Bonjour !

Vu la semaine dernière : $\frac{dx}{dt} = Ax$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{R})$

Systèmes linéaires à coefficients homogènes. $\quad x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$

→ Exponentielle de matrice

$t \in \mathbb{R}$, $A \in M(n,\mathbb{R})$ $\quad e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$

Thm (résumé)

1) $\boxed{\frac{de^{tA}}{dt} = Ae^{tA} = e^{tA}A}$

2) $\forall t$, $e^{tA} \in GL(n, \mathbb{R})$, c'est à dire e^{tA} est inversible et $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.

3) Si $AB = BA$, $\quad e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$

Résoudre $\frac{dx}{dt} = Ax$ $\quad$ a) Si $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (Condition de Cauchy) $t_0 \in \mathbb{R}$

$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$: solution de $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Preuve $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{(t-t_0)A}x_0\right) \underset{3)}{=} \frac{d}{dt}\left(e^{tA}e^{-t_0A}x_0\right) \underset{1)}{=} Ae^{tA}e^{-t_0A}x_0 \\ \qquad = Ax \\ e^{(t_0-t_0)A}x_0 = 1_n x_0 = x_0. \end{cases}$

b) Unicité $\quad$ Si $x(t)$ est solution.

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(e^{-tA}x(t)\right)}_{=0} \underset{\text{Leibniz}}{=} \frac{d(e^{-tA})}{dt}x(t) + e^{-tA}\frac{dx}{dt}(x)$$

$$\Downarrow \qquad = e^{-tA}(-A)x + e^{-tA}(Ax) = 0$$

$$\underbrace{e^{-tA}x(t)}_{\text{constant.}} = e^{-t_0A}x(t_0) \implies x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0)$$

Leibniz non commutatif $\quad \boxed{\frac{d(M(t)N(t))}{dt} = \frac{dM}{dt}(t)\,N(t) + M(t)\frac{dN(t)}{dt}}$

Applications de ces résultats

1) Système non homogène $\quad \boxed{\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) + B(t).}$

où $A \in M(n, \mathbb{R})$, $B \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$

Méthode de la "variation de la constante" (Joseph-Louis Lagrange)

On pose $\boxed{x(t) = e^{tA} y(t)}$ (si $y(t) = x_0$, $\frac{dx}{dt} = Ax$)

$\iff \boxed{y(t) = e^{-tA} x(t)}$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{tA} y\right) = \frac{d(e^{tA})}{dt} y + e^{tA} \frac{dy}{dt}$$

$$= \underbrace{A e^{tA} y + e^{tA} \frac{dy}{dt}}.$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = Ax + B(t)} \iff \underbrace{\cancel{A e^{tA} y} + e^{tA} \frac{dy}{dt}} = \underbrace{\cancel{A e^{tA} y}} + B(t)$$

$$\iff e^{tA} \frac{dy}{dt} = B(t)$$

$$\iff \boxed{\frac{dy}{dt}(t) = e^{-tA} B(t).}$$

$$\iff y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-\tau A} B(\tau)\, d\tau$$

$$\iff x(t) = e^{tA} y(t) = e^{tA}\Big[\underbrace{y(t_0)}_{e^{-t_0 A} x(t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{-\tau A} B(\tau)\, d\tau\Big]$$

$$\boxed{x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A} B(\tau)\, d\tau} \quad \boxed{\text{Formule}}$$

(Condition de Cauchy $x_0 = x(t_0)$)

Corollaire $\frac{dx}{dt} = Ax + B(t)$. ($B(t) \in \mathbb{R}^n$ = { matrices colonnes } ($A \in M(n, \mathbb{R})$)).

a) Existence d'une solution

b) L'espace des solutions est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ de dimension n (car Bijection $\{x_0 \in \mathbb{R}^n\} \longleftrightarrow \{\text{solutions}\}$)

$\Phi :$ $\mathbb{R}^n \longrightarrow \{$ solutions de $\dot{x} = Ax + B(t) \} \subset \underbrace{\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)}$ espace vectoriel de dimension infinie

$x_0 \longmapsto$ unique solution donnée par $\boxed{\text{Formule}}$

$\Phi(x_0) = [t \mapsto x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + c(t)]$ Φ : bijection affine

$\Phi^{-1}([t \mapsto x(t)]) = x(t_0)$

2) Comment calculer e^{tA} ?

Cas simple (déjà vu) : si $A = P \Delta P^{-1}$,

$P \in GL(n, \mathbb{C})$

$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ diagonale

(A diagonalisable)

$$\boxed{e^{t\Delta} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \Delta^k}{k!}$$

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \overbrace{(P\Delta P^{-1})^k}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k \overbrace{P\Delta^k P^{-1}}}{k!} = P \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k\Delta^k}{k!} P^{-1}$$

$$= P e^{t\Delta} P^{-1}$$: formule qu'on avait écrite au tout début.

Remarque $A^2 = (P\Delta P^{-1})^2 = P\Delta \cancel{P^{-1}}\cancel{P}\Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1}$!

dém : $A^3 = (P\Delta P^{-1})^3 = P\Delta^3 P^{-1}$, etc.

Conséquence : si A est diagonalisable, il faut la diagonaliser :

a) $P_\lambda(A) = \det(\lambda I_n - A)$ (polynôme caractéristique).

b) Scinder : $P_\lambda(A) = (\lambda - \lambda_1)\cdots\cdots(\lambda-\lambda_n)$

Si vous avez de la chance (diagonalisable) : on cherche $u_1, \dots, u_n$: vecteurs propres

dans ℂ si nécessaire

$$A u_j = \lambda_j u_j$$

Chance : $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{C}^n$. (toujours vrai si les valeurs sont simples)

c) $P = (\underset{\substack{\uparrow\\ \text{colonne}}}{u_1}, \dots, \underset{\substack{\uparrow\\ \text{colonne}}}{u_n})$ → calcul de P^{-1}

$A = P\Delta P^{-1} \Rightarrow e^{tA} = P e^{t\Delta} P^{-1}$

$$e^{t\Delta} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Remarque Si $\boxed{Au = \lambda u}$, $A^2u = A(Au) = A(\lambda u) = \lambda^2 u$, etc. $A^k u = \lambda^k u \Rightarrow \boxed{e^{tA}u = e^{t\lambda}u}$ est une solution.

Que faire si A n'est pas diagonalisable ? Trigonaliser (d'une bonne façon)
(toujours possible dans ℂ)
avec les sous-espaces caractéristiques

Exemples a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(\lambda - A) = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1)$

Cas diagonalisable

$$\begin{cases} u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & : Au_1 = u_1 \\ u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} & : Au_2 = -u_2 \end{cases}$$

$P = (u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}$$

Des solutions particulières de $\underbrace{\dot{x} = Ax}_{\substack{\text{espace des solutions} \\ = \text{espace vectoriel}}}$ sont $\underbrace{e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Base.}}$

$$\text{Solutions} = \left\{ \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(\lambda - A) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$

On cherche $u \in \mathbb{C}^2$ tel que $\boxed{Au = -iu}$

$u = \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} = -iu.$

$u = u_1 + iu_2$ $u_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\in \mathbb{R}^2$

$(u_1 = \frac{u+\bar{u}}{2}$, $u_2 = \frac{u-\bar{u}}{2i}$ $\in \mathbb{R}^2)$

Hors sujet.

$Au = -iu \iff \boxed{A(u_1+iu_2) = -i(u_1+iu_2) = u_2 - iu_1}$ dans $\mathbb{C}^2$

partie réelle $\to$ $Au_1 = u_2$

partie imaginaire $\to$ $Au_2 = -u_1.$

Je reviens à mon point de départ, pardon.

$\bar{u} = u_1 - iu_2 = \begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$: $A\bar{u} = i\bar{u}$

$P = \begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-i\\-1&-i\end{pmatrix}$ $\Delta = \begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}$

$\quad\ \ u \quad \bar{u}$

$e^{tA} = P e^{t\Delta} P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{-it}&0\\0&e^{it}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-i\\-1&-i\end{pmatrix}$

$= \dots = \boxed{\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix} = e^{tA}}$

$e^{-it}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ et $e^{it}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$ sont des solutions

$\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$ sont des solutions.

c) $A = \begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ Non diagonalisable Que faire ?

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}}_{\substack{\Delta\\ \text{diagonale}}} + \underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\&0&1\\&&0\end{pmatrix}}_{\substack{T\\ \text{triangulaire.}}}$$

Remarque $\Delta T = T\Delta$ $(\iff [\Delta, T] = 0)$ Pourquoi ? Δ commute avec toutes les matrices.

Théorème(!) $\Delta T = T\Delta \Rightarrow e^{t(T+\Delta)} = e^{tT}e^{t\Delta}$

Donc ici $\boxed{e^{tA} = e^{tT}e^{t\Delta}}$

$I_3 = \begin{pmatrix}1&0&\\0&1&\\&&1\end{pmatrix}$

$\cdot\ e^{t\Delta} = \begin{pmatrix}e^{2t}&0&0\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix} = e^{2t} I_3$

$\cdot\ e^{tT} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k T^k}{k!}$ $T^0 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ par convention

$T^1 = T$; $T^2 = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$T^3 = 0 \Rightarrow \forall k \geq 3, \; T^k = 0$ Youpi !

Conclusion

$$e^{tT} = \frac{t^0 T^0}{0!} + \frac{tT}{1!} + \frac{t^2 T^2}{2!}$$

$$= 1_3 + tT + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = e^{t\Delta} e^{t\Delta} = e^{2t} 1_3 \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

e^{tT} = Polynôme en t : phénomène général dû au fait que T est nilpotente.

Or : Toute matrice triangulaire avec des zéros sur la diagonale est nilpotente.

Théorie générale Soit φ un endomorphisme de E : espace vectoriel complexe de dimension n.

Rappels Théorème de Cayley-Hamilton

$P_\varphi(\lambda) = \det(\lambda 1_E - \varphi) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$

$P_\varphi(\varphi) = 0$.

version matricielle

$P_A(\lambda) = \det(\lambda 1_n - A)$

$P_A(A) = 0$

Définitions

- λ_j (valeurs propres) : racines de P_φ.
- $E_j = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_j 1_E)$: sous-espace propre
- Sous-espace caractéristique : soit m_j = multiplicité de λ_j dans P_φ.

$$C_j = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_j 1_E)^{m_j} \supset E_j$$

Remarque On a toujours $\lambda_j \neq \lambda_k \Rightarrow E_j \cap E_k = \{0\}$

Plus généralement si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont toutes les valeurs propres,

- la somme $E_1 + \dots + E_r$ est directe $(\subset E)$
- mais $E_1 \oplus \dots \oplus E_r = E \iff \varphi$ est diagonalisable.

Théorème a) La somme $C_1 + \dots + C_r$ est directe.

b) $C_1 \oplus \dots \oplus C_r = E$

Conséquence → on a une décomposition de E en sous-espaces caractéristiques

c) Les sous-espaces caractéristiques sont stables par φ !

$\forall j = 1, \dots, r$, $\quad \forall u \in C_j$, $\varphi(u) \in C_j$

$\Rightarrow$ la restriction $\varphi_j := \varphi|_{C_j} : C_j \longrightarrow C_j$ (endomorphisme de C_j)

Conséquence : on peut étudier chaque φ_j séparément.

$$\varphi_j = \varphi|_{C_j} \quad , \quad C_j = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_j \cdot I_n)^{m_j}$$

$\forall v \in E$, $\quad v \in C_j \iff \underline{(\varphi - \lambda_j 1_n)^{m_j}(v) = 0}$,

Considérons $\varphi_j = \lambda_j 1_{C_j} + N_j$

(Je définis $N_j \in \operatorname{End}(C_j)$
$N_j(v) = \varphi(v) - \lambda_j v$)

$\forall v \in C_j$, $\quad N_j^{m_j}(v) = \left(\varphi_j - \lambda_j 1_{C_j}\right)^{m_j}(v) = 0$

Conclusion $\boxed{N_j^{m_j} = 0}$

$$\boxed{\varphi_j = \lambda_j 1_{C_j} + N_j} \quad \text{et} \quad \boxed{[N_j, \lambda_j 1_{C_j}] = 0}$$

Donc $e^{t\varphi_j} = e^{tN_j} e^{t\lambda_j 1_{C_j}} = e^{t\lambda_j} 1_{C_j} \, e^{tN_j}$

$$\boxed{e^{t\varphi_j} = e^{t\lambda_j} \underbrace{e^{tN_j}}_{\text{polynôme de degré} \leq m_j}}$$

Lemme Soit $N_j \in \operatorname{End}(C_j)$ tel que $N_j^{m_j} = 0$, alors il existe une base $(u_{j,1}, \dots, u_{j,m_j})$ de C_j dans laquelle la matrice de N_j s'écrit :

Seuls termes non nuls : sur la rangée au-dessus de la diagonale

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ & & & & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & 0 & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

- triangulaire supérieure
- diagonale que des 0
- rangée au-dessus de la diagonale : que des 0 et 1
- des 0 au-dessus.

Preuve a) Soit $N_j = 0$ fini.

b) Soit $N_j \neq 0$, $\exists u \in C_j$, $N_j u \neq 0$ et $u \neq 0$

On considère $(u, Nu, \dots, N^k u)$ où k est tel que $(u, Nu, \dots, N^k u)$ est libre et $(u, Nu, \dots, N^{k+1} u)$ est lié

Dans le sous-espace engendré par $(N^k u, N^{k-1} u, \dots, Nu, u)$

N_j a la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad N(N^{j-1} u) = N^j u$

c) Soit on $k+1 = m_j = \dim C_j$: c'est fini

Sinon $\exists v \in C_j \setminus \operatorname{Vect}(u, Nu, \dots, N^k u)$: on recommence.