Sur le manuscrit *Sur la monodromie associée à un point critique isolé d'une fonction holomorphe*

Bernard Teissier

1er décembre 2023

Ce texte [1] n'a jamais été publié puisqu'il propose une démonstration d'un énoncé incorrect : la finitude de la monodromie locale d'une fonction holomorphe à point critique isolé. Peu après que ce texte eut été rédigé (nous ne connaissons pas la date exacte) un contre-exemple à la finitude de la monodromie a été trouvé par Norbert A'Campo (voir [1]) [2]. Les idées qu'il contient sont cependant si intéressantes qu'il convient d'en faire une analyse.

La monodromie locale dont il est question est celle introduite par Milnor dans [14], c'est-à-dire l'endomorphisme T de l'homologie $H_n(F_z, \mathbf{C})$ associé à la fibration de base $\mathbf{S}^1_{|z|}$ et de fibres $F_z = f^{-1}(z) \cap \mathbf{B}(0, \epsilon)$ avec $0 < |z| << \epsilon << 1$ provenant d'une fonction holomorphe $f \colon U \to \mathbf{C}$ définie dans un voisinage U de $0 \in \mathbf{C}^{n+1}$ et à point critique isolé en 0 ayant 0 pour valeur critique.

La méthode proposée par Thom pour montrer l'existence d'un entier e tel que $T^e = Id.$ utilise principalement une version « à paramètres » de la décomposition en cellules de sa note de 1949, analysée par F. Laudenbach dans le volume 1, et ses idées sur les particularités de cette décomposition dans le cas de points critiques non dégénérés d'une partie réelle de fonction holomorphe sur une variété analytique complexe. Ce sont ces idées qui ont conduit à la démonstration du théorème de Lefschetz par Andreotti-Frankel (voir [2]) et, dans le domaine de l'homotopie, à celle du théorème de Zariski du type de Lefschetz par Hamm et Lê dans [6]. Ces derniers utilisent d'ailleurs aussi la courbe polaire dont il est question ci-dessous.

Thom considère une forme linéaire « assez générale » $u \colon \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}$ dont l'annulation définit un hyperplan $H \subset \mathbf{C}^{n+1}$ tel que la restriction de la fonction $f(x_0, \ldots, x_n)$ à $H \cap U$ soit encore à point critique isolé, et la sous-fibration de la fibration de Milnor associée aux fibres $F_z \cap H$. Il observe que pour tout $z \in \mathbf{S}^1_{|z|}$ la fonction $\mathrm{Re}(u(x_0, \ldots, x_n))$ est de Morse sur F_z et que ses points critiques sont

1. Nous sommes très reconnaissants à Duco van Straten d'avoir transcrit en LaTeX la version peu lisible dont nous disposons.

2. Ce qui a causé une grande surprise car Lê avait montré dans [7] la finitude pour les fonctions définissant des germes irréductibles de courbes planes. L'exemple d'A'Campo est la fonction $f(x, y) = (x^2 + y^3)(y^2 + x^3)$.

d'indice n. Les nappes de gradient descendantes engendrent alors l'homologie relative $H_n(F_z, F_z \cap H)$ et on a la suite exacte :

$$0 = H_n(F_z \cap H) \to H_n(F_z) \to H_n(F_z, F_z \cap H) \to H_{n-1}(F_z \cap H) \to H_{n-1}(F_z) = 0$$

dont Thom déduit qu'il suffit de montrer la finitude de la monodromie agissant sur l'homologie relative $H_n(F_z, F_z \cap H)$. Pour ce faire, il observe que les points critiques de $\mathrm{Re}(u(x_0, \ldots, x_n))$ sur F_z sont aussi ceux de $u(x_0, \ldots, x_n)$ et que pour une forme linéaire u assez générale, ces points qui constituent le lieu critique de l'application

$$S = (f, u) \colon U \to \mathbf{C}^2,$$

forment un sous-espace de U, d'équations :

$$\frac{f_{x_0}}{c_0} = \ldots = \frac{f_{x_n}}{c_n} \quad \text{si } u = c_0 x_0 + \cdots + c_n x_n.$$

Si la forme linéaire u est assez générale, ce sous-espace est une courbe P_u qui ne rencontre l'hypersurface $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ qu'à l'origine et que Thom nomme *courbe polaire*. Sur chacune des composantes analytiquement irréductibles de P_u, paramétrée par des séries convergentes $x_0(t_i), \ldots, x_n(t_i)$ en une variable t_i on peut écrire le développement des fonctions f, u, ce qui revient à écrire une paramétrisation des branches de la courbe image $S(P_u) \subset \mathbf{C}^2$:

$$u = \sum_k c_k x_k(t_i) = A_i t_i^{m_i} + \cdots$$

$$z = f(x_0(t_i), \ldots, x_n(t_i)) = B_i t_i^{n_i} + \cdots$$

$(A_i, B_i \in \mathbf{C}^*)$ dont Thom rappelle la similitude avec le « Graphe de Cerf ». On retrouve ici une idée qui lui est chère : l'importance de l'étude du graphe de la famille des valeurs critiques dans une famille à paramètres de fonctions de Morse.

L'idée est maintenant d'étudier l'action de la monodromie sur $H_n(F_z, F_z \cap H)$ en suivant le mouvement des cellules de gradient de la fonction $\mathrm{Re}(u(x_0, \ldots, x_n))$ sur F_z, donc celui des points d'intersection de la courbe polaire avec F_z, lorsque z décrit un petit cercle $z = b.\exp(i\theta t)$ avec $b \in \mathbf{C}$. Cela suppose en particulier d'étudier la variation avec t des intersections de la courbe $S(P_u)$ avec les droites $z = b.\exp(i\theta t)$.
Et c'est ici que se trouve l'erreur de la démonstration : Thom croit démontrer que les paires d'exposants m_i, n_i des paramétrisations ci-dessus sont les mêmes pour toutes les composante irréductibles de la courbe polaire. Son argument est que la famille P_u des courbes polaires reste « équisingulière » lorsque la forme linéaire u reste en dehors d'un diviseur A de l'espace des paramètres $\mathbf{P}^n$ de coordonnées homogènes $(c_0 : \ldots : c_n)$. Ceci est vrai et implique même, comme il le souhaite, que la famille des courbes planes $S(P_u)$ est équisingulière, ce qui implique la constance lorsque la forme linéaire u varie hors de A des premiers exposants $\frac{m_i}{n_i}$ du développement de Puiseux

$$u = K_i z^{\frac{m_i}{n_i}} + \cdots$$

de la i-ième branche de $S(P_u)$. Des travaux, à l'époque récents, de Zariski, contiennent les résultats voulus.
Mais Thom en déduit, à tort, que cette équisingularité implique que l'on permute les composantes irréductibles de P_u par des chemins dans $\mathbf{P}^n$ évitant le diviseur A, ce qui force évidemment les paires m_i, n_i à être toutes égales. Ceci est faux et comme on le verra un peu plus bas les quotients $\frac{m_i}{n_i}$ sont différents en général. Or, la fin de la preuve utilise de manière essentielle cette égalité de tous les quotients pour décrire la monodromie des cellules de gradient.

Toujours à la même époque Brieskorn démontra dans [3] par des méthodes analytiques le résultat correct : la monodromie locale T n'est pas d'ordre fini mais quasi-unipotente : il existe un entier e tel que $(T^e - Id.)^{n+1} = 0$. Une synthèse concernant ce théorème se trouve dans [20] [3].

Motivé par l'étude algébrique du nombre de Milnor $\mu = \dim_{\mathbf{C}} H_n(F_z, \mathbf{C})$ et de son comportement par restriction à un hyperplan générique, et ignorant du texte de Thom, l'auteur de ces lignes avait indépendamment à la même époque rencontré la même courbe et introduit les mêmes exposants. Il demanda si ces exposants étaient des invariants d'équisingularité. Cela conduisit au travail de M. Merle dans [16] qui calcula ces invariants dans le cas d'un germe de fonction holomorphe irréductible $f(x_0, x_1)$ de deux variables, montra que le nombre des quotients $\frac{n_i}{m_i}$ différents était égal à celui des exposants caractéristiques de Puiseux de la courbe $f(x_0, x_1) = 0$, et que la donnée de l'ensemble de ces quotients était équivalente à la donnée de ces exposants caractéristiques. Une démonstration de l'invariance de l'ensemble des quotients $\frac{m_i}{n_i}$ par déformation équisingulière de la fonction $f(x_0, \ldots, x_n)$ en toute dimension se trouve dans [18]. Ce résultat est surprenant parce que la classe d'équisingularité des courbes planes $S(P_u)$ varie en général lorsque $f(x_0, \ldots, x_n)$ varie de manière équisingulière. Le travail de Merle inspira de nombreux travaux de description de la géométrie de la courbe polaire et des paires d'exposants dans le cas des courbes, irréductibles ou non, en termes de résolution plongée des singularités, d'un point de vue topologique dans [11] ou d'un point de vue algébrique dans [5].

Il s'est avéré que la courbe polaire et les exposants interviennent dans des problèmes plus variés que ne pourrait le laisser penser leur rôle de mesure de la différence entre une fonction holomorphe et sa restriction à une section hyperplane. On pourra trouver certains des résultats valables en toutes dimensions et reliés à ce qui précède dans [8] et [19] ainsi que [15], [4], [12], [13].

Références

[1] N. A'Campo, Sur la monodromie des singularités isolées d'hypersurfaces complexes, *Invent. Math.*, 20 (1973), p.147-169.

[2] A. Andreotti and T. Frankel, The Lefschetz theorem on hyperplane sections, *Ann. of Math.*, (2) 69 (1959), p.713-717.

3. En analysant l'effet de la monodromie sur les composantes de la courbe polaire Lê Dũng Tráng dans [9] a montré que l'idée de Thom pouvait conduire à une preuve de la quasi-unipotence. Voir aussi [10].

[3] E. Brieskorn, Die Monodromie der isolierten singularitäten von Hyperflächen, *Manuscripta Math.*, **29**, (1970), p.103-162.

[4] A. Gabrielov, Polar curves and intersection matrices of singularities, *Invent. Math.*, 54 (1979), no. 1, 1522.

[5] E.R. García Barroso, Sur les courbes polaires d'une courbe plane réduite, *Proc. London Math. Soc.*, (3) 81 (2000) p.1-28. doi : 10.1112/S0024611500012430.

[6] H. Hamm et Lê Dũng Tráng, Un théorème de Zariski du type de Lefschetz, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, (4) 6 (1973), p.317-355.

[7] Lê Dũng Tráng, Finitude de la monodromie locale des courbes planes, in : *Fonctions de plusieurs variables complexes, Séminaire F. Norguet*, Oct. 1970-Déc. 1973, Springer Lecture Notes in Math. No. 409, 1974.

[8] Lê Dũng Tráng, Topological use of polar curves, in : *Proc. A.M.S. Symp. in Pure Math.*, Vol. 29 (1975), p. 507-512.

[9] Lê Dũng Tráng, *The Geometry of the Monodromy Theorem*, Tata Inst. Fund. Res., Stud. Math. no. 8, Springer-Verlag (1978), 157-173.

[10] Lê Dũng Tráng, *Some Remarks on relative Monodromy*, Proc. Nordic Summer school, Oslo 1976, Sijthoff and Noordhoff 1977, 397-403.

[11] Lê Dũng Tráng, F. Michel, C. Weber, Courbes polaires et topologie des courbes planes, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, (4), 24 (1991), no. 2, p.141-169.

[12] F. Loeser, Exposant d'Arnol'd et sections planes, *C.R. Acad. Sc. Paris*, 298, Sér. I, 485-488 (1984).

[13] F. Loeser, Une estimation asymptotique du nombre de solutions approchées d'une équation p-adique, *Invent. math.*, 85, 31-38 (1986).

[14] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Annals of Math. Studies 61, Princeton Univ. Press 1968.

[15] D. Massey, Enriched relative polar curves and discriminants in : *Singularities I, Contemp. Math.*, 474, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, p.107-144.

[16] M. Merle, Invariants polaires des courbes planes, *Inv. Math.*, 41 (1977), p.103-111.

[17] B. Teissier, Cycles évanescents, sections planes, et conditions de Whitney, in : *Singularités à Cargèse, Astérisque* 7-8, p. 285-362, 1973.

[18] B. Teissier, Variétés polaires, I : invariants polaires des singularités d'hypersurfaces, *Inventiones Math.*, 40, 1977, p.267-292.

[19] B. Teissier, Introduction to equisingularity problems, in : *Proc. A.M.S. Symp. in Pure Math.*, Vol. 29 (1975), p.593-632.

[20] D. van Straten, From Briançon-Skoda to Scherk-Varchenko, in : *Commutative Algebra and Noncommutative Algebraic Geometry I*, Eds : D. Eisenbud, S. B. Iyengar, A. K. Singh, J. T. Stafford, M. Van den Bergh, MSRI Publications Volume 67, (2015) p.347-370.