**Examen partiel :** le 16 mars, 13h30 – 15h30, Halle aux farines 1A
(voir page moodle)

Séances précédentes : systèmes linéaires, exponentielle d'une matrice (voir mini-poly sur ma page web).

**Réduction la plus générale :** diagonale par bloc.

$$A = P \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & 0 & & 0 \\ 0 & \boxed{A_2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_r} \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A_j = \lambda_j 1_{m_j} + N_j \quad \Rightarrow \quad e^{tA_j} = e^{\lambda_j t} \underbrace{e^{tN_j}}_{\text{polynôme}}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_j & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \lambda_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \times & \cdots & \times \\ \vdots & \ddots & & \times \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

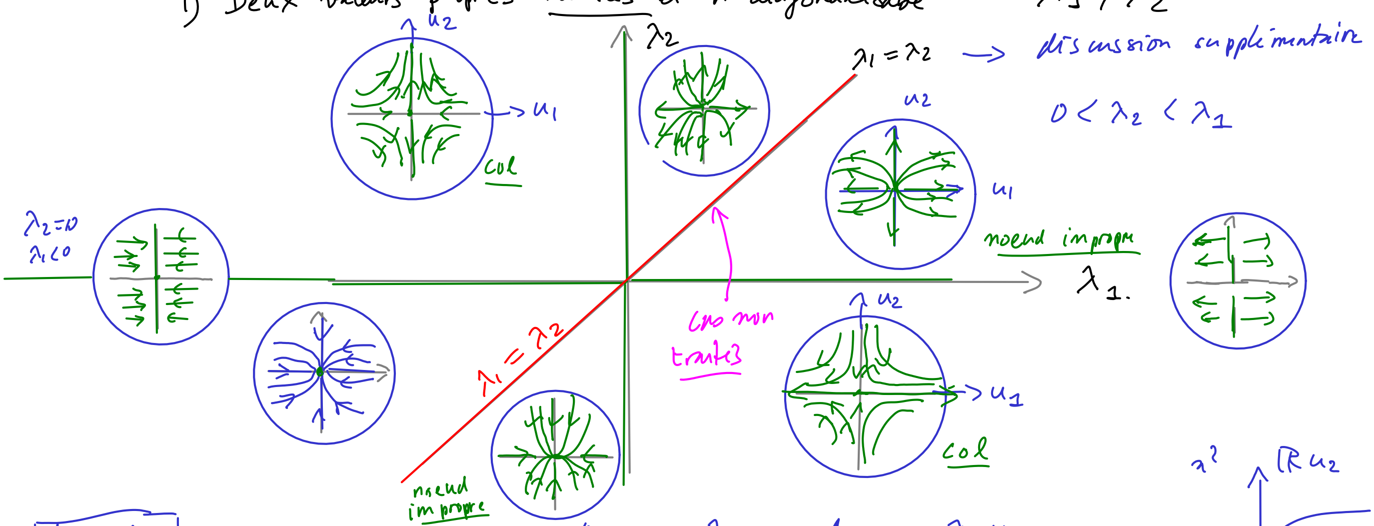
$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} \boxed{e^{tA_1}} & & 0 \\ & \boxed{e^{tA_2}} & \\ 0 & & \ddots \ \boxed{e^{tA_r}} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

$P \in GL(n, \mathbb{C})$
$\lambda_j \in \mathbb{C}$
$N_j \in M(m_j, \mathbb{C})$
$m_j$ : multiplicité de $\lambda_j$

## Le cas $n = 2$ $\quad A \in M(2, \mathbb{R})$.

0 est toujours point d'équilibre

1) Deux valeurs propres réelles et $A$ diagonalisable $\quad \lambda_1, \lambda_2$




$\lambda_1 = \lambda_2 \to$ discussion supplémentaire

$0 < \lambda_2 < \lambda_1$

$\boxed{\frac{dx}{dt} = Ax}$

exemple d'étude

$u_1$ : vecteur propre de $A$ pour $\lambda_1$ : $Au_1 = \lambda_1 u_1$
$u_2$ : ——— $A$ — $\lambda_2$ $\quad Au_2 = \lambda_2 u_2$

Si $\underbrace{0 < \lambda_2 < \lambda_1}$

$\Downarrow$

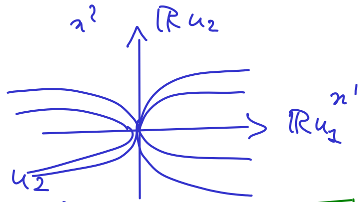
$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1$

$$\underbrace{x(t) = A e^{t\lambda_1} u_1 + B e^{t\lambda_2} u_2}_{\text{solution.}}$$

$$\begin{cases} x^1(t) = A e^{t\lambda_1} \\ x^2(t) = B e^{t\lambda_2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{|x^1(t)| = C\,|x^2(t)|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}}$$

$\Downarrow$

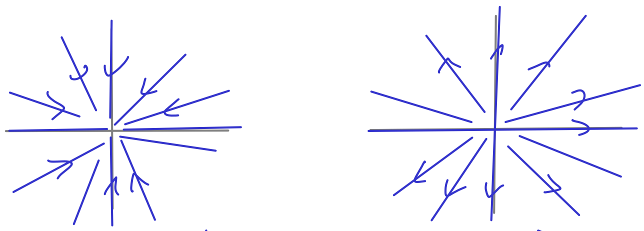
$$\left|\frac{x^1}{A}\right|^{1/\lambda_1} = \left|\frac{x^2}{B}\right|^{1/\lambda_2}$$




$\Downarrow$
une trajectoire est contenue dans la courbe $|x^1| = C\,|x^2|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$

Cas $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$

Cas diagonalisable



$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ noeuds propres. $\lambda_1 > 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

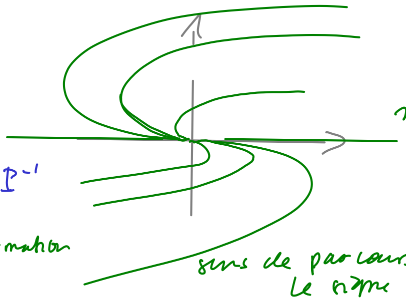
Immobilité

$(A = 0)$

Cas non diagonalisable

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$$

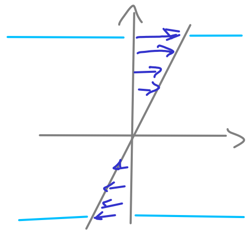
$$e^{tA} = \underbrace{e^{t\lambda}}_{\text{homothétie}} \underbrace{P \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}}_{\text{transformation linéaire}}$$



noeuds impropre

sens de parcours suivant le signe de $\lambda$.

$\lambda = 0$



$$\begin{cases} x^1(t) = e^{t\lambda}(A + Bt) \\ x^2(t) = e^{\lambda t} B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{x^2}{B}\right) \quad \to \quad x^1 = \frac{x^2}{B}\left(A + \frac{B}{\lambda} \ln\left(\frac{x^2}{B}\right)\right)$$

$$\boxed{f(s) = \frac{A}{B} s + \frac{s}{\lambda} \ln\left(\frac{s}{B}\right)}$$

2) Une valeur propre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$, non réelle, $\lambda = a + ib$, $b \neq 0$.

$\Rightarrow$ comme $A$ est réelle, $\bar{\lambda}$ est valeur propre $\Rightarrow$ 2 valeurs propres distinctes complexes.

$$A = P \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} P^{-1} + P \begin{pmatrix} ib & 0 \\ 0 & -ib \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} ib & 0 \\ 0 & -ib \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &P \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} P^{-1} = \\ &P P^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

$P \to Q$ ?

$w \in \mathbb{C}^2$ :

$A w = (a+ib) w$

$w = u + iv$

$u = \frac{w + \bar{w}}{2}$, $v = \frac{w - \bar{w}}{2i}$

$A(u+iv) = (a+ib)(u+iv)$

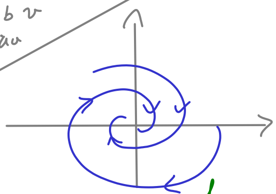
$\Leftrightarrow \begin{cases} Au = au - bv \\ Av = bu + av \end{cases}$

Base $(u, v)$ : $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

$$e^{tA} = e^{ta} P \begin{pmatrix} e^{itb} & 0 \\ 0 & e^{-itb} \end{pmatrix} P^{-1} \qquad P \in GL(2, \mathbb{C})$$

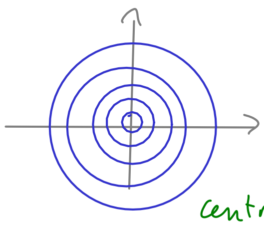
$$= e^{ta} Q \underbrace{\begin{pmatrix} \cos tb & -\sin tb \\ \sin tb & \cos tb \end{pmatrix}}_{\text{rotation.}} Q^{-1} \qquad Q \in GL(2, \mathbb{R})$$

$$e^{t \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}}$$



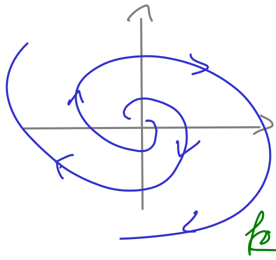
foyer attractif

$a < 0$



centre

$a = 0$



foyer répulsif

$a > 0$.

Exercice : vérifier tous ces résultats par le calcul.

---

Suppléments sur les systèmes linéaires : que faire si $A$ n'est pas constant ?

$$\frac{dx}{dt}(t) = A(t)\, x(t) \qquad A \in \mathcal{C}^0(J, M(n, \mathbb{R}))$$

## Formule de Dyson

Idée : construire un substitut à $e^{(t-t_0)A}$ $(\mathbb{R} \to GL(n,\mathbb{R}))$

c'est à dire $U \in \mathcal{C}^1(J, GL(n,\mathbb{R}))$,

$$\boxed{\begin{array}{l} U(t_0) = I_n \\ \frac{dU}{dt}(t) = A(t)\,U(t) \end{array}}$$

$$\boxed{U(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t)} \qquad u_k \in \mathcal{C}^1(J, M(n,\mathbb{R}))$$

où

$$\boxed{\begin{array}{l} \cdot\ u_0(t) = I_n, \quad \forall t. \\ \cdot\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1}(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\, u_k(s)\, ds. \end{array}}$$

(définition par récurrence).

$\cdot\ u_1(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\, ds$

$\cdot\ u_2(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\, u_1(s)\, ds = \int_{t_0}^{t} \left( \int_{t_0}^{s_1} A(s_1) A(s)\, ds \right) ds_1$ , etc.

: $\cdot$ si $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1}(t_0) = 0$

$\cdot$ $\boxed{\frac{d u_{k+1}}{dt} = A(t)\, u_k(t).}$

$\Rightarrow$ Formellement $\cdot$ $\frac{d}{dt}\left( \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t) \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{du_k}{dt}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{du_k}{dt}(t)$

(justifier $\frac{d}{dt}\sum = \sum \frac{d}{dt}$)

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d u_{k+1}}{dt}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} A(t)\, u_k(t)$$

$$= A(t) \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t)$$

Donc $\boxed{\frac{dU}{dt}(t) = A(t)\, U(t)}$ et $U(t_0) = I_n$

Justifier ? On suppose $A \in \mathcal{C}^0(J, M(n,\mathbb{R}))$ et borné : $\boxed{\|A\|_{L^\infty} := \sup_{t \in J} \|A(t)\| < +\infty}$

Montrons que la série converge (par une méthode similaire on peut justifier le calcul)

$k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1}(t) = \int_{t_0}^{t} A(s)\, u_k(s)\, ds$ $\qquad$ $\|A(t)\|$ : norme du "sup".

$\Rightarrow \|u_{k+1}(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|A(s)\|}_{\leq \|A\|_{L^\infty}} \|u_k(s)\|\, ds \right|$

$$\boxed{\|u_{k+1}(t)\| \leq \|A\|_{L^\infty} \left| \int_{t_0}^{t} \|u_k(s)\|\, ds \right|} \quad \forall t \in J \text{ (un rappel.}$$

On montre par récurrence que $\boxed{\|u_k(t)\| \leq \frac{\|A\|_{L^\infty}^k |t-t_0|^k}{k!}}$, $\forall t \in J$

a) $k=0$ évident.

b) Hérédité : on suppose que c'est vrai pour $k$,

$$\|u_{k+1}(t)\| \leq \|A\|_{L^\infty} \left|\int_{t_0}^t \|u_k(s)\|\, ds\right|$$
$$\leq \|A\|_{L^\infty} \left|\int_{t_0}^t \frac{\|A\|_{L^\infty}^k |s-t_0|^k}{k!}\, ds\right|$$
$$\leq \frac{\|A\|_{L^\infty}^{k+1}}{k!} \left(\left|\int_{t_0}^t |s-t_0|^k\, ds\right)\right) = \frac{\|A\|_{L^\infty}^{k+1}}{(k+1)!}$$

<u>Conclusion</u> $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k(t)\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|A\|_{L^\infty}^k |t-t_0|^k}{k!} = e^{|t-t_0|\,\|A\|_{L^\infty}}$

Donc $U(t)$ est une série normalement convergente. (sur tout compact $\subset J$)

( $A(t)U(t)$ aussi $\to$ justifier la relation).

Série de <u>Dyson</u>

<u>Solution de</u> $\frac{dx}{dt} = A(t)x(t)$ : $x(t) = U(t)\, x(t_0)$.

Notation des $\boxed{\text{physiciens}}$ $\underbrace{U(t) = e^{T\int_{t_0}^t A(s)\,ds}}_{\text{notation: "exponentielle chronologique".}}$ $\neq e^{\int_{t_0}^t A(s)ds}$

T comme temps

car $A(t_1)$ et $A(t_2)$ ne commutent pas.

---

<u>Nouveau chapitre : cas général</u> <u>non linéaire</u>

- Bonne théorie "locale" : sur des intervalles de temps <u>petits</u>. $\to$ Théorème de <u>Cauchy-Lipschitz</u>
- globalement : des difficultés.

$y$ solution de $\boxed{\frac{dy}{dt} = X(t,y)}$, $X \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$

$\underbrace{U \subset \underset{t}{\mathbb{R}} \times \underset{x}{\mathbb{R}^n}}_{\text{champ de vecteur}}$ (ouvert)

<u>Définition</u> <u>Fonction Lipschitzienne</u>

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert de $\mathbb{R}^n$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^k$, ($\Omega$ convexe)

On dit que $F$ est <u>lipschitzienne</u> de coefficient $C$. si

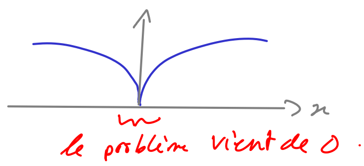
$\forall x, y \in \Omega$, $\|F(x) - F(y)\| \leq C\|x-y\|$

<u>Remarque</u> . Si $F$ est Lipschitz, alors elle est continue (exercice).

. mais une fonction continue n'est pas forcément lipschitzienne

<u>Exemple</u> $\Omega = \mathbb{R}$, $F(x) = \sqrt{|x|}$

$F$ est continue, mais non lipschitzienne



Exemples de convexes : , Boules métriques (conséquence de l'inégalité triangulaire)

• Produits cartésiens de convexes.

**Définition** Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et $X \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$ (champ de vecteur)

On dit que $X$ est localement lipschitzien en espace ou localement lipschitzien par rapport à $x$ si

$\forall (t_0, x_0) \in U$, $\exists \varepsilon > 0$, $\exists R > 0$, $\exists C > 0$ tel que

a) $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[ \times B(x_0, R) \subset U$

b) $\forall t \in ]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$, $\forall x_1, x_2 \in B(x_0, R)$,

$$\boxed{\|X(t, x_2) - X(t, x_1)\| \leq C \|x_1 - x_2\|}$$

Remarque $C$ dépend a priori de $(t_0, x_0)$, $\varepsilon$, $R$.

**Théorème de Cauchy-Lipschitz.** Soit $U$ ouvert $\subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $X \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$ localement lipschitzienne en espace. Alors

1) Existence locale $\forall (t_0, x_0) \in U$, $\exists I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, avec $t_0 \in I$, $\exists y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ telle que :

a) $\forall t \in I$, $(t, y(t)) \in U$

b) $\forall t \in I$ $(\star)$ $\boxed{\begin{array}{l} \frac{dy}{dt}(t) = X(t, y(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{array}}$ solution du problème de Cauchy.

2) Unicité de la solution du problème de Cauchy.

Si $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ qui sont solutions du même problème de Cauchy $(\star)$. Alors $y_1 = y_2$.