CONDITIONS D'ADJONCTION, d'après Du Val

M. MERLE
B. TEISSIER

Mars 1977

INTRODUCTION

Dans cet exposé le lecteur trouvera une partie des motivations de l'introduction des points doubles rationnels par Du Val, comme "singularités n'affectant pas les conditions d'adjonction". Lorsque l'on a cherché, pour les besoins de l'exposé, à préciser le vocable "conditions d'adjonction", on s'est trouvé ramené tout naturellement au thème de la résolution simultanée étudié dans deux exposés précédents. Dans le cas des familles de courbes planes, la situation est claire (cf. 1.4.1, 1.4.1.1, 1.4.1.2 ci-dessous) et l'on a été tenté de généraliser en dimension supérieure, en introduisant comme objet d'étude le "conducteur d'adjonction" qui est "la bonne" généralisation du conducteur aux singularités isolées d'hypersurfaces en dimension > 1. Cependant on n'a pas su répondre aux questions les plus simples et c'est après l'exposé qu'Elkik a donné le lien avec la théorie de la dualité qui permet de répondre à ces questions, par une technique d'ailleurs un peu réminiscente de celle de (Rés. sim. I). Dans la seconde partie, on trouvera un procédé de calcul de l'idéal "conducteur d'adjonction" qui est extrêmement utile en pratique. Le principe remonte à un article de Hodge [H] mais on ne comprend bien qu'à la lumière des travaux récents de Kushnirenko ([K]) et Varchenko ([V]). (D'ailleurs il faut signaler qu'Arnol'd avait déjà annoncé un tel résultat (sans démonstration) dans [A].)

1. CERTAINES FORMES DIFFERENTIELLES SUR UN ESPACE ANALYTIQUE.

1.1 Lemme (Poincaré) : Soient X un espace analytique complexe réduit de dimension pure n, et ω une n-forme différentielle holomorphe sur X. Associons à X l'espace analytique réel X' sous-jacent, de dimension 2n, et à ω la n-forme différentielle ω' sur X' sous-jacente à ω. Alors ω' est fermée.

Preuve : L'assertion est locale, et il suffit même de la vérifier au voisinage d'un point non-singulier de X', i.e. de X. On voit que la différentielle de ω' est combinaison linéaire de $d_z\omega'$ et de $d_{\bar z}\omega'$, en prenant sur X' des "coordonnées locales" $(z_1,\dots,z_n,\bar z_1,\dots,\bar z_n)$, au voisinage du point non-singulier considéré. Puisque ω est une n-forme, $d_z\omega' = d_z\omega = 0$ et il suffit de vérifier $d_{\bar z}\omega' = 0$ ce qui résulte immédiatement du fait que ω est holomorphe.

1.2 Remarque : On peut aussi associer à ω une 2n-forme sur X', à savoir $\omega\wedge\bar\omega$.

1.3 Lemme (Picard, Grauert-Riemenschneider, Laufer) : Soient X comme ci-dessus, et Y un sous-espace analytique fermé de X contenant le lieu singulier de X et rare dans X (i.e. ne contenant aucune composante irréductible locale de X). Soit ω une n-forme différentielle holomorphe sur $X \setminus Y$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) La forme ω se prolonge en une forme méromorphe sur X, encore notée ω, et il existe un voisinage U de Y dans X tel que pour toute n-chaîne compacte $\gamma \subset U$, on ait

$$\int_\gamma \omega' < \infty \quad ,$$

(i.e. l'intégrale a un sens et prend une valeur finie déterminée), où ω' désigne la n-forme réelle sous-jacente.

ii) Pour tout ouvert relativement compact U de X, on a

$$\int_{U \setminus Y} \omega \wedge \bar{\omega} < \infty \quad ,$$

où le premier membre désigne $\lim\limits_{U'} \int_{U \setminus U'} \omega \wedge \bar{\omega}$, U' parcourant le filtre des voisinages de $Y \cap U$ dans U.

iii) Il existe un morphisme propre $\pi : \tilde{X} \to X$ induisant un isomorphisme $\tilde{X} - \pi^{-1}(Y) \to X - Y$ (et donc surjectif) et tel que $\pi^* \omega$ soit une n-forme holomorphe sur $\tilde{X}$.

Preuve : Montrons i) $\Rightarrow$ iii) ; supposons la négation de iii) et soit $\pi : \tilde{X} \to X$ une résolution des singularités de X telle que $\pi^{-1}(Y)$ soit un diviseur à croisements normaux. $\pi^* \omega$ n'est pas holomorphe, et nous allons montrer qu'il existe une n-chaîne compacte $\tilde{\gamma}$ sur $\tilde{X}$ telle que l'on n'ait pas $\int_{\tilde{\gamma}} (\pi^* \omega)' < \infty$, et telle que l'intersection de $\tilde{\gamma}$ avec $\pi^{-1}(Y)$ soit de dimension $\leq n-1$. La chaîne compacte $\gamma = \pi(\tilde{\gamma})$ nous donnera alors une n-chaîne sur X telle que $\int_\gamma \omega'$ ne soit pas finie, d'où la négation de i).

D'après le théorème de prolongement de Riemann, on peut supposer qu'il existe un point non singulier de $\pi^{-1}(Y)$ au voisinage duquel $\pi^* \omega$ n'est pas holomorphe. Au voisinage de ce point, on peut choisir des coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ telles que $\pi^{-1}(Y)$ soit défini par $x_1 = 0$, et écrire $\pi^* \omega = g \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ dans le complémentaire de $\pi^{-1}(Y)$; g est donc holomorphe disons pour $0 < |x_1| < a$, $0 \leq |x_i| < a$ $(2 \leq i \leq n)$, et l'on peut écrire le développement de Laurent de g par rapport à x_1 dans $0 < |x_1| \lneq a$. Un calcul direct montre que l'intégrale de $(\pi^* \omega)'$ sur la n-chaîne définie par : $\mathrm{Im}\, x_i = 0$ $(1 \leq i \leq n)$,

$|x_i| \leq a$ ne saurait être finie que si g est holomorphe dans le domaine $|x_i| < a$ $(1 \leq i \leq n)$ ce qui a été exclu par l'hypothèse. Réciproquement si iii) est satisfaite, nous pouvons coiffer une n-chaîne γ compacte dans X par une n-chaîne $\tilde{\gamma}$ compacte dans $\tilde{X}$ telle que $\int_\gamma \omega' = \int_{\tilde{\gamma}} (\pi^* \omega)'$ et cette dernière intégrale est finie puisque $\pi^*\omega$ est holomorphe.
D'où iii) $\Rightarrow$ i) (d'après [Pc]).

Montrons que ii) $\Rightarrow$ iii) (d'après [La] et [Gr]) ; on va prendre pour π une résolution des singularités de X telle que $\pi^{-1}(Y)$ soit un diviseur à croisements normaux. D'après le théorème de prolongement de Riemann, il suffit, pour prouver que $\pi^*\omega$ est holomorphe, de prouver qu'elle l'est au voisinage de tout point de $\pi^{-1}(Y)$ en lequel $\pi^{-1}(Y)_{\text{red.}}$ est non-singulier. A nouveau, on reprend l'écriture ci-dessus et $\pi^*\omega = g\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, et on développe g en série de Laurent par rapport à x_1 (où $x_1 = 0$ définit localement $\pi^{-1}(Y)_{\text{red}}$) :
$g = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} g_i(x_2, \dots, x_n) x_1^i$, développement valable, après une éventuelle homothétie, dans $\{x / |x_i| \leq 1\}$, et posant

$$\Delta_r = \{\underline{x} ; \frac{1}{r} \leq |x_1| \leq 1 \quad , \quad |x_i| \leq 1 \quad i = 2, \dots, n\}$$

et utilisant

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z_1| = \rho} z_1^i \, \bar{z}_1^j \, d(\arg z_1) = \begin{cases} r^2 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

il vient :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_r} \pi^*\omega \wedge \overline{\pi^*\omega} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{|z_i| \leq 1} |g_i|^2\right) c_i(r) \qquad \text{où}$$

$$C_\nu(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\nu-2}\left(\dfrac{1}{r^{2\nu-2}} - 1\right) & \text{si } \nu \leq -2 \\ \text{Log } r & \nu = -1 \\ \dfrac{r^{2\nu+2} - 1}{2\nu+2} & \nu \geq 0 \end{cases} ,$$

d'où aussitôt le résultat.

Enfin iii= $\Rightarrow$ ii) est clair puisque

$$\int_{U \setminus Y} \omega \wedge \bar{\omega} = \int_{\pi^{-1}(U) \setminus \pi^{-1}(Y)} \pi^*\omega \wedge \overline{\pi^*\omega} \quad . \quad \blacksquare$$

1.3.1 Définition : Une forme différentielle ω satisfaisant les conditions ci-dessus est dite de première espèce (par rapport à Y).

1.4 Proposition (Picard [Pc] tome I p. 178) : Soit $(X_o,0)\subset(\mathbb{C}^k,0)$ $(k\geq 2)$ un représentant d'un germe d'hypersurface réduite, d'équations $f(z_1,\ldots,z_k)=0$. Soit Y comme ci-dessus, et soit ω une (k-1)-forme méromorphe sur X_o ; on peut toujours écrire :

$$\omega = \varphi \frac{dx_2\wedge\ldots\wedge dx_k}{f'_{x_1}} \quad \left(= (-1)^{\nu(i)}\,\varphi \frac{dx_1\wedge\ldots\wedge \widehat{dx_i}\wedge\ldots\wedge dx_k}{f'_{x_i}}\right)$$

avec φ méromorphe sur X_o (ici $n=k-1$).

Une condition nécessaire pour que ω reste finie au voisinage de 0 est que

i) φ soit holomorphe au voisinage de 0.

ii) Chaque composante irréductible S_i du lieu singulier de X_o, de codimension 1 dans X_o, contient un ouvert analytique dense U_i tel que pour tout U_i on ait (pour tout représentant assez petit)

$$\varphi\circ\mathcal{O}_{X,x}\subset\mathcal{C}_x \quad ,$$

où $\mathcal{C}_x$ désigne le conducteur dans l'algèbre $\mathcal{O}_{X,x}$ de sa normalisée $\overline{\mathcal{O}_{X,x}}$ $(\tau_x=\{h\in\mathcal{O}_{X,x}\ ;\ h\cdot\overline{\mathcal{O}_{X,x}}\subset\mathcal{O}_{X,x}\})$.

Démonstration : D'après (Loc. cit.). Puisque X_o est une hypersurface, le sous-espace polaire d'une fonction méromorphe sur X_o est soit de codimension 1, soit vide. Si donc φ n'est pas holomorphe, soit $P\subset X_o$ son sous-espace polaire, qui est de codimension 1. Commençons par montrer que nécessairement φ reste bornée sur X_o. Si il n'en était pas ainsi, l'ensemble des points au voisinage desquels φ ne reste pas bornée est un sous-espace $P'\subset X$, de codimension 1 dans X_o puisque c'est l'image par le morphisme de normalisation $n:\overline{X}_o\to X_o$ du sous-espace polaire de $\varphi\circ n$, qui est de codimension 1 dans $\overline{X}_o$ puisque chaque algèbre locale A de $\overline{X}_o$ vérifie : $A=\bigcap_{h(\mathfrak{P})=1} A_{\mathfrak{P}}$. Enfin on a $P'\subseteq P$, et $P\setminus P'$ est contenu dans le lieu singulier de X_o puisque un point non-singulier est normal. Montrons d'abord que P (et donc P') est nécessairement contenu dans le lieu singulier de X_o : soit P_i une composante de P non contenue dans Sing X. Nous allons fabriquer dans tout voisinage de 0, une chaîne γ telle que $\int_\gamma \omega'$ soit infinie. Prenons un point $a\in P_i$ - Sing X, arbitrairement voisin de 0 et non-singulier sur P_i. On peut supposer $f'_{x_1}(a)\neq 0$ et donc écrire au voisinage de a :

$$x_1 = A(x_2,\ldots,x_k) \quad , \quad \frac{1}{f'_{x_1}} = \xi(x_2,\ldots,x_k) \quad \text{avec } \xi(0,\ldots,0)\neq 0 \quad .$$

De plus on peut supposer les coordonnées $x_2,\dots,x_n$ choisies de telle façon que l'image de P_i par la projection naturelle $p : X \to \mathbb{C}^{k-1}$ soit définie par $x_2 = 0$ au voisinage de $p(a)$ et écrire alors

$$\varphi(x_1,\dots,x_k) = \frac{\eta(x_2,\dots,x_k)}{x_2^{\nu}} \qquad (\text{sur } X_o)$$

avec η holomorphe au voisinage de $p(a)$, $\eta(0,x_3,\dots,x_k) \neq 0$. Ainsi au voisinage de a on a

$$\omega = \frac{\eta(x_2,\dots,x_k)}{x_2^{\nu}} \xi(x_2,\dots,x_k) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k$$

qui ne reste finie, d'après 1.3, que si $\nu = 0$, ce qui contredit le fait que P_i appartient au lieu polaire de φ.

Pour examiner ce qui se passe au voisinage d'un point de Sing X_o, nous avons besoin du :

1.4.1 Lemme : Soit $(X_o,0) \subset (\mathbb{C}^2,0)$ un germe de courbe plane réduite d'équation $f(x,y) = 0$. Soit ω une 1-forme différentielle définie sur $X_o \setminus \{0\}$ (pour un représentant assez petit de X_o). Alors $\int_{X_o \setminus \{0\}} \omega \wedge \overline{\omega} < \infty$ si et seulement si $n^*\omega$ est holomorphe, où $n : \overline{X}_o \to X_o$ désigne la normalisation, et ceci a lieu si et seulement si on peut écrire

$$\omega = \varphi \cdot \frac{dx}{f'_y} \quad \left(= -\varphi \frac{dy}{f'_x} \right)$$

où $\varphi(x,y) \cdot \mathcal{O}_{X_o,0}$ appartient au conducteur $\mathcal{C}_o$ de $\mathcal{O}_{\overline{X}_o}$ dans $\mathcal{O}_{X_o}$.

Démonstration : La première assertion résulte de 1.3. Vérifions la seconde. Considérons la famille de courbes planes $X \to \mathbb{C}$, $F(x,y,v) = 0$ construite en (Résol. sim. II, 5.2.7) et qui a la propriété d'avoir une résolution simultanée très faible d'une part, et d'autre part que pour $v \neq 0$, $F(x,y,v_o) = 0$ a (dans un voisinage de 0) pour seules singularités $\delta = \dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{O}}_o / \mathcal{O}_o$ points doubles ordinaires. De l'existence de cette famille résulte aussitôt que la démonstration du Lemme 1.4.1 se ramène à la démonstration des trois lemmes suivants :

1.4.1.1 Lemme : Soit $f : (X,0) \to (\mathbb{C},0)$ une famille de courbes planes réduites, admettant une résolution simultanée très faible (cf. Résol. Sim. I). Une 1-forme différentielle ω_o sur $X_o = f^{-1}(0)$ est de première espèce sur X_o si et seulement si il existe une famille de 1-formes $(\omega)_v$ sur X [c'est-à-dire un élément

$\omega \in \Omega^1_{(X\setminus \mathrm{Crit}.f)/\mathbb{C}}$, où Crit.f est l'ensemble des points de X où f n'est pas une submersion d'espaces non singuliers] telle que $(\omega)_o = \omega_o$ et que pour tout $v \neq 0$ voisin de 0, ω_v soit de première espèce sur X_v.

<u>Preuve</u> : Supposons ω_o de première espèce. Soit $n : \overline{X} \to X$ la normalisation. Par hypothèse le morphisme composé $\overline{X} \to X \to \mathbb{C}$ est lisse et pour tout $v \in \mathbb{C}$ on a $(\overline{X})_v = \overline{X}_v$. ω_o étant de première espèce, son image réciproque sur $\overline{X}_o = (\overline{X})_o$ est holomorphe et en utilisant la structure locale de produit de $\overline{X}$ au-dessus de $\mathbb{C}$, on peut trouver une famille $\overline{\omega}_v$ de formes holomorphes sur $\overline{X}$ et pour chaque v, on peut redescendre $\overline{\omega}_v$ en une 1-forme holomorphe ω_v sur X_v - Sing X_v au moyen de l'isomorphisme $(\overline{X})_v - n^{-1}(\mathrm{Sing}\ X_v) \to X_v - \mathrm{Sing}\ X_v$, et ω_v sera de première espèce sur X_v, d'après le Lemme 1.3.

Réciproquement soit ω_v une famille de 1-formes différentielles sur X - Sing X. Puisque $\mathrm{Crit}.f \cap X_o$ est discret d'après l'hypothèse de résolution simultanée, $n^* \omega$ sera (comme élément de $\Omega^1_{\overline{X}/\mathbb{C}}$) holomorphe en dehors de $n^{-1}(0)$ (puisque ω_v est de première espèce pour tout $v \neq 0$), et donc $n^*\omega$ sera holomorphe partout, ce qui montre que ω_o est de première espèce.

1.4.1.2 <u>Lemme</u> : Soit $f : (X,0) \to (\mathbb{C},0)$ comme ci-dessus, admettant une résolution simultanée. Un élément $g_o \in \mathcal{O}_{X_o,0}$ appartient au conducteur de

$\mathcal{O}_{\overline{X}_o, n^{-1}(0)} = \overline{\mathcal{O}_{X_o,0}}$ dans $\mathcal{O}_{X_o,0}$ si et seulement si il existe un voisinage U de 0

dans X et un élément $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ tel que pour tout $v \neq 0$ assez petit l'élément $(g)_v \in \Gamma(U \cap X_v, \mathcal{O}_{X_v})$ induit par g dans la fibre X_v appartienne au conducteur $\mathcal{C}_v$ de $\overline{\mathcal{O}_{X_{v,x}}}$ dans $\mathcal{O}_{X_{v,x}}$ pour tout $x \in U \cap X_v$, et que $(g)_o = g_o$. De plus, notant $\mathcal{C}$ le conducteur de $\overline{\mathcal{O}_X}$ dans $\mathcal{O}_X$ on a : $\mathcal{O}_{X/\mathcal{C}}$ est un $\mathbb{C}\{v\}$-module plat et pour tout $v \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{C} \cdot \mathcal{O}_{X_v} = \mathcal{C}_v \quad .$$

<u>Démonstration</u> : Rappelons que par définition
$\mathcal{C} = \{h \in \mathcal{O}_X \ ; h \cdot \overline{\mathcal{O}_X} \subset \mathcal{O}_X\} = \mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(\overline{\mathcal{O}_X}/\mathcal{O}_X)$. Or nous avons vu (Résol. sim. I) que l'hypothèse de résolution simultanée très faible implique que $\overline{\mathcal{O}_X}/\mathcal{O}_X$ est un $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$-module (i.e. $\mathbb{C}\{v\}$-module) plat de type fini. De là résulte aussitôt que $\mathcal{O}_X/\mathcal{C}$ est aussi un $\mathbb{C}\{v\}$-module plat, puisque sans torsion, et par ailleurs, puisque l'on a l'égalité : $(\overline{\mathcal{O}_X}/\mathcal{O}_X)_v = \overline{\mathcal{O}_{X_v}}/\mathcal{O}_{X_v}$ par l'hypothèse de résolution simultanée, on a bien $\mathcal{C}.\mathcal{O}_{X_v} = \mathcal{C}_v$. Soit enfin $g \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ tel que pour tout $v \neq 0$ $(g)_v . \overline{\mathcal{O}_{X_v}}/\mathcal{O}_{X_v} = 0$. Alors $g.\mathcal{O}_{\overline{X}_v} \subset \mathcal{C} . \mathcal{O}_{\overline{X}_v}$ pour tout $v \neq 0$, et $g \circ n$ est une fonction

holomorphe sur $\overline{X}$. Par ailleurs $\underline{\mathcal{C} \cdot \mathcal{O}_{\overline{X}}}$ est inversible et puisque n est fini et $V(\mathcal{C})_{red} = V(\mathrm{Crit}.f)_{red}$, chacune des composantes irréductibles du diviseur correspondant s'envoie surjectivement sur $\mathbb{C}$ par $\overline{X} \to X \to \mathbb{C}$; on en déduit aussitôt que la fonction méromorphe $\mathcal{C}^{-1} \circ (g \circ n)$ a un lieu polaire de codimension ≥ 2 dans $\overline{X}$, donc est en fait holomorphe, ce qui achève la preuve du Lemme 1.4.1.2.

1.4.1.3 Lemme : Supposons que $(X_o, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ ait pour singularité en 0 un point double ordinaire. Alors une 1-forme ω_o sur $X_o \setminus \{0\}$ est de première espèce si et seulement si on peut écrire $\omega_o = \varphi \frac{dx}{f'_y}$ avec $\varphi \in (x,y)\mathcal{O}_{X_o, 0}$.

Démonstration : On peut prendre $f(x,y) = xy$ et écrire la normalisation par $\mathbb{C} \amalg \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ donnée par

$$\begin{cases} x(t_1) = t_1 \\ y(t_1) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t_2) = 0 \\ y(t_2) = t_2 \end{cases} .$$

X_o est l'image de ce morphisme et $n : \mathbb{C} \amalg \mathbb{C} \to X_o$ est la normalisation. Il suffit de remonter ω_o (en l'écrivant aussi $-\varphi \frac{dy}{f'_x}$ dans la carte nécessaire) pour prouver le lemme.

Ceci achève la preuve de 1.4.1.

Remarque : Nous avons considéré pour simplifier dans 1.4.1.1 et 1.4.1.2 des familles à un paramètre de courbes, mais le résultat s'étend sans peine à des familles $(X,0) \to (Y,0)$ avec Y non-singulier et admettant une résolution simultanée très faible, en remplaçant $\mathbb{C}-\{0\}$ par un ouvert analytique dense de Y.

Fin de la preuve de 1.4 : Il reste à considérer le cas où l'on suppose $P \subset \mathrm{Sing}\, X_o$, et il nous suffit de montrer que P ne contient aucune composante S_i de codimension 1 de Sing X_o. Or en un point "général" a et arbitrairement proche de 0 d'une telle composante S_i, ω doit rester finie, et au voisinage d'un tel point, nous pouvons considérer X_o comme une famille de courbes planes paramétrée par S_i : en effet, nous pouvons supposer S_i non-singulier au voisinage de a et donc choisir une rétraction locale $(X_o, a) \to (S_i, a)$ qui fait de X_o une famille de courbes planes. De plus, nous pouvons supposer (Résol. sim. I et II) qu'au voisinage de a, le morphisme $(X_o, a) \to (S_i, a)$ admet une résolution simultanée. Choisissant des coordonnées locales $x_1, \ldots, x_k$ centrées en a et telles que si ω est de première espèce sur X_o, il est nécessaire que $\varphi \dfrac{dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k}{f'_{x_1}}$ soit de première espèce au voisinage de a et que ceci implique que $\varphi \dfrac{dx_2}{f'_{x_1}}$ soit de première espèce en restriction à la courbe définie sur X_o par $x_3 = \dots = x_k = 0$. La Proposition 1.4 résulte du Lemme 1.4.1 et de 1.4.1.2. ∎

1.5 Remarques : 1) Certains auteurs ([La], [G.R.] notent $L^2_Y(X_o)$ l'ensemble des n-formes sur $X_o \setminus Y$ vérifiant les conditions de 1.3.

2) Au moins dans le cas où X_o est une intersection complète normale, on peut généraliser légèrement la Proposition 1.4 comme ceci : Supposons $X_o \subset \mathbb{C}^k$, définie par $(f_1, \dots, f_c)$ suite régulière. Alors, si $\omega \in L^2_{\mathrm{Sing}\, X_o}(X_o)$ (ici $n = k - c$) on peut écrire

$$\omega = \varphi . \frac{dx_{c+1} \wedge \dots \wedge dx_k}{\dfrac{\partial(f_1, \dots, f_c)}{\partial(x_1, \dots, x_c)}} \qquad \text{avec } \varphi \in \mathcal{O}_{X_o, 0} \quad .$$

3) Dans le cadre de la géométrie algébrique, on considère une hypersurface affine $X_o \subset \mathbb{C}^k$ et on appelle forme différentielle de première espèce une forme différentielle sur X_o à coefficients fonctions rationnelles sur X_o, et qui vérifie en chaque point de $X_o \cup D$ (= complété projectif de X_o) la condition de finitude 1.3 ci-dessus. Le résultat est qu'une forme de première espèce s'écrit nécessairement

$$P \cdot \frac{dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k}{f'_{x_1}} \quad ,$$

où P est un polynôme de degré au plus d-k-1, où d est le degré du polynôme f définissant $X_o \subset \mathbb{C}^k$. La borne sur le degré s'obtient très facilement en écrivant que ω reste finie aux points à l'infini de $X_o \cup D$ (i.e. aux points de D) La façon ci-dessus d'établir 1.4 est différente de la façon "moderne" qui cherche les fonctions méromorphes φ telles que, considérant la projection $\varphi : X_o \to \mathbb{C}^{k-1}$, la trace $\mathrm{Tr}\left(\varphi \cdot \dfrac{dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k}{f'_{x_1}}\right)$ définisse une (k-1)-forme holomorphe sur $\mathbb{C}^{k-1}$. Ceci revient à écrire que $\dfrac{dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k}{f'_{x_1}}$ est un générateur, ayant de bonnes vertus de variance, du module dualisant $\omega_{X_o} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{k-1}}}(\mathcal{O}_{X_o}, \Omega^{k-1}_{\mathbb{C}^{k-1}})$.

1.6 Définition : Soit $(X_0,0) \subset (\mathbb{C}^k,0)$ comme ci-dessus. Nous appellerons conducteur d'adjonction de X_0 en 0 l'idéal $\mathcal{C}_{X_0,0}$ de $\mathcal{O}_{X_0,0}$ formé par les éléments $\varphi \in \mathcal{O}_{X_0,0}$ tels que $\omega = \varphi \dfrac{dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_k}{f'_{x_1}}$ soit de première espèce en 0.

1.6.1 Remarque : Remarquons tout de suite que dans le cas où X_0 est une courbe plane réduite, le conducteur d'adjonction coïncide avec le conducteur usuel. Une des motivations de cet exposé était d'essayer de comprendre si le conducteur d'adjonction a des liens aussi étroits avec la résolution simultanée très faible en dimension > 1, que ceux qu'il a pour les courbes.

1.7 Définition : Soit $(X_0,0) \subset (\mathbb{C}^k,0)$ une hypersurface réduite ; on dit que le point singulier $0 \in X_0$ n'affecte pas les conditions d'adjonction si toute forme $\omega = \varphi \dfrac{dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_k}{f'_{x_1}}$ qui satisfait les conditions nécessaires de 1.4 est de première espèce (au voisinage de 0).

1.7.1 Remarque : La terminologie vient de ce que l'on a toujours appelé (dans le cadre de la géométrie algébrique) polynômes adjoints à f les polynômes φ tels que $\varphi \dfrac{dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_k}{f'_{x_1}}$ soit de première espèce. Nous pouvons conserver cette terminologie en géométrie analytique. De même, les fonctions φ satisfaisant les conditions (nécessaires) de 1.4 correspondent à ce que l'on appelait les polynômes sous-adjoints (cf. [Pc] tome 2, p. 19).

1.8 Proposition : Si la normalisation $\overline{X}_0$ de X_0 est non-singulière, $0 \in X_0$ n'affecte pas les conditions d'adjonction, et donc toute fonction sous-adjointe est adjointe.

Preuve : Ceci résulte aussitôt de (Résol. sim. I) et les Lemmes 1.4.1, 1.4.1.2.

Le résultat central de la théorie des singularités rationnelles est

1.9 Théorème (Du Val [DV]) : Si $(X_0,0) \subset (\mathbb{C}^3,0)$ est une surface normale, alors 0 n'affecte pas les conditions d'adjonction si et seulement si $(X_0,0)$ est un point double rationnel.

La preuve de Du Val est si belle qu'il faut laisser au lecteur le plaisir de la lire dans le texte.

1.9.1 Remarque : Lorsque X_o est normale, $0 \in X_o$ n'affecte pas les conditions d'adjonction $\mathcal{C}_{X_o,0} = \mathcal{O}_{X_o,0}$.

Le résultat de 1.4.1.2 pour les familles de courbes planes, et l'existence d'une résolution simultanée très faible pour une famille $f : X \to \mathbb{C}$ dont la fibre générale est non-singulière et la fibre spéciale un point double rationnel m'ont conduit naturellement à poser les deux questions suivantes :

1. Soit $f : X \to \mathbb{C}$ une famille d'hypersurfaces de dimension k-1, à singularités isolées. A-t-on l'inégalité

$$\dim \mathcal{O}_{X_o,0} / \mathcal{C}_{X_o,0} \geq \dim \mathcal{O}_{X_t} / \mathcal{C}_t \quad ?$$

2. Si la famille admet une résolution simultanée très faible, y-a-t-il nécessairement égalité ?

1.10 Peu de temps l'exposé, nous avons appris que Renée Elkik avait donné une réponse affirmative à une de ces deux questions, en fait dans un cadre plus général que celui des hypersurfaces. Son résultat est le suivant :
Soit $f : X \to S$ un morphisme plat à fibres normales et Cohen-Macaulay, et tel que Crit.f soit fini au-dessus de S. Soit $H_s = \operatorname{coker}((f_s)_* \omega_{\tilde{X}_s} \to \omega_{X_s})$ où $f_s : \tilde{X}_s \to X_s$ est une résolution des singularités de X_s et ω_{X_s} désigne le module dualisant de X_s, $\omega_{\tilde{X}_s}$ celui de $\tilde{X}_s$. H_s est un espace vectoriel de dimension finie, puisque concentré aux points singuliers de X_s. Alors Elkik montre que $s \mapsto \dim_{\mathbb{C}} H_s$ est une fonction semi-còntinue supérieurement de s. Par ailleurs, il n'est pas difficile de prouver que dans le cas des hypersurfaces H_s est isomorphe comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel à $\mathcal{O}_{X_s} / \mathcal{C}_{X_s}$.

Il paraît très intéressant d'essayer de fabriquer des invariants des singularités isolées d'hypersurfaces à partir du conducteur d'adjonction.

Comme l'a fait remarquer J. Wahl, une réponse affirmative à 2 se déduit sans mal du Th. 0.4 de son article [W] dans le cas général d'une famille de singularités de Cohen-Macaulay de dimension ≥ 2, si l'on remarque que $\dim \mathcal{O}_{X_o} / \mathcal{C}_{X_o,0} = \dim H^{n-1}(\mathcal{O}_{\tilde{X}_o})$ pour une résolution $\tilde{X}_o \to X_o$.

2. UN CALCUL EXPLICITE.

Nous allons maintenant calculer le conducteur d'adjonction dans le cas d'un germe d'hypersurface à singularité isolée de $\mathbb{C}^k$ vérifiant les conditions de "non dégénérescence" définies par Kushnirenko-Varchenko (voir [K]).

Pour ces hypersurfaces il existe un plongement de $(\mathbb{C}^*)^k$ non singulier, noté $X(\Sigma)$ et un morphisme propre $\pi : X(\Sigma) \to \mathbb{C}^k$ équivariant, tel que l'image inverse par π de X soit un diviseur à croisements normaux ([V])

Nous déterminerons le conducteur d'adjonction $\mathcal{C}_X$, c'est-à-dire les formes différentielles de première espèce sur X en examinant leur image réciproque sur la transformée stricte $\tilde{X}$ de X par π (cf. 1.3 iii).

2.1 Pour un système de coordonnées de $\mathbb{C}^k$ adapté à l'action de $(\mathbb{C}^*)^k$ l'équation de X s'écrit

$$f = \sum_{p \in \mathbb{N}^k} a_p \, x^p \quad .$$

Posons supp f $= \{p \in \mathbb{N}^k \ , \ a_p \neq 0\}$.

On définit le polyèdre de Newton de f, puis l'éventail associé Σ_o, enfin un éventail Σ plus fin que Σ_o tel que le plongement torique associé $X(\Sigma)$ soit non singulier. ([V]).

A chaque élément $\sigma \in \Sigma$ (engendré par une base de $\mathbb{Z}^k$) est associé un ouvert $\mathbb{C}^k(\sigma)$ de $X(\Sigma)$ (isomorphe à $\mathbb{C}^k$) dans lequel l'application π s'écrit :

$$x_i \circ \pi(\sigma) = y_1^{a_i^1} \ \cdots\cdots \ y_k^{a_i^k} \qquad (1 \leq i \leq k)$$

avec
$$\det(a_i^j) = 1 \quad .$$

Soit $\omega = \psi \dfrac{dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_k}{f'_{x_i}}$ une forme différentielle méromorphe sur X,

(ψ est une fonction holomorphe sur X)

2.1.1 <u>Théorème</u> : Soit $X \subset (\mathbb{C}^k,0)$ un germe d'hypersurface à singularité isolée d'équation f. f est supposée non dégénérée pour son polyèdre de Newton au sens de Kushnirenko.

Le conducteur d'adjonction $\mathcal{C}_X$ en 0 est l'idéal des fonctions $\psi \in \mathcal{O}_X$ dont un représentant $\Psi = \sum_{p \in \mathrm{supp}\,\Psi} \Psi_p \, x^p$ est tel que le support de $x_1 \dots x_k \Psi$ est contenu dans l'intérieur du polyèdre de Newton $\Gamma_+(f)$ enveloppe convexe de (supp f)+ $\mathbb{N}^k$).

Démonstration : Pour déterminer l'image inverse de ω par $\pi(\sigma)$ nous remarquons que sur $f \circ \pi(\sigma) = 0$

$$\frac{dx_i}{x_i} = \sum_{j=1}^{k} a_i^j \frac{dy_j}{y_j} \qquad 1 \le i \le k$$

et
$$\sum_{j=1}^{k} y_j \frac{\partial f \circ \pi(\sigma)}{\partial y_j} \frac{dy_j}{y_j} = 0 \quad .$$

Un calcul élémentaire sur les déterminants nous montre que

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dy_2}{y_2} \wedge \ldots \wedge \frac{dy_k}{y_k} = (-1)^i \, y_1 \frac{\partial f \circ \pi(\sigma)}{\partial y_1} \frac{dx_1}{x_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{\frac{dx_i}{x_i}} \wedge \ldots \wedge \frac{dx_k}{x_k}$$

en supposant que $\frac{\partial f \circ \pi(\sigma)}{\partial y_1}$ n'est pas identiquement nulle sur la transformée stricte $\tilde{X}$ (elle-même supposée non vide dans la carte $\mathbb{C}^k(\sigma)$).

Sur $\tilde{X}$ d'équation $\tilde{f}(y_1,\ldots,y_k) = \frac{f \circ \pi(\sigma)}{y_1^{m(a^1)} \ldots y_k^{m(a^k)}}$, nous avons :

$$\frac{\partial f \circ \pi(\sigma)}{\partial y_1} = y_1^{m(a^1)} \ldots y_k^{m(a^k)} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1}$$

et l'image réciproque de ω par $\pi(\sigma)$ s'écrit donc sur $\tilde{X}$

$$\pi(\sigma)^*(\omega) = \frac{(-1)^i (x_1 \ldots x_k \psi) \circ \pi(\sigma)}{y_1^{m(a^1)+1} \ldots y_k^{m(a^k)+1}} \; \frac{dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_k}{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1}} \quad .$$

Comme $\tilde{X}$ est régulière, la forme $\pi(\sigma)^* \omega|_{\tilde{X}}$ est holomorphe si et seulement si la fonction

$$\frac{(x_1 \ldots x_k \psi) \circ \pi(\sigma)}{y_1^{m(a^1)+1} \ldots y_k^{m(a^k)+1}}$$

est holomorphe sur $\tilde{X}$. Pour cela il faut et il suffit que l'ordre de $(x_1 \ldots x_k \psi) \circ \pi(\sigma)$ en y_j (pour tout $j \in \{1,2,\ldots,k\}$) soit strictement supérieur à $m(a^j)$. Autrement dit les points de $\mathbb{R}^k$ du support d'un représentant $x_1 \ldots x_k \Psi$ de $x_1 \ldots x_k \psi$ sont strictement au-dessus de l'hyperplan d'équation $\langle p, a^j \rangle = m(a^j)$.

Cette condition étant réalisée pour tout $\sigma \in \Sigma$, Σ étant plus fin que Σ_o, elle signifie que les points de supp $x_1 \ldots x_k \Psi$ sont contenus dans l'intérieur de $\Gamma_+(f)$.

2.1.2 Remarque : Pour faire ce calcul, nous avons seulement utilisé que

i) l'image inverse par π de X est un diviseur à croisements normaux. Il suffit donc que la restriction $f_\gamma = \sum_{p\in\gamma} a_p x^p$ soit non singulière sur $(\mathbb{C}^*)^k$ pour toutes les faces compactes γ de $\Gamma_+(f)$.

ii) La dérivée $\frac{\partial\tilde{f}}{\partial x_1}$ n'est pas identiquement nulle sur $\tilde{X}$. Sinon X serait quasi-homogène et a^1 serait le vecteur des poids de $x_1,\ldots,x_k$. Quitte à renuméroter $a^1,\ldots,a^k$, cette condition est donc toujours réalisée.

Donnons deux corollaires du théorème 2.1.1 après la

2.1.2 Définition : Soit Γ_+ un polyèdre convexe de dimension k dans $\mathbb{R}^k$. Nous noterons $h(\Gamma_+)$ le nombre de points à coordonnées entières strictement positives qui ne sont pas dans l'intérieur de Γ_+.

2.1.3 Corollaire : Pour un germe d'hypersurface à singularité isolée $X \subset \mathbb{C}^k$, d'équation f non dégénérée pour son polyèdre de Newton, la dimension du quotient $\mathcal{O}_X/\mathcal{C}_X$, notée perte de genre en 0 est égale à $h(\Gamma_+(f))$.

2.1.4 Corollaire : Pour un germe d'hypersurface à singularité isolée, $X \subset \mathbb{C}^k$ d'équation $F=0$, la dimension du quotient $\mathcal{O}_X/\mathcal{C}_X$ est supérieure ou égale à $h(\Gamma_+(f))$.

Ce dernier corollaire est une conséquence du résultat de Renée Elkik et du fait que les fonctions non dégénérées pour leur polyèdre de Newton forment un ouvert dans l'ensemble des fonctions ayant un polyèdre donné. ([K])

2.2 Points doubles rationnels.

Si l'on cherche les germes X de surfaces normales de $\mathbb{C}^3$ qui n'affectent pas les conditions d'adjonction (i.e. $\mathcal{C}_X = \mathcal{O}_X$), une condition nécessaire est que le point de coordonnées $(1,1,1) \in \mathbb{R}^3$ soit contenu dans l'intérieur du polyèdre de Newton d'une équation de X.

Ceci impose que l'ordre de f pour l'idéal maximal soit au plus 2. Après un changement de coordonnées, f peut donc s'écrire :

$$f = z^2 + a(x,y)$$

où $a(x,y)$ est l'équation d'une courbe à singularité isolée de multiplicité au plus 3 (toujours pour que $(1,1,1) \in \widehat{\mathring{\Gamma}_+(f)}$).

2.2.1 Si C est de multiplicité 2 on obtient après changement de coordonnées les formes normales $A_n : y^2 + x^n$ $(n \geq 2)$.

2.2.2 Si C est de multiplicité 3

i) son cône tangent est irréductible. On peut écrire après changement de coordonnées

$$a(x,y) = y^3 + b(x)y + c(x)$$

avec ord $b > 2$ et ord $c > 3$.

Selon la forme du polygone de Newton de a, on obtient les formes normales

$$E_6 : y^3 + x^4$$
$$E_8 : y^3 + x^5$$
$$E_7 : y^3 + yx^3 \quad .$$

ii) C est réductible : elle contient nécessairement une composante lisse et on obtient les formes normales

$$D_k : x(y^2 + x^{k-1}) \qquad k \geq 2 \quad .$$

On vérifie que toutes les équations ainsi déterminées sont non dégénérées pour leur polyèdre de Newton et qu'elles n'affectent donc pas les conditions d'adjonction (on a reconnu bien sûr la liste des points doubles rationnels, et pour établir la classification, on a utilisé le fait que ces singularités sont simples, <u>i.e.</u> sans module [A]).

2.3 Pour terminer, nous allons formuler le résultat énoncé par Hodge dans [H].

Soit X une hypersurface <u>projective</u> de $\mathbb{P}^k$ n'ayant que des singularitées isolées aux points base de $\mathbb{P}^k$. Après avoir choisi un hyperplan de l'infini, considérons l'équation affine f de X_{aff} et l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^k$ de supp f. Soit $\Gamma^*(f)$ la frontière de cette enveloppe.

Nous supposerons que f est non dégénérée pour $\Gamma^*(f)$ au sens de Kushnirenko, c'est-à-dire (cf. [K]) pour toute face γ de $\Gamma^*(f)$ le polynôme $\sum_{p \in \gamma} a_p x^p$ est non singulier sur $(\mathbb{C}^*)^k$.

Si nous cherchons une équation locale pour X au voisinage d'un point singulier à l'infini nous sommes amenés à poser :

$$y_1 = \frac{x_1}{x_i}, \ldots, \widehat{y_i}, \ldots, y_k = \frac{x_k}{x_i}, \quad t = \frac{1}{x_i} .$$

Alors, si f est de degré N, $x_i^N f(x_1 \ldots, x_k) = g(y_1, \ldots, \widehat{y_i}, \ldots, y_k, t)$ est une équation locale de X au voisinage de $y_1 = \ldots = \widehat{y_i} = \ldots = y_k = t = 0$.

supp g se déduit de supp f par une transformation affine simple de $\mathbb{Z}^k$ et le polyèdre de Newton local de germe de g en $y_1 = \ldots = y_i = \ldots = y_k = t = 0$ est le transformé par cette application affine d'une partie de la frontière $\Gamma^*(f)$.

On en déduit immédiatement, en utilisant le théorème local 2.1.1 que $\psi \dfrac{dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_k}{f'_{x_i}}$ est de première espèce sur X si et seulement si le support de $x_1 \ldots x_k \Psi$ est contenu dans <u>l'intérieur</u> de l'enveloppe convexe de supp f.
(Ψ est une adjointe aux points lisses de X à l'infini puisqu'elle est de degré au plus N-k-1).

Nous pouvons donc formuler ainsi le théorème de Hodge :

2.3.1 <u>Théorème</u> (Hodge) : Soit X une hypersurface projective de $\mathbb{P}^k$, d'équation homogène $F = \sum_p A_p y^p$. Soit $\Gamma_+^*(F)$ l'enveloppe convexe (de dimension $\leq k$) dans $\mathbb{R}^{k+1}$ de supp $F = \{p \in \mathbb{R}^{k+1} ; A_p \neq 0\}$. Nous supposons que :

i) X n'a pas d'autres points singuliers que les points base de $\mathbb{P}^k$.

ii) F est non dégénérée pour $\Gamma^*(F)$ frontière de $\Gamma_+^*(F)$ ($\Gamma^*(F)$ de dimension k-1), c'est-à-dire : pour toute face γ de $\Gamma^*(F)$, le polynôme singulier $\sum_{p \in \gamma} A_p y^p$ est non singulier sur $(\mathbb{C}^*)^k$.

Alors le genre géométrique de X est égal au nombre de points à coordonnées entières contenus dans l'intérieur de $\Gamma_+^*(\Gamma)$.

REFERENCES

[A] V.I. Arnol'd, Critical points of smooth functions and theirnormal forms, Russian Math. Surveys 30 (5) (1975) 1-75.

[B] D. Burns, On rational singularities in dimension > 2, Math. Ann. <u>211</u>, (1974) 237-244.

[DV] P. Du Val, On isolated singularities of surfaces which do not affect the condition of adjunction, Proc. Camb. Phil. Soc. <u>30</u> (1934).

[E] R. Elkik, à paraître.

[Gr] H. Grauert, O. Riemenschneider, Verschurndungsätze for analytische Kohomologiegruppen auf Komplexen räumen, Inventiones Math. 11 (1970) 263-292.

[H] W.V.D. Hodge, The isolated singularities of an algebraic surface, Proc. London Math. Soc. 30 (1930) 133-143.

[K] A.G. Kushnirenko, Polyèdres de Newton et nombres de Milnor, Inventiones Math. 32 (1972) 597-608.

[La] H. Laufer, On rational singularities, Amer. J. Math. 94 (1972) 597-608.

[M] M. Merle, Polyèdre de Newton, éventails et désingularisation, d'après A.N. Varchenko, dans ce séminaire.

[Pc] E. Picard, G. Simart, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, Chelsea Publ. Company, Bronx New-York 1971.

[V] A.N. Varchenko, Zeta function of monodromy and Newton's diagram, Inv. Math. 37 (1976).

[W] J. Wahl, Equisingular deformations of normal singularities, Annals of Math. 104 (1976) 325-356.