Modèles mathématiques

Signification de la géométrie

Nathalie Charraud

Nous avons déjà eu l'occasion de mentionner la tendance, chez les mathématiciens, à s'interroger sur le sens des mathématiques qu'ils produisent [1]. Ce retour au sens est remarquable après la longue période où étaient privilégiées la présentation formelle des mathématiques, son axiomatisation et son écriture. Plusieurs épistémologues ont accompagné ce mouvement qui va jusqu'à discréditer l'usage de la logique, tant la force de la chose mathématique leur semble s'imposer et se justifier d'elle-même : la recherche d'assises logiques peut aujourd'hui être perçue comme un risque de stérilisation dans la création mathématique. Il est plus rare qu'un mathématicien de métier, et pas des moindres, s'attache à écrire quelque chose sur la question. Dépourvu des outils philosophiques des épistémologues, au risque de faire sourire ses collègues, il faut sans doute un certain courage pour apporter une réflexion personnelle sur, par exemple : qu'est-ce que comprendre, pour un mathématicien ? René Thom a certes ouvert la voie, et c'est dans le cadre d'un hommage à l'inventeur de la théorie des catastrophes et de la sémiophysique que l'article de Bernard Teissier que nous allons lire a été une première fois, publié [2].

Faire une démonstration demande le consentement de l'autre, avons-nous l'habitude de dire entre psychanalystes. Sans un accord et un minimum de bonne volonté de la part de l'élève, aucun enseignement n'est possible ! L'élève peut hésiter, à juste titre, à accorder un début d'engagement aux mathématiques, car l'engrenage de la vérité mathématique peut avoir pour effet de capter le sujet, indépendamment, voire au détriment, de sa vérité subjective propre. Bernard Teissier cherche à saisir le moment crucial de cette captation, où je dis «je comprends !», et est convaincu qu'une joie aussi intense ne peut répondre qu'à un processus physiologique profond et primitif, «celui où mon cortex a réussi à communiquer la situation à mon cerveau primitif de mammifère, dont le «vocabulaire» est essentiellement formé de la mémoire d'expériences significatives superposées, et de prégnances à la Thom». S'il ne s'agit pas du cerveau reptilien, en tout cas c'est le cerveau limbique que nous partageons avec tous les mammifères, distinct du néocortex, qui est en jeu, c'est sa participation qui donne du sens : nous avons vraiment «compris» en mathématiques, selon Teissier, lorsque «le primate qui est en nous» a compris lui aussi. Cette approche de la chose mathématique a l'intérêt de souligner en quoi le langage mathématique n'est pas seulement le plus abstrait qui soit, mais qu'il est en même temps des plus «primitifs», dans la mesure où ce qui touche à la jouissance peut être qualifié de ce terme. Le quantitatif permet de prédire. C'est ce que Lacan signalait dès l'introduction du trait unaire, comparé à ces bâtons que l'on trouve gravés sur les parois des grottes préhistoriques et qui témoignent des premiers modes de comptage. chaque coche désignant un membre du bétail au départ doit correspondre un membre du bétail au retour, cela peut se prédire, à moins qu'on en ait perdu ou que certains aient été dérobés, ce que seules les coches peuvent confirmer. Mais ce qui intéresse Teissier n'est pas du côté du quantitatif. Ainsi rejoint-il Thom dans l'aphorisme «prédire n'est pas expliquer» [3], et dans la gageure de chercher une compréhension d'ordre qualitatif : «si l'on demande à un modèle d'être explicatif et pas forcément calculatoire, la géométrie devra revenir en position de fondement, avant les nombres». Expliquer, ce sera réveiller les expériences corporelles, les gestes qui donnent sens aux mathématiques.

Lacan a beaucoup insisté sur l'imaginaire de la géométrie, imaginaire qui noue ce qu'il y a de réel et de symbolique dans la consistance des mathématiques. C'est tout l'intérêt du texte qui suit que d'exprimer dans un autre discours ce même nouage.

1. *Cf.* par exemple «Mathématiques et calcul», dans le n°36 de *La Cause freudienne.* Ce fut également l'objet du colloque «Mathématiques et inconscient» organisé en juin 1997 par M.E Roy, B. Teissier et N. Charraud.
2. Il s'agit de Bernard Tessier : «des modèles de la morphogenèse à la morphogenèse des modèles», *in Passion des formes, À René Thom. Dynamique qualitative, sémiophysique et intelligibilité,* coordonné par Michèle Porte, ENS Éditions Fontenay/Saint-Cloud, coll. Theoria, 1994, pp. 481-488.
3. On lira avec profit l'entretien avec R. THom, dans *Ornicar ?* n°16, ainsi que, dans le même volume, l'article «Algorithmes de la psychanalyse» de J.-A. MILLER, qui y introduit la distinction entre mathèmes numériques et mathèmes non numériques, que nous retrouvons ici.

Des modèles de la morphogenèse à la morphogenèse des modèles

Bernard Tessier

à René Thom, avec admiration.

«Un passage du *Midrach Kohéleth* dit "pendant que l'homme dort, son âme parle à l'ange et aux chérubins" ; ici donc, pour celui qui comprend et qui pense, ils ont dit clairement que la faculté imaginative est également appelée "ange" et que l'intellect est appelé "chérubin". Cela paraîtra bien beau à l'homme instruit, mais déplaira beaucoup aux ignorants. (Maïmonide, *Le guide des égarés,* deuxième partie.)

Un effet positif des controverses suscitées par la théorie des catastrophes est d'avoir provoqué une réflexion nouvelle sur la notion de modèle mathématique dans les sciences de la nature et les sciences humaines.* C'est une chose importante qu'une discussion sur la notion même de modèle, et pas seulement sur l'interprétation de tel ou tel modèle, ait été relancée. Thom a lui-même souvent souligné la différence qui existe à ses yeux entre les modèles qui servent au calcul numérique et à la prédiction quantitative, dont le paradigme est le modèle newtonien, et les modèles qui ont un pouvoir explicatif sans avoir nécessairement un pouvoir prédictif. Il en a fait une maxime : *prédire n'est pas expliquer.*

Une raison de l'accueil plutôt frais réservé par la communauté scientifique à ce genre d'idée est à mon avis que le sens des vocables «comprendre» et «expliquer» est loin d'être aussi clair que celui de «prédire». Il faut donc essayer de comprendre ce que signifie comprendre.

Je propose ici une image très simple, fondée sur la structure en couches du cerveau, et selon laquelle le moment crucial où je dis «je comprends !» est celui où mon cortex a réussi à communiquer la situation à mon cerveau primitif de mammifère, dont le «vocabulaire» est essentiellement formé de la mémoire d'expériences significatives superposées, et de prégnances à la Thom. Par exemple, la mécanique rationnelle, outre son utilité calculatoire et prédictive, a aussi un caractère explicatif marqué : elle permet de faire percevoir au primate qui est en nous le mouvement d'un système mécanique complexe, disons plusieurs toupies emboîtées les unes dans les autres, en lui expliquant que, dans un espace de configuration convenable, c'est une trajectoire analogue à celle d'un caillou jeté dont il a l'expérience. De même, le déterminisme laplacien en mécanique est explicable à notre primate intérieur comme une «rigidité» de la trajectoire, parce qu'il a l'expérience du mouvement de l'extrémité d'un bâton dont il tient l'origine. En revanche, dès que le modèle, même efficacement prédictif, cesse de faire appel sans ambiguïté à nos expériences primitives, comme dans le cas de la mécanique quantique, notre primate souffre, et cela donne naissance à des milliers de pages – dont certaines sont fort belles – de textes où il se plaint de ne pas comprendre. Mais je voudrais souligner que, dans ce cas, *l'interprétation* est discutée, alors que, dans le cas de la théorie des catastrophes, la notion même de modèle est en cause : Thom revendique en effet le caractère qualitatif de sa vision, et cela lui a valu pas mal d'agressions, auxquelles il a parfois répondu par la belle et hautaine maxime, «toute science est métaphorique».

Thom a certainement sacrifié le quantitatif à sa passion de «voir», c'est-à-dire de créer des objets géométriques qui permettent de penser clairement les phénomènes qu'il étudie.

Revenons au problème de la compréhension : il s'agit donc de fournir des images accessibles à notre cerveau de primate, et inversement, celui-ci suggère sans cesse des analogies, des intuitions. J'aime penser aux constructions physico-mathématiques comme à une sorte de système d'enzymes digestifs, qui découpent l'image dynamique complexe du monde fournie par notre système perceptif en petits fragments assimilables par notre cerveau de primate. Que l'on me pardonne si cette image contrarie la vision noble des mathématiques qu'ont certains philosophes comme «machine à produire la vérité». La nécessité de la rigueur n'est à mon avis qu'une conséquence du fait que la construction mathématique a pour fonction même de dépasser notre intuition du monde, affinée par des centaines de générations de primates ; en outre, la complexité des constructions mathématiques est telle que, sans une procédure de contrôle indépendante de l'intuition, la probabilité d'erreur serait intolérable. Mais il ne faut pas confondre la structure de la longue liste des vérifications qui précèdent le lancement d'une fusée spatiale avec le but du lancement. De plus, un contrôle de la générativité du langage est indispensable sous peine de sombrer dans le délire formel.

La vraie question n'est pas là : elle est dans l'intuition que nous avons de la signification des êtres mathématiques. Thom a aussi une maxime là-dessus : «la limite de la vérité n'est pas l'erreur, c'est l'insignifiance.»

Le vrai problème de la philosophie des mathématiques n'est pas de décider si les objets mathématiques existent *a priori,* ni même s'ils sont câblés dans nos réseaux neuronaux. À mon avis, la création du langage scientifique correspond à une nécessité biologique, elle est la résultante des expériences du monde que contient notre cerveau de primates, et aussi des contraintes imposées par la structure de notre néocortex. Le problème est de faire la physique des forces qui poussent à cette création, la morphogenèse des modèles.

La signification des objets du langage scientifique provient aussi de leur histoire, souvent celle d'une tentative de formalisation d'une intuition simple, affinée ensuite par des générations de chercheurs. Mon exemple favori est la notion d'aire, ou de volume, dont les propriétés dans nos mathématiques sont loin d'être épuisées, malgré plus de 2500 ans de méditation. Les mathématiques que fait l'espèce humaine dépendent de ce qu'elle est, de son expérience collective du monde. Lacan disait que l'inconscient est structuré comme un langage. Il avait raison, puisque l'inconscient donne sa structure au langage ! Nos théorèmes seraient vrais pour une autre espèce, mais elle ne les comprendrait peut-être pas (au sens que j'ai décrit).

Il est à mon sens radicalement absurde de tenter de faire une théorie *a priori* – j'ai envie de dire axiomatique – de la signification du langage scientifique, ou d'ailleurs du langage tout court. Ce projet de ramener la pensée à des opérations sur des signes sous-tend cependant une grande partie des travaux de philosophie des sciences ; il faut ajouter qu'on lui doit quelques échecs géniaux et grandioses, et donc instructifs, comme ceux de Russell et Wittgenstein.

C'est seulement si l'on adopte ce point de vue axiomatique que l'on peut s'étonner de «l'efficacité déraisonnable des mathématiques» ; de mon point de vue cela revient à s'étonner que l'écorce colle au tronc, sauf si c'est pour s'émerveiller de la capacité «au-delà de la raison» que possède notre néocortex de créer des concepts très élaborés par rapport à ceux de l'expérience quotidienne, et collant cependant à une réalité que nous ne percevons plus directement. C'est bien pour cela qu'il faut faire la «physique» des forces qui poussent à l'élaboration de ces concepts. Et après tout, que savons-nous de la structure de ce cortex ? Il semble que l'on y trouve des fibrés (certes discrétisés), sans doute des connexions. quelles sont ses fonctions ? Ici les modèles, même qualitatifs et rudimentaires, nous manquent, sauf en ce qui concerne la perception. Il nous faut être modestes et attendre la suite des travaux des neurophysiologues avant de hasarder des modèles conjecturaux. On peut cependant affirmer qu'ici encore il y a un problème historique : les structures les plus fondamentales que nous portons semblent apparaître le plus tardivement. Il faut ajouter que les calculs sont évidemment un test crucial de la validité des concepts introduits, mais, de même que pour les démonstrations, il ne me semble pas qu'il faille leur attribuer un statut ontologique. Comme l'écrit Maurice Merleau-Ponty, cité par Gilles Châtelet, «Une ontologie qui passe sous silence la nature s'enferme dans l'incorporel et donne, pour cette raison même, une image fantastique de l'homme, de l'esprit, de l'histoire» (Merleau-Ponty, 1990, p. 91, et Châtelet, 1993, p. 156). À sa manière, Maïmonide ne dit pas autre chose dans la citation qui conclut ce texte.

Je dois tempérer cette attaque de la sémantique logiciste en ajoutant qu'il est cependant tout à fait intéressant de construire des modèles mathématiques de la sémantique ; et d'ailleurs j'ai toujours pensé que les mathématiques elles-mêmes, convenablement interprétées, portaient des enseignements fort précieux sur la nature des langages et de la signification. Un exemple admirable est l'article *Topologie et signification* (Thom, 1968).

Un scientifique créatif entretient donc d'excellentes relations avec son inconscient et sa vision atavique du monde. Or il est un domaine primordial dont nous avons une forte intuition et qui est en même temps un langage relativement facile à formaliser : c'est la géométrie. Elle abstrait de manière relativement contrôlée une partie importante du monde. Cependant, on a insisté pendant fort longtemps sur le côté analytique des modèles, puisqu'en science il s'agissait d'abord de calculer. La géométrie s'est introduite en partie comme aide à la compréhension (à l'intuition) d'objets analytiques. Mais si l'on demande à un modèle d'être explicatif, et pas forcément calculatoire, la géométrie devra revenir en position de fondement, avant les nombres. C'est ainsi que je comprends le souhait de Thom de refonder les mathématiques sur le continu (Thom, 1992).

Revenons donc aux modèles géométriques : le propre de la géométrie est de fournir des images globales, parfois susceptibles de calculs, certes, mais surtout accessibles à notre intuition du monde, nous permettant de la projeter dans des constructions complexes (c'est ainsi que j'interprète le «synthétique *a priori*» du jargon philosophique, *cf.*. Heisenberg, 1960). C'est sur la construction de tels modèles qu'a porté une grande partie des efforts de Thom, dont la théorie des catastrophes élémentaires ne représente en fait qu'une petite partie. La théorie de la prégnance de Thom (ES) explique d'une manière qui me satisfait l'attribution du sens à des objets ou à des mots par une bifurcation généralisée de quelques prégnances fondamentales : celle de l'espace, celle de la mère et de soi, et quelques autres. Cela me montre une explication possible d'un phénomène qui m'a toujours fasciné : l'être humain ne peut s'empêcher de faire des analogies. Thom dit que l'analogie porte en soi sa propre ontologie ; je pense plus volontiers que la perception d'analogie se déclenche dès lors que l'appréhension de la nature de deux phénomènes fait appel aux mêmes «états» de notre cerveau de primate. Il y a d'autres opérations inévitables de l'activité cérébrale, comme celle de chercher à dominer deux objets de même nature par un troisième. On peut se demander si un extraterrestre privé de latéralisation ressentirait les mêmes pulsions.

Pour avancer dans la compréhension de la nature des modèles, il me faut ajouter le besoin d'incarner l'activité manipulatoire du primate qui est en nous, c'est-à-dire de créer des objets mathématiques munis d'opérations. En fait, il me semble qu'il y a deux processus d'abstraction d'opérations en parallèle : celui qui concerne les opérations géométriques, comme la juxtaposition, les projections et les sections, et celui qui concerne les opérations logico-algébriques. Dans le second cas la générativité est beaucoup plus forte et libérée du sens. Cette abstraction doit probablement plus que la première à la structure de notre néocortex. Quoi qu'il en soit, notre conception de l'espace euclidien nous paraît merveilleuse parce qu'elle colle assez bien au réel et qu'en même temps on peut y faire des additions (translations) et des rotations et symétries. Je renvoie au beau livre de Châtelet, 1993, qui contient entre autres des illustrations convaincantes de l'idée selon laquelle des concepts et des opérations physiques et mathématiques fondamentaux sont la réincarnation dans cet univers formel de gestes familiers de notre primate. Quoi qu'il en soit, en général les modèles calculatoires sont forcément munis de pas mal d'opérations. Or les géomètres savent bien que les objets munis d'opérations (actions de groupes) sont les plus spéciaux ; par déformation on perd en général la faculté d'avoir des opérations. Pensez aux rotations de la sphère ; si vous déformez la sphère, le groupe des rotations n'y opère plus. Il semble vraisemblable que pour coller mieux à la réalité on doive déformer les modèles très symétriques, abandonnant ainsi de la symétrie et la générativité des opérations, pour permettre une représentation plus fidèle ; pensez à l'univers de la relativité générale. Les lois physiques, elles, s'expriment le plus souvent par des égalités censées représenter l'égalité de résultats de mesures, donc de paquets de nombres, ou bien comme des énoncés d'invariance par rapport à l'action de certains groupes ; les lois sont une sorte de reprojection dans l'espace muni de symétries de ce qui se passe dans l'espace déformé. De ce point de vue le langage physico-mathématique est une approximation, par un espace à structure algébrique riche, de la réalité, une sorte d'espace tangent. Avec cette image, on peut se représenter comment les formalismes issus de deux points différents de la réalité se rencontrent, et aussi comment la générativité des opérations éloigne de plus en plus de la réalité.

Les constructions qualitatives de Thom, au contraire, n'ont pas besoin de la structure euclidienne de l'espace ; bien qu'elles se fassent toujours dans un cadre euclidien – ainsi que leur interprétation –, pour simplifier, en fait elles n'utilisent que la structure de variété différentielle. Les opérations sont des déformations, projections, sections, additions de potentiels dépendant de paquets de variables distincts. C'est aussi pour cela, me semble-t-il, que ces constructions déroutent.

La passion de Thom pour l'intuition géométrique lui a fait inventer une nouvelle espèce de modèles, que je propose d'appeler «métaphore mathématique», ou «schéma», pour rappeler son caractère non calculatoire et géométrique, et aussi en référence à un vocable kantien que J. Petitot a réussi à m'expliquer, malgré le peu de compréhension que mon cerveau de primate manifeste pour Kant (Petitot, 1985). Le livre de sémiophysique de Thom est à mon avis d'abord une exploration de ce que l'on peut faire avec de tels schémas. Dans cette entreprise, Thom se découvre un précurseur de poids en Aristote, à qui il tend la main pardessus Galilée, car ils ont la même vision de ce qui doit être expliqué et de ce que signifie expliquer ! Ces schémas sont d'excellents outils d'appréhension de la morphologie de certains phénomènes naturels, accessibles à notre primate, grâce à leur caractère géométrique. De plus, un peu selon les idées présentées par
E. Fenollosa, 1972, à propos des caractères chinois, ils conjuguent la force poétique de la géométrie et celle du langage naturel. Il ne faut pas s'étonner que certaines erreurs et quelques excès aient entaché les balbutiements de l'utilisation de ces schémas ; le contraire serait inquiétant. Je suis pour ma part certain que les progrès de la physiologie, une meilleure compréhension des limites de la philosophie analytique, et le retour qui en résulte vers la «philosophie naturelle», naguère tant décriée,

vont permettre aux idées de Thom de prendre leur place parmi les outils fondamentaux de compréhension du monde qui nous entoure. Enfin je suggère au lecteur de juxtaposer la position prudente et quelque peu matoise de Bourbaki, 1949, et les propos passionnés de Maïmonide, 1190.

«Dans la conception axiomatique, la mathématique apparaît en somme comme un réservoir de *formes* abstraites – les structures mathématiques ; et il se trouve – sans qu'on sache bien pourquoi – que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ces formes, comme par une sorte de préadaptation. Il n'est pas niable, bien entendu, que la plupart de ces formes avaient à l'origine un contenu intuitif bien déterminé ; mais c'est précisément en les vidant volontairement de ce contenu qu'on a su leur donner toute l'efficacité qu'elles portaient en puissance, et qu'on les a rendues susceptibles de recevoir des interprétations nouvelles, et de remplir pleinement leur rôle élaborateur. /C'est seulement avec ce sens du mot "forme" que l'on peut dire que la méthode axiomatique est un "formalisme" ; l'unité qu'elle confère à la mathématique, ce n'est pas l'armature de la logique formelle, unité de squelette sans vie ; c'est la sève nourricière d'un organisme en plein développement […]. /Si tu ne veux pas t'abuser toi-même, regarde à quoi sont réduits ces penseurs. En effet, ils ont effacé toute loi naturelle et altéré la nature du ciel et de la terre, en prétendant que par ces propositions on peut démontrer que le monde est créé. Mais, loin d'avoir démontré la nouveauté du monde, ils nous ont détruit les démonstrations de l'existence, de l'unité et de l'incorporalité de Dieu ; car les démonstrations par lesquelles tout cela devient clair ne peuvent être prises que dans la nature de l'être, telle qu'elle est établie, visible et perçue par les sens et l'intelligence.»

(Maïmonide,
Le guide des égarés, fin de la 1ère partie.)

* Bernard Teissier est mathématicien, directeur de recherches au CNRS et chercheur au Département de Mathématiques et Informatique de l'ENS-Ulm.

1. «D'une façon générale, il est visible que ce qui est engendré est imparfait et en marche vers son principe ; par suite, le dernier selon la génération doit être le premier selon la nature» ; Aristote, *Physique,* VIII, 216a, 13-14, (cité par Thom, ES, p. 233).

BIBLIOGRAPHIE

ARISTOTE, *Physique,* trad. H. Carteron, Paris, Budé/Les Belles Lettres, 1932.
CHÂTELET G., *Les enjeux du mobile,* Paris, Seuil, 1993.
FENOLLOSA E. et POUND P., *Le caractère écrit chinois, matériau poétique,* Paris, l'Herne, 1972.
HEISENBERG W., *Physique et Philosophie,* Paris, Albin Michel, 1961.
MAÎMONIDE M., *Le guide des égarés* (1190), Paris, Verdier, 1979.
MERLEAU-PONTY M., posthume, *Résumés de cours,* Paris, Gallimard, 1990.
PETHOT-COCORDA J., *Morphogenèse du sens,* Paris, PUF, 1985.
THOM R., «Topologie et signification», in *L'âge de la Science,* I, 4, Paris, Dunod, 1968 ; nouvelle éd. in MMM2, pp. 167-192. L'antériorité ontologique du continu sur le discret, in *Labyrinthe du continu, J.-M.* Salanskis et H. Sinaceur éd., Paris, Springer, 1992, pp. 137-143.