GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Du théorème de l'index de Hodge aux inégalités isopérimétriques.* Note (*) de **Bernard Teissier,** présentée par Henri Cartan.

La construction des variétés de Demazure permet d'associer à chaque polyèdre compact convexe $K \subset R^d$, à sommets dans le réseau entier, des variétés algébriques compactes munies d'un faisceau inversible dont le degré est égal à $d!.\mathrm{Vol}(K)$. On déduit ainsi du théorème de l'index de Hodge les inégalités de Fenchel-Alexandrof sur les volumes mixtes, qui sont un renforcement des inégalités isopérimétriques.

Using the construction of Demazure varieties, one can associate to each compact convex polyhedron $K \subset \mathbf{R}^d$, with vertices in the integral lattice, algebraic varieties with an invertible sheaf of degree $d!$. Vol. (K). One can then deduce from the Hodge index Theorem the Fenchel-Alexandrof inequalities, which are a strengthening of the isoperimetric inequalities.

1. La construction (d'après [2], [4], [10]). — Soit d un entier $\geqq 2$ et soit $\mathscr{K}$ (resp. $\mathscr{K}_M$) l'ensemble des sous-ensembles convexes compacts de $\mathbf{R}^d$ (resp. qui de plus sont l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points du réseau entier $M \subset \mathbf{R}^d$). Suivant les notations de [2] et [4] dans toute la suite, nous notons $M^* \subset \mathbf{R}^{d*}$ le réseau dual de M. Étant donnés K_1, $K_2, \ldots, K_r$ appartenant à $\mathscr{K}_M$, considérons un éventail complet Σ dans $\mathbf{R}^{d*}$ satisfaisant la condition :

(Lin.) Pour chaque i, $1 \leqq i \leqq r$, la fonction d'appui $H_i : \mathbf{R}^{d*} \to \mathbf{R}$ définie par $H_i(u) = \min\{u(m)/m \in K_i\}$ est linéaire dans chacun des cônes σ appartenant à Σ. Soit $X = X(\Sigma)$ la variété de Demazure associée à l'éventail Σ (*cf.* [2], § 4). A chacune des fonctions H_i est associé un faisceau inversible L_i sur X (*cf.* [4], p. 28). On suppose pour simplifier que Vol. $(K_i) > 0$ $(1 \leqq i \leqq r)$ et on rappelle que la somme de Minkowski $K+K'$ de deux sous-ensembles K et K' de $\mathbf{R}^d$ est l'ensemble $\{k+k'/k \in K, k' \in K'\}$. Notant $\nu . K$ l'homothétique du convexe K de rapport $\nu \in \mathbf{R}_+$, on vérifie facilement pour $K \in \mathscr{K}$ l'égalité

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{Vol.}(K) = \lim_{\nu \to +\infty} \nu^{-d} . \mathrm{Card} . (M \cap \nu . K).$$

Par ailleurs, il résulte de la preuve du théorème de ([4], p. 42) que l'on a

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} \text{(i)} \ \dim_{\mathbf{C}} H^0(X, L_i^\nu) = \mathrm{Card} . (M \cap \nu . K_i) & (\nu \in N - (0)); \\ \text{(ii)} \ H^j(X, L_i^\nu) = 0 \quad \text{pour} \quad j > 0 & (\textit{cf.}\ [4], \text{cor. } 2, \text{p. } 44). \end{cases}$$

[Pour (2)] (i), il suffit de remarquer que, par définition des L_i, on a autant de sections globales indépendantes que de points $m \in M$ vérifiant $u(m) \geqq H_i(u)$ *pour toute application linéaire u appartenant à* R^{d*}; ces points sont exactement ceux de $K_i \cap M$ (c'est d'ailleurs ici que l'on utilise la convexité des K_i).

2. Polynôme de Minkowski-Steiner et polynôme de Snapper. — Étant donnés $K_1, \ldots, K_r$ dans $\mathscr{K}$, on peut montrer que pour les valeurs positives des variables $\nu_1, \ldots, \nu_r$, on a une expression polynomiale en les ν_i pour le volume de l'élément de $\mathscr{K}$ décrit par la somme de Minkowski des $\nu_i . K_i$:

$$\mathrm{Vol} . (\nu_1 . K_1 + \ldots + \nu_r . K_r) = \sum_{\substack{\alpha \in N^r \\ |\alpha| = d}} \frac{d!}{\alpha!} v_\alpha \nu_1^{\alpha_1} \ldots \nu_r^{\alpha_r},$$

qui peut servir de définition aux nombres réels v_α, appelés volumes mixtes (d'indice α) de $K_1, \ldots, K_r$ (*cf.* [1]).

Par ailleurs, étant donnés une variété algébrique X de dimension d, propre sur un corps et des faisceaux inversibles $L_1, \dots, L_r$ sur X, Snapper a donné (*cf.* [5]) une expression de la caractéristique d'Euler-Poincaré cohérente

$$\chi(X, L_1^{\nu_1} \otimes \dots \otimes L_r^{\nu_r}) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbf{N}^r \\ |\alpha| = d}} \frac{1}{\alpha!} s_\alpha \nu_1^{\alpha_1} \dots \nu_r^{\alpha_r} + O\left(\left(\sum_{i=1}^{r} \nu_i\right)^{d-1}\right),$$

pouvant servir de définition aux degrés mixtes s_α des faisceaux inversibles L_i.

Il résulte aussitôt de l'additivité des fonctions d'appui par rapport à la somme de Minkowski des convexes que dans les constructions du n° 1, à la somme de Minkowski $K_i + K_j$ correspond le produit tensoriel $L_i \otimes L_j$ de faisceaux inversibles sur X. Faisant correspondre comme au n° 1 aux convexes $K_1, \dots, K_r$ de $\mathscr{K}_M$ les faisceaux inversibles $L_1, \dots, L_r$ sur X, on déduit de (1) et (2) les égalités

$$s_\alpha = d! \, . \, v_\alpha \tag{3}$$

avec les notations introduites ci-dessus.

3. Les inégalités. — Parmi les degrés mixtes apparaissent en particulier les nombres suivants : fixons un entier $t \leqq d$ et posons $d_i = s_{(t-i, i, 1, \dots, 1)}$ ou $(1, \dots, 1)$ est de longueur $d - t$.

Proposition. — *On a les inégalités*

$$d_i \, . \, d_{i-2} \leqq (d_{i-1})^2$$

pour chaque i, $2 \leqq i \leqq t$.

La démonstration suit le schéma de [6], tout d'abord, on coupe par des diviseurs effectifs D_i sur X ($i = t+1, \dots, d$) assez généraux vérifiant $L_i = \mathcal{O}_X(D_i)$. [On utilise ici le fait que les faisceaux L_1 sont engendrés par leurs sections globales (*cf.* [2], 4.4., lemme 4)] et grâce aux propriétés du polynôme de Snapper (*cf.* [5]), on se ramène ainsi à deux faisceaux inversibles, encore notés L_1 et L_2 sur $Y = D_{t+1} \cap \dots \cap D_d$ (qui n'est plus une variété de Demazure), et tels que :

$$\chi(Y, L_1^{\nu_1} \otimes L_2^{\nu_2}) = \frac{1}{t!} \sum_{0 \leqq i \leqq t} \binom{t}{i} d_i \, \nu_1^{t-i} \nu_2^i + O((\nu_1 + \nu_2)^{t-1}).$$

Procédant par récurrence sur $t = \dim . Y$ comme dans [6], on a seulement à prouver $d_t \, . \, d_{t-2} \leqq (d_{t-1})^2$. Considérant l'intersection S de $t-2$ diviseurs effectifs sur Y généraux parmi ceux associés à L_2, on se ramène à deux faisceaux, encore notés L_1 et L_2, sur une surface S, tels que :

$$2 \, . \, \chi(S, L_1^{\nu_1} \otimes L_2^{\nu_2}) = d_{t-2} \nu_1^2 + 2 d_{t-1} \nu_1 \nu_2 + d_t \nu_2^2 + O(\nu_1 + \nu_2).$$

Ici, il faut remarquer que S est irréductible parce que X l'est par construction, et par le théorème de Bertini. On a donc tout ramené au cas $t = 2$, et l'inégalité qui reste à prouver, $d_t \, . \, d_{t-2} \leqq (d_{t-1})^2$ résulte alors du théorème de l'index de Hodge (*cf.* [9], exp. XIII, appendice) par la méthode exposée en [6], les d_i étant vus comme nombres d'intersection (*cf.* [9], exp. X).

4. Applications. — On déduit de la proposition les inégalités suivantes :
$d_i^t \geqq d_0^{t-i} \, . \, d_t^i \, (0 \leqq i \leqq t)$, qui équivalent d'après (3) aux inégalités;
$w_i^t \geqq w_0^{t-i} \, . \, w_t^i$ entre les volumes mixtes $w_i = v_{(t-i, i, 1, \dots, 1)}$.

Ces dernières inégalités sont les inégalités de Fenchel-Alexandrof de [1], § 7. Le cas d'égalité est facile à caractériser lorsque $t = d$ et $r = 2$: il résulte du théorème de l'index de Hodge que L_1^a et L_2^b sont numériquement équivalents, pour des entiers a et b convenables (*cf.* [7]) mais ceci s'interprète aussitôt en disant que K_1 et K_2 sont homothétiques. Il existe (*cf.*[1], p. 1) sur $\mathscr{K}$ une topologie de Hausdorff, pour laquelle les volumes mixtes sont des fonctions continues et pour laquelle tout élément de $\mathscr{K}$ peut être approximé arbitrairement par des éléments de $\mathscr{K}_M$, en prenant M assez serré. Ainsi les inégalités ci-dessus sont valables pour $K_1, \dots, K_r$ dans $\mathscr{K}$. Prenant en particulier $r = 2$ et $K_2 = \mathbf{B}$, boule unité de $\mathbf{R}^d$, on a l'inégalité

$$\mathrm{Vol}\,.\,(K)^{d-1} \, . \, \mathrm{Vol}\,.\,(\mathbf{B}) \leqq w_1^d \quad \text{où} \quad w_1 = d^{-1} \, . \, \lim_{\lambda \to 0} . \, \lambda^{-1} \, . \, (\mathrm{Vol}\,.\,(K + \lambda \mathbf{B}) - \mathrm{Vol}\,.\,(K)),$$

vaut, si ∂K est assez régulier, $d^{-1} \, . \, \mathrm{Vol}\,.\,(\partial K)$. (volume $d-1$-dimensionnel) et l'on retrouve ainsi l'inégalité isopérimétrique, avec égalité si et seulement si K est une boule.

5. *Remarques.* — La démonstration ci-dessus a été annoncée dans [8], où l'on trouve de plus un dictionnaire analogue à celui des n^{os} 1 et 2 reliant les volumes mixtes de polyèdres de Newton aux multiplicités d'idéaux primaires dans des algèbres locales, et interprétant les inégalités de [6] et [7] comme généralisations d'inégalités entre volumes mixtes de polyèdres de Newton.

De façon analogue à [6], on peut tirer de la proposition l'inégalité « à la Brünn-Minkowski » : $(\deg . \, (L_1))^{1/d} + (\deg . \, (L_2))^{1/d} \leqq (\deg . \, (L_1 \otimes L_2))^{1/d}$ qui correspond par les n^{os} 1 et 2 à l'inégalité de Brünn-Minkowski de ([1], § 7, [3]). Ici, $\deg . \, L_1 = s_{(d, 0)}$, $\deg . \, L_2 = s_{(0, d)}$, dans les notations du n° 2.

L'inégalité ci-dessus est valable en particulier pour deux faisceaux inversibles amples sur une variété algébrique X de dimension d.

(*) Remise le 8 janvier 1979.

[1] H. Busemann, *Convex Surfaces*, Interscience Publishers, New York, 1958.
[2] M. Demazure, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, 3, fasc. 4, 1970.
[3] H. G. Eggleston, *Convexity*, Cambridge University press, 1958.
[4] G. Kempf et coll., *Toroidal Embeddings/Springer Lect. Notes*, n° 339.
[5] S. Kleiman, *Annals of Maths.*, 84, 1966, p. 243-344.
[6] B. Teissier, *Annals of Maths.*, 106, 1977, p. 38-44.
[7] B. Teissier, *On a Minkowski-Type Inequality for Multiplicities II* (à paraître dans le volume du Tata Institute à la mémoire de C. P. Ramanujam).
[8] B. Teissier, *Jacobian Newton Polyhedra and Equisingularity* [*Proceedings R.I.M.S. Conference on Singularities*, Kyoto, april 1978, *publ. du R.I.M.S.*, Kyoto (à paraître)].
[9] Berthelot, Grothendieck et Illusie, *S.G.A.*, 6 (*Springer Lect. Notes*, n° 225).
[10] T. Oda, *A Dual Formulation of Hironaka's Game Problem on Newton Polyhedra*, Preprint, Tohôku University, Sendai, Japon.

Centre de Mathématiques, École polytechnique, 91128 *Palaiseau*.