



## Varietes Polaires Locales et Classes de Chern des Varietes Singulieres

Le Dung Trang; Bernard Teissier

*The Annals of Mathematics*, 2nd Ser., Vol. 114, No. 3. (Nov., 1981), pp. 457-491.

Stable URL:

<http://links.jstor.org/sici?sici=0003-486X%28198111%292%3A114%3A3%3C457%3AVPLECD%3E2.0.CO%3B2-5>

*The Annals of Mathematics* is currently published by Annals of Mathematics.

---

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of JSTOR's Terms and Conditions of Use, available at <http://www.jstor.org/about/terms.html>. JSTOR's Terms and Conditions of Use provides, in part, that unless you have obtained prior permission, you may not download an entire issue of a journal or multiple copies of articles, and you may use content in the JSTOR archive only for your personal, non-commercial use.

Please contact the publisher regarding any further use of this work. Publisher contact information may be obtained at <http://www.jstor.org/journals/annals.html>.

Each copy of any part of a JSTOR transmission must contain the same copyright notice that appears on the screen or printed page of such transmission.

---

The JSTOR Archive is a trusted digital repository providing for long-term preservation and access to leading academic journals and scholarly literature from around the world. The Archive is supported by libraries, scholarly societies, publishers, and foundations. It is an initiative of JSTOR, a not-for-profit organization with a mission to help the scholarly community take advantage of advances in technology. For more information regarding JSTOR, please contact [support@jstor.org](mailto:support@jstor.org).

# Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières

PAR LÊ DŨNG TRÁNG ET BERNARD TEISSIER

A Dimitri Fotiadi

Dans ce travail, nous commençons l'étude systématique des variétés polaires locales attachées à un germe d'espace analytique complexe (que l'on peut décrire informellement comme lieux de points critiques non singuliers de projections génériques de cet espace sur des espaces affines). Nous établissons un lien précis entre ces variétés polaires locales et la théorie des classes de Chern sur un espace singulier (due à R. MacPherson [24] et M. H. Schwartz [30]) en donnant pour l'obstruction d'Euler locale de R. MacPherson une expression algébrique comme somme alternée de multiplicités de variétés polaires. Nous tirons de ce résultat des méthodes pour le calcul effectif des classes de Chern singulières, une définition des classes de Chern locales et aussi des formules effectives pour la caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi(V)$  d'une variété projective  $V$ , généralisant les formules de Plücker.

Divers avatars du concept de variété polaire ont été utilisés depuis longtemps (Severi, Todd, Pontryaguine, ...) pour définir des invariants ("classes caractéristiques") des variétés algébriques projectives ou des variétés différentielles compactes. La relation entre variétés polaires et classes caractéristiques des variétés a été estompée par l'extension de la théorie des classes caractéristiques aux fibrés quelconques et le succès du point de vue axiomatique et cohomologique. Par ailleurs les variétés polaires elles-mêmes n'ont pas été utilisées de façon vraiment géométrique puisque les géomètres ne considéraient, même après l'extension au cas singulier en géométrie projective [28], que la classe d'équivalence rationnelle ou la classe de cohomologie des variétés polaires.

Depuis plusieurs années les auteurs du présent travail ont été amenés, dans l'étude locale des singularités des espaces analytiques, à utiliser des caractères géométriques locaux de variétés polaires définies localement. Ces variétés interviennent aussi naturellement dans l'étude des singularités du point de vue

topologique (par la théorie de Morse ou la théorie de Lefschetz (cf. [20])) que dans l'étude du point de vue algébrique (recherche d'invariants, caractères pluckériens, étude des limites d'espaces tangents (cf. [32])). Cette ubiquité fait que les variétés polaires locales sont un outil très utile et un sujet d'étude intéressant. Notre étude locale a été en partie motivée, et aussi facilitée, par la naissance de la théorie de l'équisingularité en géométrie algébrique ou analytique complexe, puisque nous avons été amenés à esquisser une théorie de l'équivalence "équisingulière" qui préserve les traits géométriques des variétés polaires. Ce point de vue a été fortement influencé par les travaux de Zariski sur l'équisingularité, depuis son article de 1937 [34] où il utilise en fait implicitement une telle équivalence "équisingulière".

Ce travail a été en partie provoqué par les exposés de J. P. Brasselet (et son travail sur les classes de M. H. Schwartz) [30], et de G. González-Sprinberg [9] sur la théorie de MacPherson au séminaire de Géométrie Analytique de l'École Normale Supérieure ainsi que par la note aux C. R. Acad. Sc. de A. Dubson [7]. En particulier nous avons été inspirés par le résultat de G. González-Springer et J. L. Verdier cité plus bas et les relations données par R. Piene dans [28].

*Avertissement:* Le terme "variété polaire" (spécialement "courbe polaire") a été utilisé par les auteurs dans des travaux antérieurs en un sens un peu différent, en fait moins restrictif que celui utilisé ici. Le lien entre les deux usages sera fait dans un prochain travail.

## 1. Notations

Dans tout ce qui suit  $(X, 0)$  est un germe d'espace analytique complexe réduit équidimensionnel de dimension complexe  $d$ . On supposera que  $(X, 0)$  est plongé dans  $(\mathbb{C}^{N+1}, 0)$ . On désignera encore par  $X$  un représentant assez petit de  $X$  et  $\mathcal{O}_X$  sera le faisceau structural de  $X$ .

### (1.1) *Modification de Nash*

(1.1.1) Soit  $\Omega_X^1$  le faisceau des différentielles sur  $X$ . Comme  $\Omega_X^1$  est un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent, on peut définir un espace analytique en grassmanniennes au-dessus de  $X$ ,  $G_X = \text{Grass}_d \Omega_X^1 \xrightarrow{g} X$  et un quotient  $L$  localement libre de rang  $d$  de  $g^* \Omega_X^1$  qui satisfait la propriété universelle suivante:

Pour tout morphisme  $h: Z \rightarrow X$  d'espaces analytiques, l'application  $\tilde{h} \rightarrow \tilde{h}^* L$  de l'ensemble des morphismes  $\tilde{h}: Z \rightarrow G_X$  tels que  $g \circ \tilde{h} = h$  dans l'ensemble des quotients localement libres de rang  $d$  de  $h^* \Omega_X^1$  est une bijection. En particulier  $g$  est un morphisme propre et pour tout  $x \in X$ ,  $(G_X)_x = g^{-1}(x)$  est la grassman-

nienne des sous-espaces vectoriels de dimension  $d$  de l'espace tangent de Zariski de  $X$  en  $x$  ([11]).

Soit  $X^0$  l'ouvert analytique dense des points non singuliers de  $X$ . Puisque  $\Omega_{\tilde{X}|X^0}^1$  est localement libre de rang  $d$ , il existe une section  $\sigma^0$  de  $g$  au-dessus de  $X^0$ :

$$\sigma^0: X^0 \rightarrow G_X .$$

Soit  $\tilde{X}$  l'adhérence dans  $G_X$  de l'image de  $\sigma^0$ . D'après un théorème de Remmert (cf. [40]),  $\tilde{X}$  est un sous-espace analytique fermé réduit de  $G_X$ . Le morphisme  $g$  induit donc un morphisme analytique propre  $\nu: \tilde{X} \rightarrow X$ . La restriction de  $\nu$  à  $\sigma^0(X^0)$  étant un isomorphisme, le morphisme  $\nu$  est une modification qu'on appelle la *modification de Nash de  $X$* . Par construction  $\nu^*\Omega_X^1$  a un quotient localement libre de rang  $d$  qui est le dual du faisceau des sections d'un fibré vectoriel de rang  $d$  sur  $\tilde{X}$ , appelé *fibré de Nash de  $X$* .

(1.1.2) Si  $X$  est un représentant assez petit de  $(X, 0)$ , il résulte du théorème 22 de [42] et du théorème de Bertini que l'on peut plonger  $X$  dans une intersection complète réduite  $X_1$  de même dimension. Dans ce cas la modification de Nash de  $X$  est l'éclatement de la restriction à  $X$  de l'idéal jacobien de  $X_1$ , i.e. la transformée stricte de  $X$  par la modification de Nash de  $X_1$  (cf. [27]).

(1.1.3) Supposons  $X \subset \mathbf{C}^{N+1}$ . On peut aussi écrire comme suit la modification de Nash de  $X$ . Soit  $G = G(N, d - 1)$  la grassmannienne des  $d$ -plans de  $\mathbf{C}^{N+1}$  qui passent par 0. Soit  $\gamma^0: X^0 \rightarrow G$  le morphisme analytique qui à  $x \in X^0$  fait correspondre la direction de l'espace tangent  $T_x X$  en  $x$  à  $X$ . La restriction de la projection  $\text{pr}_1: X \times G \rightarrow X$  à la fermeture  $\tilde{X}$  dans  $X \times G$  du graphe de  $\gamma^0$  est isomorphe au-dessus de  $X$  à la modification de Nash de  $X$ .

(1.2) *Généralités*

On suppose ici  $X$  fermé dans un ouvert de  $\mathbf{C}^{N+1}$ .

(1.2.1) On notera  $e: X' \rightarrow X$  l'éclatement de  $\{0\}$ , i.e. de l'idéal maximal  $\mathfrak{N}$  de  $\mathcal{O}_{X,0}$ , dans  $X$ .

Rappelons que  $X'$  est le sous-espace analytique fermé de  $X \times \mathbf{P}^N$  adhérence du graphe de l'application de  $X - \{0\}$  dans  $\mathbf{P}^N$  qui à tout  $x \in X - \{0\}$  fait correspondre la droite sécante  $0x$ . De plus  $e$  est la restriction à  $X'$  de la projection de  $X \times \mathbf{P}^N$  sur  $X$ .

On notera  $\tilde{e}: \mathfrak{X} \rightarrow \tilde{X}$  l'éclatement dans  $\tilde{X}$  du sous-espace analytique fermé  $\nu^{-1}(0)$  défini par  $\mathfrak{N} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ .

Rappelons que  $\mathfrak{X}$  est le sous-espace analytique fermé de  $X \times \mathbf{P}^N \times G$  adhérence du graphe de l'application de la partie non singulière  $X^0$  de  $X$  moins  $\{0\}$  dans  $\mathbf{P}^N \times G$  qui a tout  $x \in X^0 - \{0\}$  fait correspondre le couple formé par

la droite sécante  $0x$  et la direction de l'espace tangent à  $X^0$  en  $x$ . De plus  $\tilde{e}$  est induit par la projection de  $X \times \mathbf{P}^N \times G$  sur  $X \times G$ .

Il résulte de la propriété universelle de l'éclatement que l'on a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc}
 X \times \mathbf{P}^N \times G & & & & X \times G & \xrightarrow{\text{pr}_2} \\
 \cup & & & & \cup & \\
 \mathfrak{X} & \xrightarrow{\tilde{e}} & \tilde{X} & \xrightarrow{\gamma} & G & \\
 \nu' \downarrow & & \downarrow \nu & & & \\
 X' & \xrightarrow{e} & X & & & \\
 \cup & & & & & \\
 X \times \mathbf{P}^N & & & & & \\
 \searrow & & & & & \\
 & & \mathbf{P}^N & & & \\
 & & \downarrow \lambda & & & 
 \end{array}$$

On remarque que  $\nu \circ \tilde{e} = e \circ \nu'$  est la restriction à  $\mathfrak{X}$  de la projection  $X \times \mathbf{P}^N \times G$  sur  $X$ .

On note  $Y' = e^{-1}(0)$ ,  $\tilde{Y} = \nu^{-1}(0)$  (qui n'est pas nécessairement un diviseur dans  $\tilde{X}$ ),  $\mathfrak{Y} = \tilde{e}^{-1}(\tilde{Y}) = \nu'^{-1}(Y')$  (qui est un diviseur dans  $\mathfrak{X}$ ).

(1.2.2) On appelle *morphisme de Gauss*  $\gamma$  la restriction à  $\tilde{X}$  de la projection  $\text{pr}_2: X \times G \rightarrow G$ . De même on note  $\lambda$  la restriction à  $X'$  de la projection de  $X \times \mathbf{P}^N$  sur  $\mathbf{P}^N$ .

(1.2.3) Soient  $\alpha: \Xi \rightarrow \mathbf{P}^N$  et  $\tau: \Theta \rightarrow G$  les fibrés tautologiques. On note:

$$\xi' = \lambda^* \alpha, a' = \lambda^* \alpha: \xi' \rightarrow X',$$

$$\tilde{T} = \gamma^* \Theta, \tilde{t} = \gamma^* \tau: \tilde{T} \rightarrow \tilde{X},$$

$$\xi = (\nu')^* \xi', a = (\nu')^* a': \xi \rightarrow \mathfrak{X}$$

$$T = (\tilde{e})^* \tilde{T}, t = (\tilde{e})^* \tilde{t}: T \rightarrow \mathfrak{X}$$

et on remarque que  $\tilde{t}: \tilde{T} \rightarrow \tilde{X}$  est le fibré de Nash de  $X$ .

(1.3) *Deux lemmes-clefs*

Soit  $\mathcal{H}$  la sous-variété de  $\mathbf{P}^N \times G$  formée des couples  $(l; T)$  tels que  $l \subset T$ . On peut traduire un lemme fondamental de H. Whitney (cf. [41] (7.6)) de la façon suivante:

(1.3.1) LEMME: *L'espace analytique réduit  $|\tilde{e}^{-1}(\nu^{-1}(0))|$  sous-jacent à  $\tilde{e}^{-1}(\nu^{-1}(0)) = \nu'^{-1}(e^{-1}(0))$  est contenu dans  $\{0\} \times \mathcal{H}$ .*

On peut énoncer ce lemme en disant que la restriction de  $\xi$  à  $|\mathfrak{Y}|$  est un sous-fibré vectoriel de la restriction de  $T$  à  $|\mathfrak{Y}|$ .

D'autre part un résultat que H. Hironaka nous a montré (cf. [19], 1.2) donne:

(1.3.2) LEMME: *Il existe un ouvert de Zariski dense  $V$  dans  $Y'$  tel que pour tout  $x' \in V$ ,  $\nu'^{-1}(x')$  ne contient qu'un point.*

2. Variétés de Schubert et variétés polaires

(2.1) Soit  $d$  un entier,  $0 \leq d \leq N + 1$ . Considérons dans l'espace vectoriel  $\mathbf{C}^{N+1}$  un drapeau  $\mathfrak{D}$  de sous-espaces vectoriels:

$$(\mathfrak{D}) \quad D_d \subset D_{d-1} \subset \dots \subset D_2 \subset D_1 \subset \mathbf{C}^{N+1} = D_0$$

où  $D_i$  est de codimension complexe  $i$  dans  $\mathbf{C}^{N+1}$ . L'ensemble

$$c_k(\mathfrak{D}) := \{E \in G, \dim E \cap D_{d-k+1} \geq k\}$$

est une sous-variété algébrique irréductible de codimension  $k$  de la Grassmannienne appelée *variété de Schubert spéciale de codimension  $k$  associée au drapeau  $\mathfrak{D}$*  (en fait associée à  $D_{d-k+1}$  et par conséquent notée aussi  $c_k(D_{d-k+1})$ ).

Et on remarque que, si  $k' \geq k$ , on a:  $c_{k'}(\mathfrak{D}) \subset c_k(\mathfrak{D})$ .

(2.2) On reprend les notations du paragraphe 1. On a les morphismes analytiques suivants:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\quad} & G \\ \nu \downarrow & \gamma & \\ X & & \end{array}$$

(2.2.1) D'après un théorème de S. Kleiman [16] (2. Theorem). Si  $\mathfrak{D}$  est un drapeau assez général,  $\gamma^{-1}(c_k(\mathfrak{D}))$  est vide ou de codimension  $k$  dans  $\tilde{X}$  ainsi que  $\gamma^{-1}(c_k(\mathfrak{D})) \cap \tilde{Y}$  dans  $\tilde{Y}$ .

De plus, l'intersection  $\gamma^{-1}(c_k(\mathfrak{D})) \cap \nu^{-1}(X^0) = (\mathbf{C}^{N+1} \times c_k(\mathfrak{D})) \cap \nu^{-1}(X^0)$  est non singulière et dense dans  $\gamma^{-1}(c_k(\mathfrak{D}))_{\text{red}}$ , comme il résulte du lemme suivant:

(2.2.1.1) LEMME: *Soit  $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$  une stratification d'un espace analytique complexe  $X$  qui satisfait la condition de Whitney. Soient  $x \in X$  et  $X_{\alpha(x)}$  la strate contenant  $x$ . Pour tout plongement local en  $x$  de  $X$  dans un espace euclidien  $\mathbf{C}^D$  et pour tout sous-espace non singulier  $Z$  défini dans un voisinage de  $x$  dans  $\mathbf{C}^D$  et transversal à  $X_{\alpha(x)}$  en  $x$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $\mathbf{C}^D$ , tel que, pour tout  $y \in U$ ,  $Z$  soit transversal en  $y$  à toute strate  $X_\beta$  telle que  $\bar{X}_\beta \supset X_{\alpha(x)}$ .*

Ce lemme résulte immédiatement de la condition a) de Whitney et de l'ouverture de la transversalité.

Appliquons maintenant ce lemme à la situation qui nous intéresse:

(2.2.1.2) Soit  $\tilde{X} = \bigcup_{\alpha \in A} \tilde{X}_\alpha$  une stratification du modifié de Nash de  $X$  qui vérifie la propriété de Whitney et telle que  $\nu^{-1}(X^0) = \tilde{X}^0$  soit une strate et que  $\nu^{-1}(0)$  soit une union de strates. L'existence d'une telle stratification est assurée par [40].

Soit  $c_k(\mathfrak{D}) = \bigcup_{\beta \in B} \sigma_{k,\beta}$  une stratification de la variété de Schubert  $c_k(\mathfrak{D})$  qui vérifie la condition de Whitney et telle que la partie non singulière  $c_k(\mathfrak{D})^0$  soit une strate. D'après le théorème de Kleiman, pour un drapeau  $\mathfrak{D}$  assez général, chaque  $\sigma_{k,\beta}$  est transversal dans  $\{0\} \times G$  à chacune des strates  $\tilde{X}_\alpha$  qui sont contenues dans  $\nu^{-1}(0)$ .

Le lemme (2.2.1.1) montre que chaque  $\mathbf{C}^{N+1} \times \sigma_{k,\beta}$  est transversal dans  $\mathbf{C}^{N+1} \times G$  à chacune des strates de  $\tilde{X}$  dont l'adhérence rencontre  $\nu^{-1}(0)$ . Ceci signifie que, quitte à choisir un représentant  $X$  de  $(X, 0)$  plus petit, les  $\mathbf{C}^{N+1} \times \sigma_{k,\beta}$  forment une stratification de  $\mathbf{C}^{N+1} \times c_k(\mathfrak{D})$  qui satisfait la propriété de Whitney et qui est transverse à la stratification  $(\tilde{X}_\alpha)_{\alpha \in A}$  de  $\tilde{X}$ . Les  $(\mathbf{C}^{N+1} \times \sigma_{k,\beta}) \cap \tilde{X}_\alpha$  non vides ( $\alpha \in A, \beta \in B$ ) forment donc une stratification de Whitney de l'ensemble analytique  $\tilde{X} \cap (\mathbf{C}^{N+1} \times c_k(\mathfrak{D})) = \gamma^{-1}(c_k(\mathfrak{D}))$  (cf. [6]).

Par raison de transversalité, la strate de dimension maximum de  $\tilde{X} \cap (\mathbf{C}^{N+1} \times c_k(\mathfrak{D}))$  est  $\tilde{X}^0 \cap (\mathbf{C}^{N+1} \times c_k(\mathfrak{D})^0)$  et cette intersection est non vide si  $k < d$  et transversale. Toutes les autres strates sont de dimension plus petite, car  $\tilde{X}^0$  est dense dans  $\tilde{X}$  et  $c_k(\mathfrak{D})^0$  dense dans  $c_k(\mathfrak{D})$ .

(2.2.2) On peut donc définir pour chaque drapeau  $\mathfrak{D}$  assez général le sous-espace analytique réduit  $P_k(\mathfrak{D})$  sous-jacent à l'image directe par  $\nu$  de  $\gamma^{-1}(c_k(\mathfrak{D}))$ . Soit par ailleurs  $(Y_1, 0), \dots, (Y_l, 0)$  un ensemble fini de germes de sous-espaces analytiques réduits fermés de  $(X, 0)$ . D'après [21] il existe un ouvert de Zariski dense  $\mathfrak{U}$  de l'espace des drapeaux considérés tel que, pour tout  $k$ ,  $0 \leq k \leq d$ , la famille des  $P_k(\mathfrak{D})$ ,  $\mathfrak{D} \in \mathfrak{U}$  et les familles  $(P_k(\mathfrak{D}) \cap Y_i)_{\text{red}}$ ,  $\mathfrak{D} \in \mathfrak{U}$ , soient équisingulières du point de vue de la résolution simultanée dans  $X$ . On peut donc en particulier parler de la classe d'équisingularité générique de  $((P_k(\mathfrak{D}), 0)$  ou des  $(P_k(\mathfrak{D}) \cap Y_i)_{\text{red}}, 0)$ , et de la multiplicité générique (cf. [33]).

Pour tout  $\mathfrak{D}$  dans un tel ouvert  $\mathfrak{U}$ , on appellera  $P_k(\mathfrak{D})$  la *variété polaire de codimension  $k$  de  $X$* . En fait on peut vérifier que la classe d'équisingularité de  $P_k(\mathfrak{D}), 0$  est indépendante du plongement de  $(X, 0)$  dans  $(\mathbf{C}^{N+1}, 0)$ .

Comme dans (2.1) on remarque que, si  $k' \geq k$ , on a:  $P_{k'}(\mathfrak{D}) \subset P_k(\mathfrak{D})$

(2.2.3) *Remarque:* Si  $\mathfrak{D}$  est un drapeau assez général, notant  $\pi: (X, 0) \rightarrow (\mathbf{C}^{d-k+1}, 0)$  la restriction à  $X$  d'une projection linéaire de noyau  $D_{d-k+1}$ , le

sous-espace analytique (réduit)  $P_k(\mathfrak{D})$  est la fermeture dans  $X$  du lieu critique de la restriction de  $\pi$  à la partie non singulière  $X^0$  de  $X$ .

(2.3) On remarque que pour tout  $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$ ,  $(P_d(\mathfrak{D}), 0)$  est vide, car la dimension de  $\nu^{-1}(0)$  est au plus  $d - 1$ . D'autre part  $P_0(\mathfrak{D}) = X$ .

Plus généralement, il résulte du théorème de Kleiman que si  $\dim \nu^{-1}(0) < k$ ,  $P_k(\mathfrak{D}) = \emptyset$  pour tout  $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$ . Nous verrons plus loin la réciproque.

Pour une variété algébrique projective  $V$  de dimension  $d - 1$  dans  $\mathbf{P}^N$ , en prenant pour  $X$  le cône dans  $\mathbf{C}^{N+1}$  sur cette variété on trouve que les variétés polaires  $P_k(\mathfrak{D})$  de  $X$  pour  $\mathfrak{D}$  assez général, sont des cônes et définissent des sous-variétés algébriques  $M_k(\mathfrak{D})$  de  $V$ . Pour  $\mathfrak{D}$  assez général, la classe d'équivalence rationnelle de  $M_k(\mathfrak{D})$  dans  $V$  est appelée  $k$ -ième classe polaire de  $V$  (cf. [28]). La théorie des variétés polaires locales contient donc la théorie des classes polaires des variétés projectives.

### 3. Classes de Chern-Mather et de Chern-MacPherson-Schwartz

(3.1) Rappelons d'après l'article de R. MacPherson ([19]) que pour une variété algébrique projective équidimensionnelle  $V$  de dimension  $v$ , on définit les classes d'homologie de Chern-Mather de la variété  $V$  de la façon suivante:

Soit  $\nu: \tilde{V} \rightarrow V$  la modification de Nash de  $V$ . Soit  $[\tilde{V}]$  la classe fondamentale en homologie de  $\tilde{V}$ . Sur  $\tilde{V}$  nous avons le fibré de Nash  $\tilde{T}$  (cf. (1.1) ci-dessus) et on considère sa classe de Chern totale  $c(\tilde{T})$  en cohomologie. La classe d'homologie  $c(\tilde{T}) \cap [\tilde{V}]$  a une image directe  $c_M(V)$  par  $\nu$  dans l'homologie  $H_*(V)$  de  $V$  que l'on appelle la *classe de Chern-Mather de  $V$* :

$$c_M(V) = \nu_* (c(\tilde{T}) \cap [\tilde{V}]) \in H_*(V).$$

Cette définition s'étend aux cycles algébriques de  $V$  par linéarité.

(3.2) Dans [19], R. MacPherson définit un isomorphisme  $\Phi$  du groupe abélien des cycles algébriques de  $V$  dans celui des fonctions constructibles sur  $V$  qui à chaque cycle  $\sum n_i V_i$  associe la fonction constructible  $\sum n_i \text{Eu}(V_i)$  qui au point  $p \in V$  prend la valeur  $\sum n_i \text{Eu}_p(V_i)$ , où  $\text{Eu}_p(V_i)$  est un entier appelé *l'obstruction d'Euler locale de  $V_i$  en  $p$*  et qui ne dépend que du germe  $(V_i, p)$ . Nous reportons le lecteur à [24] pour la définition originale de  $\text{Eu}_p(V_i)$ .

Dans [24], R. MacPherson démontre que l'élément  $c_M(\Phi^{-1}(\mathbf{1}_V)) \in H_*(V)$ , où  $\mathbf{1}_V$  désigne la fonction constructible constante égale à 1 sur  $V$ , définit une classe en homologie qui étend raisonnablement aux variétés algébriques singulières la classe d'homologie duale de la classe de Chern totale du fibré tangent à une variété algébrique non singulière.



(3.3) Nous utilisons ici comme définition de l'obstruction d'Euler la relation démontrée par G. González-Sprinberg et J. L. Verdier dans [9]; en reprenant les notations de (1.2), on a:

$$\text{Eu}_0(X) = \text{deg}(c_{d-1}(T - \xi) \cap [\mathfrak{Y}])$$

où par définition (cf. [10]) si  $E$  et  $F$  sont deux fibrés vectoriels sur un espace topologique  $Z$ ,  $c_k(E - F)$  est l'élément de degré  $k$  dans la cohomologie de  $Z$  qui apparaît dans le développement formel du quotient  $c(E)/c(F)$ . On a donc:

$$(3.3.1) \quad \text{Eu}_0(X) = \text{deg} \left[ \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i (c_{d-1-i}(T) \cdot c_1(\xi)^i) \cap [\mathfrak{Y}] \right]$$

car  $c_i(\xi) = 0$  pour  $i \geq 2$ .

Dans [24], R. MacPherson a défini  $\text{Eu}_0(X)$  comme l'obstruction à prolonger en un champ de vecteurs non nul sur  $\tilde{X}$  un certain champ de vecteurs sur  $X^0$  qui en  $x \in X^0$  est la projection sur  $T_x X^0$  du vecteur radial  $\overrightarrow{0x}$ . Il est intéressant de comparer la relation de G. González-Sprinberg-J. L. Verdier avec celle de R. Bott et S. S. Chern dans [3], en particulier la Prop. 6.2. (Cf. aussi le travail [30] de M. H. Schwartz, et [4].)

#### 4. Sections et projections

Dans ce paragraphe nous étudions le comportement des variétés polaires locales par sections planes et projections linéaires génériques.

(4.1) Nous reprenons les notations du paragraphe 1. Soit  $D_i \subset \mathbb{C}^{N+1}$  un sous-espace vectoriel de codimension  $i$  tel que  $(X \cap D_i)_{\text{red}} = X_i$  soit de dimension (pure)  $d - i$ .

(4.1.1) PROPOSITION: *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) *Pour tout représentant  $X$  assez petit on a  $\gamma^{-1}(c_{d-i+1}(D_i)) \cap \hat{X}_i = \emptyset$ , où  $\hat{X}_i \subset \tilde{X}$  désigne le transformé strict de  $X_i$  par la modification de Nash;*

ii) *Pour tout choix d'un système de coordonnées locales  $z_0, \dots, z_N$  sur  $(\mathbb{C}^{N+1}, 0)$  tel que  $D_i$  soit défini par  $z_0 = \dots = z_{i-1} = 0$  on a:*

*L'idéal  $J_X \mathcal{O}_{X_i,0}$  de  $\mathcal{O}_{X_i,0}$  engendré par les mineurs de la forme  $\partial(f_1, \dots, f_{i_{N+1-d}}) / \partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_{N+1-d}})$  où les  $f_j$  appartiennent à l'idéal  $I$  de  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{N+1},0}$  définissant  $(X, 0)$  et  $\{i_1, \dots, i_{N+1-d}\} \subset \{0, \dots, N\}$ , est entier dans l'anneau  $\mathcal{O}_{X_i,0}$  sur l'idéal engendré par les mineurs de la même forme mais où  $\{i_1, \dots, i_{N+1-d}\} \subset \{i, \dots, N\}$ .*

iii) *Le morphisme de  $X_i^0$  dans  $X_i \times G_i$ , où  $G_i$  désigne la grassmannienne des  $(d - i)$ -plans de  $D_i$ , défini par  $x \rightarrow (x, T_x X \cap T_x D_i)$ , s'étend en un morphisme de  $\hat{X}_i$  dans  $X_i \times G_i$ , induit par le morphisme naturel de  $G - c_{d-i+1}(D_i)$  dans  $G_i$  qui à  $T$  associe  $T \cap D_i$ , dont l'image est le modifié de Nash  $\tilde{X}_i$  de  $X_i$ .*

iv) *Le morphisme précédent non seulement existe mais est un morphisme fini de  $\hat{X}_i$  sur  $\tilde{X}_i$ .*

*Démonstration:*

i)  $\Rightarrow$  ii): Soit  $J_p$  l'idéal de  $\mathcal{O}_{X_i,0}$  engendré par les mineurs jacobiens au dénominateur desquels apparaissent au plus  $p$  variables d'indice non contenu dans  $\{i, \dots, N\}$ .

L'assertion ii) signifie que  $J_{N+1-d}$  est entier sur  $J_0$ . Il suffit de montrer que, pour tout  $p, 0 \leq p \leq N - d, J_{p+1}$  est entier sur  $J_p$ . Pour cela on utilise le critère valuatif de dépendance intégrale (cf. [13], Lecture 7, [23]). Considérons un chemin analytique  $h: (\mathbf{D}, 0) \rightarrow (X_i, 0)$ . Soit  $\Delta$  un mineur de  $J_p$  tel que  $\Delta \circ h$  soit de valuation minimale dans  $h^*J_p$ . Supposons d'abord cette valuation finie: on a alors  $h(\mathbf{D} - \{0\}) \subset X^0$  et en un point  $x \in h(\mathbf{D} - \{0\})$  l'espace tangent à  $X$  admet pour équations:

$$(*) \quad \Delta dz_{i_h} = - \sum_{l \notin \{i_1, \dots, i_{N+1-d}\}} \frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_{N+1-d}})}{\partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_{h-1}}, z_l, z_{i_{h+1}}, \dots, z_{i_{N+1-d}})} dz_l$$

où tous les mineurs dans le membre de droite appartiennent à  $J_{p+1}$ . Si la valuation d'un élément de  $J_{p+1}$  composé avec  $h$  était inférieure à celle de  $\Delta \circ h$ , la limite en 0 des espaces tangents à  $X^0$  le long de  $h(\mathbf{D})$  serait contenue dans un hyperplan dont l'équation est de la forme  $\sum_{l \notin \{i_1, \dots, i_N\}} A_l dz_l = 0$ , donc non transverse à  $D_i$ , en contradiction avec i). Un raisonnement analogue montre que si la valuation de  $h^*J_p$  est infinie,  $h(\mathbf{D}) \subset \text{Sing } X$ .

ii)  $\Rightarrow$  i): Raisonnons par l'absurde: Si la condition i) n'était pas réalisée il existerait un chemin analytique  $h: (\mathbf{D}, 0) \rightarrow (\hat{X}_i, \tilde{x})$  où  $\tilde{x} \in \gamma^{-1}(c_{d-i-1}(D_i)) \cap \hat{X}_i$  et tel que  $h = \nu \circ \tilde{h}$  envoie  $\mathbf{D} - \{0\}$  dans  $X^0$ . Le critère valuatif de dépendance intégrale et les équations (\*) ci-dessus impliquent que la limite en 0 des espaces tangents à  $X^0$  le long de  $h(\mathbf{D})$  a pour équations  $\bar{\delta} dz_{i_h} = - \sum \bar{\delta}_{i_h, l} dz_l$  pour  $h = 1, \dots, N + 1 - d$  et  $\bar{\delta} \neq 0$ . On en déduit aussitôt en prenant  $\{i_1, \dots, i_{N+1-d}\} \subset \{i, \dots, N\}$  que cette limite est transverse à  $D_i$  d'où une contradiction.

i)  $\Leftrightarrow$  iii): est évident ainsi que iv)  $\Rightarrow$  iii)

Il nous reste à montrer que ii)  $\Rightarrow$  iv).

D'après (1.1.2) il suffit de montrer cette implication quand  $X$  est une intersection complète. Il en est alors de même de  $X \cap D_i$  qui est sans composante immergée d'après le théorème de Macaulay (puisque  $X_i$  est de dimension pure  $d - i$  par hypothèse) et génériquement réduit d'après i), donc réduit.

Le morphisme  $\hat{X}_i \rightarrow X_i$  induit par  $\nu$  coïncide avec l'éclatement de l'idéal  $J_X^{\mathcal{O}_{X_i,0}}$ , tandis que la modification de Nash de  $X_i$  coïncide avec l'éclatement de l'idéal jacobien de  $X_i$  qui n'est autre que  $J_0$ . Comme d'après ii),  $J_X^{\mathcal{O}_{X_i,0}}$  est entier

sur  $J_0$ ,  $\hat{X}_i$  et  $\tilde{X}_i$  ont même normalisé, (cf. [13], lecture 7, [23]) d'où la finitude cherchée.

Rappelons maintenant:

(4.1.2) *Théorème de Bertini idéaliste le long d'une section*

Soient  $Y$  un espace analytique complexe non singulier de dimension  $k$ ,  $f: X \xrightarrow{\sigma} Y$  un morphisme analytique muni d'une section  $\sigma$ . On note  $S$  l'idéal de  $\mathcal{O}_X$  définissant  $Y_1 = \sigma(Y)$ . On suppose que l'idéal jacobien relatif  $J_{X/Y}$  définit un sous-espace nulle part dense dans  $X$  au voisinage de  $Y_1$ . Il existe un fermé analytique rare  $F_1$  dans  $Y_1$  tel que, pour tout point  $x \in Y_1 - F_1$ , tout  $Y$ -plongement local  $(X, x) \rightarrow (Y, f(x)) \times (\mathbb{C}^{N+1}, 0)$  au voisinage de  $x$ , tout choix d'équations  $f_1, \dots, f_m$  définissant ce plongement ( $f_i \in \mathcal{O}_{Y \times \mathbb{C}^{N+1}, 0}$ ) et de coordonnées  $(y_1, \dots, y_k), (z_0, \dots, z_N)$  sur  $(Y, f(x))$  et  $(\mathbb{C}^{N+1}, 0)$  respectivement, on ait pour tout  $l, 1 \leq l \leq k$ , et  $\{j_1, \dots, j_{N+1-d}\} \subset \{1, \dots, m\}$ :

$$\frac{\partial(f_{j_1}, \dots, f_{j_{N+1-d}})}{\partial(y_{i_1}, \dots, y_{i_l}, z_{i_{l+1}}, \dots, z_{i_{N+1-d}})} \cdot \mathcal{O}_{X, x} \subset \overline{S^l \cdot J_{X/Y} \cdot \mathcal{O}_{X, x}}$$

avec  $d = \dim X - k$ . La démonstration de ce théorème est une adaptation facile de celle de la proposition (2.11) de [31].

(4.1.3) **THÉORÈME** (*Avatar du théorème de Bertini idéaliste de [31]*). Soit  $(X, 0)$  un germe d'espace analytique réduit purement de dimension  $d$ . Pour tout entier  $i$ , et tout plongement  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{N+1}, 0)$ , il existe un ouvert de Zariski dense  $U_i$  dans la grassmannienne  $G(N, N - i)$  des plans de codimension  $i$  dans  $\mathbb{C}^{N+1}$  passant par  $0$  tel que tout plan  $D_i \in U_i$  satisfasse les conditions équivalentes de la proposition (4.1.1).

*Démonstration:* Soit  $\mathbf{T} \subset G \times \mathbb{C}^{N+1}$  l'espace total du fibré tautologique de la grassmannienne. Posons  $Z = \mathbf{T} \cap (G \times X)$ ; la projection naturelle  $f: Z \rightarrow G$  a la propriété que, pour  $D \in G, f^{-1}(D) = \{D\} \times (X \cap D)$ . Notons  $\sigma: G \rightarrow Z$  la section nulle et soit  $F_1 \subset G$  le fermé de Zariski que nous fournit le théorème de Bertini idéaliste avec section (4.1.2). Plaçons nous dans la carte affine de  $G$  où les plans de codimension  $i$  sont définis par:

$$(*) \quad z_k = \sum_{j=i}^N a_{k,j} z_j, \quad k = 0, \dots, i - 1.$$

Nous restreignons  $f$  (et donc  $Z$ ) au-dessus de cet ouvert affine  $V$ , muni des coordonnées  $a_{k,j}$ . Le fibré  $\mathbf{T}$  y est trivialisé, l'isomorphisme  $\mathbf{T}|_V \simeq V \times \mathbb{C}^{N+1-i}$  étant justement décrit par (\*). Après cet isomorphisme,  $Z_V$  est défini dans un

voisinage de  $V \times \{0\}$  dans  $V \times \mathbf{C}^{N+1-i}$  par l'idéal engendré par les équations  $((f_1)_a, \dots, (f_m)_a)$  où  $f_1, \dots, f_m$  engendrent l'idéal définissant  $X \subset \mathbf{C}^{N+1}$  et pour tout  $g \in \mathbf{C}\{z_0, \dots, z_N\}$

$$(g)_a = g \left( \sum_{j=i}^N a_{0,j} z_j, \dots, \sum_{j=i}^N a_{i-1,j} z_j, z_i, \dots, z_N \right).$$

On voit aussitôt que  $J_{Z/G}$  est l'idéal engendré par les déterminants jacobiens de la forme  $\partial((f_{i_1})_a, \dots, (f_{j_{N+1-d}})_a) / \partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_{N+1-d}})$  avec  $\{i_1, \dots, i_{N+1-d}\} \subset \{i, \dots, N\}$  et l'on remarque

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_i} (f_a) &= \left( \frac{\partial f}{\partial z_i} \right)_a + \sum_{k=0}^{i-1} \left( \frac{\partial f}{\partial z_k} \right)_a a_{k,i}, \\ \frac{\partial}{\partial a_{k,j}} (f)_a &= z_j \left( \frac{\partial f}{\partial z_k} \right)_a, \text{ où } k \in \{0, \dots, i-1\}. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que pour tout point  $a = (a_{k,j})$  n'appartenant pas à  $F_1 \cap V$ , les conditions de la proposition sont réalisées pour le plan de codimension  $i$  décrit par les équations (\*).

Soit  $h: (\mathbf{D}, 0) \rightarrow (X \cap D_i, 0)$  un chemin analytique.

Nous allons montrer que la valuation de l'image de tout mineur jacobien  $\partial((f_{i_1})_a, \dots, (f_{i_{N+1-d}})_a) / \partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_{N+1-d}})$  dans  $\mathcal{O}_{(X \cap D_i)_{\text{red}}}$  est au moins égale à celle de l'idéal jacobien relatif  $J_{Z/G}$ , ce qui nous donnera la condition ii) de la proposition (4.1.1).

Supposons que seuls  $i_1, \dots, i_r$  n'appartiennent pas à  $\{i, \dots, N\}$ . Par ailleurs choisissons un monôme  $z_{k_1} \dots z_{k_r}$  dont la valuation est minimale parmi celles des éléments de l'idéal  $(z_i, \dots, z_N)^r$ . Nous remarquons que:

$$\begin{aligned} & z_{k_1} \dots z_{k_r} \left( \frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_{N+1-d}})}{\partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_r}, z_{i_{r+1}}, \dots, z_{i_{N+1-d}})} \right)_a \\ &= \frac{\partial((f_{i_1})_a, \dots, (f_{i_{N+1-d}})_a)}{\partial(a_{i_1, k_1}, \dots, a_{i_r, k_r}, z_{i_{r+1}}, \dots, z_{i_{N+1-d}})} \end{aligned}$$

qui est entier sur  $(z_i, \dots, z_N)^r J_{Z/G}$  d'après le théorème de Bertini idéaliste le long d'une section (4.1.2). Puisque  $h(\mathbf{D}) \subset D_i$  nous pouvons restreindre cette relation de dépendance intégrale à  $z_0 = \dots = z_{i-1} = 0$ , i.e. prendre tous les  $a_{k,j}$  nuls et on obtient que:

$$z_{k_1} \dots z_{k_r} \frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_{N+1-d}})}{\partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_r}, z_{i_{r+1}}, \dots, z_{i_{N+1-d}})} \in \overline{(z_i, \dots, z_N)^r \cdot J}$$

avec  $X_i = (X \cap D_i)_{\text{red}}$  et  $J = J_{Z/G} \cdot \mathcal{O}_{X_i,0}$ . D'après notre choix du monôme  $z_{k_1} \dots z_{k_r}$  et le critère valuatif de dépendance intégrale on a bien:

$$v \left( \frac{\partial(f_{i_1}, \dots, f_{i_{N+1-d}})}{\partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_r}, z_{i_{r+1}}, \dots, z_{i_{N+1-d}})} \right) \geq v(J).$$

Q.E.D.

(4.1.4) Remarque: Soit  $D_i$  un plan de codimension  $i$  passant par 0 et satisfaisant les conditions de la proposition (4.1.1) et soit  $\mathfrak{D}_i$  un drapeau de  $D_i$ . D'après la proposition (4.1.1) le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} \hat{X}_i & \xrightarrow{\sigma_i} & \tilde{X}_i \\ \hat{\gamma}_i \downarrow & & \downarrow \gamma_i \\ G - c_{d-i+1}(D_i) & \longrightarrow & G_i \end{array}$$

est commutatif où  $\gamma_i$  est le morphisme de Gauss de  $X_i$ ,  $\hat{\gamma}_i$  est induit par le morphisme de Gauss  $\gamma$  de  $X$ , et  $\sigma_i$  est le morphisme fini de  $\hat{X}_i$  sur  $\tilde{X}_i$  défini dans iii) de (4.1.1). On a, pour tout  $k$ ,  $0 \leq k \leq d - i$  et tout drapeau  $\mathfrak{D}$  dans  $\mathbb{C}^{N+1}$  prolongeant  $\mathfrak{D}_i$  et contenant  $D_i$ :

$$(**) \quad \gamma^{-1}(c_k(\mathfrak{D})) \cap \hat{X}_i = \sigma_i^{-1}(\gamma_i^{-1}(c_k(\mathfrak{D}_i))).$$

(4.1.5) PROPOSITION: Pour tout  $i$ ,  $0 \leq i \leq d - 1$ , l'ouvert de Zariski dense  $U_i$  du théorème (4.1.3) a la propriété suivante: pour un drapeau  $\mathfrak{D}$  assez général tel que  $D_i \in U_i$  on a  $\gamma^{-1}(c_{d-i}(\mathfrak{D})) \cap \hat{X}_i = \emptyset$ .

Preuve: Il suffit d'appliquer l'égalité (\*\*) de (4.1.4) et (2.3) à  $X_i$ .

(4.1.6) COROLLAIRE: Si  $D_i \in U_i$  et si  $\mathfrak{D}_i$  est un drapeau assez général dans  $D_i$ , on a:

$$(P_k(\mathfrak{D}) \cap D_i)_{\text{red}} = P_k(\mathfrak{D}_i)$$

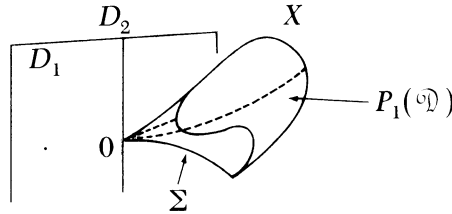
pour tout drapeau  $\mathfrak{D}$  de  $\mathbb{C}^{N+1}$  qui prolonge  $\mathfrak{D}_i$  et  $i + k \leq d - 1$ , où  $P_k(\mathfrak{D})$  et  $P_k(\mathfrak{D}_i)$  sont respectivement les variétés polaires de  $X$  et  $X_i$ .

(4.1.7) Exemple: Soit  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$  un germe de surface réduite. On considère des drapeaux  $(\mathfrak{D})$ :  $D_2 \subset D_1 \subset \mathbb{C}^3$ .

Si  $\mathfrak{D}$  est assez général  $P_1(\mathfrak{D})$  est la partie du lieu critique de la projection  $X \rightarrow \mathbb{C}^2$  parallèle à la droite  $D_2$  qui n'est pas contenue dans le lieu singulier  $\Sigma$  de  $X$  (appelée partie verticale du lieu critique de cette projection dans [12]).

Ainsi on peut voir que dans certains cas  $P_1(\mathfrak{D})$  peut être vide, par exemple dans le cas où  $X$  est équisingulière le long de  $\Sigma$  en 0. Dans ([19], 3.1.1) on donne une condition nécessaire et suffisante pour que  $P_1(\mathfrak{D})$  soit vide.

Le lemme (4.1.8), dans ce cas, signifie que  $D_2$  n'est pas dans le cône tangent de  $P_1(\mathfrak{D})$  quand  $\mathfrak{D}$  est assez général:



(4.1.8) LEMME DE TRANSVERSALITÉ DES VARIÉTÉS POLAIRES. Soit  $\mathfrak{D}$  un drapeau de  $\mathbf{C}^{N+1}$  assez général:

$$(\mathfrak{D}) \quad D_d \subset D_{d-1} \subset \dots \subset D_2 \subset D_1 \subset \mathbf{C}^{N+1} = D_0.$$

Notant  $C_0(P_{d-i}(\mathfrak{D}))$  le cône tangent de  $P_{d-i}(\mathfrak{D})$  en 0, on a:

$$(D_i \cap C_0(P_{d-i}(\mathfrak{D})))_{\text{red}} = \{0\}.$$

Preuve: On démontre ceci par récurrence descendante sur  $i$ . Si  $i = d$ , on a

$$P_0(\mathfrak{D}) = X$$

et on peut choisir  $D_d$  tel que

$$(D_d \cap C_0(X))_{\text{red}} = \{0\}.$$

On suppose que pour tout  $j, i < j \leq d$  on ait:

$$(D_j \cap C_0(P_{d-j}(\mathfrak{D})))_{\text{red}} = \{0\}$$

avec  $\mathfrak{D}$  assez général et  $D_d \subset \dots \subset D_{i+1}$  choisis par récurrence. On remarque que:  $P_{d-i}(\mathfrak{D}) \subset P_{d-i-1}(\mathfrak{D})$ . Donc

$$C_0(P_{d-i}(\mathfrak{D})) \subset C_0(P_{d-i-1}(\mathfrak{D})),$$

d'où

$$(D_{i+1} \cap C_0(P_{d-i}(\mathfrak{D})))_{\text{red}} = \{0\}.$$

L'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{C}^{N+1}$  de codimension  $i$  qui contiennent  $D_{i+1}$  et une droite de  $C_0(P_{d-i}(\mathfrak{D}))$  est de dimension  $i - 1$  au plus, tandis que l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{C}^{N+1}$  de codimension  $i$  qui contiennent  $D_{i+1}$  est de dimension  $i$ . On peut donc choisir  $D_i$  contenant  $D_{i+1}$  et ne contenant aucune droite de  $C_0(P_{d-i}(\mathfrak{D}))$ , ce qui signifie:

$$(D_i \cap C_0(P_{d-i}(\mathfrak{D})))_{\text{red}} = \{0\}.$$

On interprète (4.1.6) et (4.1.8) numériquement de la façon suivante, d'après [42], chap. VIII, Section 10, Remark:

(4.1.9) COROLLAIRE: Soit  $\mathcal{O}$  un drapeau assez général de  $\mathbf{C}^{N+1}$ , on a, pour  $1 \leq i \leq d$ :

$$(D_i, P_{d-i}(\mathcal{O})) = m_0(P_{d-i}(\mathcal{O}))$$

et

$$m_0(P_{d-i}(\mathcal{O})) = m_0(P_{d-i}(\mathcal{O}_i))$$

où  $m_0(C)$  est la multiplicité de  $C$  en  $0$ ,  $(, )$  est la forme d'intersection en  $0$  dans  $\mathbf{C}^{N+1}$ ,  $\mathcal{O}_i$  la restriction de  $\mathcal{O}$  à  $D_i$  et  $P_{d-i}(\mathcal{O}_i)$  est la variété polaire de codimension  $d - i$  de  $(X \cap D_i)_{\text{red}}$ .

(4.2) Projections génériques.

(4.2.1) THÉORÈME. Soit  $(X, 0) \subset (\mathbf{C}^{N+1}, 0)$  un germe d'espace analytique complexe réduit purement de dimension  $d$ . Il existe un ouvert de Zariski dense  $U$  de l'espace des projections linéaires  $p: \mathbf{C}^{N+1} \rightarrow \mathbf{C}^{d+1}$  tel que, pour toute projection  $p \in U$ , on ait:

- i) Le germe image  $X_1, 0$  de  $X_1 = (p(X))_{\text{red}}$  en  $0$  est une hypersurface réduite de  $(\mathbf{C}^{d+1}, 0)$  et le morphisme  $\pi: (X, 0) \rightarrow (X_1, 0)$  induit par  $p$  est fini et biméromorphe;
- ii) Dans la grassmannienne  $G = G(N, d - 1)$ , la variété de Schubert  $S$  des  $d$ -plans de  $\mathbf{C}^{N+1}$  qui ne sont pas transverses à  $\text{Ker } p$  rencontre chaque composante irréductible  $\tilde{Y}_k$  de  $\nu^{-1}(0)$  selon un sous-ensemble analytique de codimension 2 dans  $\tilde{Y}_k$  ou vide;
- iii) Le morphisme  $\pi: X \rightarrow X_1$  se prolonge en un morphisme  $\tilde{\pi}: \tilde{X} = \gamma^{-1}(S) \rightarrow \tilde{X}_1$  à fibres finies.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{C}^{N+1} \supset X & \xleftarrow{\nu} & \tilde{X} = \gamma^{-1}(S) & & \\ P \downarrow & \pi \downarrow & \downarrow \tilde{\pi} & & \\ \mathbf{C}^{d+1} \supset X_1 & \xleftarrow{\nu_1} & \tilde{X}_1 & & \end{array}$$

Démonstration: Il existe un ouvert  $U_0$  de projections linéaires de  $\mathbf{C}^{N+1}$  sur  $\mathbf{C}^d$  tel que si  $q \in U_0$ , la restriction de  $q$  à  $(X, 0)$  soit un morphisme fini. D'après le théorème de Bertini-Sard, pour des représentants  $X$  et  $V$  de  $(X, 0)$  et  $(\mathbf{C}^d, 0)$ ,  $q: X \rightarrow V$  est fini et il existe un fermé analytique nulle part dense  $F_1$  de  $V$ , tel que la restriction de  $q$  induise un morphisme lisse:  $q^{-1}(V - F_1) \rightarrow V - F_1$ .

Soit  $y \in V - F_1$ . Si  $z$  reste dans un ouvert dense  $U_1$  de l'espace des projections linéaires de  $\mathbf{C}^{N+1}$  sur  $\mathbf{C}$ , la restriction de  $z$  à  $q^{-1}(y) \cap X$  est injective. Par ailleurs il est facile de démontrer que si  $z \in U_1$ , l'ensemble  $F_2$  des points  $y \in V$  tels que la restriction de  $z$  à  $q^{-1}(y) \cap X$  ne soit pas injective est un fermé analytique de  $V$  rare dans  $V$ .

La projection  $p = (q, z): \mathbf{C}^{N+1} \rightarrow \mathbf{C}^{d+1}$  induit alors un isomorphisme de l'ouvert analytique dense  $X - q^{-1}(F_1 \cup F_2)$  sur son image dans  $\mathbf{C}^{d+1}$  ce qui prouve l'assertion i).

L'assertion ii) résulte aussitôt du fait que la variété de Schubert  $S$  est de codimension 2 dans  $G$ , et du théorème de Kleiman ([16] 2. theorem).

Montrons iii). Remarquons d'abord qu'il suffit de démontrer le résultat dans le cas où  $X$  est une intersection complète, d'après (1.1.2).

Soient  $f_1, \dots, f_{N+1-d} \in \mathbf{C}\{z_0, \dots, z_N\}$  des générateurs de l'idéal définissant  $X$  dans  $\mathbf{C}^{N+1}$  et  $g(z_0, \dots, z_d)$  un générateur définissant l'image  $X_1 \subset \mathbf{C}^{d+1}$  de  $X$  par la projection de  $\mathbf{C}^{N+1}$  sur  $\mathbf{C}^{d+1}$  qui à  $(z_0, \dots, z_N)$  associe  $(z_0, \dots, z_d)$ . Puisque le morphisme  $\pi: X \rightarrow X_1$  est un morphisme fini entre germes de Gorenstein, on a une relation due à Kleiman (cf. [17] (V, 5)):

$$(*) \quad \omega_X = \mathcal{C}_{X/X_1} \cdot \pi^* \omega_{X_1}$$

où  $\omega_X$  et  $\omega_{X_1}$  sont les modules dualisants respectifs de  $X$  et  $X_1$  et  $\mathcal{C}_{X/X_1}$  le conducteur de  $\mathcal{O}_X$  dans  $\mathcal{O}_{X_1}$ .

Par ailleurs on a la description suivante à la Picard, plus ou moins classique (cf. [44] et [22]), du module dualisant  $\omega_X$ . Le  $\mathcal{O}_X$ -module  $\omega_X$  est isomorphe à l'un quelconque des sous  $\mathcal{O}_X$ -modules inversibles de  $\Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \text{Tot}(\mathcal{O}_X)$  engendré par une forme différentielle méromorphe de la forme:

$$\frac{dz_{i_0} \wedge \dots \wedge dz_{i_{d-1}}}{\frac{\partial(f_1, \dots, f_{N+1-d})}{\partial(z_{i_1}, \dots, z_{i_{N+1-d}})}}$$

où  $\{i_0, \dots, i_{d-1}\} \cup \{i_1, \dots, i_{N+1-d}\}$  est une partition de  $\{0, \dots, N\}$  et le mineur du dénominateur n'est pas diviseur de 0 dans  $\mathcal{O}_X$ . Dans la suite nous choisirons  $\{i_0, \dots, i_{d-1}\} = \{0, \dots, d\}$ . Dans ce cas si la projection choisie est dans  $U$ , le mineur au dénominateur correspondant n'est pas diviseur de 0 dans  $\mathcal{O}_X$ .

De même  $\omega_{X_1}$  est engendré par une des formes différentielles méromorphes

$$\frac{dz_0 \wedge \dots \wedge dz_i \wedge \dots \wedge dz_d}{\frac{\partial g}{\partial z_i}},$$

où  $\partial g / \partial z_i$  n'est pas diviseur de 0 dans  $\mathcal{O}_{X_1}$ .

On déduit de la relation (\*) d'une part que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{X/X_1}$  est un idéal inversible de  $\mathcal{O}_X$ , et d'autre part l'égalité d'idéaux de  $\mathcal{O}_X$ :

$$(**) \quad (\partial g / \partial z_0, \dots, \partial g / \partial z_d) \mathcal{O}_X = \mathcal{C} \cdot J',$$

où  $J'$  est l'idéal de  $\mathcal{O}_X$ , contenu dans l'idéal jacobien  $J_X$  de  $X$ , engendré par les  $d + 1$  déterminants jacobiens  $\partial(f_1, \dots, f_{N+1-d}) / \partial(z_i, z_{d+1}, \dots, z_N)$  ( $0 \leq i \leq d$ ).



(4.2.2) LEMME: *L'ouvert  $\tilde{X} - \gamma^{-1}(S)$  est l'ouvert des points  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  tels que  $\overline{J_X \Theta_{\tilde{X}, \tilde{x}}} = \overline{J' \Theta_{\tilde{X}, \tilde{x}}}$ .*

*Preuve:* Notons  $J_p$  l'idéal de  $\Theta_X$  engendré par les mineurs jacobiens au dénominateur desquels apparaissent au plus  $p$  coordonnées appartenant à  $(z_0, \dots, z_d)$ ; on a  $J_p \subset J_{p+1}$ ,  $J_1 = J'$  et  $J_{d+1} = J_X$ .

Montrons d'abord qu'en tout point  $\tilde{x} \in \tilde{X} - \gamma^{-1}(S)$  on a  $\overline{J_{p+1} \Theta_{\tilde{X}, \tilde{x}}} = \overline{J_p \Theta_{\tilde{X}, \tilde{x}}}$  pour  $p$ ,  $1 \leq p \leq d$ . D'après le critère valuatif de dépendance intégrale il suffit de montrer que, pour tout arc analytique  $h: (\mathbf{D}, 0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$  on a, notant  $v$  la valuation correspondante,  $v(h^* J_{p+1}) \geq v(h^* J_p)$ . Considérons un mineur jacobien  $\Delta$  au dénominateur duquel apparaissent exactement  $p + 1$  coordonnées appartenant à  $(z_0, \dots, z_d)$  et donnant une valuation minimale parmi les mineurs de cette sorte. Ecrivons:

$$\Delta = \frac{\partial(f_1, \dots, f_{N+1-d})}{\partial(z_0, \dots, z_p, z_{i_{p+1}}, \dots, z_{i_{N-d}})}$$

où  $\{i_{p+1}, \dots, i_{N-d}\} \subset \{d + 1, \dots, N\}$ .

Si tout mineur de cette sorte donne une valuation  $\infty$ , il n'y a rien à démontrer. On peut donc supposer que  $(\nu \circ h)(\mathbf{D} - \{0\}) \subset X^0$ . La règle de Cramer nous donne un système de  $N + 1 - d$  équations pour l'espace tangent à  $X$  en un point de  $(\nu \circ h)(\mathbf{D} - \{0\})$ , contenant une équation de la forme:

$$\delta dz_k = \sum_{a=p}^d \delta_a \cdot dz_a + \sum_{i=1}^p \delta'_i \cdot dz_{k_i}$$

où  $k \in \{d, \dots, N\} - \{i_{p+1}, \dots, i_{N-d}\}$ ,  $\delta_a \in J_{p+1}$ ,  $\delta_p = \Delta$ ,

$$\delta'_i \in J_p \quad \text{et} \quad \delta = \frac{\partial(f_1, \dots, f_{N+1-d})}{\partial(z_0, \dots, z_{p-1}, z_k, z_{i_{p+1}}, \dots, z_{i_{N-d}})}.$$

Montrons qu'il est impossible que  $v(\Delta \circ h)$  soit inférieur à  $\inf(v(\delta \circ h), v(\delta'_i \circ h))$ ,  $i = 1, \dots, p$ . En effet, si c'était le cas, en passant à la limite le long de  $\nu \circ h(\mathbf{D} - \{0\})$  l'équation précédente devient de la forme:

$$\sum_{a=p}^d \delta_a^* dz_a = 0$$

qui s'annule identiquement sur le noyau de la projection  $p$ . La limite d'espace tangent obtenue en 0 le long de  $\nu \circ h$  n'est donc pas transverse au noyau  $\text{Ker } p$  de la projection  $p$  contrairement à l'hypothèse  $\tilde{x} \notin \gamma^{-1}(S)$ .

Pour tout  $\tilde{x} \in \tilde{X} - \gamma^{-1}(S)$ , on a donc bien  $\overline{J_X \Theta_{\tilde{X}, \tilde{x}}} = \overline{J' \Theta_{\tilde{X}, \tilde{x}}}$ .

Réciproquement supposons qu'en  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  on a  $\overline{J_X \Theta_{\tilde{X}, \tilde{x}}} = \overline{J' \Theta_{\tilde{X}, \tilde{x}}}$ . Considérons un arc analytique  $h: (\mathbf{D}, 0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$  tel que  $(\nu \circ h)(\mathbf{D} - \{0\}) \subset X^0$ .

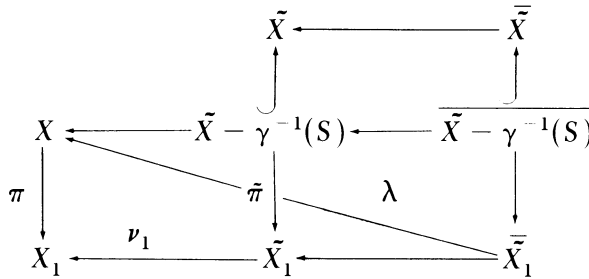
L'hypothèse entraîne que l'un au moins des mineurs

$$\partial(f_1, \dots, f_{N+1-d})/\partial(z_i, z_{d+1}, \dots, z_N)$$

ne s'annule pas identiquement sur  $(\nu \circ h)(\mathbf{D})$ . Le critère valuatif de dépendance intégrale montre que tous les mineurs jacobiens ont une valuation au moins égale à un mineur de cette forme et la règle de Cramer montre que la limite en 0 des espaces tangents le long de  $(\nu \circ h)(\mathbf{D})$  est transverse à  $\text{Ker } p$ , donc  $\bar{x} \notin \gamma^{-1}(S)$ .

Remarquons que le fait que la limite en 0 le long de  $\nu \circ h$  soit transversale à  $\text{Ker } p$  est équivalente à l'égalité des valuations  $v(h^*J') = v(h^*J_X)$ .

Reprenons la démonstration de (4.2.1) iii). Considérons le diagramme suivant:



où  $\bar{\tilde{X}} \rightarrow \tilde{X}$  et  $\bar{\tilde{X}}_1 \rightarrow \tilde{X}_1$  sont les normalisations.

D'après la remarque précédente  $\tilde{X} - \gamma^{-1}(S)$  est l'ensemble des points  $x'$  dans  $\tilde{X}$  où  $J_X \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}, x'} = J' \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}, x'}$ .

Remarquons maintenant que, utilisant la propriété universelle de la normalisation (cf. [23]), le morphisme  $\pi$  est dominé par l'éclatement normalisé dans  $X_1$  de tout idéal définissant un sous-espace rare de  $X_1$  contenant l'ensemble des points où  $X_1$  n'est pas normal. Ainsi le morphisme composé  $\bar{\tilde{X}}_1 \rightarrow \tilde{X}_1 \rightarrow X_1$  se factorise par  $\lambda$  à travers  $\pi$ . Soit  $W$  l'ensemble des points  $x' \in \bar{\tilde{X}}_1$  tels que  $J_X \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}_1, x'} = J' \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}_1, x'}$ , les idéaux étant remontés au moyen du morphisme  $\lambda$ . Pour achever la démonstration de iii), il suffit de vérifier l'assertion suivante: le morphisme  $\tilde{\pi}: \tilde{X} - \gamma^{-1}(S) \rightarrow \tilde{X}_1$  s'étend en un isomorphisme de  $\tilde{X} - \gamma^{-1}(S)$  sur  $W$ . En utilisant (\*\*\*) et le fait que le conducteur  $\mathcal{C}$  est un idéal inversible de  $\mathcal{O}_X$  cet isomorphisme résulte facilement de la propriété universelle de l'éclatement normalisé. Ceci achève la démonstration du théorème (4.2.1).

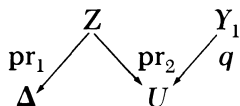
(4.2.3) *Proposition:* Soit  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{N+1}, 0)$  un germe d'espace analytique complexe réduit purement de dimension  $d$ . Il existe un ouvert de Zariski dense  $U'$  contenu dans l'ouvert  $U$  du théorème (4.2.1) tel que, pour toute projection  $p \in U'$  de  $\mathbb{C}^{N+1}$  sur  $\mathbb{C}^{d+1}$ , il existe un ouvert de Zariski dense  $\Omega_p$  de la variété des drapeaux de  $\mathbb{C}^{d+1}$  tel que, pour tout drapeau  $\mathfrak{D}_1 \in \Omega_p$ , d'une part les variétés polaires locales  $P_k(\mathfrak{D}_1)$ ,  $k = 0, \dots, d - 1$ , de  $X_1 = p(X)$  relativement à  $\mathfrak{D}_1$  sont dans la classe d'équimultiplicité générique (cf. (2.2.2)) et pour le drapeau  $\mathfrak{D}$

image réciproque par  $p$  de  $\mathfrak{D}_1$ , les variétés polaires locales  $P_k(\mathfrak{D})$  ( $k = 0, \dots, d - 1$ ) de  $X$  relativement à  $\mathfrak{D}$  sont dans la classe d'équimultiplicité générique. De plus on a :

$$p(P_k(\mathfrak{D})) = P_k(\mathfrak{D}_1)$$

et leurs multiplicités en 0 sont égales.

*Preuve:* Considérons l'ouvert  $U$  du théorème (4.2.1). On note  $\Delta$  (resp.  $\Delta_1$ ) l'espace des drapeaux de  $\mathbb{C}^{N+1}$  (resp.  $\mathbb{C}^{d+1}$ ),  $Z$  le sous-espace des  $\Delta \times U$  formé des couples  $(\mathfrak{D}, p)$  tels que  $\text{Ker } p \in \mathfrak{D}$  et  $Y_1$  le sous-espace de  $\Delta_1 \times U$  formé des couples  $(\mathfrak{D}_1, p)$  tels que les variétés polaires locales de  $X_1 = p(X)$  associées à  $\mathfrak{D}_1$  soient dans la classe d'équimultiplicité générique. On a le diagramme suivant :



où  $\text{pr}_1$ ,  $\text{pr}_2$  et  $q$  sont induits par les projections. Soit  $U''$  un ouvert de Zariski dense de  $\Delta$  tel que, pour tout  $\mathfrak{D} \in U''$ , les variétés polaires locales associées soient dans la classe d'équimultiplicité générique. On remarque que  $\text{pr}_2$  est une fibration algébrique, donc un morphisme ouvert pour la topologie de Zariski. D'autre part d'après le lemme (4.1.8) de transversalité des variétés polaires, il existe un ouvert de Zariski dense  $W$  de  $Z$  de couples  $(\mathfrak{D}, p)$  tel que  $\text{Ker } p$  soit transverse aux cônes tangents des  $P_k(\mathfrak{D})$  ( $k = 0, \dots, d - 1$ ) en 0. Montrons que l'ouvert cherché est  $U' = \text{pr}_2(\text{pr}_1^{-1}(U'') \cap W)$ : Pour cela, il suffit de prouver que pour  $P \in U'$ , on a  $p(P_k(\mathfrak{D})) = P_k(\mathfrak{D}_1)$  et  $m_0(P_k(\mathfrak{D})) = m_0(P_k(\mathfrak{D}_1))$ .

D'après la définition des variétés polaires locales (cf. (2.2.3)) ou bien  $P_k(\mathfrak{D}_1) = \emptyset$  ou bien  $P_k(\mathfrak{D}_1)$  coupe la partie non singulière de  $X_1$  suivant un ouvert dense dans  $P_k(\mathfrak{D}_1)$ . L'image inverse de  $P_k(\mathfrak{D}_1)$  par le morphisme fini et biméromorphe  $\pi: X \rightarrow X_1$  induit par  $p \in U'$  est alors une union de composantes irréductibles de  $P_k(\mathfrak{D})$ .

Montrons que  $\pi^{-1}(P_k(\mathfrak{D}_1)) = P_k(\mathfrak{D})$ . Supposons que  $P_k(\mathfrak{D})$  contienne une composante  $C$  qui ne soit pas contenue dans  $\pi^{-1}(P_k(\mathfrak{D}_1))$ . Comme  $p \in \text{pr}_2(W)$ , la restriction de  $\pi$  à un ouvert dense de  $C$  est de rang  $d - k$ . Si l'image  $p(C)$  rencontre la partie non singulière de  $X_1$ , d'après (2.2.3),  $p(C)$  devrait être une composante de  $P_k(\mathfrak{D}_1)$  ce qui impliquerait que  $C \subset \pi^{-1}(P_k(\mathfrak{D}_1))$ : contradiction. L'image  $p(C)$  est donc contenue dans la partie singulière de  $X_1$ . Comme le rang de  $\pi$  en tout point d'un ouvert dense  $C^0$  de  $C$  est  $d - k$ , les limites d'espaces tangents à  $X_1$  en tout point d'un ouvert dense de  $p(C)$  sont les images par l'application tangente à  $\pi$  des plans tangents à  $X$  en les points de l'ouvert dense  $C^0$  de  $C$ . Comme  $C$  est dans  $P_k(\mathfrak{D})$  et que  $p(C)$  est de dimension  $d - k$ , car  $\pi$

est fini, la remarque précédente montre que  $p(C)$  est une composante de  $P_k(\mathfrak{D}_1)$  contenue dans le lieu singulier de  $X_1$ , ce qui est à nouveau contradictoire d'après (2.2.3). Donc on a bien:  $p(P_k(\mathfrak{D})) = P_k(\mathfrak{D}_1)$ . L'égalité des multiplicités résulte immédiatement de ceci et de la transversalité de  $\text{Ker } p$  avec les cônes tangents des  $P_k(\mathfrak{D})$  en 0 (cf. 4.1.8).

(4.2.4.) COROLLAIRE: Soit  $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^{N+1}, 0)$  un germe analytique complexe réduit purement de dimension  $d$ . Pour toute projection  $p$  appartenant à l'ouvert  $U$  du théorème (4.2.1), on a:

$$\dim \nu_1^{-1}(0) = \dim \nu^{-1}(0)$$

et  $\dim \nu^{-1}(0) = \sup\{k \mid P_k(\mathfrak{D}) \neq \emptyset\}$  pour un drapeau  $\mathfrak{D}$  de  $\mathbb{C}^{N+1}$  assez général.

Démonstration: Du théorème (4.2.1) résulte que dans toute composante  $D$  de  $\nu^{-1}(0)$  il existe un fermé  $F$  de codimension 2 tel que  $\tilde{\pi}$  induise hors de  $F$  un morphisme à fibres finies dans  $\nu_1^{-1}(0)$ , d'où l'inégalité:

$$\dim \nu^{-1}(0) \leq \dim \nu_1^{-1}(0).$$

Par ailleurs, pour tout drapeau  $\mathfrak{D}_1$  dans  $\mathbb{C}^{d+1}$ , les variétés de Schubert  $c_k(\mathfrak{D}_1)$  sont des sous-espaces linéaires de codimension  $k$  de l'espace projectif  $\mathbb{P}^d$ . Il résulte donc du théorème de Bezout et de la définition des variétés polaires que l'on a:

$$\dim \nu_1^{-1}(0) = \text{Sup}\{k \mid P_k(\mathfrak{D}_1) \neq \emptyset\}$$

pour  $\mathfrak{D}_1$  assis général. La proposition (4.2.3) et le théorème de Kleiman montrent l'inégalité:

$$\dim \nu^{-1}(0) \geq \dim \nu_1^{-1}(0).$$

(4.2.5) Remarque. En fait on peut montrer que chaque composante irréductible de  $\nu_1^{-1}(0)$  rencontre l'image de  $\tilde{\pi}$ .

### 5. Variétés polaires locales et obstruction d'Euler locale.

#### (5.1) Énoncé et démonstration du théorème principal

Nous reprenons les notations du paragraphe 1, de (3.3) et de (4.1).

(5.1.1) THÉORÈME: Pour tout drapeau  $\mathfrak{D}$  assez général dans  $\mathbb{C}^{N+1}$ , on a:

$$(-1)^{d-1} \text{deg}(c_{d-1-i}(T) \cdot c_1(\xi)^i \cap [\mathfrak{D}]) = m_0(P_{d-1-i}(\mathfrak{D})) = m_0(\Gamma_i)$$

où  $\Gamma_i$  est la variété polaire locale de codimension  $d - 1 - i$  de  $(X \cap D_i)_{\text{red}}$ ,  $c'$  est à dire sa courbe polaire.

Ce théorème a le corollaire immédiat suivant, en utilisant (3.3):

(5.1.2) COROLLAIRE: *Pour tout drapeau  $\mathfrak{D}$  assez général dans  $\mathbf{C}^{N+1}$ , on a:*

$$Eu_0(X) = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-1-i} m_0(P_{d-1-i}(\mathfrak{D})).$$

Nous donnerons dans le paragraphe 6 d'autres applications et des commentaires.

(5.1.3) *Démonstration de (5.1.1):* On remarque que  $T$  (resp.  $\xi$ ) est la restriction à  $\mathfrak{X}$  du fibré  $\Theta'$  (resp.  $\Xi'$ ) image réciproque du fibré universel  $\tau: \Theta \rightarrow G$  (resp.  $\alpha: \Xi \rightarrow \mathbf{P}^N$ ) par la projection  $X \times \mathbf{P}^N \times G \rightarrow G$  (resp.  $X \times \mathbf{P}^N \times G \rightarrow \mathbf{P}^N$ ). Soient  $T_0$  et  $\xi_0$  les restrictions de  $\Theta'$  et  $\Xi'$  à  $\{0\} \times \mathbf{P}^N \times G$ . Comme  $\mathfrak{Y} = (\nu \circ \tilde{e})^{-1}(0)$  égale  $(\{0\} \times \mathbf{P}^N \times G) \cap \mathfrak{X}$  et est donc contenu dans  $\{0\} \times \mathbf{P}^N \times G$ , on a l'égalité:

$$\deg(c_{d-1-i}(T)c_1(\xi)^i \cap [\mathfrak{Y}]) = \deg(c_{d-1-i}(T_0)c_1(\xi_0)^i \cap [\mathfrak{Y}]).$$

Rappelons que d'après [1] (theorem 29.4) la classe de Chern de degré  $k$  d'un fibré égale le produit par  $(-1)^k$  de la classe obtenue par obstruction.

La classe d'obstruction associée à  $c_k(T_0)$  est définie par  $\{0\} \times \mathbf{P}^N \times c_k(\mathfrak{D})$  où  $\mathfrak{D}$  est un drapeau de  $\mathbf{C}^{N+1}$  et de même la classe d'obstruction associée à  $c_1(\xi_0)^i$  est définie par  $\{0\} \times (L'_1 \cap \dots \cap L'_i) \times G$ , où  $L'_1, \dots, L'_i$  sont des hyperplans de  $\mathbf{P}^N$  en position générale. Pour simplifier on notera  $H'_i = L'_1 \cap \dots \cap L'_i$  quand  $L'_1, \dots, L'_i$  sont en position générale.

D'après [2], [1] et le résultat de S. Kleiman [16] qui nous assure que les intersections sont propres:

$$(5.1.3.1) \quad \deg(c_{d-1-i}(T_0)c_1(\xi_0)^i \cap [\mathfrak{Y}]) \\ = (-1)^{d-1-i} i(\{0\} \times \mathbf{P}^N \times c_{d-1-i}(\mathfrak{D}), \{0\} \times H'_i \times G, \mathfrak{Y})$$

où  $\mathfrak{D}$  est un drapeau de  $\mathbf{C}^{N+1}$  assez général  $L'_1, \dots, L'_i$  des hyperplans de  $\mathbf{P}^N$  assez généraux et en position générale et  $i(, , )$  désigne le nombre d'intersection des variétés en question dans  $\{0\} \times \mathbf{P}^N \times G$ .

On a maintenant:

(5.1.3.2) LEMME: *Supposons que  $L_1, \dots, L_i$  soient des hyperplans passant par 0 assez généraux de  $\mathbf{C}^{N+1}$ ; on note  $X'_i$  la transformée stricte de  $(X \cap L_1 \cap \dots \cap L_i)_{\text{red}}$  par  $e$ . L'espace réduit sous-jacent à la transformée totale  $\nu^{-1}(X'_i)$  de  $X'_i$  par  $\nu'$  égale la transformée stricte  $\mathfrak{X}_i$  de  $X'_i$  par  $\nu'$ .*

*Preuve:* Comme  $|\mathfrak{Y}|$  et  $|Y'|$  ont la même dimension  $d - 1$ , on peut stratifier  $|Y'|$  par des sous-ensembles constructibles  $(V_j)_{0 \leq j \leq d-1}$  tel que  $\dim V_j \leq j$  et pour tout  $x \in V_j$ ,  $\dim \nu'^{-1}(x) = d - 1 - j$ .

Si  $L_1, \dots, L_i$  sont assez généraux, on note  $D_i = L_1 \cap \dots \cap L_i$  et les hyperplans  $L'_1, \dots, L'_i$  qu'ils définissent dans  $\{0\} \times \mathbf{P}^N$  coupent les  $V_j$  transversalement de telle sorte que:

$$\dim \nu'^{-1}(Y' \cap H'_i) \leq d - 1 - i.$$

Soit  $\mathfrak{S}$  l'union des composantes de l'ensemble exceptionnel de  $\nu'$ :  $\mathfrak{X} \rightarrow X'$  qui se projettent sur le lieu singulier  $\Sigma$  de  $X$  par  $e \circ \nu'$ . On note  $\Sigma'$  la transformée stricte de  $\Sigma$  par  $e$ . La dimension de  $\mathfrak{S}$  est au plus  $d - 1$ . Comme ci-dessus on peut stratifier  $\Sigma$  par des sous-ensembles analytiquement constructibles de telle sorte que, si  $L_1, \dots, L_i$  sont suffisamment généraux, on obtienne:

$$\dim \nu'^{-1}(\Sigma' \cap H'_i) \leq d - 1 - i.$$

Comme en chaque point  $x$  de  $\nu'^{-1}(Y' \cap H'_i)$ , la transformée totale  $\nu'^{-1}(X'_i) = (X \times H'_i \times G) \cap \mathfrak{X}$  de  $X'_i$  par  $\nu'$  est de dimension au moins  $d - i$ , en fait égale à  $d - i$  quand  $L'_1, \dots, L'_i$  sont assez généraux, d'après le théorème de S. Kleiman [16], on en déduit qu'au voisinage de chaque point  $x$  de  $\nu'^{-1}(Y' \cap H'_i)$  il existe des points de  $\nu'^{-1}(X'_i)$  qui ne sont pas dans l'ensemble exceptionnel du morphisme  $\nu'$ :  $\mathfrak{X} \rightarrow X'$ . Ceci prouve bien:  $\mathfrak{X}_i = \nu'^{-1}(X'_i)_{\text{red}}$ , par définition de la transformée stricte, puisque  $\mathfrak{X}_i$  est dense dans  $\nu'^{-1}(X'_i)_{\text{red}}$ .

(5.1.3.3) *Remarque:* La même démonstration donne un résultat plus général qu'ont peut énoncer de la façon suivante:

Soient  $Z$  un espace analytique complexe réduit,  $T \subset Z$  un sous-espace analytique fermé de  $Z$ , et  $f: Z' \rightarrow Z$  une modification qui est un isomorphisme en dehors de  $T$ .

Soient  $X$  un sous-espace analytique réduit fermé équidimensionnel dans  $Z$  tel que  $\dim X \cap T < \dim X$  et  $X_1$  un sous-espace analytique fermé réduit de  $Z'$  équidimensionnel. On suppose que  $f$  induit un isomorphisme de  $X_1 - f^{-1}(T)$  sur  $X - T$  et que  $\dim_z X_1 \cap f^{-1}(T) < \dim_z X_1$  pour tout  $z \in X_1 \cap f^{-1}(T)$ . Alors  $X_1$  est la transformée stricte de  $X$ .

Revenons à la démonstration de (5.1.1). On note  $\mathfrak{Y}_i = \mathfrak{X}_i \cap \mathfrak{Y}$ . En refaisant le raisonnement du début, on a pour  $L'_1, \dots, L'_i$  assez généraux dans  $\mathbf{P}^N$  et un drapeau  $\mathfrak{D}$  de  $\mathbf{C}^{N+1}$  assez général:

(5.1.3.4)

$$\begin{aligned} & \tilde{i}(\{0\} \times H'_i \times G) \cap (\{0\} \times \mathbf{P}^N \times c_{d-1-i}(\mathfrak{D})), \mathfrak{Y} \cap (\{0\} \times H'_i \times G) \\ & = (-1)^{d-1-i} \text{deg}(c_{d-1-i}(T) \cap [\mathfrak{Y}_i]). \end{aligned}$$

où maintenant,  $\tilde{i}(\ , \ )$  désigne le nombre d'intersection des variétés en question dans  $\{0\} \times H'_i \times G$ .

Or on a :

$$\begin{aligned} & \tilde{i}(\{0\} \times \mathbf{P}^N \times c_{d-1-i}(\mathcal{D}), \{0\} \times H'_i \times G, \mathcal{Y}) \\ &= i(\{(\{0\} \times H'_i \times G) \cap (\{0\} \times \mathbf{P}^N \times c_{d-1-i}(\mathcal{D}))\}, \mathcal{Y} \cap (\{0\} \times H'_i \times G)). \end{aligned}$$

Donc

$$(5.1.3.5) \quad \deg(c_{d-1-i}(T)c_1(\xi)^i \cap [\mathcal{Y}]) = (-1)^i \deg(c_{d-1-i}(T) \cap [\mathcal{Y}_i]).$$

Nous sommes donc ramenés à un calcul de degré dans la transformée stricte  $\mathcal{X}_i$  de  $X \cap D_i$  par  $\eta = \nu \circ \tilde{e} = e \circ \nu'$ .

Nous allons montrer que ce degré égale la multiplicité de l'image dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_i} \cap \tilde{e}^{-1}(\gamma^{-1}(c_{d-1-i}(\mathcal{D})))$  de l'idéal  $\mathfrak{N}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}$  qui définit  $\mathcal{Y}$  dans  $\mathcal{X}$ .

Ramarquons que le nombre d'intersection  $i(\{0\} \times \mathbf{P}^N \times c_{d-1-i}(\mathcal{D}), \{0\} \times H'_i \times G, \mathcal{Y})$  égale celui de  $\mathbf{C}^{N+1} \times \mathbf{P}^N \times c_{d-1-i}(\mathcal{D}), \mathbf{C}^{N+1} \times H'_i \times G$  et  $\mathcal{Y}$  dans  $\mathbf{C}^{N+1} \times \mathbf{P}^N \times G$ , donc celui de  $\mathbf{C}^{N+1} \times H'_i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D})$  et  $\mathcal{Y}$  dans  $\mathbf{C}^{N+1} \times \mathbf{P}^N \times G$ . On a alors :

(5.1.3.6) LEMME: *Quand  $\mathcal{D}$  et  $L'_1, \dots, L'_i$  sont assez généraux le nombre d'intersection de  $\mathbf{C}^{N+1} \times H'_i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D})$  et  $\mathcal{Y}$  dans  $\mathbf{C}^{N+1} \times \mathbf{P}^N \times G$  peut se calculer dans  $\mathcal{X}$ , i.e. est égal à la multiplicité de l'image de l'idéal  $\mathfrak{N}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}$  dans  $e^{-1}(\gamma^{-1}(c_{d-1-i}(\mathcal{D}))) \cap \mathcal{X}_i$ ,  $\mathfrak{N}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}$  étant l'idéal qui définit  $\mathcal{Y}$  dans  $\mathcal{X}$ .*

*Preuve:* En utilisant le théorème de S. Kleiman [16], on voit que  $\mathbf{C}^{N+1} \times H'_i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D})$  est non singulier aux points où il coupe  $\mathcal{Y}$ , quand  $\mathcal{D}$  et  $L'_1, \dots, L'_i$  sont assez généraux.

L'espace analytique réduit  $|\mathcal{Y}|$  sous-jacent à  $\mathcal{Y}$  est également non singulier en ces points d'intersections. En fait, si  $\mathcal{D}$  et  $L'_1, \dots, L'_i$  sont assez généraux, on a en plus :

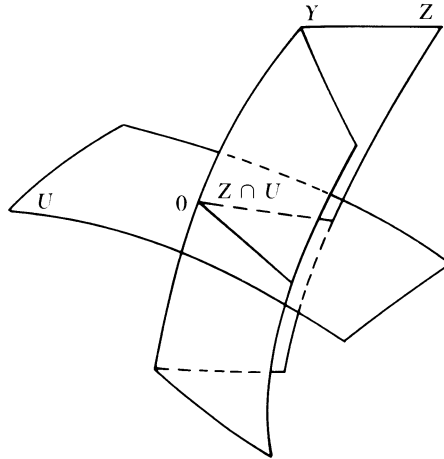
- 1)  $|\mathcal{Y}|$  et  $\mathbf{C}^{N+1} \times H'_i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D})$  se coupent transversalement;
- 2) les points d'intersection de  $|\mathcal{Y}|$  et  $\mathbf{C}^{N+1} \times H'_i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D})$  sont des points où  $\mathcal{X}$  est équirésoluble au sens fort le long de  $\mathcal{Y}$  au sens de [33] (comme  $\mathcal{Y}$  est de codimension 1 dans  $\mathcal{X}$ , cette équirésolution sera donnée par la normalisation).

Le nombre d'intersection de  $\mathcal{Y}$  et  $\mathbf{C}^{N+1} \times H'_i \times c_{d-1-i}(\mathcal{D})$  dans  $\mathbf{C}^{N+1} \times \mathbf{P}^N \times G$  est la somme des nombres d'intersection locaux en chacun des points d'intersection. Il suffit donc de démontrer le lemme localement en ces points d'intersection. Le lemme (5.2.3.6) est donc conséquence du lemme très utile suivant :

(5.1.3.7) LEMME: *Soit  $(Z, 0)$  un germe d'espace analytique réduit dans  $(\mathbf{C}^p, 0)$ . Soit  $(Y, 0) \subset (Z, 0)$  un sous-espace défini par l'idéal  $I_Y$  de  $\mathcal{O}_{Z,0}$  tel que :*

- 1)  $Y$  est de codimension 1 dans  $Z$  en  $0$ ;
- 2)  $|Y|$  est non singulier en  $0$ ;
- 3)  $Z$  est équirésoluble en  $0$  le long de  $Y$  au sens fort de [33];

Soit  $(U, 0)$  un germe de sous-espace analytique non singulier, défini par l'idéal  $I_U$  de  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^p, 0}$ , tel que  $U \cap |Y| = \{0\}$  et que l'intersection avec  $|Y|$  soit transverse en  $\{0\}$ . Alors la multiplicité de  $I_U \cdot \mathcal{O}_{Y, 0}$  égale celle de  $I_Y \cdot \mathcal{O}_{Z \cap U, 0}$ .



*Preuve:* Soient  $y_1, \dots, y_m$  des générateurs de l'idéal  $I_U$  définissant  $(U, 0)$  dans  $(\mathbb{C}^p, 0)$ , qui forment un système de coordonnées locales de  $|Y|$  en  $0$ . On note  $n: \bar{Z} \rightarrow Z$  la résolution simultanée de  $Z$  en  $0$ . (Comme  $Y$  est de codimension 1 dans  $Z$ , c'est la normalisation de  $Z$ .) Les fonctions  $y'_i$  obtenues en composant  $y_i$  avec  $n$  forment au voisinage de chaque point  $z_j (j = 1, \dots, l)$  de  $n^{-1}(0)$  une partie d'un système de coordonnées sur  $\bar{Z}$  puisque, par l'hypothèse d'équirésolution, le morphisme induit par  $n$  de  $|n^{-1}(Y)|$  sur  $|Y|$  est étale. L'image inverse par  $n$  de  $(Z \cap U, 0)$  est une union de germes  $(\Gamma_j, z_j)$  de courbes non singulières en les  $z_j$  qui sont transverses dans  $\bar{Z}$  à  $|n^{-1}(Y)|$ .

Comme  $n$  est fini et biméromorphe, la multiplicité de  $I_U \cdot \mathcal{O}_{Y, 0}$  est égale à la somme des multiplicités de  $I_U \cdot \mathcal{O}_{n^{-1}(Y), z_j} (j = 1, \dots, l)$ . Choisissons une coordonnée locale  $t_j$  de  $(\Gamma_j, z_j)$ . D'après ce qui précède, d'une part  $y'_1, \dots, y'_m, t_j$  forment un système de coordonnées de  $\bar{Z}$  en  $z_j$  et d'autre part  $(n^{-1}(Y), z_j)$  est défini par  $u_j t_j^{\alpha_j} = 0$ , où  $u_j$  est une unité et  $\alpha_j \in \mathbb{N}^*$ . La multiplicité de  $I_U \cdot \mathcal{O}_{n^{-1}(Y), z_j}$  est donc  $\alpha_j$ . Par ailleurs, comme  $n$  induit la normalisation  $\Pi(\Gamma_j, z_j) \rightarrow (Z \cap U, 0)$ , la multiplicité de  $I_Y \cdot \mathcal{O}_{Z \cap U, 0}$  égale la somme des multiplicités de  $I_Y \cdot \mathcal{O}_{\Gamma_j, z_j}$ . Or  $\mathcal{O}_{\Gamma_j, z_j} = \mathbb{C}\{t_j\}$  et  $I_Y \cdot \mathcal{O}_{\Gamma_j, z_j}$  est engendré par  $t_j^{\alpha_j}$ . D'où le résultat annoncé.

On a donc démontré que:

(5.1.3.8)

$$(-1)^{d-1-i} \deg(c_{d-1-i}(T) \cap [\mathcal{O}_i]) = \text{mult}(\mathfrak{N} \mathcal{O}_{\alpha_i \cap \bar{e}^{-1}(\gamma^{-1}(c_{d-1-i}(\mathcal{Q})))})$$



pourvu que  $\mathfrak{D}$  soit assez général (mult désigne la multiplicité d'idéaux au sens de P. Samuel).

Soit  $\hat{X}_i$  la transformée stricte de  $(X \cap L_1 \cap \dots \cap L_i)_{\text{red}}$  par la modification de Nash  $\nu$ . Si  $L_1, \dots, L_i$  sont assez généraux, du lemme (5.1.3.2), de la définition de la transformée stricte et de ce que  $\nu \circ \tilde{e} = e \circ \nu'$ , on déduit que  $\mathcal{X}_i$  est la transformée stricte de  $\hat{X}_i$  par  $\tilde{e}$  et  $\mathfrak{Y}_i = \tilde{e}^{-1}(\hat{Y}_i)$ , où  $\hat{Y}_i = \tilde{Y} \cap \hat{X}_i$ . Pourvu que le drapeau  $\mathfrak{D}$  soit assez général, le morphisme  $\tilde{e}_i: \mathcal{X}_i \rightarrow \hat{X}_i$  induit par  $\tilde{e}$  est fini au voisinage de chacun des points de  $\tilde{e}^{-1}(\gamma^{-1}(c_{d-1-i}(\mathfrak{D}))) \cap \mathfrak{Y}_i$ . On en déduit (cf. [42], Théorème 24 du chapitre 8):

$$(5.1.3.9) \quad \text{mult}\left(\mathfrak{N}\mathcal{O}_{\mathcal{X}_i \cap \tilde{e}^{-1}(\gamma^{-1}(c_{d-1-i}(\mathfrak{D})))}\right) = \text{mult}\left(\mathfrak{N}\mathcal{O}_{\hat{X}_i \cap \gamma^{-1}(c_{d-1-i}(\mathfrak{D}))}\right)$$

pourvu que  $\mathfrak{D}$  et  $L_1, \dots, L_i$  soient assez généraux.

Comme on a un morphisme fini biméromorphe  $\sigma_i: \hat{X}_i \rightarrow \tilde{X}_i$  de  $\hat{X}_i$  sur le modifié de Nash  $\tilde{X}_i$  de  $(X \cap D_i)_{\text{red}}$ , on a encore:

$$(5.1.3.10) \quad \text{mult}\left(\mathfrak{N}\mathcal{O}_{\hat{X}_i \cap \gamma^{-1}(c_{d-1-i}(\mathfrak{D}))}\right) = \text{mult}\left(\mathfrak{N}\mathcal{O}_{\gamma_i^{-1}(c_{d-i-1}(\mathfrak{D}[i]))}\right)$$

où  $\gamma_i: \tilde{X}_i \rightarrow G_{(i)}$  est le morphisme de Gauss et avec un drapeau  $\mathfrak{D}[i]$  de  $D_i$  qui se prolonge en  $\mathfrak{D}$ .

Montrons enfin:

$$\begin{aligned} \text{mult}\left(\mathfrak{N}\mathcal{O}_{\gamma_i^{-1}(c_{d-i-1}(\mathfrak{D}[i]))}\right) &= m_0(P_{d-1-i}(\mathfrak{D})) \\ &= m_0(\Gamma_i). \end{aligned}$$

L'égalité  $m_0(P_{d-1-i}(\mathfrak{D})) = m_0(\Gamma_i)$  où  $\Gamma_i = P_{d-i-1}(\mathfrak{D}[i])$  a été établie par (4.1.6) et (4.1.8) quand  $\mathfrak{D}$  est un drapeau assez général. Il nous reste à montrer:

$$\text{mult}\left(\mathfrak{N}\mathcal{O}_{\gamma_i^{-1}(c_{d-i-1}(\mathfrak{D}[i]))}\right) = m_0(\Gamma_i),$$

quand  $\mathfrak{D}$  est assez général.

Or d'après la remarque (5.1.3.3), si  $\mathfrak{D}$  et  $L_1, \dots, L_i$  sont assez généraux,  $\gamma_i^{-1}(c_{d-i-1}(\mathfrak{D}[i]))$  est la transformée stricte de  $\Gamma_i$ . Comme par définition  $m_0(\Gamma_i) = \text{mult}(\mathfrak{N}\mathcal{O}_{\Gamma_i,0})$  la formule de projection nous donne:

$$\begin{aligned} \text{mult}\left(\mathfrak{N}\mathcal{O}_{\gamma_i^{-1}(c_{d-i-1}(\mathfrak{D}[i]))}\right) &= \text{mult}(\mathfrak{N}\mathcal{O}_{\Gamma_i,0}) \\ &= m_0(\Gamma_i) \end{aligned}$$

et donc le théorème (5.1.1) est démontré.

(5.1.4) COROLLAIRE: Si la fibre  $\nu^{-1}(0)$  de la modification de Nash  $\nu: \tilde{X} \rightarrow X$  a au plus la dimension  $k$ , on a, pour un drapeau  $\mathfrak{D}$  assez général:

$$\text{Eu}_0(X) = \sum_{i=0}^k (-1)^i m_0(P_i(\mathfrak{D})),$$

en particulier si la modification de Nash est un morphisme fini  $\text{Eu}_0(X) = m_0(X)$ .

*Preuve:* Ceci résulte aussitôt de (4.2.4) et de (5.1.1)

(5.1.5) *Remarque:* Si  $\dim \nu^{-1}(0) \leq k$ , pour tout plan  $D_{d-k-1}$  passant par 0 de codimension  $d - k - 1$  assez général, on a:

$$\text{Eu}_0(X) = \text{Eu}_0(X \cap D_{d-k-1})_{\text{red}}.$$

(5.1.6) *Remarque:* On peut reformuler le théorème (5.1.1) de la façon suivante:

Soit  $\Gamma_1 = P_{d-1}(\mathbb{Q})$  une courbe polaire assez générale de  $X$ . Soit  $D_1$  un hyperplan passant par 0 assez général, on a l'égalité

$$\text{Eu}_0(X) = \text{Eu}_0(X \cap D_1)_{\text{red}} + (-1)^{d-1} m_0(\Gamma).$$

### 6. Conséquences et remarques

#### (6.1) Stratifications.

(6.1.1) Le théorème (5.1.1) montre que l'obstruction d'Euler de  $(X, 0)$  ne dépend que de l'algèbre locale complétée  $\hat{\mathcal{O}}_{X,0}$  de  $\mathcal{O}_{X,0}$ . Comme, dans le cas analytique complexe, on obtient bien un invariant local qui permet de construire les classes de Chern singulières (cf. § 3), on peut, comme A. Dubson (cf. [7]), utiliser le principe de Lefschetz pour en déduire qu'on a une expression algébrique de l'obstruction d'Euler sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Il serait préférable de faire une démonstration directe montrant que l'expression de (5.1.1) permet de construire une théorie des classes de Chern singulières: ce sera l'objet d'un prochain travail.

On a une autre conséquence intéressante de (5.1.1):

(6.1.2) LEMME: *L'application de  $X$  dans  $\mathbf{Z}$  qui à  $x \in X$  fait correspondre  $\text{Eu}_x X$  est constructible.*

Ce résultat est énoncé avec une esquisse de preuve par R. MacPherson ([24], § 3, lemma 2) et aussi prouvé par A. Dubson ([7]).

Les points de  $X$  où la multiplicité d'une  $k$ -ième variété polaire générique est constante forment un constructible d'après les propriétés des multiplicités. Or d'après (5.1.1) l'obstruction d'Euler est somme alternée de ces multiplicités.

(6.1.3) *Remarque:* Attention: l'obstruction d'Euler n'est semicontinue ni supérieurement ni inférieurement. (Considérer le parapluie de Cayley-Whitney de  $\mathbf{C}^3$  donné par  $X^2 - Y^2Z = 0$ .)

(6.1.4) Dans le cas où  $(X, 0)$  est une hypersurface à singularité isolée, il résulte de [34] que, pour  $d \geq 3$ :

$$\frac{m_0(\Gamma_i)}{m_0(\Gamma_{i+1})} \geq \frac{m_0(\Gamma_{i+1})}{m_0(\Gamma_{i+2})} \quad (0 \leq i \leq d - 3).$$

On se demande dans quels cas cette inégalité reste vraie. Ce n'est pas toujours le cas, puisqu'il existe des cas où  $m_0(\Gamma_i) = 0$  et  $m_0(\Gamma_{i'}) \neq 0$  pour  $i' \geq i + 1$

(6.1.5) Pour calculer la classe de Chern-MacPherson, nous avons vu (cf. (3.2)) que la difficulté essentielle est de construire un cycle  $\sum_{i \in I} n_i V_i$  de  $X$  pour lequel  $\Phi(\sum_{i \in I} n_i V_i) = \mathbf{1}_X$ , i.e., tel que pour tout  $x \in X$  on ait:

$$\sum_{i \in I} n_i \text{Eu}_x(V_i) = 1.$$

Nous allons donner un procédé constructif pour obtenir un tel cycle.

Pour simplifier nous supposons que  $X$  est une variété algébrique irréductible compacte.

Soit  $Y$  un espace analytique complexe réduit équidimensionnel. On note  $\Gamma_x^*(Y)$  la suite des multiplicités des variétés polaires génériques de  $Y$  en  $x$ .

Nous allons définir une suite décroissante de sous-variétés algébriques de  $X$ :

$$(6.1.5.1) \quad F_0 \supset F_1 \supset \dots \supset F_k \supset \dots$$

où

$$F_0 = X,$$

$$F_1 = \Sigma, \text{ lieu singulier de } X.$$

On note  $(F_{1, j_1})_{j_1 \in J_1}$  les composantes irréductibles de  $F_1$ ,  $F_2$  est la réunion du lieu singulier de  $F_1$  et des ensembles algébriques fermés en nombre fini, formés des  $x \in F_{1, j_1}$  tels que  $\Gamma_x^*(X)$  ou  $\Gamma_x^*(F_{1, j_1})$  ( $j_1 \in J_1$ ) ne prenne pas la valeur qu'il prend en un point générique de  $F_{1, j_1}$ . On note  $(F_{2, j_2})$  (avec  $j_2 \in J_2$ ) les composantes irréductibles de  $F_2$ . En général soit  $F_k$  la réunion du lieu singulier de  $F_{k-1}$  et des ensembles algébriques fermés, en nombre fini, formés des  $x \in F_{k-1, j_{k-1}}$  ( $j_{k-1} \in J_{k-1}$ ) tels que l'une des suites d'entiers

$$\Gamma_x^*(X), \Gamma_x^*(F_{1, j_1}) (j_1 \in J_1), \dots, \Gamma_x^*(F_{k-1, j_{k-1}}) \quad (j_{k-1} \in J_{k-1})$$

ne prenne pas en  $x$  la valeur qu'elle prend en un point générique de  $F_{k-1, j_{k-1}}$ . On note  $(F_{k, j_k})_{j_k \in J_k}$  les composantes irréductibles de  $F_k$ .

Quand  $k > \dim X$ , on a  $F_k = \emptyset$ , car ce processus donne une suite strictement décroissante.

Pour rendre la notation cohérente, on note  $F_{0,0} = F_0$  et  $J_0 = \{0\}$ .

On remarque que sur  $F_{k, i_k} - F_{k+1}$  la suite d'entiers  $\Gamma_x^*(F_{k, i_k})$  est celle donnée par un point non singulier de  $F_{k, i_k}$ . Les suites  $\Gamma_x^*(F_{l, i_l})$  ( $l \leq k, i_l \in J_l$ ) étant constantes sur  $F_{k, i_k} - F_{k+1}$ , en tout point  $x \in F_{k, i_k} - F_{k+1}$ ,  $\text{Eu}_x(F_{l, i_l})$  pour  $l \leq k$  et  $i_l \in J_l$ , prend une même valeur notée  $E_{k, i_k}(l, i_l)$ .

On définit une suite d'entiers  $n_{k, i_k}$  par:

$$(6.1.5.2) \quad \begin{cases} n_{0,0} = 1 \\ n_{1, i_1} + n_{0,0} E_{1, i_1}(0,0) = 1 \\ \dots \\ n_{k, i_k} + \sum_{0 \leq l \leq k-1} \sum_{i_l \in J_l} n_{l, i_l} E_{k, i_k}(l, i_l) = 1. \end{cases}$$

On définit le cycle de MacPherson:

$$(6.1.5.3) \quad \Phi^{-1}(\mathbf{1}_X) = \sum_k \sum_{i_k \in J_k} n_{k, i_k} F_{k, i_k}.$$

La classe de Chern-MacPherson est donc donnée par:

$$(6.1.5.4) \quad c(X) = \sum_k \sum_{i_k \in J_k} n_{k, i_k} c_M(F_{k, i_k})$$

où par abus de notation on a noté  $c_M(F_{k, i_k})$  l'image dans l'homologie de  $X$  de la classe de Chern-Mather de  $F_{k, i_k}$ .

(6.1.5.5) *Remarque:* Dans le cas d'un espace analytique complexe réduit dénombrable à l'infini on peut définir de façon analogue un cycle de MacPherson donné par une somme localement finie.

Dans le cas d'un germe d'espace analytique complexe réduit, la construction précédente donne explicitement la *classe de Chern locale* (comparer à [14]).

(6.1.5.6) *Remarque:* La description donnée ci-dessus du cycle de MacPherson est constructive (comparer à [7] et [4], [30]).

En s'inspirant d'une formule annoncée par A. Dubson dans [8] on peut montrer que les entiers  $n_{ij}$  égalent  $1 - \chi_{ij}$  où  $\chi_{ij}$  est la caractéristique d'Euler-Poincaré obtenue de la façon suivante:

On suppose  $V$  plongé dans  $\mathbf{P}^N$ .

Soient  $x_{ij}$  un point de  $F_{ij}$  assez général,  $B_{ij}$  une boule centrée en  $x_{ij}$  dans un ouvert affine contenant  $x_{ij}$  dans  $\mathbf{P}^N$  et de rayon assez petit. Soit  $L_{ij}$  un espace affine assez général ne contenant pas  $x_{ij}$ , passant près de  $x_{ij}$  et dont la codimension égale  $\dim F_{ij} + 1$ , alors:

$$\chi_{ij} = \chi(B_{ij} \cap L_{ij} \cap V).$$

Comme on le verra en (6.1.8), cette caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi_{ij}$  ne dépend que de  $F_{ij}$ .

Dans [36] B. Teissier a démontré:

(6.1.6) THÉORÈME: Soit  $X$  un espace analytique réduit purement de dimension  $d$ . Soient  $Y$  un sous-espace analytique non singulier de  $X$  et  $0 \in Y$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes:

- 1) La multiplicité des variétés polaires locales  $P_k(X, y)$  des germes  $(X, y)$  pour  $y \in Y$  est localement constante sur  $Y$  au voisinage de  $0$ , pour  $0 \leq k \leq d - 1$ ;
- 2) Le couple  $(X^0, Y)$  satisfait les conditions de Whitney en  $0$ , où  $X^0$  désigne la partie non singulière de  $X$ .

Il résulte de ce théorème:

(6.1.7) COROLLAIRE: La stratification de  $X$  dont les strates sont les  $F_{ij} - \cup_{k>i} F_{kl}$  (cf. (6.1.5)) satisfait les conditions de Whitney et est appelée stratification canonique de  $X$ .

On en déduit:

(6.1.8) PROPOSITION: Soit  $X$  un espace analytique réduit purement de dimension  $d$ . Soit  $X = \amalg X_\alpha$  la stratification de Whitney canonique donnée dans (6.1.7). Soient  $x \in X_\alpha$  et  $(X, x) \subset (\mathbf{C}^{N+1}, x)$  un plongement local. Pour chaque  $i \geq d_\alpha = \dim X_\alpha$ , il existe un ouvert dense  $W$  de la grassmannienne des plans de  $\mathbf{C}^{N+1}$  de codimension  $i$  tel que, pour tout  $L_0 \in W$ , pour toute boule  $B$  centrée en  $x$  de rayon assez petit et pour tout  $L_i$  parallèle à  $L_0$  assez proche de  $L_0$  et suffisamment général, la caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi(B \cap X \cap L_i)$  ne dépend que de  $(X, X_\alpha)$ . On la notera  $\chi_{i-d_\alpha}(X, X_\alpha)$ .

*Démonstration:* On considère une rétraction linéaire locale de  $(\mathbf{C}^{N+1}, x)$  sur  $(X_\alpha, x)$ . Cette rétraction induit  $r: (X, x) \rightarrow (X_\alpha, x)$ . Si  $l$  est une projection linéaire sur  $\mathbf{C}^{i-d_\alpha}$  assez générale, la restriction de  $\varphi = (r, l): (X, x) \rightarrow (X_\alpha \times \mathbf{C}^{i-d_\alpha}, (x, 0))$  à chaque strate  $X_\beta$  adjacente à  $X_\alpha$  au voisinage de  $x$  est de rang maximum en dehors de la variété polaire  $P_{d_\beta-i+1}(X_\beta, x)$  et de plus on montre facilement que cette stratification  $(X_\alpha)$  de  $X$  satisfait la condition  $A_\varphi$  (condition "sans éclatement") de Thom (cf. [37]). En choisissant un voisinage convenable de  $x$  dans  $X$ ,  $\varphi$  y induit une fibration topologique au-dessus du complémentaire de l'image par  $\varphi$  des  $P_{d_\beta-i+1}(X_\beta, x)$  dans un voisinage de  $(x, 0)$  dans  $X_\alpha \times \mathbf{C}^{i-d_\alpha}$ . Ceci donne le résultat cherché en utilisant le théorème d'isotopie de Thom-Mather (cf. [25]).

(6.1.9) THÉORÈME: Soit  $X = \amalg X_\alpha$  la stratification de Whitney de  $X$  donnée dans (6.1.7). Soit  $x \in X_\alpha$ ; on a l'égalité:

$$\begin{aligned} \chi_1(X, X_\alpha) - \chi_2(X, X_\alpha) \\ = \sum_{\beta \neq \alpha} (-1)^{d_\beta - d_\alpha - 1} m_x(P_{d_\beta - d_\alpha - 1}(\bar{X}_\beta, x))(1 - \chi_1(X, X_\beta)). \end{aligned}$$

*Démonstration:* Par une section par un plan assez général de codimension  $d_\alpha$  passant par  $x$  on se ramène facilement au cas où  $d_\alpha = 0$ . Dans ce cas  $X_\alpha = \{x\}$ ; considérons une projection linéaire de  $\mathbb{C}^{N+1}$  sur  $\mathbb{C}^2$  assez générale. Soit  $\pi$  la restriction de cette projection à un voisinage assez petit de  $x$  dans  $X$  (que l'on notera encore  $X$ ). La stratification  $(X_\beta)$  de  $X$  satisfait la condition  $A_\pi$  de Thom, donc  $\pi$  induit une fibration topologique au-dessus du complémentaire de la réunion des images par  $\pi$  des courbes polaires des adhérences  $\bar{X}_\beta$  des strates  $X_\beta$ . On en déduit par Mayer-Vietoris:

$$\chi_1(X, \{x\}) = \left\{ 1 - \sum_{\beta \neq \alpha} m_{\pi(x)} \left( \pi \left( P_{d_\beta - 1}(\bar{X}_\beta, x) \right) \right) \right\} \chi_2(X, \{x\}) + \sum_{\beta \neq \alpha} m_{\pi(x)} \left( \pi \left( P_{d_\beta - 1}(\bar{X}_\beta, x) \right) \right) \cdot \chi_\beta$$

où  $\chi_\beta$  est la caractéristique d'Euler-Poincaré de la fibre au-dessus d'un point général de la courbe  $\pi(P_{d_\beta - 1}(\bar{X}_\beta, x))$ . D'après le lemme de transversalité des variétés polaires (4.1.8) on a l'égalité des multiplicités.

$$m_{\pi(x)} \left( \pi \left( P_{d_\beta - 1}(\bar{X}_\beta, x) \right) \right) = m_x \left( P_{d_\beta - 1}(\bar{X}_\beta, x) \right).$$

Par ailleurs le lemme 3 de [36] implique que la fibre au-dessus d'un point  $y_\beta$  général de  $\pi(P_{d_\beta - 1}(\bar{X}_\beta, x))$  n'a qu'un seul point  $x_\beta$  sur  $P_{d_\beta - 1}(\bar{X}_\beta, x)$ . Soit  $\chi'_\beta$  la caractéristique d'Euler-Poincaré de la trace dans un voisinage convenable de  $x_\beta$  d'une fibre voisine de la fibre  $\pi^{-1}(y_\beta)$ . On a, en utilisant encore le théorème de Mayer-Vietoris et la structure conique locale d'une singularité (cf. [5]):

$$\chi_\beta = \chi_2(X, \{x\}) - \chi'_\beta + 1.$$

On a donc

$$\chi_1(X, \{x\}) = \chi_2(X, \{x\}) + \sum_{\beta \neq \alpha} m_x \left( P_{d_\beta - 1}(\bar{X}_\beta, x) \right) (1 - \chi'_\beta).$$

Pour calculer  $\chi'_\beta$  on procède comme suit. On projette linéairement  $(X, x_\beta)$  sur  $(\mathbb{C}^{d_\beta + 1}, 0)$ . Si cette projection est assez générale, elle induit à l'extérieur de l'image de  $X_\beta$  une fibration topologique dont les fibres ont leur caractéristique d'Euler-Poincaré égale à  $\chi_1(X, X_\beta)$  et au-dessus des points de l'image de  $X_\beta$  les fibres sont contractiles. En utilisant à nouveau le théorème de Mayer-Vietoris on trouve:

$$\chi'_\beta = (-1)^{d_\beta - 1} \chi_1(X, X_\beta) + (1 + (-1)^{d_\beta - 2}),$$

d'où:

$$\chi_1(X, \{x\}) = \chi_2(X, \{x\}) + \sum_{\beta \neq \alpha} (-1)^{d_\beta - 1} m_x \left( P_{d_\beta - 1}(\bar{X}_\beta, x) \right) (1 - \chi_1(X, X_\beta)).$$

Ce qui démontre le théorème (6.1.9).

(6.1.10) *Remarque:* La formule de (6.1.9) permet de montrer par récurrence que les multiplicités des variétés polaires locales de  $(X, x)$  s'expriment en fonction des  $\chi_i(\bar{X}_\beta, X_{\beta'})$  avec  $x \in \bar{X}_{\beta'} \subset \bar{X}_\beta$ . Ceci permet de donner une caractérisation topologique de la stratification de (6.1.7).

(6.2) *Quelques calculs effectifs de l'obstruction d'Euler.*

Nous donnons ici quelques conséquences de ce qui précède. Dans le cas où  $(X, 0)$  a une singularité isolée on retrouve le résultat de A. Dubson ([7] Remarque p. 240):

(6.2.1) **PROPOSITION:** *Supposons que  $(X, 0)$  a une singularité isolée en 0. Si  $H$  est un hyperplan de  $\mathbf{C}^{N+1}$  suffisamment général voisin de 0 mais ne contenant pas 0, pour un représentant convenable  $X$  de  $(X, 0)$ , la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $X \cap H$  égale  $\text{Eu}_0(X)$ .*

*Preuve:* Dans ce cas la stratification de Whitney de (6.1.7) est réduite à  $\{0\}$ ,  $X^0$ , et (6.1.9) donne:

$$\chi_1(X, \{0\}) - \chi_2(X, \{0\}) = (-1)^{d-1} m_0(P_{d-1}(X, 0)).$$

Soit  $D_1$  un hyperplan assez général passant par 0; on a:

$$\chi_1((X \cap D_1)_{\text{red}}, \{0\}) - \chi_2((X \cap D_1)_{\text{red}}, \{0\}) = (-1)^{d-2} m_0(P_{d-2}((X \cap D_1)_{\text{red}}, 0)).$$

D'après (4.1.9):

$$m_0(P_{d-2}((X \cap D_1)_{\text{red}}, 0)) = m_0(P_{d-2}(X, 0))$$

et évidemment on a:

$$\chi_1((X \cap D_1)_{\text{red}}, \{0\}) = \chi_2(X, \{0\}),$$

ce qui donne le résultat en itérant et en appliquant (5.1.1)

(6.2.2) *Remarque:* Cette proposition donne le résultat démontré par A. Dubson [7], M. Kato [15] et R. Piene [29]; si  $(X, 0)$  est une hypersurface à singularité isolée en 0, on a:

$$\text{Eu}_0(X) = 1 + (-1)^{d-1} \mu^{(d)}(X, 0)$$

où  $\mu^{(d)}(X, 0)$  est le nombre de Milnor en 0 d'une section hyperplane passant par 0 suffisamment générale de  $X$ .

En effet ceci résulte immédiatement de la proposition et des résultats de J. Milnor dans [26] sur les fibres de Milnor des hypersurfaces complexes.

On peut aussi le déduire immédiatement du théorème (5.1.1) de façon algébrique en utilisant le fait démontré dans [35] (2.8.3, Corollary p. 610) que:

$$m_0(\Gamma_{d-i-1}) = \mu^{(i+1)}(X, 0) + \mu^{(i)}(X, 0)$$

où  $\mu^{(l)}(X, 0)$  est le nombre de Milnor en 0 de l'intersection de  $X$  par un plan général de dimension  $l$  passant par 0.

Dans le cas où la dimension en 0 du lieu singulier  $\Sigma$  de  $X$  égale 1, on obtient un résultat énoncé par A. Dubson dans le cas  $d = 2$  ([8]):

(6.2.3) PROPOSITION: *On suppose que  $\dim_0 \Sigma = 1$ . Soit  $H_t$  l'hyperplan défini par  $l = t$ , où  $l$  est une forme linéaire de  $\mathbf{C}^{N+1}$  assez générale. Avec  $t \neq 0$ , assez petit et  $X$  un représentant convenable de  $(X, 0)$ , on a, pour tout  $t \neq 0$  et assez petit:*

$$Eu_0(X) = \chi(X \cap H_t) - \sum (1 - E_i) \cdot m_i$$

où  $m_i$  est la multiplicité de la  $i$ -ème composante  $\Sigma_i$  du lieu singulier  $\Sigma$  de  $X$ , et  $E_i$  l'obstruction d'Euler de  $X$  en un point quelconque de  $\Sigma_i - \{0\}$ .

*Preuve:* Dans ce cas la stratification de  $X$  donnée par (6.1.7) est  $X^0, \Sigma_i - \{0\}, \{0\}$ . Donc:

$$\begin{aligned} \chi_1(X, \{0\}) - \chi_2(X, \{0\}) &= (-1)^{d-1} m_0(P_{d-1}(X, 0)) \\ &\quad + \sum m_i (1 - \chi_1(X, \Sigma_i - \{0\})). \end{aligned}$$

Il suffit de remarquer que:

$$\chi_1(X, \Sigma_i - \{0\}) = E_i$$

et que si  $D_1$  est un hyperplan passant par 0 assez général on a toujours l'égalité (cf. (5.1.6)):

$$(6.2.4) \quad Eu_0(X) = Eu_0((X \cap D_1)_{\text{red}}) + (-1)^{d-1} m_0(P_{d-1}(X, 0)).$$

Dans ce cas on a  $Eu_0(X \cap D_1) = \chi_2(X, \{0\})$  d'après (6.2.1), ce qui démontre (6.2.3).

(6.3) *Applications aux variétés projectives.*

Soit  $V$  une variété projective complexe de dimension  $d - 1$  plongée dans un espace projectif  $\mathbf{P}^N$ .

Les variétés polaires  $P_k(\mathcal{O})$  associée au cône  $X$  en 0 dans  $\mathbf{C}^{N+1}$  associé à  $V$  sont des cônes associés aux variétés polaires  $M_k$  de  $V$  définies classiquement par Todd dans [38], puis dans le cas singulier par R. Piene dans [28].

Si  $\mathcal{O}$  est un drapeau assez général, on en déduit aussitôt que:

$$m_0(\Gamma_{d-1-i}) = \text{degré de la } i\text{-ème classe polaire } [M_i] \text{ de } V,$$

où, comme dans (5.1.1),  $\Gamma_l$  est la courbe polaire locale de  $(X \cap D_l)_{\text{red}}$  en 0.



En particulier si  $V$  est une hypersurface,  $m_0(\Gamma_{d-1-i})$  égale le degré de la variété duale de l'hypersurface intersection de  $V$  et d'un plan de codimension  $i$  dans  $\mathbf{P}^N$  assez général.

On peut tirer de ceci de nombreuses formules effectives généralisant les formules de Plücker effectives de [33] (comparer à [28]) et valables dans les cas où les singularités de  $V$  sont quelconques. Elles s'appuient sur le théorème suivant:

(6.3.1) THÉORÈME: *Le degré de la classe de Chern-Mather de degré  $d - 1$  de  $V$  égale à la somme des obstructions d'Euler en 0 des sections planes génériques de dimension au moins 1 du cône  $X$  sur  $V$ :*

$$\deg(c_M(V))_{d-1} = \sum_{i=1}^d \text{Eu}_0(X \cap D_i)_{\text{red}}$$

où  $D_i$  est un plan de  $\mathbf{C}^{N+1}$  passant par 0 de codimension  $i$  assez général.

*Démonstration:* En utilisant des relations de Todd dans le cas singulier, R. Piene donne dans [29] (théorème 3) la relation:

$$(c_M(V))_{d-1} = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-1-i} (i+1) c_1(L)^i \cap [M_{d-1-i}].$$

En faisant comme dans la démonstration de (5.1.1), on obtient:

$$\deg(c_M(V))_{d-1} = \sum_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-1-i} (i+1) m_0(\Gamma_i)$$

où  $\Gamma_i$  est la courbe polaire de  $(X \cap D_i)_{\text{red}}$  en 0.

En utilisant (5.1.1) on obtient aussitôt le résultat.

(6.3.2) Remarque: Si les singularités  $x_1, \dots, x_k$  de  $V$  sont isolées, comme la classe de Chern-MacPherson de  $V$  vaut:

$$c(V) = c_M(V) + \sum_{i=1}^k (1 - E_i) \{x_i\}$$

avec  $E_i = \text{Eu}_{x_i}(V)$ , on a la formule suivante qui donne la caractéristique d'Euler-Poincaré de  $V$ :

$$\chi(V) = \sum_{i=1}^d \text{Eu}_0((X \cap D_i))_{\text{red}} + \sum_{i=1}^k (1 - E_i)$$

où  $D_i$  est un plan de  $\mathbf{C}^{N+1}$  passant par 0 de codimension  $i$  assez général.

En fait nous avons le résultat plus général suivant déduit de (6.1.5.4) et (6.3.1):

(6.3.3) COROLLAIRE: Soit  $V$  une variété projective. Soit  $\sum_{\alpha \in A} n_{\alpha} V_{\alpha}$  son cycle de MacPherson (cf. 6.2.5.3). On a:

$$\chi(V) = \sum_{i=1}^d \text{Eu}_0((X \cap D_i))_{\text{red}} + \sum_{\substack{\alpha \in A \\ d_{\alpha} < d}} n_{\alpha} \left( \sum_{i=1}^{d_{\alpha}} \text{Eu}_0((X_{\alpha} \cap D_i))_{\text{red}} \right)$$

où  $X_{\alpha}$  est le cône sur  $V_{\alpha}$  de sommet 0 dans  $\mathbf{C}^{N+1}$  et  $d_{\alpha}$  est la dimension de  $X_{\alpha}$  ( $d = \dim X$ ).

On peut regarder d'une part cette formule comme une généralisation des formules de Plücker si l'on suppose qu'on peut calculer  $\chi(V)$ , et d'autre part c'est une formule effective (cf. (6.1.5)) pour calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré  $\chi(V)$  de  $V$ .

(6.4) Un théorème pratique.

On peut calculer l'obstruction d'Euler d'un germe d'espace analytique réduit en se ramenant à celui d'une hypersurface, grâce au théorème suivant:

(6.4.1) THÉORÈME: Soit  $(X, 0)$  un germe d'espace analytique complexe réduit purement de dimension  $d$  plongé dans  $\mathbf{C}^{N+1}, 0$ . Il existe un ouvert de Zariski dense  $\Omega$  de l'espace des projections linéaires de  $\mathbf{C}^{N+1}$  sur  $\mathbf{C}^{d+1}$  tel que pour tout  $p \in \Omega$ , l'obstruction d'Euler de  $X$  en 0 égale celle de l'hypersurface réduite  $X_1 = p(X)$  de  $\mathbf{C}^{d+1}$  en 0.

Démonstration: C'est une conséquence immédiate de (4.2.3) et (5.1.1).

(6.5) Remarque: Dans un travail récent, [39], A. N. Varchenko étudie certaines intégrales de courbure sur l'intersection  $X \cap \mathbf{S}_{\varepsilon}^5 = M(\varepsilon)$  d'une surface à singularité isolée  $(X, 0) \subset (\mathbf{C}^3, 0)$  et d'une sphère  $\mathbf{S}_{\varepsilon}^5$  de rayon  $\varepsilon$  assez petit centrée en 0. Il indique que ces intégrales de courbure admettent un développement asymptotique  $\sum a_{j,p} (\text{Log } \varepsilon)^j \varepsilon^p$  dont le terme constant  $a_{0,0}$  est égal à  $\mu^{(2)}(X, 0) - 1$  (et donc d'après 6.1.8 à  $-\text{Eu}_0(X)$ ). Son calcul est indirect et utilise le résultat de [35], (2.8.3) déjà utilisé par nous en 6.22.

Nous avons remarqué que ce calcul est très proche, après un choix d'une résolution convenable des singularités de  $(X, 0)$ , du calcul d'obstruction à la Bott-Chern intervenant dans la relation de González-Verdier.

Par conséquent, au moins dans le cas où  $(X, 0) \subset (\mathbf{C}^{N+1}, 0)$  est un germe d'espace analytique à singularité isolée, l'obstruction d'Euler  $\text{Eu}_0(X)$  peut s'exprimer comme terme constant par rapport à  $\varepsilon$  de certaines intégrales de courbure sur  $X \cap \mathbf{S}_{\varepsilon}^{2N-1}$ . Nous reviendrons sur ce sujet dans un prochain travail.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BOREL ET F. HIRZEBRUCH: Characteristic classes and homogeneous spaces II. Appendix 1, Amer. J. Math. **81** (1959), 363–371.
- [2] A. BOREL ET A. HAEFLIGER: La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique, Bull. Soc. Mat. Fr. **89** (1961), 461–513.
- [3] R. BOTT ET S. S. CHERN: Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections, Acta Math. **114** (1965), 71–112.
- [4] J. P. BRASSELET: Classes de M. H. Schwartz et classes de MacPherson, Exposé au Séminaire de géométrie analytique de l'E.N.S. 1978–79.
- [5] D. BURGHELEA ET A. VERONA: Local homological properties of analytic sets, Manuscr. Math. **7** (1972), 55–66.
- [6] D. CHENIOT: Sur les sections transversales d'un ensemble stratifié, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris **275**, Série A (1972), 915–916.
- [7] A. DUBSON: Classes caractéristiques des variétés singulières, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris **287**, série A (1978), 237.
- [8] \_\_\_\_: In Séminaire de géométrie analytique de l'Ecole Normale Supérieure, 1978–79, (même titre) (Notes de l'exposé oral).
- [9] G. GONZÁLEZ-SPRINBERG: L'obstruction locale d'Euler et le théorème de MacPherson, Séminaire de géométrie analytique de l'E.N.S. 1978–79.
- [10] A. GROTHENDIECK: Sur la théorie des classes de Chern, Bull. Soc. Math. Fr. **86** (1958), 137–154.
- [11] \_\_\_\_: Familles d'espaces complexes, Séminaire Cartan 1960–61, Exposé n° 12.
- [12] J. P. G. HENRY ET LÊ DŨNG TRÁNG: Limites d'espaces tangents, Séminaire F. Norguet 1974–75, Springer Lecture Notes, n° 482, p. 251.
- [13] H. HIRONAKA: Introduction to the theory of infinitely near singular points, Mem. Mat. Inst. Jorge Juan n° 28, Madrid 1974.
- [14] B. IVERSEN: Local Chern classes, Ann. Sci. E.N.S. **9** (1976), 155–169.
- [15] M. KATO: Singularities and some global topological properties, Proc. R.I.M.S. Singularities Symposium, Kyoto University, April 1978.
- [16] S. KLEIMAN: On the transversality of a general translate, Compositio Math. **28** (1974), 287–297.
- [17] \_\_\_\_: Enumerative theory of singularities, in *Real and Complex Singularities*, Oslo 1976, Per Holm ed., Noordhoff 1977.
- [18] LÊ DŨNG TRÁNG: Sur les cycles évanouissants des espaces analytiques, Note aux C.R. Acad. Sc. Paris **288** (1979), 283–285.
- [19] \_\_\_\_: Limites d'espaces tangents. A paraître in Proc. Symp. on Algebraic Singularities, Rheinhardtsbrunn 1978. Accademia Leopoldina. Preprint Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique, 1978.
- [20] \_\_\_\_: Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe, Ann. Inst. Fourier **23** (1973), 261–270.
- [21] LÊ DŨNG TRÁNG ET B. TEISSIER: Equisingularité et résolution simultanée (en préparation) voir en attendant [33].
- [22] M. LEJEUNE-JALABERT: Le théorème  $AF + BG$  de Max Noether, in Séminaire sur les singularités, Publications de l'Université Paris VII, 1980.
- [23] M. LEJEUNE-JALABERT ET B. TEISSIER: Clôture intégrale des idéaux et équisingularité, Séminaire Ecole Polytechnique 1974–75. Disponible Institut de Maths. Pures, Université de Grenoble, F-38402 Saint-Martin-d'Hères.
- [24] R. MACPHERSON: Chern classes for singular algebraic varieties, Ann. of Math. **100** (1974), 423–432.
- [25] J. MATHER: Notes on topological stability, Mimeographed notes, Harvard University.

- [26] J. MILNOR: Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Studies n°61, Princeton University Press, 1968.
- [27] A. NOBILE: Some properties of the Nash blowing-up, Pacific J. Math. **60** (1975), 297–305.
- [28] R. PIENE: Polar classes of singular varieties, Ann. Sci. E.N.S. **11** (1978).
- [29] \_\_\_\_: Cycles polaires et classes de Chern, Séminaire sur les singularités des surfaces 1977–78, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France.
- [30] M. H. SCHWARTZ: Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe, C.R. Acad. Sc. Paris **260** (1965), 3261–3264 et 3535–3537.
- [31] B. TEISSIER: The hunting of invariants in the geometry of discriminants, Proc. Nordic Summer School "Real and Complex Singularities" Oslo, 1976 (Noordhoff 1977).
- [32] \_\_\_\_: Variétés polaires I, Inv. Math. **40** (1977), 267–292.
- [33] \_\_\_\_: Cycles évanescents et résolution simultanée, Séminaire sur les singularités des surfaces 1976–77, Springer Lecture Notes n° 777.
- [34] \_\_\_\_: Sur une inégalité à la Minkowski pour les multiplicités, Ann. of Math. **106** (1977), 38–44.
- [35] \_\_\_\_: Introduction to equisingularity problems, Proc. A.M.S. Symp. n°29, Arcata, California, 1974.
- [36] \_\_\_\_: Variétés polaires locales et conditions de Whitney, Note aux C.R. Acad. Sc. **290** (1980), 799–802.
- [37] R. THOM: Ensembles et morphismes stratifiés, Bull. A.M.S. **75** (1969), 240–284.
- [38] J. A. TODD: The arithmetical invariants of algebraic loci. Proc. London Math. Soc. **43** (1937).
- [39] A. N. VARCHENKO: Des limites d'intégrales de courbure sur le bord d'une singularité isolée de surfaces analytiques de  $\mathbb{C}^3$  sont des entiers, Uspechi Mat. Nauk. **33** Fascicule 6, 1978.
- [40] H. WHITNEY: Tangents to an analytic variety, Ann. of Math. **81** (1965), 496–549.
- [41] \_\_\_\_: Local properties of analytic varieties, in *Differential and Combinatorial Topology*, Ed. by Cairns, Princeton University Press, 1965.
- [42] O. ZARISKI AND P. SAMUEL: *Commutative Algebra*, Tome 2, Van Nostrand, New York, 1960.
- [43] O. ZARISKI: On the Poincaré group of a projective hypersurface, Ann. of Math. **38** (1937), 131–141.
- [44] \_\_\_\_: An Introduction to the Theory of Algebraic Surfaces, Springer Lectures Notes **83**, 1972.

(Received July 24, 1979)

(Revised April 22, 1981)