Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Séries A et B, Sciences mathématiques et Sciences [...]

GÉOMÉTRIE. — *Cycles évanouissants et conditions de Whitney.*

Note (*) de M. **Bernard Teissier**, transmise par M. Henri Cartan.

On donne une condition numérique nécessaire et suffisante pour qu'une hypersurface analytique complexe satisfasse aux conditions de Whitney le long de son lieu singulier (au voisinage d'un point lisse de celui-ci) en termes du nombre de cycles évanouissants des fibres d'une rétraction de l'hypersurface sur son lieu singulier et des sections de ces fibres par des plans génériques de diverses dimensions.

1. Introduction. — Nous allons en fait étudier un problème plus général.

1.1 Définition. — Soit $F : (X, x) \to (Y, y)$ une déformation d'un germe d'hypersurface analytique complexe $(X_0, x_0) \subset (\mathbf{C}^{n+1}, 0)$ [(7), (10)]. Nous dirons que F est une σ-déformation s'il existe une section σ de F telle que pour tout représentant suffisamment petit de F, $X - \sigma(Y)$ soit lisse sur Y (noter que F est en tout cas plat).

1.2. Définition. — Nous dirons qu'une σ-déformation $F : (X, x) \overset{\sigma}{\leftrightarrows} (Y, y)$ est de Whitney si Y est réduit et si pour toute résolution des singularités $\pi : Y' \to Y$ [*cf.* (2)] d'un représentant suffisamment petit de (Y, y), la σ-déformation $F' : X' \overset{\sigma}{\leftrightarrows} Y'$ obtenue par changement de base satisfait aux conditions de Whitney le long de $\sigma'(Y')$ (qui est maintenant lisse), i. e. le couple de strates lisses $(X' - \sigma'(Y'), \sigma'(Y'))$ satisfait aux conditions de Whitney.

1.3. Remarque. — Si X est une hypersurface analytique complexe et si son lieu singulier Y est lisse au voisinage d'un point $x \in Y$, on peut toujours trouver des rétractions locales $\rho : (X, x) \to (Y, x)$ qui présentent X comme σ-déformation de $(\rho^{-1}(x), x)$ de base Y; X satisfait aux conditions de Whitney le long de son lieu singulier au voisinage de x si et seulement si une telle rétraction ρ est de Whitney au sens de 1.2.

2. Le point de vue des sections planes.

2.1. Lemme. — *Soit* $(X_0, x_0) \subset (\mathbf{C}^{n+1}, 0)$ *un germe d'hypersurface analytique. Soit* i_0 *la codimension dans* $\mathbf{C}^{n+1}$ *du lieu singulier de* X_0. *Pour tout* $0 \leq i \leq i_0$, *il existe un ouvert de Zariski dense* $U^{(i)}$ *de la grassmannienne* $G^{(i)}$ *des plans de dimension i de* $(\mathbf{C}^{n+1}, 0)$ *tel que le nombre des cycles évanouissants* [*ou nombre de Milnor, cf.* (7), (9)] $\mu_{x_0}(X_0 \cap H)$ *soit indépendant de* $H \in U^{(i)}$. (*En particulier,* $X_0 \cap H$ *est une hypersurface à singularité isolée dans* H.) *Ce nombre, noté* $\mu^{(i)} = \mu^{(i)}_{x_0}(X_0)$ *est un invariant du type analytique de* (X_0, x_0) $(0 \leq i \leq i_0)$.

2.2. Conjecture. — Tous les $\mu^{(i)}_{x_0}(X_0)$ $(0 \leq i \leq i_0)$ sont en fait des invariants du type topologique du plongement $(X_0, x_0) \subset (\mathbf{C}^{n+1}, 0)$ [*cf.* (11)] ainsi que les monodromies correspondantes (à conjugaison près).

2.3. REMARQUE. — Dans le cas particulier où $(X_0, x_0) \subset (\mathbf{C}^{n+1}, 0)$ est à singularité isolée, $i_0 = n+1$ et $\mu_{x_0}^{(n+1)}(X_0)$ n'est autre que le nombre de Milnor habituel. On peut montrer dans ce cas la conjecture 2.2 pour $i = n+1$ [*cf.* (9), (8), (6)].

2.4. REMARQUE. — $\mu^{(1)} = m - 1$ où m est la multiplicité de (X_0, x_0). 2.2 contient donc une question de Zariski (11).

3. LE POLYNÔME D'HIRONAKA.

3.1. DÉFINITION. — Soit $f = 0$, $f \in \mathcal{O}_{n+1} = \mathbf{C}\{z_0, \ldots, z_n\}$ une équation pour $(X_0, x_0) \subset (\mathbf{C}^{n+1}, 0)$ à singularité isolée. Notons $j(f)$ l'idéal jacobien $(\partial f/\partial z_0, \ldots, \partial f/\partial z_n)\,\mathcal{O}_{n+1}$ et $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal. Hironaka avait suggéré de considérer l'application $K : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ définie par

$$K(r, s) = \dim_{\mathbf{C}} \frac{\mathcal{O}_{n+1}}{\mathfrak{M}^r . j(f)^s}$$

[noter que $j(f)$ est $\mathfrak{M}$-primaire puisque la singularité est isolée et que $\mu^{(n+1)}$ n'est autre que la multiplicité de $j(f)$.]

3.2. THÉORÈME [*cf.* (8)]. — *Pour r et s assez grands, l'application $K(r, s)$ prend les mêmes valeurs qu'un polynôme en r et s à coefficients rationnels, de degré $n+1$, dont les termes de plus haut degré (que nous appelerons polynôme d'Hironaka) peuvent s'écrire*

$$\overline{K}_{(X_0, x_0)}(r, s) = \mu^{(n+1)} \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots + \mu^{(i)} \frac{s^i\, r^{n+1-i}}{i!\,(n+1-i)!} + \ldots + \mu^{(0)} \frac{r^{n+1}}{(n+1)!},$$

où les $\mu^{(i)} = \mu_{x_0}^{(i)}(X_0)$ sont ceux de 2.1 [et donc $\overline{K}$ est un invariant du type analytique de (X_0, x_0)].

Un point important de la démonstration est le

3.3. LEMME. — *Avec les notations de 2.1 et 3.1, il existe un ouvert de Zariski dense $V^{(n)}$ de $G^{(n)}$ $(= \mathbf{P}^n)$ tel que si $H \in V^{(n)}$, $j(f).\mathcal{O}_{H,0}$ soit entier sur $j(f.\mathcal{O}_{H,0})$ (l'idéal jacobien restreint à H est entier sur l'idéal jacobien de la restriction de f à H).*

3.4. THÉORÈME [*cf.* (8), (9)]. — *Soient $(X_0, x_0) \subset (\mathbf{C}^{n+1}, 0)$ un germe d'hypersurface à singularité isolée et $H \subset \mathbf{C}^{n+1}$ un hyperplan passant par l'origine et assez général pour que $(X_0 \cap H, x_0)$ soit encore à singularité isolée (mais H n'est pas nécessairement dans le $V^{(n)}$ de 3.3). Choisissons des coordonnées $(z_0, \ldots, z_n)$ sur $\mathbf{C}^{n+1}$ telles que H soit donné par $z_0 = 0$. Soit Δ la multiplicité de l'origine de l'axe des z_0 comme discriminant de la projection de X_0 sur cet axe. (Le discriminant est réduit à l'origine parce que (X_0, x_0) est à singularité isolée.) On a l'égalité*

$$\Delta = \mu_{x_0}(X_0) + \mu_{x_0}(X_0 \cap H)$$

(nombres de Milnor ordinaires).

3.5. Corollaire (Notations de 3.1 et 3.4). — *La multiplicité de* $j'(f) = j(f) \cdot \mathcal{O}_{X_0, x_0}$ *dans* $\mathcal{O}_{X_0, x_0}$ *est* $\mu^{(n+1)} + \mu^{(n)}$.

3.6. Corollaire. — *Considérons l'application* $K' : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *définie par* $K'(r, s) = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{X_0, x_0} / \mathfrak{M}'^r . j'(f)^s$ *où* $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} . \mathcal{O}_{X_0, x_0}$.

Pour r et s assez grands, K' *coïncide avec un polynôme de degré n en r et s dont les termes de plus haut degré peuvent s'écrire :*

$$\overline{K}'_{(X_0, x_0)}(r, s) = (\mu^{(n+1)} + \mu^{(n)}) \frac{s^n}{n!} + \ldots + (\mu^{(i+1)} + \mu^{(i)}) \frac{s^i r^{n-i}}{i!(n-i)!} + \ldots + (\mu^{(1)} + \mu^{(0)}) \frac{r^n}{n!}.$$

4. Le critère et quelques conséquences. — Dans ce qui suit, on considère des déformations de $(X_0, x_0) \subset (\mathbf{C}^{(n+1)}, 0)$, hypersurface à singularité isolée.

4.1. Théorème. — *Soit* $F : (X, x) \overset{\sigma}{\rightleftarrows} (Y, y)$ *une* σ*-déformation de base* Y *réduite.* F *est de Whitney si et seulement si tous les* $\mu^{(i)}_{\sigma(y')} X_{y'}$ $(1 \leq i \leq n+1)$, *où* $X_{y'} = F^{-1}(y')$, *sont indépendants de* $y' \in Y$ [*i. e. constants dans la déformation de* (X_0, x_0)] *pour un représentant suffisamment petit de* F.

4.2. Pour montrer que la condition est suffisante, on se ramène au cas $Y = \{ t \in \mathbf{C} ;\ |t| < 1 \}$ en utilisant l'existence de la déformation semi-universelle à μ constant [8]. On utilise le fait que le polynôme de 3.6. est agréablement relié à l'éclatement dans X du produit de l'idéal jacobien relatif de F et de l'idéal définissant σ (Y) dans X, et un critère de Hironaka pour les conditions de Whitney [*cf.* [3], [1]] en termes de l'éclatement précédent.

Pour montrer que la condition est nécessaire, on utilise le fait que si F est de Whitney, plongeant X dans $Y \times \mathbf{C}^{n+1}$ de telle sorte que $\sigma(Y) = Y \times \{0\}$, pour un hyperplan générique $\mathcal{H}$ de $Y \times \mathbf{C}^{n+1}$ contenant $Y \times \{0\}$, $F \mid \mathcal{H} \cap X : \mathcal{H} \cap X \overset{\sigma}{\rightleftarrows} Y$ est encore de Whitney (ceci se voit grâce à 3.3), et donc à nombre de Milnor constant, puisque d'après un théorème de Thom et la surjectivité des morphismes résolvants, si F est de Whitney, toutes ses fibres ont même type topologique, donc même nombre de Milnor. On montre ainsi en descendant l'escalier que tous les $\mu^{(i)}$ sont constants. En particulier, $\mu^{(1)}$ est constant, c'est-à-dire que les fibres de F sont équimultiples. D'après [5] ceci redémontre au vu de 1.3 un théorème de Hironaka [4] dans un cas particulier.

4.3. Corollaire. — *Si* $F : (X, x) \overset{\sigma}{\rightleftarrows} (Y, y)$ *est de Whitney, toute* σ*-déformation* $F' : (X', x') \overset{\sigma'}{\rightleftarrows} (Y, y)$ *telle que* $(F'^{-1}(y'), \sigma'(y'))$ *soit isomorphe à* $(F^{-1}(y'), \sigma(y'))$ *pour tout* $y' \in Y$ *est aussi de Whitney.*

4.4. Théorème. — *Pour une* σ*-déformation* $F : (X, x) \overset{\sigma}{\rightleftarrows} (Y, y)$ *de base* Y *réduite, les conditions suivantes sont équivalentes* (notations de 4.1) :

(1) $\mu^{(n+1)}_{\sigma(y')}(X_{y'})$ *est constant pour* $y' \in Y$;

(2) *Tous les* $\mu^{(i)}_{\sigma(y')}(X_{y'})$, $0 \leq i \leq n+1$ *sont constants;*

(3) F *est de Whitney;*

(4) *Tous les* $(X_{y'}, \sigma(y'))_{y' \in Y}$ *ont même type topologique.*

Nous avons déjà vu (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1).

Il reste à montrer (1) $\Rightarrow$ (2). Pour cela, nous faisons la

4.5. Remarque fondamentale. — Pour montrer (1) $\Rightarrow$ (2), il suffit de montrer que si $\mu^{(n+1)}_{\sigma(y')} X_{y'}$ est constant, $\mu^{(n)}_{\sigma(y')}(X_{y'})$ est constant. En effet, on peut alors trouver une section $\mathcal{H} \cap X$ comme en 4.2 et descendre l'escalier. On peut de plus se ramener au cas $Y = \mathbf{D}$ comme en 4.2. C'est cette implication que nous montrerons dans une prochaine publication avec Lê Dũng Tráng et K. Saito. L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) n'est pas démontrée; il faut donc lire conjecture en 4.4.

4.6. Remarque. — L'équivalence (2) $\Leftrightarrow$ (4) démontre la version familiale de la conjecture 2.2.

(*) Séance du 12 mars 1973.

(1) G. Canuto et J. P. Speder, *Un critère d'éclatement pour les conditions de Whitney*, Prépublication, Université de Nice, 1971.

(2) H. Hironaka, *Ann. of Math.*, 79, 1964.

(3) H. Hironaka, *Equivalence and deformations of singularities* (*Woods Hale Alg. Geom. Seminar*, 1964).

(4) H. Hironaka, *Normal cones in analytic Whitney stratifications* (*Publ. Math. I. H. E. S.*, nº 36).

(5) M. Lejeune et B. Teissier, *Normal cones and sheaves of relative jets*, prépublication, University of Warwick and Centre de Mathématiques, 17, rue Descartes, Paris, 5e.

(6) Lê Dũng Tráng, in *Singularités à Cargèse* (à paraître dans *Astérisque*) : *Topologie des singularités...*

(7) J. Milnor, *Singular points of complex hypersurface* (*Ann. of Math. Studies*, Princeton, 1968).

(8) B. Teissier, in *Singularités à Cargèse* (à paraître dans *Astérisque*).

(9) B. Teissier, *Thèse*, Paris VII, 1973, 2e partie.

(10) G. N. Tjurina, *Math. USSR izvestija*, 13, nº 5, 1970.

(11) O. Zariski, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77, 1971.

Centre de Mathématiques
de l'École Polytechnique,
17, *rue Descartes,*
75230 *Paris-Cedex* 05.