On s'intéressera aux Systèmes d'équa. diff. d'ordre 1

Pas de perte de généralité : on peut se ramener à ce cas-là.

$$\boxed{\frac{dx}{dt}(t) = X(t, x(t)) \quad \text{dans } \mathbb{R}^n}$$

où $X : U \to \mathbb{R}^n$ et $x : J \to \mathbb{R}^n$ $\quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{pmatrix}$

avec $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ni (t, \xi)$.

$\forall j = 1, \dots, n$ $\quad x^j : J \to \mathbb{R}$ (fonction dérivable) $\leftarrow$ Fonction inconnue

$X^j : U \to \mathbb{R}$ (fonction de n variables) $\leftarrow$ Donnée
continue

Systèmes d'équations différentielles linéaires

Le cas le simple : on cherche J et $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} : J \to \mathbb{R}^n$

$$\boxed{\forall t \in I, \quad \begin{cases} \dfrac{dx^1}{dt} = a_{11}(t)\, x^1(t) + a_{12}(t) x^2(t) + \dots + a_{1n}(t)\, x^n(t) + b_1(t) \\ \dfrac{dx^2}{dt} = a_{21}(t)\, x^1(t) + a_{22}(t) x^2(t) + \dots + a_{2n}(t)\, x^n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx^n}{dt} = a_{n1}(t)\, x^1(t) + a_{2n}(t) x^2(t) + \dots + a_{nn}(t)\, x^n(t) + b_n(t) \end{cases}}$$

Ici : $\boxed{\left| \begin{array}{l} a_{ij} \in \mathcal{C}^0(J) \\ b_j \in \mathcal{C}^0(J) \end{array} \right.}$ $\quad J$: intervalle $\subset \mathbb{R}$.

On cherche (I, x) avec $I \subset J$, solution du système.

On ajoutera si nécessaire une condition de Cauchy

Choix de $x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}$, t_0 ; $(t_0, x_0) \in U$

Condition supplémentaire $\quad \boxed{x(t_0) = x_0} \iff \boxed{\forall j = 1, \dots, n, \ x^j(t_0) = x_0^j}$

Si $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est nul, le système est linéaire homogène.

Réécriture $\quad \boxed{\frac{dx}{dt}(t) = A(t)\, x(t) + b(t)} \quad (1) \quad x \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$

où $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Cas homogène $\boxed{\frac{dx}{dt}(t) = A(t)\, x(t)}$ (0) $x \in \mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$

Prop. Soit $I \subset J$. L'espace des solutions de (0) sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(J, \mathbb{R}^n)$.

Preuve On remarque que 0 (fonction nulle) est solution de (0).

Soit x, y deux solutions de (0), $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d(\lambda x + \mu y)}{dt} = A(t)(\lambda x + \mu y).$$

Prop. Soit $I \subset J$. Supposons que (1) admet au moins une solution u (ça sera toujours vrai !). Alors l'ensemble des solutions de (1) est un espace affine.

(1) $\frac{dx}{dt} = Ax + B$
(0) $\frac{dx}{dt} = Ax$

Preuve On a $\frac{du}{dt} = A(t)u + B(t)$.

$\forall x$: autre solution : $\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)$

$$\frac{d(x-u)}{dt} = A(t)(x-u)$$

Equation linéaire homogène associée.

$\Rightarrow \{$solutions de $\frac{dx}{dt} = Ax + B\} = \{u + z \mid z$ est solution de $\frac{dz}{dt} = Az\}$

1) Cas des systèmes à coefficients constants homogènes

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$: matrice constante $\in M(n, \mathbb{R})$ (matrices réelles $n \times n$)

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = Ax.$$

a) $n = 1$ $\boxed{\dot{x} = \lambda x}$ $x \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ($e^{\lambda t}$: solution évidente)

Méthode de résolution : je multiplie les deux côtés par $e^{-\lambda t}$

$$e^{-\lambda t}\dot{x} + \frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t}\right) x = 0$$

$\boxed{\text{Leibniz } \dot{(fg)} = \dot{f}g + f\dot{g}}$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-\lambda t} x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-\lambda t} x = x_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x(t) = x_0 e^{\lambda t}}$$

$\{$solutions$\}$ = droite vectorielle dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, de base $[t \mapsto e^{\lambda t}]$.

b) Cas $\boxed{\dfrac{dx}{dt} = \Delta x}$ où $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ (diagonale), $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$

$\dot{x} = \Delta x \iff \begin{cases} \dot{x}^1 = \lambda_1 x^1 \\ \vdots \\ \dot{x}^n = \lambda_n x^n \end{cases}$ n équations découplées.

$$\iff x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^1 e^{\lambda_1 t} \\ x_0^2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ x_0^n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix}}_{\text{vecteur constant dans } \mathbb{R}^n}$$

(éventuellement déterminé par une condition de Cauchy)

Si je note $x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

et $\boxed{e^{t\Delta} := \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & \ddots \; e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}}$ où $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$[t \mapsto e^{t\Delta}] \in C^\infty(\mathbb{R}, \underbrace{GL(n, \mathbb{R})}_{\text{"groupe linéaire" : matrices inversibles}})$$

$$\left(e^{-t\Delta} e^{t\Delta} = 1_n \iff (e^{t\Delta})^{-1} = e^{-t\Delta} \right)$$

Alors l'ensemble des solutions est $\{ x(t) = e^{t\Delta} x_0 \mid x_0 \in \mathbb{R}^n \}$

En particulier, c'est de dimension n. (exercice).

c) Cas où A est une matrice diagonalisable

$\exists \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\exists P \in GL(n, \mathbb{R})$ (inversible) tel que

$$\boxed{A = P \Delta P^{-1}}$$

Remarque : (i) Condition suffisante pour que A soit diagonalisable : les racines du polynôme caractéristique $\det(\lambda 1_n - A) = P_A(\lambda)$ sont simples

(ii) Soit $u_1, u_2, \dots, u_n$ des vecteurs propres de A pour les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ respectivement ($A u_j = \lambda_j u_j$), alors

$$P = (u_1 \; u_2 \cdots u_n) = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & \cdots & u_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^n & u_2^n & \cdots & u_n^n \end{pmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax = P\Delta P^{-1}x$$
$$\Leftrightarrow \quad P^{-1}\dot{x} = \Delta P^{-1}x$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(P^{-1}x) = \Delta(P^{-1}x)$$

Posons $y(t) = P^{-1}x(t)$
$\Leftrightarrow \underline{x(t) = P\,y(t)}$.

Alors $\dot{y} = \Delta y \Leftrightarrow y(t) = e^{t\Delta}y_0$ (remarque : $e^{0\cdot\Delta} = I_n \Rightarrow y_0 = y(0)$)

Donc $x(t) = P\,y(t) = P(e^{t\Delta}y_0) = P(e^{t\Delta}y(0))$

$$\boxed{x(t) = P\,e^{t\Delta}P^{-1}x(0) = (P\,e^{t\Delta}P^{-1})\,x(0)}$$

On obtient à nouveau un espace vectoriel de dimension n : $[t \mapsto x(t)]$ est déterminée par la donnée à l'instant 0 : $x(0)$.

On note $e^{tA} := P\,e^{t\Delta}P^{-1}$

alors $\boxed{x(t) = e^{tA}x(0)}$

d) Cas général : définition de l'exponentielle d'une matrice.

2) Exponentielle d'une matrice

Def Soit A une matrice (dans $M(n,\mathbb{R})$). On définit son exponentielle :

$$\boxed{e^{A} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{A^n}{n!}}$$

(pour une variable complexe $z \in \mathbb{C}$, série entière).

$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{n \text{ fois}}$. Est-ce bien défini ?

Il faut montrer que cette série converge $\longrightarrow$ choix d'une norme.

Norme du sup : $\|A\| := \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

$x, Ax \in \mathbb{R}^n \simeq \{\text{matrices colonnes}\}$

$\|x\| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2}$

Propriété agréable $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ (exercice : le vérifier)

et toujours : $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (inégalité)

Corollaire : $\|A^n\| \leq \|A\|^n$

donc $\left\|\sum_{n=0}^{N}\frac{A^n}{n!}\right\| \leq \sum_{n=0}^{N}\frac{\|A\|^n}{n!}$

Propriété $(M(n,\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ est complet. (espace de dimension finie !)

Conséquence : la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ converge. car elle est absolument convergente car $\left\|\frac{A^n}{n!}\right\| \leq \frac{\|A\|^n}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\|A\|^n}{n!}$ converge, sa somme est $e^{\|A\|}$

Plus $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ est normalement convergente : $\forall R>0$,
si $\|A\| \leq R$, alors $\left\|\frac{A^n}{n!}\right\| \leq \frac{R^n}{n!}$ et $\sum \frac{R^n}{n!}$ converge.

Théorème (1) $\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & M(n,\mathbb{R}) \\ t & \longmapsto & e^{tA}\end{array}$ est dérivable et $\boxed{\frac{d e^{tA}}{dt} = A e^{tA} = e^{tA} A}$

(a fortiori cette application est continue)

(2) $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tA} \in GL(n,\mathbb{R})$ (inversible)
et $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$

(3) Si $A, B \in M(n,\mathbb{R})$ et si $\boxed{AB = BA}$, alors
$\boxed{e^{tA} e^{tB} = e^{tB} e^{tA} = e^{t(A+B)}}$

$\Updownarrow$ $\boxed{[A,B] := AB - BA = 0}$

(4) Si $\boxed{A = P \Delta P^{-1}}$ où $P \in GL(n,\mathbb{R})$ et $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\boxed{e^{tA} = P e^{t\Delta} P^{-1}}$

Application La solution de $\frac{dx}{dt} = Ax$ sera $x(t) = e^{tA} x(0)$

Preuve (2) $\Rightarrow$ e^{tA} est inversible

$$e^{-tA} \frac{dx}{dt} - A e^{-tA} x = 0$$

$$\underset{\substack{\text{Leibniz} \\ \text{et (1)}: \frac{de^{tA}}{dt} = Ae^{tA}}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{d}{dt}\left(e^{-tA} x(t)\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad e^{-tA} x(t) = e^{-0\cdot A} x(0) = x(0)$$

$$\underset{(2)}{\Longleftrightarrow} \quad \boxed{x(t) = e^{tA} x(0)}$$

Preuve du théorème (1) $\frac{d(e^{tA})}{dt} = A e^{tA}$ (+ dérivabilité).

Conclusion : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{s\to 0 \\ s\neq 0}} \frac{e^{(t+s)A} - e^{tA}}{s} = A e^{tA} \iff \lim\limits_{\substack{s\to 0 \\ s\neq 0}} \frac{e^{(t+s)A} - e^{tA} - Ase^{tA}}{s} = 0$

$$\frac{e^{(t+s)A}-e^{tA}-sAe^{tA}}{s} = \frac{1}{s}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{(t+s)^n A^n}{n!} - \frac{t^n A^n}{n!} - \frac{s n t^{n-1} A^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} a_n(s)$$

(t fixe) $s \neq 0$

$$sAe^{tA} = s\sum_{n=0}^{+\infty} A \frac{t^n A^n}{n!} = s\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n A^{n+1}}{(n+1)!}(n+1) \underset{p=n+1}{=} \frac{s}{t}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{t^p A^p}{p!}(p)$$

$$a_n(s) = \frac{(t+s)^n - t^n - s n t^{n-1}}{s\, n!} A^n$$

But : $\displaystyle\lim_{\substack{s\to 0\\ s\neq 0}} \sum_{n=2}^{+\infty} a_n(s) = 0$

Taylor (exercice) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Si } |t|,\ |t+s| < R}$ où $R>0$.

alors $|(t+s)^n - t^n - s n t^{n-1}| \leq \frac{s^2}{2} n(n-1) R^{n-2}$

$$\Rightarrow \|a_n(s)\| \leq \frac{s}{2}\frac{R^{n-2}}{(n-2)!}\|A\|^n$$

$$\left\|\sum_{n=2}^{+\infty} a_n(s)\right\| = \left\|\sum_{n=2}^{N} a_n(s) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n(s)\right\|$$

$$\leq \left\|\sum_{n=2}^{N} a_n(s)\right\| + \underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{s}{2}\frac{R^{n-2}}{(n-2)!}\|A\|^n}_{<\varepsilon/2}$$

$\forall \varepsilon > 0$ On choisit N tel que $\longrightarrow < \varepsilon/2$ $\Big\} < \varepsilon$

Puis $\exists \alpha > 0$ tel que $|s| < \alpha \Rightarrow < \varepsilon/2$

Donc $\displaystyle\frac{d(e^{tA})}{dt} = Ae^{tA} = e^{tA}A$

2) e^{tA} est inversible, d'inverse e^{-tA} :

Remarque $e^{0\cdot A} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{0^n A^n}{n!} = I_n$

Leibniz : $u(t) = e^{tA}e^{-tA}$, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\frac{du}{dt} = \frac{d(e^{tA})}{dt}e^{-tA} + e^{tA}\frac{d(e^{-tA})}{dt}$$

$$= Ae^{tA}e^{-tA} + e^{tA}(-Ae^{-tA})$$

$$= Ae^{tA}e^{-tA} - Ae^{tA}e^{-tA} = 0$$

$Ae^{tA} = e^{tA}A$

$u(0) = I_n \cdot I_n = I_n$.

Conclusion $u(t) = \boxed{e^{tA}e^{-tA} = I_n}$

3) Si $AB = BA$ ("A et B commutent")

Admis.

(4) A faire en exercice.

<u>Suite</u> : utiliser e^{tA} pour résoudre $\frac{dx}{dt} = Ax(t) + B(t)$
(variation de la constante : Lagrange)