respectivement W) un $\mathfrak{h}$-module (respectivement $\mathfrak{t}$-module) de dimension finie. Alors, pour n dans $\mathbb{Z}$, nous avons

$$Ext^{n-s_0}_{U(\mathfrak{g})}\left(U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{h})}{\otimes} V \ , \ U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{t})}{\otimes} W\right) \simeq$$
$$Ext^{n-h_0}_{U(\mathfrak{g})}\left((ber(\mathfrak{t}^*) \otimes W^*) \underset{U(\mathfrak{t})}{\otimes} U(\mathfrak{g}) \ , \ (ber(\mathfrak{h}^*) \otimes V^*) \underset{U(\mathfrak{h})}{\otimes} U(\mathfrak{g})\right).$$

Remarques :

1) Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de dimension finie, nous retrouvons un cas particulier du corollaire 4.1.3. Cependant, cette deuxième démonstration nous permet de nous affranchir de l'hypothèse de finitude sur la dimension de $\mathfrak{g}$.

2) Généralisant un résultat de G. Zuckerman ([B-C]), A Gyoja ([G]) a démontré ce théorème dans le cas particulier suivant : $\mathfrak{g}$ est scindée semi-simple, $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}$ est une sous algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$, $n = h_0 = n_0$. D. H. Collingwood et B. Shelton ont aussi démontré une propriété de ce type dans un contexte légèrement différent mais toujours dans le cadre semi-simple ([C-S]). M. Duflo ([D2]) avait obtenu cette propriété de dualité dans le cas suivant : $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie quelconque, $\mathfrak{h} = \mathfrak{t}$, $V^* = W = k_\lambda$ est une représentation de dimension un de caractère λ. Ma démonstration s'inspire de celle de M. Duflo.

Dans le cas où $\mathfrak{t} = \{0\}$ et $W = \{0\}$, le théorème 6.2.1 nous permet de calculer le superespace $Ext^n\left(U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{h})}{\otimes} V \ , \ U(\mathfrak{g})\right)$.

- Si $n \neq h_0$, on a $Ext^n\left(U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{h})}{\otimes} V \ , \ U(\mathfrak{g})\right) = \{0\}$.
- Si $n = h_0$, nous pouvons améliorer le résultat :

Théorème 6.2.2 *Soit $\mathfrak{g}$ une superalgèbre de Lie et $\mathfrak{h}$ une sous superalgèbre de dimension finie de $\mathfrak{g}$. Posons $h_0 = dim\mathfrak{h}_{\bar{0}}$. Soit V un $U(\mathfrak{h})$-module de dimension finie. Les $U(\mathfrak{g})$-modules à droite $Ext^{h_0}\left(U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{h})}{\otimes} V \ , \ U(\mathfrak{g})\right)$ et $(ber(\mathfrak{h}^*) \otimes V^*) \underset{U(\mathfrak{h})}{\otimes} U(\mathfrak{g})$ sont isomorphes.*

Remarques :

1) Ce théorème découle aussi de la proposition 3.2.1.

2) Ce résultat a été prouvé par Brown et Levasseur ([B-L p. 410]) et par Kempf ([Ke]) dans le cas où $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie et $U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{h})}{\otimes} V$ est un module de Verma.

7 Calcul de certains complexes dualisants rigides

7.1 Complexes dualisants

Les complexes dualisants ont été introduits par Grothendieck et jouent un rôle clef dans la dualité de Grothendieck. La définition des complexes dualisants dans le cadre non commutatif a été donnée par Yekutieli ([Y1]). Soit k un corps commutatif. Si A est une k-algèbre, on note $A^e = A \otimes_k A^{op}$. Soit $D(A^e)$ (respectivement $D^b(A^e)$) la catégorie dérivée (respectivement dérivée bornée) de la catégorie des A^e-modules (à gauche).

Définition 7.1.1 *Supposons que A soit une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche. Un objet R de $D^b(A^e)$ est appelé complexe dualisant s'il satisfait les conditions suivantes.*

a) R est de dimension injective finie sur A et A^{op}.

b) La cohomologie de R est donnée par des bimodules de type fini comme A-module et A^{op}-module.

c) Les morphismes naturels $\Phi : A \to RHom_A(R, R)$ et $\Psi : A \to RHom_{A^{op}}(R, R)$ sont des isomorphismes dans $D^b(A^e)$.

Remarques : ([Y1] et [Y3])

1) Un complexe dualisant est seulement déterminé au produit tensoriel dérivé près par un complexe tilting ([Y3] théorème 4.5).

2) Si A est de dimension injective finie comme A-module à droite et à gauche, alors A est un complexe dualisant.

3) Si R est un complexe dualisant, alors $RHom_A(-, R)$ définit une dualité entre les sous-catégories pleines de $D^b(A)$ et $D^b(A^{op})$, $D^b_f(A)$ et $D^b_f(A^{op})$, consistant en les complexes dont les groupes de cohomologie sont de type fini.

Le complexe dualisant n'étant pas unique, M. Van den Bergh [VdB1] a introduit la notion suivante.

Définition 7.1.2 *Soit A une k-algèbre noethérienne à droite et à gauche. Un complexe dualisant R est rigide si*

$$R \simeq RHom_{A^e}\left(A, {}_A R \otimes R_A\right)$$

dans $D(A^e)$. La notation ${}_A R$ et R_A indique que nous prenons $RHom$ sur la structure de A-module à gauche et de A-module à droite de R respectivement.

Remarques :

1) Le complexe dualisant rigide, s'il existe, est unique à unique isomorphisme près dans $D^b(A^e)$ ([VdB1], [Y3] théorème 5.2).

2) Si A est une algèbre commutative de type fini. Posons $X = Spec(A)$ et notons π le morphisme naturel de X dans $Spec(k)$. Le complexe $\pi^! k$ est un complexe dualisant particulier appelé complexe dualisant de Grothendieck. Si A est une variété affine lisse, alors $\pi^! k = \omega_X[dim X]$. Le complexe $R = R\Gamma(X, \pi^! k)$ est rigide. En d'autres termes, la notion de complexe dualisant rigide généralise le complexe dualisant de Grothendieck.

3) Récemment, les notions de complexes dualisants et de complexes dualisants rigides ainsi que certaines de leur propriétés fondamentales ont été étendues dans [Y-Z] au cadre des espaces annelés non commutatifs.

Nous avons calculé les complexes dualisants rigides d'une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés et d'une algèbre enveloppante quantique.

7.2 Complexe dualisant rigide d'une algèbre d'opérateurs différentiels généralisés ([9])

Soit X une variété lisse affine et soit $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions régulières sur X. Soit Θ_X le $\mathcal{O}_X$-module des champs de vecteurs réguliers sur X. On pose $L_X = \mathcal{L}_X(X)$ et $D(L_X) = \mathcal{D}(\mathcal{L}_X)(X)$.

En utilisant la proposition 3.1.1 c), on munit $\mu_{\mathcal{L}_X} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}\left(\Lambda^{d_{\mathcal{L}_X}} \mathcal{L}_X^*, \Omega_X\right)$ d'une structure de $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-module à gauche qui nous permet de munir $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X) \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \mu_{\mathcal{L}_X}$ d'une structure de $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X) \otimes \mathcal{D}(\mathcal{L}_X)^{op}$ -module déterminé par : pour tout $P, Q \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$, tout $D \in \mathcal{L}_X$ et tout $a \in \mathcal{O}_X$,

$$\begin{aligned}
&Q \cdot (P \otimes \mu) = QP \otimes \mu \\
&(P \otimes \mu) \cdot D = PD \otimes \mu - P \otimes D \cdot \mu \\
&(P \otimes \mu) \cdot a = Pa \otimes \mu.
\end{aligned}$$

Le théorème 3.1.1 nous permet de calculer le complexe dualisant rigide de l'algèbre $D(L_X)$.

Théorème 7.2.1 *Soit* $(X, \mathcal{L}_X)$ *un algébroïde de Lie sur une variété lisse affine. Posons* $x = dim X$, $d_{\mathcal{L}_X} = rang(\mathcal{L}_X)$, $G_X = \mathcal{O}_X(X)$, $L_X = \mathcal{L}_X(X)$, $\omega_X = \Omega_X(X)$, $D(L_X) = \mathcal{D}(\mathcal{L}_X)(X)$. *Le complexe dualisant rigide de* $D(L_X)$ *est*

$$R_{L_X} = D(L_X) \underset{G_X}{\otimes} Hom_{G_X}\left(\Lambda^{d_{L_X}} L_X^*, \omega_X\right)[x + d_{L_X}].$$

Ce théorème a été démontré par Yekutieli dans le cas de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie de dimension finie et dans le cas de l'algèbre $\mathcal{D}_X$ des opérateurs différentiels sur X. Notre démontration est analogue à celle de [Y4] dans le cas de $\mathcal{D}_X$.

7.3 Complexe dualisant rigide d'une algèbre enveloppante quantique ([9])

Pour les résultats de base sur les algèbres enveloppantes quantiques, nous renvoyons le lecteur à [C-P].

Soit q une indéterminée et soit $\mathcal{A} = \mathbb{C}[q, q^{-1}]$. Nous utiliserons les notations usuelles suivantes :

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \in \mathcal{A}$$
$$[n]_q! = [n]_q [n-1]_q \dots [1]_q$$
$$\binom{n}{j}_q = [n]_q [n-1]_q \dots [n-j+1]_q / [j]_q! \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

On sait que $\binom{n}{j}_q$ est dans $\mathcal{A}$.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie et $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2}$ sa matrice de Cartan. La matrice A n'est pas toujours symétrique mais est toujours symétrisable. Ceci implique qu'il existe un unique n-uplet d'entiers relatifs relativement premiers entre eux $(d_1, \dots, d_n)$ tel que $(d_i a_{i,j})$ soit symétrique et définie positive. Posons $q_i = q^{d_i}$. Introduisons le sous ensemble de $\mathbb{C}$ suivant :

$$\mathbb{C}_{\mathfrak{g}} = \{\epsilon \in \mathbb{C}^* \mid \epsilon^{2d_i} \neq 1, \;\; \forall i \in [1, n]\}.$$

D'après Jimbo, nous considérons la $\mathbb{C}(q)$-algèbre $U_q(\mathfrak{g})$ définie par les générateurs E_i, F_i, K_i, K_i^{-1} for i in $[1,n]$ et les relations

$$
\begin{array}{ll}
(1) & K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1, \quad K_iK_j = K_jK_i \\
(2) & K_iE_jK_i^{-1} = q_i^{a_{i,j}}E_j \quad K_iF_jK_i^{-1} = q_i^{-a_{i,j}}F_j \\
(3) & E_iF_j - F_jE_i = \delta_{i,j}\dfrac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} \\
(4) & \displaystyle\sum_{s=0}^{1-a_{i,j}} (-1)^s \binom{1-a_{i,j}}{s}_{q_i} E_i^{1-a_{i,j}-s}E_jE_i^s = 0 \ \text{ if } i \neq j \\
(5) & \displaystyle\sum_{s=0}^{1-a_{i,j}} (-1)^s \binom{1-a_{i,j}}{s}_{q_i} F_i^{1-a_{i,j}-s}F_jF_i^s = 0 \ \text{ if } i \neq j
\end{array}
$$

$U_q(\mathfrak{g})$, muni de la comultiplication Δ, de l'antipode S et de la counité ϵ definies ci-dessous est une algèbre de Hopf.

$$
\begin{array}{ll}
(6) & \Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i \\
(7) & \Delta(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i \\
(8) & \Delta(K_i) = K_i \otimes K_i \\
(9) & S(E_i) = -K_i^{-1}E_i \\
(10) & S(F_i) = -F_iK_i \\
(11) & S(K_i) = K_i^{-1} \\
(12) & \epsilon(E_i) = 0, \ \ \epsilon(F_i) = 0, \ \ \epsilon(K_i) = 1.
\end{array}
$$

Soit $U_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ la $\mathcal{A}$-sous-algèbre de $U_q(\mathfrak{g})$ engendré par les E_i, F_i, K_i, K_i^{-1}, $[K_i, 0] = \dfrac{K_i - K_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}}$. On peut munir $U_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})$ d'une structure d'algèbre de Hopf sur $\mathcal{A}$.

Soit ϵ in $\mathbb{C}^*$. On considère la spécialisation

$$U_\epsilon(\mathfrak{g}) = U_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g})/(q-\epsilon)U_{\mathcal{A}}(\mathfrak{g}).$$

Soit Δ le système de racines correspondant à la matrice de Cartan A, W son groupe de Weyl, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un système de racines simples de Δ, s_i la symétrie par rapport à la racine simple α_i. Fixons une expression réduite de $w_0 = s_{i_1}s_{i_2}\ldots s_{i_N}$ de l'élément le plus long de W. On en déduit un ordre sur l'ensemble des racines positives Δ^+.

$$\gamma_1 = \alpha_{i_1}, \ \ \gamma_2 = s_{i_1}(\alpha_{i_2}), \ \ \ldots, \ \ \gamma_N = s_{i_1}\ldots s_{i_{N-1}}(\alpha_{i_N}).$$

Posons $Q = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbb{Z}\alpha_i$ et notons $(\ ,\ )$ la forme $\mathbb{Z}$-bilinéaire définie sur Q par $(\alpha_i, \alpha_j) = d_ia_{i,j}$

Rappelons que de Concini et Kac ont muni $U_q(\mathfrak{g})$ d'une filtration sur $\mathbb{Z}^{2N+1}$ telle que l'algèbre graduée associée $GrU_q(\mathfrak{g})$ soit l'algèbre associative sur $\mathbb{C}(q)$ définie par les générateurs $E_\alpha, F_\alpha(\alpha \in \Delta_+), K_i, K_i^{-1}(i \in [1,n])$ et les relations

$$\begin{aligned}
&K_iK_j = K_jK_i\\
&K_iK_i^{-1} = 1\\
&E_\alpha F_\beta = F_\beta E_\alpha\\
&K_iE_\alpha = q^{(\alpha,\alpha_i)}E_\alpha K_i\\
&K_iF_\alpha = q^{-(\alpha,\alpha_i)}F_\alpha K_i\\
&E_\alpha E_\beta = q^{(\alpha,\beta)}E_\beta E_\alpha \text{ if } \alpha > \beta\\
&F_\alpha F_\beta = q^{(\alpha,\beta)}F_\beta F_\alpha \text{ if } \alpha > \beta.
\end{aligned}$$

La même filtation existe sur $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ pourvu que ϵ soit dans $\mathbb{C}_\mathfrak{g}$ (les relations sont alors les mêmes en posant $q = \epsilon$).

Proposition 7.3.1 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie. Nous avons les isomorphismes suivants :*

$$\begin{aligned}
&Ext^i_{U_q(\mathfrak{g})}\left(\mathbb{C}(q), U_q(\mathfrak{g})\right) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq dim\mathfrak{g}\\
&Ext^{dim\mathfrak{g}}_{U_q(\mathfrak{g})}\left(\mathbb{C}(q), U_q(\mathfrak{g})\right) = \mathbb{C}(q).
\end{aligned}$$

Munissons $\mathbb{C}(q)$ de la représentation triviale et $Ext^{dim\mathfrak{g}}_{U_q(\mathfrak{g})}\left(\mathbb{C}(q), U_q(\mathfrak{g})\right)$ de la multiplication à droite. Le dernier isomorphisme est un isomorphisme de $U_q(\mathfrak{g})$-modules à droite. Si ϵ est dans $\mathbb{C}_\mathfrak{g}$, la proposition reste vraie si on remplace $U_q(\mathfrak{g})$ par $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ et $\mathbb{C}(q)$ par $\mathbb{C}$.

La proposition 7.3.1 nous permet de démontrer des propriétés de dualité analogues aux propriétés de dualité 6.1.2, 6.2.1, 6.2.2 dans le cadre des groupes quantiques. Commençons par la dualité de Poincaré

Corollaire 7.3.2 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe et soit M un $U_q(\mathfrak{g})$-module. $\mathbb{C}(q)$ peut être considéré comme un $U_q(\mathfrak{g})$-module à droite et à gauche. Pour tout i dans $\mathbb{N}$, nous avons un isomorphisme*

$$Tor_i^{U_q(\mathfrak{g})}(\mathbb{C}(q), M) = Ext^{n-i}_{U_q(\mathfrak{g})}(\mathbb{C}(q), M)$$

Le résultat reste valable pour $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ avec ϵ dans $\mathbb{C}_\mathfrak{g}$.

Introduisons le foncteur dualité suivant $D_{U_q(\mathfrak{g})} : D^b\left(U_q(\mathfrak{g})\right) \to D^b\left(U_q(\mathfrak{g})^{op}\right)$ défini par : pour tout objet $M^\bullet$ de $D^b\left(U_q(\mathfrak{g})\right)$,

$$D_{U_q(\mathfrak{g})}(M^\bullet) = RHom_{U_q(\mathfrak{g})}\left(M^\bullet, U_q(\mathfrak{g})\right).$$

Corollaire 7.3.3 *Soit M un $U_q(\mathfrak{g})$-module de dimension finie. Posons $M^* = Hom_{\mathbb{C}(q)}(M, \mathbb{C}(q))$. Alors $D_{U_q(\mathfrak{g})}(M)$ et M^* sont isomorphes dans $D^b((U_q(\mathfrak{g})^{op})$. Ce résultat reste vrai pour $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ si ϵ est dans $\mathbb{C}_{\mathfrak{g}}$.*

Corollaire 7.3.4 *Soit $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}$ deux algèbres de Lie semi-simples de dimension finie. Notons $U_q(\mathfrak{h})$ et $U_q(\mathfrak{g})$ les groupes quantiques construits à partir de $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}$ pour q générique. Soit ϕ un morphisme d'algèbres de $U_q(\mathfrak{h})$ vers $U_q(\mathfrak{g})$. Soit M un $U_q(\mathfrak{h})$-module de dimension finie. Posons $M^* = Hom_{\mathbb{C}(q)}(M, \mathbb{C}(q))$. On a un isomorphisme*

$$D_{U_q(\mathfrak{g})}\left(U_q(\mathfrak{g}) \overset{L}{\underset{U_q(\mathfrak{h})}{\otimes}} M\right) \simeq M^* \overset{L}{\underset{U_q(\mathfrak{h})}{\otimes}} U_q(\mathfrak{g})[dim\mathfrak{g} - dim\mathfrak{h}].$$

Le résultat reste vrai pour $U_\epsilon(\mathfrak{h})$ et $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ les spécialisations de $U_q(\mathfrak{h})$ et $U_q(\mathfrak{g})$ respectivement si ϵ est dans $\mathbb{C}_{\mathfrak{h}}$.

Corollaire 7.3.5 *Soient $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{g}$ trois algèbres de Lie semi-simples de dimension finie. Notons $U_q(\mathfrak{h})$, $U_q(\mathfrak{t})$ et $U_q(\mathfrak{g})$ les groupes quantiques contruits à partir de $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{g}$ respectivement pour q générique. Soit ϕ un morphisme d'algèbres de $U_q(\mathfrak{h})$ vers $U_q(\mathfrak{g})$ et ψ un morphisme d'algèbres de $U_q(\mathfrak{t})$ vers $U_q(\mathfrak{g})$. Soit M un $U_q(\mathfrak{h})$-module de dimension finie et N un $U_q(\mathfrak{t})$-module de dimension finie. Posons $M^* = Hom_{\mathbb{C}(q)}(M, \mathbb{C}(q))$ et $N^* = Hom_{\mathbb{C}(q)}(N, \mathbb{C}(q))$. Pour tout n dans $\mathbb{Z}$, il y a un isomorphisme*

$$Ext^{n+dim\mathfrak{h}}_{U_q(\mathfrak{g})}\left(U_q(\mathfrak{g}) \overset{L}{\underset{U_q(\mathfrak{h})}{\otimes}} M, U_q(\mathfrak{g}) \overset{L}{\underset{U_q(\mathfrak{t})}{\otimes}} N\right) \simeq Ext^{n+dim\mathfrak{t}}_{U_q(\mathfrak{g})}\left(N^* \overset{L}{\underset{U_q(\mathfrak{t})}{\otimes}} U_q(\mathfrak{g}), M^* \overset{L}{\underset{U_q(\mathfrak{h})}{\otimes}} U_q(\mathfrak{g})\right).$$

Ce résultat reste vrai pour $U_\epsilon(\mathfrak{h})$, $U_\epsilon(\mathfrak{t})$ et $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ les spécialisations de $U_q(\mathfrak{h})$ et $U_q(\mathfrak{g})$ respectivement si ϵ est dans $\mathbb{C}_{\mathfrak{h}} \bigcap \mathbb{C}_{\mathfrak{t}}$.

Le théorème 7.3.1 nous permet de calculer les complexes dualisants rigides de $U_q(\mathfrak{g})$ pour q générique et de $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ si ϵ est dans $\mathbb{C}_{\mathfrak{g}}$

Théorème 7.3.6 *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie. Supposons que ϵ soit dans $\mathbb{C}_{\mathfrak{g}}$. Les complexes dualisants rigides de $U_q(\mathfrak{g})$ et $U_\epsilon(\mathfrak{g})$ sont $U_q(\mathfrak{g})[dim\mathfrak{g}]$ et $U_\epsilon(\mathfrak{g})[dim\mathfrak{g}]$ respectivement.*

Le théorème 7.3.6 répond à une question de Yekutieli ([Y4]).

8 Equations extrémales dans le cas semi-classique ([6])

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie, $\mathfrak{h}$ une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, Δ le système de racines associé à $\mathfrak{h}$ et $B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un système de racines simples de Δ. Nous noterons Δ^+ l'ensemble des racines positives, W le groupe de Weyl et s_i la symétrie par rapport à la racine simple α_i.

Si w est dans W et si $w = s_{i_1} \ldots s_{i_j}$ en est une expression réduite, alors les racines $(\gamma_1, \ldots, \gamma_j) = \Big(\alpha_{i_1}, s_{i_1}(\alpha_{i_2}), \ldots, s_{i_1} \ldots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k}), \ldots, s_{i_1} \ldots s_{i_{j-1}}(\alpha_{i_j})\Big)$ sont deux à deux distinctes et

$$\Delta_w = \{\alpha \in \Delta_+ \mid w^{-1}(\alpha) < 0\} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_j\}.$$

Si γ est une racine positive, $\mathfrak{g}_\gamma$ désignera le sous espace radiciel associé à la racine γ. Soit h_γ l'unique élément de $[\mathfrak{g}_\gamma, \mathfrak{g}_{-\gamma}]$ tel que $\gamma(h_\gamma) = 2$. Si e_γ est dans $\mathfrak{g}_\gamma$, il existe un unique élément $e_{-\gamma}$ dans $\mathfrak{g}_\gamma$ tel que $(h_\gamma, e_\gamma, e_{-\gamma})$ soit un sl_2-triplet. On pose

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\gamma \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\gamma, \quad \mathfrak{n}_w = \bigoplus_{\gamma \in \Delta_w} \mathfrak{g}_\gamma.$$

Soit $R(\mathfrak{h})$ le corps des fonctions rationnelles sur $\mathfrak{h}^*$. On introduit $U'(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}) \underset{S(\mathfrak{h})}{\otimes} R(\mathfrak{h})$. Considérons le module de Verma générique $V = \dfrac{U'(\mathfrak{g})}{U'(\mathfrak{g})\mathfrak{n}}$. Dans [Z], Zhelobenko a donné une description explicite de $V^{\mathfrak{n}_w}$. J'ai établi des résultats similaires pour l'algèbre symétrique.

Considérons la variété analytique complexe $(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^*$. On la munit du système de coordonnées suivant $\Big((e_{-\alpha})_{\alpha \in \Delta_+}, (h_{\alpha_i})_{i \in [1,n]}\Big)$. Si U est un ouvert de $(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^*$, on désignera par $\mathcal{P}(U)$ (respectivement $\mathcal{A}(U)$) l'ensemble des fonctions régulières (respectivement analytiques) sur U et par $\mathcal{P}(U)^{\mathfrak{n}_w}$ (respectivement $\mathcal{A}(U)^{\mathfrak{n}_w}$) le sous-ensemble des fonctions de $\mathcal{P}(U)$ (respectivement $\mathcal{A}(U)$) invariantes par l'action de $\mathfrak{n}_w$.

Notons U_γ l'ouvert de $(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^*$ défini par les équations $h_\gamma \neq 0$. Soit Φ_γ l'application de U_γ dans lui-même définie par :

$$\forall \lambda \in U_\gamma, \quad \Phi_\gamma(\lambda) = exp\left(\frac{e_\gamma(\lambda)}{h_\gamma(\lambda)} e_\gamma\right) \cdot \lambda.$$

où $\cdot$ désigne l'action naturelle de $\mathfrak{n}$ sur $(\mathfrak{g}/\mathfrak{n})^*$. Par composition, Φ_γ définit un morphisme d'algèbres de $\mathcal{A}(U_\gamma)$ que nous noterons π_γ.

Théorème 8.0.1 :

Soit w un élément de W. Notons $\Delta_w = (\gamma_1, \ldots, \gamma_j)$ et posons $U_w = U_{\gamma_1} \bigcap \ldots \bigcap U_{\gamma_j}$. Le morphisme d'algèbres $\pi_w = \pi_{\gamma_1} \circ \ldots \circ \pi_{\gamma_j}$ ne dépend pas de l'expression réduite de w. Il établit un isomorphisme entre

$$\mathcal{C}_w = \{f \in \mathcal{A}(U_w) \mid \frac{\partial f}{\partial e_{-\gamma_1}} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial e_{-\gamma_j}} = 0\}$$

et $\mathcal{A}(U_w)^{\mathfrak{n}_w}$. De plus π_w envoie $\mathcal{C}_w \bigcap \mathcal{P}(U_w)$ sur $\mathcal{P}(U_w)^{\mathfrak{n}_w}$.

Soit N_w le groupe connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_w$. Ma démonstration repose sur le proposition suivante :

Proposition 8.0.2 :

Soit λ dans U_w. Le point $\Phi_{\gamma_j} \ldots \Phi_{\gamma_1}(\lambda)$ est l'unique point de l'orbite $N_w \cdot \lambda$ dont les coordonnées $e_{-\gamma_1}, \ldots, e_{-\gamma_j}$ s'annulent.

9 Perspectives de recherche

Problème 1 : développer une théorie des modules holonômes pour les $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-modules ($\mathcal{L}_X$ étant un algébroïde de Lie sur X).

Problème 2 : P. Schapira m'a posé la question suivante : Dans la définition d'un algébroïde de Lie, on ne suppose plus que $\mathcal{L}_X$ est localement libre comme $\mathcal{O}_X$-module mais seulement cohérent. Peut-on développer une théorie des opérations sur les $\mathcal{D}(\mathcal{L}_X)$-modules (comme dans les sections 3 et 4) dans ce cadre plus général.

10 Bibliographie

[A-K] Almeida R. - Kumpera A. : *Structure produit dans la catégorie des algébroides de Lie*, Ann. Acad. Brasil Cienc. **53** (1981) 247-250.
[B-B] Borho W. - Brylinski J.L : *Differential operators on homogeneous spaces. I*, Invent. Math. **69** (1982), 437 - 469.
[Be] Bernstein J. : Unpublished manuscript.
[Bj] Bjork J-E : *Analytic D-modules and applications*, Kluwer Academic Publishers (1993).
[B-C] Boe B.D. - Collingwood D.H. : *A comparison theorem for the structures of induced representations*, J. of Algebra **94** (1985), 511-545.
[Bl] Blattner R.J. : *Induced and produced representations of Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc **144** (1969), 457-474.
[Bo] Borel A. : *Algebraic D-modules*, Academic press (1987).
[Br] Brylinski J.L : *A differential complex for Poisson manifolds*, J. differential geometry **28** (1988), 93-114.
[B-L] Brown K.A - Levasseur T. : *Cohomology of bimodules over enveloping algebras*, Math. Z. **189** (1985), 393-413.
[C-P] Chari V. - Pressley A. : *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press.
[C-S] Collingwood D.H. - Shelton B. : *A duality theorem for extensions of induced highest weight modules*, Pacific J. Math. **146**, 2, (1990), 227-237.
[deC-K] De Concini C. - Kac V.G. : *Representations of quantum groups at roots of 1.* Operator algebras, unitary representations, enveloping algebras and invariant theory. Actes du colloques en l'honneur de Jacques Dixmier - Progress in Mathematics.
[D1] Duflo M. : *Sur les idéaux induits dans les algèbres enveloppantes*, Inventiones Mathematicae **67** (1982), 385-393.
[D2] Duflo M. : *Open problems in representation theory of Lie groups*, proceedings of the eighteenth International Symposium, division of mathematics, the Taniguchi foundation.
[E-L-W] Evens S.- Lu J-H - Weinstein A. : *Transverse measures, the modular class and a cohomology pairing for Lie algebroids*, Quart. J. Math. Oxford Ser (2) **20** (1999) n^o 200, 417-436.
[F] Fel'dman G.L : *Global dimension of rings of differential operators*, Trans. Moscow Math. Soc. (1982) n1, 123-147.
[G] Gyoya A. : *A duality theorem for homomorphisms between generalized Verma modules*, Preprint.

[Ho] Hotta R. : *Introduction to D-modules.* Series of lectures given at the Institute of Mathematical Sciences, Madras, India.
[Hu1] Huebschmann J. : *Poisson cohomology and quantization*, J. Reine. Angew. Math., **408** (1990), 57-113.
[Hu2] Huebschmann J. : *Some remarks about Poisson homology*,
[Hu3] Huebschmann J. : *Duality for Lie Rinehart algebras and the modular class*, J. Reine. Angew. Math., **510** (1999), 103-159.
[Ka1] Kashiwara M. : *b-functions and holonomic systems*, Inventiones Mathematicae **38** (1976), 33-53.
[Ka2] Kashiwara M. : *D-modules and microlocal calculus*, Translations of Mathematical Monographs **vol. 217**, American Mathematical Society (2003).
[K-S 1] Kashiwara M. - Schapira P. : *Sheaves on manifolds*, Springer Verlag (1990).
[K-S 2] Kashiwara M. - Schapira P. : *Moderate and formal cohomology associated with constructible sheaves*, Mémoires de la Société Mathématique de France **64** (1996).
[K-S 3] Kashiwara M. - Schapira P. : *Ind - Sheaves*, Astérisque (2001).
[Ke] Kempf G.R. : *The Ext-dual of a Verma module is a Verma module*, J. Pure Appl. Algebra **75** (1991), 47-49.
[Ko] Koszul J.L : *crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*, dans Elie Cartan et les mathématiciens d'aujourd'hui, Lyon 25-29 juin 1984, Astérisque hors série, 1985, 252-271.
[Le] Levasseur T. : *Critère d'induction et de coinduction pour certains anneaux d'opérateurs différentiels*, J. Algebra **110** ($n^o 2$) (1987), 530-562.
[Li] Lichnerowicz A. : *Les variétés de Poisson et leurs algèbres associées*, Journal of differential geometry **12** (1977), 253-300.
[M] Mackenzie K. : *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry* , London mathematical Society Lecture Notes Series **124**, Cambridge University Press.
[Ma] Manin Y.I. : *Gauge field theory and complex geometry*, A series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer-Verlag, 1988.
[Me1] Mebkhout Z. : *Théoreme de dualité pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents*, C.R.Acad. Sci. Paris, **287** (1977), 785-787.
[Me2] Mebkhout Z. : *Théorème de dualité pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents*, Math. Scand. **50** (1982), 25-43.
[P] Panyushev D. : *The Jacobian modules of a representation of a Lie algebra and geometry of commuting varieties*, Compositio Mathematica **94** (1994), 181 - 199.

[R-R] Ramis J-P - Ruget G. : *Résidus et dualité* , Inventiones Mathematicae **26** (1974), 89-131.
[R-R-V] Ramis J-P - Ruget G. - Verdier J.L. : *Dualité relative en géometrie analytique*, Invent. Math **13** (1971) , 261-283.
[R] Rinehart G.S - *Differential forms on general commutative algebras* - Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 195-222.
[S-K-K] Sato M.- Kawai T.- Kashiwara M. : *Hyperfunctions and pseudo-differential equations.* In : Hyperfunctions and Pseudo-Differential Equations, H. Komatsu, editor. Lecture Notes in Mathematics **287**, 265-529, Springer-Verlag (1973).
[S1] Schneiders J.P. : Thèse, Université de Liège, Octobre 1986.
[S2] Schneiders J.P. : *An introduction to $\mathcal{D}$-modules*, Bulletin de la société royale des sciences de Liège, **63**, 3-4 (1994), 223-295.
[S-S] Schapira P. - Schneiders J.P. : *Elliptic pairs I. Relative finiteness and duality*, Astérisque 224 (1994).
[VdB1] Van den Bergh M. : *Existence theorem for dualizing complexes over non-commutative graded and filtered rings*, Journal of Algebra **195**, no 2 (1997), 662-679.
[VdB2] Van den Bergh M. : *A relation between Hochschild homology and cohomology for Gorenstein rings*, Proc. Amer. Math. Soc **126** (1998), 1345-1348 .
[Y1] Yekutieli A.: *Dualizing complexes over non commutative graded algebras*, Journal of Algebra **153** (1992), 41-84.
[Y2] Yekutieli A.: *Dualizing complexes, Morita equivalences and the derived Picard group*, J. London Math. Soc. (2) **60**, no. 3 (1999), 723-746 .
[Y3] Yekutieli A.: *The rigid dualizing complex of a universal enveloping algebra*, Journal of Pure and Applied Algebra **150**, 85-93, (2000).
[Y-Z] Yekutieli A. and Zhang J. : *Perverses sheaves and dualizing complexes on non commutatives ringed schemes*, préprint.
[Z] Zhelobenko D.P. : *Extremal cocyles of Weyl groups*, functional analysis and its applications **21**, n^{o}3 (1987), 11-21.

11 Travaux

[1] *Propriétés de dualité dans les représentations coinduites de superalgèbres de Lie*, Thèse de doctorat, Université Paris 7.

[2] *Cohomologie locale de Grothendieck et représentations induites de superalgèbres de Lie*, Mathematische Annalen **297** (1993), 371-382.

[3] *Propriété de dualité dans les représentations coinduites de superalgèbres de Lie*, Annales de l'Institut Fourier **44** fascicule 4 (1994), 1067-1090 .

[4] *Poincaré duality for $k-A$-Lie superalgebras*, Bulletin de la Société Mathématique de France **122** (1994), 371-397.

[5] *Operations for modules on Lie-Rinehart superalgebras*, Manuscripta Mathematica **87** (1995), 199-223.

[6] *Extremal projectors in the semi-classical case*, Annales de l'Institut Fourier, **47** fascicule (1997).

[7] *A duality property for complex Lie algebroids*, Mathematische Zeitschrift, **232** (1999), 367-388.

[8] *Inverse image functor for Lie algebroids*, Journal of algebra, **269** (2003), 109-135.

[9] *Rigid dualizing complex for quantum enveloping algebras and algebras of generalized differential operators*, Journal of algebra, **276** (2004), 80-102.