Frédéric Hélein : équations différentielles

A prévoir : création de salons zoom,

<u>Notations</u> : 1 examen final (mai) + 1 partiel (~ avril)] au mieux en salle.

+ Devoirs à rendre régulièrement.

<u>Equation différentielle</u> <u>inconnue</u> : fonction d'une ou plusieurs variables
$y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$

<u>équation</u> : relation entre y et ses dérivées qui doit être satisfaite <u>à chaque instant.</u>

$\updownarrow$ idée de la dynamique

<u>Exemple historique</u> <u>Newton</u> $m\ddot{y} = \nabla V(y)$ (Force qui dérive d'un potentiel V)

$$\Leftrightarrow \quad m \frac{d^2}{(dt)^2}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \frac{\partial V}{\partial x_3} \end{pmatrix}(y(t))$$

$t \longmapsto y(t) \in \mathbb{R}^3$

On ne considère ici que des équations avec <u>une</u> seule <u>variable</u> :

équations différentielles <u>ordinaires</u> (EDO ou ODE)

On n'en parlera pas dans ce cours

($\neq$ équations aux dérivées partielles : fonctions de plusieurs variables (EDP ou PDE)

Lien avec la théorie des nombres : $\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s}$: méromorphes

<u>Mathématiquement</u> On se donne
- $k \in \mathbb{N}^*$ (ordre de l'équation)
- U ouvert $\subset \mathbb{R}^{k+2}$
- $F : U \longrightarrow \mathbb{R}$

On cherche (I, y) où $\begin{cases} I \subset \mathbb{R} \\ y : I \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$ telle que $\boxed{\forall t \in I, \ (t, y(t), \dots, y^{(k)}(t)) \in U}$

tel que : $\boxed{F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k)}(t)) = 0, \quad \forall\, t \in I.}$

Forme la plus générale que nous verrons pour une fonction inconnue scalaire.

Exemple $k=1$ (premier ordre) $F(t, y(t), y'(t)) = 0$

Cas particulier : F ne dépend pas de t : on dit que l'équation est autonome

Exemple $m\ddot{y} = m\dfrac{d^2y}{dt^2} = \underbrace{-k\dot{y}}_{\text{Force de frottement}} + \underbrace{\sin t}_{\text{excitation périodique}} \iff \boxed{m\ddot{y} + k\dot{y} - \sin t = 0}$

Donné $\longrightarrow \boxed{F(t, x_0, x_1, x_2) = m\underset{\text{accélération}}{x_2} + k\underset{\text{vitesse}}{x_1} - \sin t.}$

décrit les contraintes

$\boxed{m\ddot{y} + k\dot{y} - \sin t = 0} \iff \begin{cases} F \circ y^{[2]}(t) = 0 \\ \text{où } y^{[2]}(t) = (t, y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t)) \end{cases}$

Plus généralement on étudiera des systèmes d'équations différentielles ordinaires.

Inconnue : $\boxed{(I, y)}$ où $I \subset \mathbb{R}$, $y : I \to \mathbb{R}^n$

Données $U \subset \mathbb{R}^{1+(k+1)n}$ $\boxed{F : U \to \mathbb{R}^n}$

$\boxed{y^{(j)} = \dfrac{d^j y}{(dt)^j}}$

où $\boxed{F(\underset{\text{dans } I}{t}, \underbrace{y(t)}_{\mathbb{R}^n}, \underbrace{y^{(1)}(t)}_{\mathbb{R}^n}, \dots, \underbrace{y^{(k)}(t)}_{\mathbb{R}^n}) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n}$ (implicite)

et $I \subset \mathbb{R}$ $\boxed{\forall t \in I, \ (t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(k)}(t)) \in U}$

En réalité on ne regardera que les équations explicites

$$y^{(k)}(t) = \boxed{\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^k y\right](t) = f(t, y(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(k-1)}(t))}$$

Grâce au théorème des fonctions implicites on peut se ramener à cette situation localement

si $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{k,1}} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{k,n}} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_{k,1}} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_{k,n}} \end{pmatrix} (t, x_0, x_1, \dots, x_k)$ est inversible partout.

Exemple $\boxed{m\ddot{y} = -GMm\dfrac{y}{\|y\|^3}}$ (Newton) : $k=2$, $n=3$

$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3/\{0\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{y}_1 + GMm\dfrac{y_1}{\|y\|^3} = 0 \\ m\ddot{y}_2 + GMm\dfrac{y_2}{\|y\|^3} = 0 \\ m\ddot{y}_3 + GMm\dfrac{y_3}{\|y\|^3} = 0 \end{cases} \qquad \|y\| = \sqrt{(y_1)^2+(y_2)^2+(y_3)^2}$$

(autonome)

$$F(\underbrace{x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}}_{\vec{x}_1 \,:\, \text{position}}, \underbrace{x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3}}_{\vec{x}_2 \,:\, \text{accélération}}) = \begin{pmatrix} m\,x_{2,1} + GMm\dfrac{x_{,1}}{\|\vec{x}_1\|} \\ m\,x_{2,2} + GMm\dfrac{x_{,1}}{\|\vec{x}_1\|} \\ m\,x_{2,3} + GMm\dfrac{x_{1,3}}{\|\vec{x}_1\|} \end{pmatrix}$$

$\underline{k=1}$

$(t+dt, y(t+dt), \dot{y}(t+dt))$ à $t+dt$ — heuristique intégration

$\boxed{t, y(t), \dot{y}(t)}$ à $\underline{t}$ $\longrightarrow$ équation diff. $\longrightarrow$ $\ddot{y}(t)$ à $\underline{t}$

$\ddot{y}(t) = F(t, y(t), \dot{y}(t))$

$\dot{y}(t+dt) = \dot{y}(t) + \ddot{y}(t)\,dt$

$\Downarrow$

$y(t+dt) = y(t) + \dot{y}(t)\,dt$

Passage aux systèmes d'ordre 1

Exemple : équation avec une inconnue scalaire $y : I \to \mathbb{R}$

$$(\star) \quad y^{(k)} = F(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(k-1)})$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{k-1}(t) \end{pmatrix} \qquad x : I \to \mathbb{R}$$

$$(\star) \Leftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ F(t, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \end{pmatrix}}$$

1 équation scalaire d'ordre k $\longleftrightarrow$ un système de k équations d'ordre 1

Exemple $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ (oscillateur harmonique)

$\Updownarrow$ $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\begin{cases} x_0 = y \\ x_1 = \dot{y} \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = \dot{y} = x_1 \\ \frac{dx_1}{dt} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \ddot{y} = -\omega^2 y = -\omega^2 x_0 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -\omega^2 x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}}$$

Même chose pour un système d'ordre k à n inconnues

$\Longleftrightarrow$ système d'ordre 1 à nk inconnues

Dorénavant on regarde que des systèmes d'ordre un

(sans perte de généralité)

Exemples (i) $y' + ay = 0$ (équation linéaire homogène d'ordre 1)

Solutions (I, y) où $\begin{cases} I \text{ : intervalle quelconque de } \mathbb{R} \\ y : I \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{C}^1 \end{cases}$

$$\boxed{y(t) = y(t_0)\, e^{a(t_0 - t)}}$$

Solution maximale : cette fonction sur $I = \mathbb{R}$.

Preuve : $y' + ay = 0 \Longleftrightarrow y' e^{at} + y \underbrace{a e^{at}}_{\frac{d}{dt}(e^{at})} = \frac{d}{dt}(y e^{at}) = 0$

Donc $y(t) e^{at}$ est constant : si je connais $y(t_0)$

$y(t) e^{at} = y(t_0) e^{at_0} \Longleftrightarrow y(t) = y(t_0) e^{a(t_0 - t)}$

Remarque : si je connais $y(t_0)$, pour un certain t_0, je connais $y(t)$, $\forall t$.

(ii) $\boxed{y' = y^2}$ non linéaire

Cherchons les solutions (I, y) telle que : $\forall t \in I$, $y(t) \neq 0$

séparation des variables

$y' f(y) = g(t)$

$u(x) = \frac{-1}{x}$, $u'(x) = \frac{1}{x^2}$

$(u \circ y)' = (u' \circ y)\, y'$

$= \frac{1}{y^2} y'$

$\frac{y'}{y^2} = 1$ (1)

$\Longleftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{y(t)}\right) = \frac{d}{dt}(t)$ (2) $t, t_0 \in I$

$\downarrow \int_{t_0}^{t}$

Posons $y_0 = y(t_0)$

$\iff \forall t, t_0 \in I, \quad -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y(t_0)} = t - t_0 \quad (3) \iff \frac{1}{y_0} + t_0 - t = \frac{1}{y(t)} \quad (4)$

$$\iff \boxed{y(t) = \frac{y_0}{1 + y_0(t_0 - t)}} \quad (5)$$

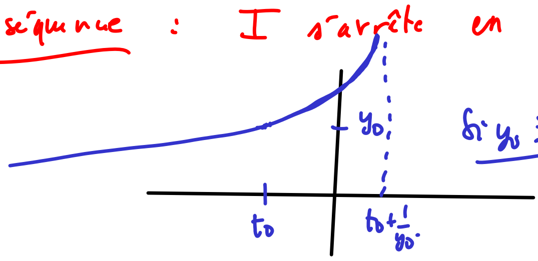
Problème : le dénominateur s'annule en $t = t_0 + \frac{1}{y_0}$

$\left[\forall t \in I, \; \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{y(t)}\right) = 1 \right] \implies \left[\forall t_0, t \; \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{y}\right)(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} ds \right]$

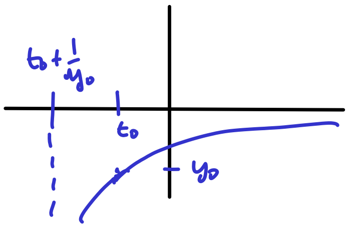
$\iff \left[\forall t_0, t, \; \frac{-1}{y(t)} + \frac{1}{y(t_0)} = t - t_0 \right]$

dériver par rapport à t $\Leftarrow$ $\quad -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y(t_0)} = t - t_0$

Conséquence : I s'arrête en $t_0 + \frac{1}{y_0}$ et $y(t) \to \pm\infty$ si $t \to t_0 + \frac{1}{y_0}$



si $y_0 > 0$ Intervalle maximale $]-\infty, t_0 + \frac{1}{y_0}[$



si $y_0 < 0$ Intervalle maximale : $]t_0 + \frac{1}{y_0}, +\infty[$

Cas où y s'annule sur I : solution $\begin{cases} y(t) = 0, & \forall t \in \mathbb{R} \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$

On montrera que c'est la seule solution possible : si (I, y) est solution de $\boxed{y' = y^2}$ et si $\exists t_1 \in I$ tel que $y(t_1) = 0$, alors $\forall t \in I, y(t) = 0$.

($\Leftarrow$ Thm Cauchy-Lipschitz)

Définition Donnée de Cauchy pour un système du premier ordre

$\boxed{\frac{dy}{dt} = X(t, y(t))}$ où $X : U \to \mathbb{R}^n$ où $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ ouvert.

est la donnée d'un point $(t_0, x_0) \in U$

Problème de Cauchy Étant donné $X : U \to \mathbb{R}^n$ où $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

Étant donné $(t_0, x_0) \in U$

Trouver (I, y) où
$$\boxed{\begin{array}{l} (t_0, x_0) \in I, \quad y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \\ \hline \frac{dy}{dt}(t) = X(t, y(t)), \ \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0. \end{array}} \quad \text{(Cauchy)}$$

Intuition : unicité de la solution, si on prend I maximal

Définition Solution locale d'un problème de Cauchy

(I, y) : solution de (Cauchy)

Définition Solution maximale d'un problème de Cauchy = solution locale (I^{max}, y) telle que $\forall (I, z)$, solution du même problème de Cauchy,

$$\boxed{\begin{array}{l} I \subset I^{max} \\ y|_I = z \end{array}}$$

"Même problème" :
$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = X(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array}}$$