Résultats pour des équations différentielles non linéaires.

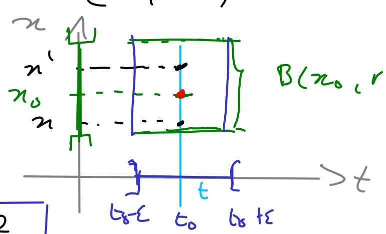
Pb de Cauchy $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = X(t, y(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$

$$\left(\text{"} \quad \begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & I \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{X} & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & (t, y(t)) & \longmapsto & X(t, y(t)) \end{array} \quad \text{"} \right)$$

Cauchy-Lipschitz : existence & unicité sur un intervalle de temps centré en t_0 suffisamment bref.

Hypothèse $X \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$ $\quad U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, (t, x)

doit être localement lipschitzienne par rapport à x.



$$\boxed{\begin{array}{l} \forall (t_0, x_0) \in U, \ \exists \varepsilon > 0, \ \exists r > 0, \ \exists C > 0 \\ \forall t \in \,]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[, \quad \forall (x, x') \in B(x_0, r)^2 \\ \qquad \| X(t, x') - X(t, x) \| \leq C \| x - x' \| \end{array}}$$

Alors $C = C(t_0, x_0)$

Remarque : Si K compact $\subset U$, on pourra choisir : $C(t_0, x_0) \leq C(K)$ $\forall (t_0, x_0) \in K$

Preuve de Cauchy-Lipschitz : existence d'une solution.

Idée $\begin{cases} \dfrac{dy}{dt}(t) = X(t, y(t)), \ \forall t \in I \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$ $\iff$ $\boxed{y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(s, y(s)) ds \quad \forall t \in I}$

intégrer l'équa. diff sur $[t_0, t]$

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dy}{dt}(s)\, ds = y(t) - y(t_0) = y(t) - x_0$$

Beaucoup plus facile à exploiter. (intégrale intégrale)

Point essentiel $\underbrace{\left[y \longmapsto \left[t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} X(s, y(s)) ds \right] \right]}_{\text{opérateur "régularisant".}}$

Remarque : " $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} X(s, y(s))\,ds$ " a un sens si y est $\mathcal{C}^0$.
On va chercher une solution de cette équation qui est continue.
(On retrouvera automatiquement le fait que y est $\mathcal{C}^1$).

Traduction supplémentaire de $\underbrace{y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(s, y(s))\,ds \,, \forall t \in I}$

Posons $y(t) = x_0 + z(t)$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{z(t) = \int_{t_0}^{t} X(s, x_0 + z(s))\,ds} \quad \forall t \in I$$

Idée dans un cas simplifié où $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, X globalement lipschitzien en espace :

$\|X(t,x') - X(t,x)\| \leq C\|x' - x\|$

Soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

Soit $\varepsilon > 0$, $I_\varepsilon =]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$

$\mathcal{C}^0(I_\varepsilon, \mathbb{R}^n)$, muni de la forme

$\|y\|_\infty = \sup \{ \|y(t)\| \,;\, t \in I_\varepsilon \}$.

$\left(\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty\right)$ espace de Banach (vec. normé, complet)

$$T : \mathcal{C}^0(I_\varepsilon, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^0(I_\varepsilon, \mathbb{R}^n)$$
$$z \longmapsto \left[t \mapsto \int_{t_0}^{t} X(s, x_0 + z(s))\,ds \right]$$

L'équation intégrale équivaut à $\boxed{z = T(z)}$ pour $I = I_\varepsilon$

point fixe.

Théorème : Si (X, d_X) un espace métrique complet et si $T : X \to X$ est telle que : $\exists\, k \in]0, 1[$, $\forall x, x' \in X$,

$$\boxed{d_X(T(x), T(x')) \leq k\, d_X(x, x')}$$

T contractant (car $k < 1$)

Alors $\exists!\, a \in X$, $T(a) = a$.

Il suffit de montrer que T est contractant.

Soit $z, z' \in C^0(I_\varepsilon, \mathbb{R}^n)$

$\forall t \in I_\varepsilon$, $\|T(z')(t) - T(z)(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \left\| \int_{t_0}^{t} X(s, x_0 + z'(s))\,ds - \int_{t_0}^{t} X(s, x_0 + z(s))\,ds \right\|_{\mathbb{R}^n}$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} \left(X(s, x_0 + z'(s)) - X(s, x_0 + z(s)) \right) ds \right\|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \| X(s, x_0 + z'(s)) - X(s, x_0 + z(s)) \|\, ds \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} C \, \| \cancel{x_0} + z'(s) - (\cancel{x_0} + z(s)) \|\, ds \right|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} C \, \|z' - z\|_\infty \, ds \right| = |t - t_0| \, C \, \|z' - z\|_\infty$$

$$\leq \boxed{C\,\varepsilon} \; \|z' - z\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|T(z') - T(z)\|_\infty = \sup \{ \|T(z')(t) - T(z)(t)\|_{\mathbb{R}^n} \; ; \; t \in I_\varepsilon \}$$

$$\leq C\,\varepsilon \; \|z' - z\|_\infty$$

T est lipschitzien de coefficient $C\varepsilon$. On choisit $\varepsilon < \frac{1}{C} \Rightarrow$ T est contractant.

$\Rightarrow$ thm. de point fixe de Picard. $\exists\, z \in \mathcal{C}^0(I_{\varepsilon}, \mathbb{R}^n)$, $\boxed{T(z) = z}$

$\Updownarrow$

$y(t) = x_0 + z(t)$: solution

Mise en oeuvre dans le cas général $X \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$ $\boxed{\text{localement lipschitzien}/x}$

$U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

Même idée. On part de $(t_0, x_0) \in U$

Hypothèse $\Rightarrow$ $\exists\, \varepsilon_0 > 0$, $\exists\, r > 0$, $\exists\, C > 0$

$$\begin{cases} \forall t \in I_{\varepsilon_0} \\ \forall x, x' \in B(x_0, r) \end{cases} \quad \boxed{\|X(t, x') - X(t, x)\| \leq C\, \|x' - x\|}$$

$I_{\varepsilon_0} =]t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0[$

$\Rightarrow \exists\, V > 0$, $\forall (t, x) \in I_\varepsilon \times B(x_0, r)$, $\|X(t,x)\| \leq V$

("vitesse maximale").

Je fixe $\varepsilon > 0$, avec $\varepsilon < \min(\varepsilon_0, \frac{r}{V})$ (sécurité pour rester dans $I_{\varepsilon_0} \times B(x_0, r)$)

$$B_\infty(0, r) = \underbrace{\{ z \in \mathcal{C}^0(I_\varepsilon, \mathbb{R}^n) \; ; \; \boxed{\|z\|_\infty \leq r} \}}_{\text{Boule fermée (donc espace métrique complet).}} \subset \underbrace{\mathcal{C}^0(I_\varepsilon, \mathbb{R}^n)}_{\text{espace de Banach}}$$

$$T : B_\infty(0, r) \longrightarrow B_\infty(0, r)$$
$$z \longmapsto \left[t \longmapsto \int_{t_0}^{t} X(s, x_0 + z(s))\, ds \right]$$

Si $\varepsilon \leq \min(\varepsilon_0, \frac{r}{V}) \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ \varepsilon \leq \frac{r}{V} \end{cases} \Rightarrow \|z(s)\| < r$, $\forall s \in I_\varepsilon$.

$\Rightarrow$ T est bien définie

Alors $\forall z, z' \in B_\infty(0, r)$, $\|T(z') - T(z)\|_\infty \leq C\,\varepsilon \, \|z' - z\|_\infty$

On choisit $\varepsilon < \frac{1}{C}$ $\Rightarrow$ T contractante $\Rightarrow$ $\exists !\ z \in B(0,r)$
$T(z) = z$.

Alors $y \in \mathcal{C}^0(I_\varepsilon, \mathbb{R}^n)$, $y(t) = x_0 + z(t)$
est solution de $y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} X(s, y(s))\,ds$

$$\Rightarrow y \in \mathcal{C}^1(I_\varepsilon, \mathbb{R}^n) \text{ et } \left| \begin{array}{l} y(t_0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = X(t,y) \end{array} \right.$$

Preuve de l'unicité locale. Soit I un intervalle ouvert $\subset \mathbb{R}$
$t_0 \in I$, $(t_0, x_0) \in U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Supposons que $\boxed{y_1, y_2}$ sont deux solutions $\mathcal{C}^1$ du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = X(t, y(t)), \quad \forall t \in I \\ y(t_0) = x_0 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\left| \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = X(t, y_1), \quad \frac{dy_2}{dt} = X(t, y_2) \\ y_1(t_0) = y_1(t_0) \end{array} \right.}$$

Alors $\exists\ I_\varepsilon =]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ tel que $\boxed{y_1|_{I_\varepsilon} = y_2|_{I_\varepsilon}}$
$\Leftrightarrow \forall t \in I_\varepsilon,\ y_1(t) = y_2(t)$.

Hypothèse | X est localement lipschitzienne par rapport à x :
$\exists\ \varepsilon > 0$, $\exists\ r > 0$, $\exists\ C > 0$, $\forall t \in I_\varepsilon$, $\forall x, x' \in B(x_0, r)$,

$$\|X(t, x') - X(t, x)\| \leq C \|x - x'\|$$

Soit $f : I_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto f(t) = \|y_1(t) - y_2(t)\|^2$

norme euclidienne :
$\|x_1 - x_2\|^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_1^j - x_2^j)^2$
$x_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ \vdots \\ x_1^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$
$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$

Que peut-on dire sur f ?

- $f(t_0) = \|y_1(t_0) - y_2(t_0)\|^2 = 0$
- $\frac{df}{dt} = 2 \left\langle \frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt}, y_1 - y_2 \right\rangle$

$$\Rightarrow \left| \frac{df}{dt}(t) \right| \leq 2 \left\| \frac{dy_1}{dt} - \frac{dy_2}{dt} \right\| \|y_1 - y_2\|$$

Cauchy-Schwarz

$$= 2 \|X(t, y_1(t)) - X(t, y_2(t))\| \|y_1 - y_2\|$$

$$\leq 2C \|y_1(t) - y_2(t)\| \|y_1 - y_2\| = 2C f(t).$$

Ça marche si $\varepsilon > 0$ suffisamment petit pour que $(t, y_1(t)), (t, y_2(t)) \in I_{\varepsilon_0} \times B(x_0, r)$
car $y_1(t_0) = y_2(t_0) = x_0$

Conclusion si $f(t) = \| y_1(t) - y_2(t) \|^2 \geqslant 0$

$$\boxed{\left| \frac{df}{dt}(t) \right| \leq 2c\, f(t)} \quad \text{et} \quad f(t_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -2cf \leq \frac{df}{dt} \leq 2cf.$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{df}{dt} + 2cf \quad \text{et} \quad \frac{df}{dt} - 2cf \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leq e^{2ct} \frac{df}{dt} + 2c\, e^{2ct} f = \frac{d}{dt}\left(e^{2ct} f(t) \right) \\ \frac{d}{dt}\left(e^{-2ct} f(t) \right) = e^{-2ct} \frac{df}{dt} - 2c e^{-2ct} f \leq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ sur $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$ $\begin{cases} t \mapsto e^{2ct} f(t) & \text{croissante et s'annule en } t_0 \\ t \mapsto e^{-2ct} f(t) & \text{décroissante et s'annule en } t_0. \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} e^{2ct} f(t) \leq 0 & \text{si } t \in]t_0 - \varepsilon, t_0] \\ e^{-2ct} f(t) \leq 0 & \text{si } t \in [t_0, t_0 + \varepsilon[\end{cases}$$

$\Rightarrow \quad f(t) \leq 0, \ \forall t \in I_\varepsilon$] Donc $f(t) = 0$ $\forall t \in I_\varepsilon$

Or $f(t) \geqslant 0$

Conclusion : $y_1(t) = y_2(t), \ \forall t \in I_\varepsilon$

Passage à l'unicité globale || Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$

|| y_1 et $y_2 \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ telles que
$\forall t \in I$, $(t, y_1(t)), (t, y_2(t)) \in U$
$\frac{dy_1}{dt} = X(t, y_1)$ et $\frac{dy_2}{dt} = X(t, y_2)$

Soit $t_0 \in I$. Supposons que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$.

Théorème Si X est localement lipschitzienne en espace. Alors $\boxed{y_1 = y_2}$ partout.

Preuve a) Traduction du résultat précédent.

Il signifie que :

$A = \{ t \in I \ ; \ y_1(t) = y_2(t) \}$ est un ouvert

b) A est fermé car $A = (y_1 - y_2)^{-1}(\{0\})$ et $y_1 - y_2$ est continue.

$y_1 - y_2 : I \to \mathbb{R}^n$

Donc A est ouvert et fermé dans I, I est un intervalle

$\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{soit} & A = I \\ \text{soit} & A = \emptyset \end{cases}$

Donc si $\exists\, t_0 \in A$, alors $A = I$.

Conséquence : Si X est localement lipschitzienne en espace.

On peut définir la solution maximale (I, y) de (1) $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = X(t, y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{l} \text{et } \forall t \in I \\ (t, y(t)) \in U \end{array}\right)$

et elle sera unique.

1) Théorème d'existence locale : $\exists\, (I_\varepsilon, y_\varepsilon)$, $y_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(I_\varepsilon, \mathbb{R}^n)$ solution de (1)

2) Je considère $\mathcal{Y}(t_0, x_0) = \{ (I, y) \text{ solutions de } (1) \} \neq \emptyset$

$\forall\, (I_1, y_1), (I_2, y_2) \in \mathcal{Y}(t_0, x_0)$

$t_0 \in I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ et $y_1|_{I_1 \cap I_2} = y_2|_{I_1 \cap I_2}$ par le résultat d'unicité globale

3) $I_{max} = \bigcup_{(I, y) \in \mathcal{Y}(t_0, x_0)} I$ Je peux alors définir y_{max} telle que $(I_{max}, y_{max}) \in \mathcal{Y}(t_0, x_0)$

(I_{max}, y_{max}) est la solution maximale. Il n'y a pas de solution sur un intervalle plus grand.

Rappel . $\frac{dy}{dt} = y^2$ pour $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\Big\|$ $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $X(t, x) = x^2$ (localement lipschitzienne).

On a vu que $I_{max} \neq \mathbb{R}$ en général.

A propos de l'hypothèse "localement lipschitzienne en espace".

Proposition Soit $X \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$ $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert.

Je suppose que a) X est dérivable par rapport aux coordonnées d'espace $x^1, x^2, \dots, x^n$

b) les dérivées partielles $\frac{\partial X}{\partial x^j} : U \to \mathbb{R}^n$, $(t, x) \mapsto \frac{\partial X}{\partial x^j}(t, x)$ sont $\boxed{\mathcal{C}^0}$

Alors X est localement lipschitzienne en espace.

__Preuve__ Formule des accroissements finis.

$\frac{\partial X}{\partial x^j}$ est C^0 donc est bornée sur tout compact $K \subset U$.

Je prends (t,x), $(t,x') \in K$ __convexe__ $\left([t, (1-s)x + s x'] \subset K \right.$ $\left. \forall s \in [0,1] \right)$

$$\| X(t,x') - X(t,x) \| = \left\| \int_0^1 \frac{d}{ds} \left(X(t, (1-s)x + s x') \right) ds \right\|$$

$$= \left\| \int_0^1 \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial X}{\partial x^j} (t, (1-s)x + s x')}_{\text{borné par } C \text{ sur } K} \left[(x')^j - x^j \right] ds \right\|$$

$$\leq \int_0^1 \sum_{j=1}^n \underbrace{\left\| \frac{\partial X}{\partial x^j} (t, \dots) \right\|}_{\leq C} \| x' - x \| \, ds \leq n C \int_0^1 \| x' - x \| \, ds$$

$$= n C \| x' - x \|$$

Que se passe-t-il si X n'est pas __localement lipschitzien en espace__ ?

a) Toujours existence (Thm. Cauchy-Peano)

b) Plus d'unicité.

__Exemple__ Soit $\alpha > 1$ et $\tau \in \mathbb{R}$ $y_\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} y_\tau(t) = 0 & , \forall t \in]-\infty, \tau] \\ y_\tau(t) = (t-\tau)^\alpha & , \forall t \in]\tau, +\infty[\end{cases}$$

$\to$ y_τ est $\mathcal{C}^1$ et $\begin{cases} \frac{dy_\tau}{dt} = 0 & \text{si } t \leq \tau \\ \frac{dy_\tau}{dt} = \alpha (t-\tau)^{\alpha - 1} = \alpha (y_\tau)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} & \text{si } t > \tau \end{cases}$

Partout, y_τ est solution de $\boxed{\frac{dy}{dt} = \alpha |y|^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} = X(y)$

$X \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mais __non lipschitzien__ $\left(0 < \frac{\alpha - 1}{\alpha} < 1 \right)$

si $\tau \geq 0$ y_τ sont tous solutions de $\boxed{\begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = X(y) \\ y(0) = 0 \end{array}}$ __Non unicité !__