SUR LA VERSION CATASTROPHIQUE DE LA REGLE DES PHASES DE GIBBS ET L'INVARIANT δ DES SINGULARITES D'HYPERSURFACES

B. TEISSIER

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique - 91120 Palaiseau
"Laboratoire Associé au C.N.R.S."

INTRODUCTION

Dans [Th_2] Thom demande la démonstration d'un énoncé, qu'il appelle règle des phases de Gibbs, affirmant que la codimension de la strate de trivialité topologique d'une famille stable de fonctions est au moins égale au nombre maximum de minima non dégénérés que peut présenter une fonction de la famille. Dans ce qui suit j'explique ce que je comprends du lien entre cet énoncé et la règle des phases classique et je donne les idées principales d'une démonstration, suffisamment pour faire voir qu'il ne s'agit pas seulement d'un énoncé de transversalité ; une démonstration détaillée, incluant un début d'étude systématique du nouvel invariant δ des singularités (algébriquement) isolées que j'utilise ici, sera publiée ailleurs.

§ 1.- Jusqu'à l'énoncé

1.1.- Soit $f(x_o,\dots,x_n) \in \mathbb{R}\{x_o,\dots,x_n\}$ tel que $f = 0$ définisse un germe d'hypersurface analytique réelle à singularité (algébriquement) isolée , i.e. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}\{x_o,\dots x_n\}/(\frac{\partial f}{\partial x_o},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}) = \mu < \infty$.

Il existe alors un déploiement miniversel :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] G : (\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{\mu-1}, 0) \arrow[rr] \arrow[dr, "pr_2"'] & \arrow[d, phantom, "0"] & (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mu-1}, 0) \arrow[dl, "pr_2"] \\ & (\mathbb{R}^{\mu-1}, 0) & \end{tikzcd}$$

du germe de morphisme analytique réel $f : (\mathbb{R}^{n+1},0) \to (\mathbb{R},0)$.

G est le germe de morphisme construit comme suit : si -1, $s_1(x_o,\dots,x_n),\dots$ $s_{\mu-1}(x_o,\dots,x_n)$ sont tels que leurs images dans $\mathbb{R}\{x_o,\dots,x_n\}/\left(\frac{\partial f}{\partial x_o},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ en forment une base, prenant les coordonnées $(u_o,t_1,\dots,t_{\mu-1})$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mu-1}$, on définit G par :

$$1.1.1 \quad \begin{cases} u_o \circ G = f(x_o,\dots,x_n) + \sum_{i=1}^{\mu-1} t_i s_i(x_o,\dots,x_n) \\ t_i \circ G = t_i \quad (1 \leqslant i \leqslant \mu-1) \end{cases}$$

1.2.- G est un germe de morphisme stable ([Th$_1$],[Th$_3$],[W]) et en tant que tel, peut être stratifié, (ibid.) c'est-à-dire que pour tout représentant suffisamment petit de G, il existe une partition finie de la source et du but en sous-variétés analytiques réelles, telle que :

1) la restriction de G à chaque strate de la source soit une submersion sur une strate du but ;

2) on puisse appliquer à cette stratification de G le théorème d'isotopie de Thom impliquant que le type topologique du germe de G en un point d'une strate de la source soit indépendant du point choisi dans la strate.

[Je rappelle que $G_i : (\mathbb{R}^N, x_i) \to (\mathbb{R}^P, y_i)$, $i = 1,2$, ont même type topologique si il existe des germes d'homéomorphismes h et k faisant commuter :

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^N, x_1) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "G_1"'] \arrow[dr, phantom, "o"] & (\mathbb{R}^N, x_2) \arrow[d, "G_2"] \\ (\mathbb{R}^P, y_1) \arrow[r, "k"] & (\mathbb{R}^P, y_2) \end{tikzcd}$$]

(Il n'est pas clair qu'il existe une telle stratification plus belle que toutes les autres, voir cependant Mather dans le livre cité en [Th$_2$], mais l'énoncé ci-dessous porte en fait toutes les stratifications satisfaisant 1) et 2)).

1.3.- Pour chaque $\underline{t} = (t_1,\dots,t_{\mu-1}) \in \mathbb{R}^{\mu-1}$ (pour un représentant assez petit de G, bien sûr, (1.1.1) décrit une fonction $F_{\underline{t}} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.

(Ici, et dans la suite, $\mathbb{R}^{n+1}$ désigne en fait une boule assez petite de centre O, où tout converge) :

$$F_t = f + \Sigma\, t_i\, s_i$$

et :

$$F_o = f.$$

G définit donc une famille de fonctions "centrées" en $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$. En fait, toute autre famille de fonctions :

$$\begin{tikzcd}
H : (\mathbb{R}^{n+1} \times Y, 0) \arrow[rr] \arrow[dr, "pr_2"'] & \arrow[d, phantom, "\circ"] & (\mathbb{R} \times Y, 0) \arrow[dl, "pr_2"] \\
& (Y, 0) &
\end{tikzcd}$$

telle que $H_o = f$, provient de G à Y-isomorphisme près par un changement de base $(Y,0) \to (\mathbb{R}^{\mu-1}, 0)$.

1.4.- Il existe une "hypersurface semi-analytique réelle" $(B,0) \subset (\mathbb{R}^{\mu-1},0)$ telle que : $\underline{t} \notin B \Longleftrightarrow F_{\underline{t}}$ n'a que des singularités quadratiques non dégénérées (localement isomorphes à : $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} : u = \sum_{i=0}^{n} \pm x_i^2$). B est <u>l'ensemble de bifurcation</u> de G.

1.5.- Et une "hypersurface semi-analytique réelle" $(D,0) \subset (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mu-1},0)$ telle que : $(u_o,\underline{t}) \in D \Longleftrightarrow F_{\underline{t}}(x_o,\dots,x_n) = u_o$ a au moins un point singulier. D est le <u>discriminant</u> de G (tout ceci pour un représentant assez petit de G, i.e. $\Sigma\, x_i^2 < \epsilon$, $u_o^2 + \Sigma\, t_i^2 < \eta$).

1.6.- Soit $\nu(G)$ le nombre maximum de minima non dégénérés que peut présenter une fonction G_t $(t \in \mathbb{R}^{\mu-1})$ (le prototype de minimum non dégénéré est la singularité de fonction $u = \sum_{0}^{n} x_i^2$).

1.7.- <u>THEOREME</u> (Thom [Th_2]). Soit $T_o \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mu-1}$ la strate contenant l'origine $0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mu-1}$ dans une stratification de G comme au 1.2. On a :

$$\operatorname{codim}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mu-1}} T_o \geqslant \nu(G)$$

§ 2.- Lien avec la règle des phases (mes sources pour celle-ci sont [Po],[Fe]).

Tout d'abord, il faut montrer (comme il est fait en géométrie analytique complexe dans ([T_1], exp II, [T_2], chap III) :

2.1.- LEMME (toujours pour un représentant assez petit de G)

a) il existe une section $\Sigma : T_o \to \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{\mu-1}$ de G dont l'image $S_o \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{\mu-1}$ est la strate de l'origine dans la stratification de la source de G. i.e. $G|S_o : S_o \to T_o$ est un isomorphisme
et $G : G^{-1}(T_o) - S_o \to T_o$ est une submersion.

b) la projection naturelle $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mu-1} \to \mathbb{R}^{\mu-1}$ induit un isomorphisme de T_o sur son image $T'_o \subset \mathbb{R}^{\mu-1}$; $\bar{\pi} : T_o \xrightarrow{\sim} T'_o$.

c) si $\underline{t} \in T'_o$, la fonction $F_{\underline{t}}$ a un seul point critique $x(\underline{t})$ qui est précisément $\Sigma(u_o,\underline{t}) \in S_o$ où $(u_o,\underline{t}) \in T_o$ est $\bar{\pi}^{-1}(\underline{t})$.

2.2.- Le point du lemme précédent est que, par définition de T_o, le type topologique de $F_{\underline{t}}$ au seul point intéressant $\underline{x}(\underline{t})$ reste constant quand $\underline{t}$ parcourt T'_o, et même, le type topologique de G reste constant le long de S_o, i.e. tous les germes $(G,\underline{x}(\underline{t}))_{\underline{t} \in T'_o}$ ont même type topologique. Ainsi, du point de vue de la théorie des catastrophes, les "vrais" paramètres sont les coordonnées d'un sous-espace P de $\mathbb{R}^{\mu-1}$ supplémentaire de T'_o (i.e. P est transverse à T'_o et $P \cap T'_o = \{0\}$). Et même, un modèle universel pour la morphologie d'un système dépendant de paramètres est obtenu en considérant une famille de fonctions :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^{n+1} \times P, 0) & \longrightarrow & (\mathbb{R} \times P, 0) \\ {\scriptstyle pr_2} \searrow & 0 & \swarrow {\scriptstyle pr_2} \\ & (P,0) & \end{array}$$

(chaque fonction $F_{\underline{t}}$, $\underline{t} \in P$, représentant un "potentiel" qui va gouverner l'évolution du système).

Le nombre d'états stables possibles du système pouvant coexister étant le nombre de minima stables (i.e. non dégénérés) que peut présenter un potentiel $F_{\underline{t}}$ c'est-à-dire en fait $\nu(G)$.

Ainsi le nombre des "vrais" paramètres est traduit par :

$$p = \dim P = \operatorname{codim}_{\mathbb{R}^{\mu-1}} T'_o = \operatorname{codim}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\mu-1}} T_o - 1$$

et le nombre d'"états coexistants" ou phases est traduit par $\nu(G)$ dans le "dictionnaire" de la théorie des catastrophes de Thom.

2.3.- Or, l'énoncé de la règle des phases de Gibbs est :

> Le nombre ℓ des degrés de liberté d'un système thermodynamique dépendant de k paramètres indépendants et présentant φ phases de façon stable est :

$$\ell = k + 1 - \varphi .$$

[souvent on a $k = (n-1) + 2$ où n est le nombre de constituants d'un mélange chimique d'où n-1 concentrations indépendantes et deux paramètres comme température et pression, et l'on écrit : $\ell = n + 2 - \varphi$].

Si l'on trouve imprécise la notion de degré de liberté, on retient seulement :

$$\varphi \leqslant k + 1$$

qui, avec le dictionnaire de 2.2 devient :

$$\nu(G) \leqslant \operatorname{codim}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\mu-1}} T_o$$

c'est-à-dire 1.7.

§ 3.- La démonstration

3.1.- L'invariant $\delta_{\mathbb{R}}(G)$: ce sera par définition le nombre maximum de points singuliers distincts que peut présenter une fibre de G (i.e. de tout représentant de G).

3.2.- La démonstration de 1.7 se décompose en :

3.2.1.- PROPOSITION 1 : $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{\mu-1}} T_o \geqslant \delta_{\mathbb{R}}(G)$

3.2.2.- PROPOSITION 2 : $\delta_{\mathbb{R}}(G) \geqslant \nu(G)$.

C'est la preuve de 2.3.1. qui utilise le fait que T_o est une strate d'une stratification de Thom de G, car elle repose sur :

3.2.3.- PROPOSITION : $\delta_{\mathbb{R}}(G)$ ne dépend que du type topologique de G. Ceci se vérifie en utilisant la version réelle du théorème de décomposition en produit ([T_2] chap. III; § 1, 2.1) pour prouver :

3.2.4.- PROPOSITION - définition : soit, pour tout entier k, Cr(k) (Cr pour croix) l'ensemble des points $s \in D$ discriminant de G, tels que D soit, au voisinage de s. réunion de k hypersurfaces non singulières (qui sont nécessairement en position générale d'après Loc. Cit.) Cr(k) est un sous-ensemble semi-analytique dans D, de codimension k dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mu-1}$ (à cause de la position générale).

3.2.5.- LEMME : $\delta_{\mathbb{R}}(G) = \max \{k / 0 \in \overline{Cr(k)}\}$ (adhérence dans D, ou $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mu-1}$ ce qui revient au même). Ceci résulte aussi du théorème de décomposition en produit.

Or, si deux morphismes ont même type topologique, leur discriminant aussi, en tant qu'hypersurfaces dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mu-1}$, et il est facile de voir que si deux discriminants de morphismes stables ont même type topologique, l'homéomorphisme envoie le Cr(k) de l'un sur le Cr(k) de l'autre. Comme le type topologique de G est constant le long de $S_o = \Sigma(T_o)$, on déduit 3.2.3 de ce qui précède et de 3.2.5.

3.2.6.- On déduit en fait que $\delta_{\mathbb{R}}(G)$ est constant le long de S_o, et que :

$$T_o \subset \overline{Cr(\delta_{\mathbb{R}}(G))}.$$

(en fait, comme D est irréductible en O, donc en tout point de T_o, on déduirait de même :

$$T_o \subset \overline{Cr(\delta_{\mathbb{R}}(G))} - Cr(\delta_{\mathbb{R}}(G))$$

mais ceci ne sera plus vrai si l'on considère un multi-germe (i.e. $G^{-1}(0)$ ayant plusieurs points singuliers, cas qui est en fait, le bon cadre pour 1.7, que j'ai évité par souci de simplicité).

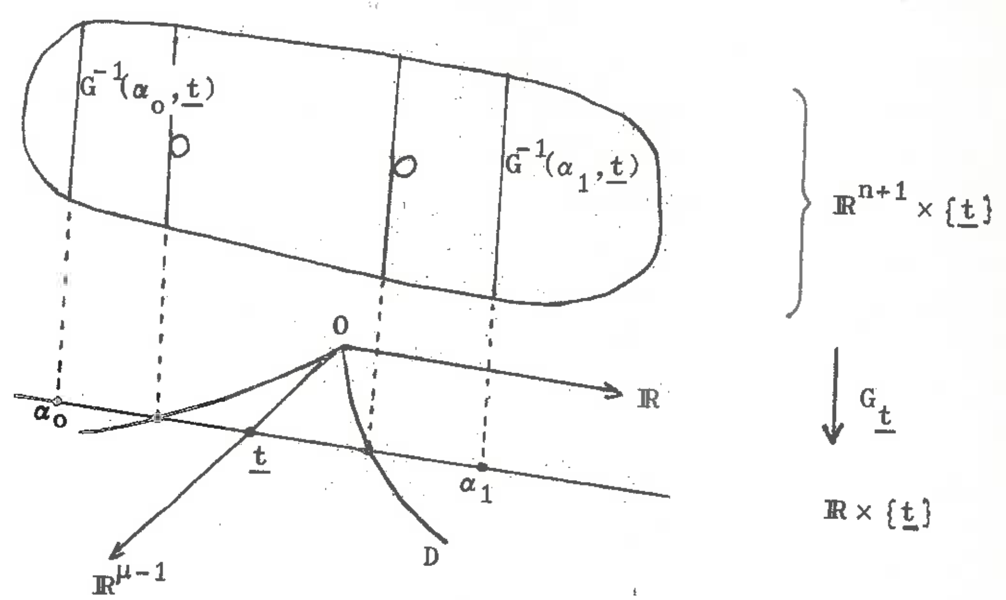
En tous cas, on en déduit bien, puisque $Cr(\delta_{\mathbb{R}}(G))$ est de codimension $\delta_{\mathbb{R}}(G)$ que :

$$\operatorname{codim}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mu-1}} T_o \geq \delta_{\mathbb{R}}(G) \quad \text{et} \quad 3.2.1.$$

3.3.- Pour prouver $\delta_{\mathbb{R}}(G) \geq \nu(G)$, il suffit de montrer :

3.3.1.- PROPOSITION 2' : pour tout représentant assez petit de G, il existe un sous-ensemble semi-analytique non vide $M \subset \mathbb{R}^{\mu-1}$ tel que si $\underline{t} \in M$, la fonction $G_{\underline{t}} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ correspondante présente $\nu(G)$ minima non dégénérés donnant la même valeur critique $u_o(\underline{t})$ (i.e. la même valeur de $G_{\underline{t}}$). En effet, $G^{-1}(u_o(\underline{t}),\underline{t})$ aura alors $\nu(G)$ points singuliers distincts, donc $\nu(G) \leqslant \delta_{\mathbb{R}}(G)$.

On prouve d'abord que l'ensemble H des valeurs de $\underline{t}$ telles que $G_{\underline{t}}$ ait $\nu(G)$ minima au même niveau est semi-analytique (éventuellement vide). Ensuite, l'idée est celle de Smale : il n'y a pas d'obstruction à mettre tous les minima au même niveau parce qu'ils ont tous le même indice. On considère $G_{\underline{t}}$ comme fabriquant une sorte de cobordisme entre $G^{-1}(\alpha_o,\underline{t})$ et $G^{-1}(\alpha_1,\underline{t})$, où α_o est plus petit que l'ordonnée minima d'un point d'intersection de la droite de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mu-1}$ qui est $\mathbb{R} \times \{\underline{t}\}$, avec le discriminant D et α_1 plus grand que l'ordonnée maxima, et la technique de ([Mi_1]), §4) ap-



pliquée dans un voisinage arbitrairement petit de 0 permet de montrer que $0 \in \overline{H}$, ce qui montre la proposition 2'.

§ 4.- L'invariant δ dans le cas complexe : pour un germe d'hypersurface analytique complexe $(X_o,0) \subset (\mathbb{C}^{n+1},0)$ définie par $f = 0$, $f \in \mathbb{C}\{Z_o,\ldots,Z_n\}$, et à singularité isolée, on peut définir de la même façon un invariant $\delta_{\mathbb{C}}(X_o,0)$ comme le nombre maximum de points singuliers pouvant apparaître dans une même fibre du déploiement miniversel (ou de la déformation miniverselle) $G : (X,0) \to (S,0)$ de f (resp. de $(X_o,0)$). $\delta_{\mathbb{C}} \geqslant \delta_{\mathbb{R}}$ et on peut encore montrer 3.2.3 et 3.2.5. $\delta(X_o,0)$ me paraît être un invariant intéressant de la singularité : c'est le nombre maximum de points singuliers que l'on peut empiler au voisinage de f, i.e. mettre dans une même hypersurface de niveau d'une fonction $G_{\underline{t}} : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ voisine de f (= G_o) par opposition au nombre de Milnor $\mu(X_o,0)$ qui est le nombre maximum de points singuliers que l'on peut étaler , i.e. le nombre maximum de valeurs critiques distinctes que peut présenter une fonction $G_{\underline{t}}$ voisine de f (voir [Mi_2]);

$\mu(X_o,0) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{Z_o,\dots,Z_n\}/(\frac{\partial f}{\partial Z_o},\dots,\frac{\partial f}{\partial Z_n})$ est aussi la dimension de la base du déploiement de f).

Dans le cas particulier n = 1, i.e. des germes de courbes planes réduites, on a la :

4.1.- PROPOSITION : $\delta_{\mathbb{C}}(X_o,0) = \dim_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{O}_{X_o,0}}/\mathcal{O}_{X_o,0}$

($\mathcal{O}_{X_o,0}$ est l'algèbre analytique de la courbe, et $\overline{\mathcal{O}_{X_o,0}}$ sa normalisation. Le terme de droite est un invariant bien connu des singularités de courbes usuellement noté δ. La proposition est implicitement dans ([T_3], § 4) une fois que l'on a remarqu la semi-continuité de $\delta_{\mathbb{C}}$ et l'addivité de $\delta_{\mathbb{C}}$. Cette égalité permet, après la formule $2\delta(X_o,0) = \mu(X_o,0) + r(X_o,0) - 1$ ([Mi_2], § 10), où r est le nombre de composantes analytiquement irréductibles de $(X_o,0)$, un lien curieux entre le nombre des points singuliers que l'on peut empiler et étaler. En particulier, si $f(Z_o,Z_1) = 0$ est irréductible, on peut empiler au voisinage de f exactement la moitié du nombre des points singuliers que l'on peut étaler. C'est en fait cette observation qui m'a amené à proposer la preuve ci-dessus de 1.7. On trouve des résultats sur les familles de courbes à "$\delta_{\mathbb{C}}$ constant" dans [T_3].

BIBLIOGRAPHIE

[Fe] E. FERMI : Lectures on thermodynamics. Dover Books.

[Mi_1] J. MILNOR : Lectures on the h-cobordism theorem. Mathematical notes, Princeton U.P. 1965.

[Mi_2] J. MILNOR : Singular points of complex hypersurfaces. Annals of Math. Studies, N° 61, Princeton U.P. (1968).

[Po] A.W. PORTER : Thermodynamics; Methuen's physical monographs, London 1951.

[T_1] B. TEISSIER : In seminaire Douady-Verdier 1971-72, Asterique N°16.

[T_2] B. TEISSIER : Cycles évanescents , sections planes et conditions de Whitney, chap. III, in Singularités à Cargèse, Astérique N° 7-8, 1973.

[T_3] B. TEISSIER : Sur diverses conditions numériques d'équisingularité des familles de courbes (et un principe de spécialisation de la dépendance intégrale), Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques M 2080675, 1975.

[Th_1] R. THOM : Ensembles et morphismes stratifiés, Bulletin Amer. Math. Soc. 75 1969.

[Th_2] R. THOM : Langage et catastrophe : éléments pour une sémantique topologique. Dynamical systems, Academic Press, New-York and London, 1973. Aussi dans : Modeles mathématiques de la morphogénèse, Coll. 10/18 N° 887, UGE, Paris (chap. VI).

[Th_3] R. THOM : Modèles mathématiques de la morphogénèse, Séminaire IHES, 1971 multigraphié.

[W] C.T.C. WALL : Stratified sets, a survey, et Lectures on C^∞ stability, Liverpool singularities symposium, vol. 1, Lectures notes in Math. Springer N° 192.

***