Points d'équilibre.

Equations différentielles autonomes : $\frac{dy}{dt} = X(y)$ où $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$

Remarque : on peut toujours l'étude d'un système non autonome

Si $X \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R}^n)$ où $U \subset \underset{t}{\mathbb{R}} \times \underset{x}{\mathbb{R}^n}$ (champ de vecteur non autonome en général)

on peut considérer $Y \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$

$\forall (t,x) \in U, \quad Y(t,x) = (1, X(t,x))$

Alors y est solution de : $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = X(t,y) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases} \iff z$ est solution de : $\begin{cases} \frac{dz}{dt} = Y(z) \\ z(t_0) = (t_0, x_0) \end{cases}$

Dorénavant je considère $\begin{cases} \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ (ouvert)} \\ X \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n) \text{ localement lipschitzienne} \end{cases}$

$\to \boxed{\frac{dy}{dt} = X(y)}$ (autonome)

Notation $\boxed{x \cdot e^{tX}}$: valeur en $t \in I$ de la solution maximale y de $\boxed{\begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = X(y), \quad \forall t \in I \\ y(0) = x \end{array}}$

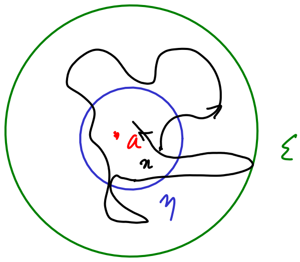
Définition Un point d'équilibre ou un équilibre est un point $a \in \Omega$ tel que $\boxed{X(a) = 0}$.

Conséquence : l'application $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \Omega \\ t \mapsto a \end{array}$ (constante) est une solution du système.

Question : cette solution est-elle stable ?

Définition Soit $a \in \Omega$ un équilibre. On dit que a est stable si :

$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in \Omega, \ \forall t \geq 0, \quad \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|x \cdot e^{tX} - a\| < \varepsilon$



Définition $a \in \Omega$ est un point d'équilibre

localement asymptotiquement stable (ou) globalement asymptotique stable

stable $\Leftarrow$

- a est stable
- $\exists\, U_a$: voisinage de a dans U tel que :

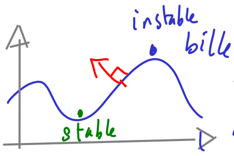
$\forall x \in U_a$, $\lim_{t \to +\infty} x \cdot e^{tX} = a$

$\Leftarrow$

- a stable
- $\forall x \in \Omega$, $\lim_{t \to +\infty} x \cdot e^{tX} = a$.

Déf Si a est un équilibre qui n'est pas stable, il est instable.

Exemple



bille qui roule sur le graphe de $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

soumise à l'accélération $\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$: $\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} V' \\ -1 \end{pmatrix}$

$\to$ convertir en un système du 1er ordre

Critères ?

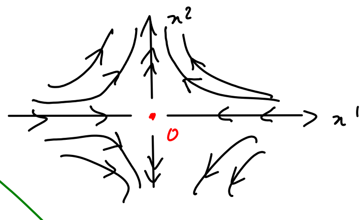
Systèmes linéaires

Exemple $(n=2)$, $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1(0)\, e^{-2t} \\ x^2(0)\, e^{t} \end{pmatrix}$$

$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$

0 : globalement asymptotiquement stable



0 est un équilibre instable

si $\begin{pmatrix} x^1(0) \\ x^2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$

$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ 0 : stable

mais pas localement asymptotiquement stable

Système linéaire non homogène $\frac{dy}{dt} = Ay + B$ $A \in M(n, \mathbb{R})$

$B \in \mathbb{R}^n$

Équilibres ? $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tels que $\boxed{Ax_0 = -B}$ ($\exists !$ si $A \in GL(n, \mathbb{R})$)

Si $Ax_0 + B = 0$, si $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ $\quad y = x_0 + z$

$$\frac{dy}{dt} = Ay + B \iff \frac{dz}{dt} = A.z$$

$\longrightarrow$ On se ramène à l'étude de $\frac{dz}{dt} = Az$.

Systèmes linéaires homogènes:

0 (origine) est toujours un équilibre.

Théorème Soit $A \in M(n, \mathbb{R})$. Alors 0 est équilibre et

(i) 0 est globalement asymptotiquement stable ssi

$\forall \lambda$: valeur propre de A, $\boxed{\mathrm{Re}\,\lambda < 0}$

(ii) Si A admet au moins une valeur propre λ telle $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ alors 0 est instable.

Cas non traité : si $\exists \lambda$: valeur propre, $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$??

Démonstration $\exists P \in GL(n, \mathbb{C})$, $\exists \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $(\in M(n, \mathbb{C}))$

$\exists T = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & a_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{C})$ telles que $\boxed{T\Delta = \Delta T}$ et

$\boxed{A = P(\Delta + T)P^{-1}} \Rightarrow e^{tA} = P e^{t\Delta} e^{tT} P^{-1}$.

(i) Supposons que, $\forall j = 1, \dots, n$, $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$.

$\Rightarrow \exists \alpha > 0$, $\forall j$, $\boxed{\mathrm{Re}\,\lambda_j \leq -\alpha < 0} \Rightarrow$ $\forall y \in \mathbb{R}^n$ $\|e^{t\Delta} y\| \leq e^{-\alpha t} \|y\|$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|e^{tA} x\| = \|P \underline{e^{t\Delta} e^{tT} P^{-1} x}\|$$
$$\leq \|P\|\, e^{-\alpha t} \underbrace{\|e^{tT} P^{-1} x\|}_{\text{polynôme en } t}$$ (car $T^n = 0$)

$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{t \to +\infty} \|e^{tA} x\| = 0 \\ + \text{stabilité} \end{cases}$ $\iff$ stabilité asymptotique globale

Réciproque : par la contraposée de [stabilité asympt. $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$, $\forall j$]

Si $\exists j$ tel que $\boxed{\mathrm{Re}(\lambda_j) > 0}$, alors $\exists u \in \mathbb{C}^n$, $Au = \lambda_j u$.

$\Rightarrow e^{tA} u = e^{t\lambda_j} u$

(a) supposons $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^n$,

$$\boxed{\begin{aligned} \|e^{tA}u\| &= \|e^{t\lambda_j}u\| \\ &= e^{t\lambda_j}\|u\| \geq \|u\| \end{aligned}}$$

$\longrightarrow$ pas de stabilité asymptotique.

(b) si $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $\overline{\lambda_j}$ est aussi valeur propre.

$y(t) = e^{t\lambda_j}u + e^{t\overline{\lambda_j}}\bar{u}$ est solution réelle de $\frac{dy}{dt} = Ay$

$\longrightarrow$ même conclusion.

(ii) Si $\exists \lambda$: valeur propre telle que $\operatorname{Re}\lambda > 0$, le système est instable.

Je reprends les calculs précédents: (cas $\lambda \in \mathbb{R}$):

$$\|e^{tA}u\| = e^{t\lambda}\|u\| \longrightarrow +\infty \text{ si } t \to +\infty$$

Cas non linéaire : par linéarisation.

Je suppose $X \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. je suppose que $0 \in \Omega$ est un équilibre.

$$dX_0 \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n) \qquad dX_0 : \begin{aligned} \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ \xi &\mapsto \sum_{j=1}^n \underbrace{\frac{\partial X}{\partial x^j}(0)}_{\mathbb{R}^n}\xi^j \end{aligned}$$

Théorème Si les valeurs propres de dX_0 sont toutes de partie réelle strictement négative, alors 0 est un équilibre localement asymptotiquement stable.

Lemme Soit $A \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$. Supposons que les valeurs propres de A sont toutes de partie réelle strictement négative. Alors $\exists \alpha > 0$, $\exists \langle \cdot, \cdot \rangle_A$: un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, Ax \rangle_A \leq -\alpha \|x\|_A^2$$

(où $\|x\|_A^2 = \langle x, x \rangle_A$)

Preuve du lemme $\exists P \in GL(n, \mathbb{C})$, $\exists \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{C})$

$$\exists\ N = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{C})$$

tels que $\boxed{A = P(\Delta + N)P^{-1}}$

Pour $\delta > 0$, je définis
$$Q_\delta = \begin{pmatrix} \delta^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta^{n-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \delta \end{pmatrix} \in Gl(n, \mathbb{R})$$

et $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle_\delta = \operatorname{Re}\langle Q_\delta P^{-1}x, Q_\delta P^{-1}y\rangle$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est le produit hermitien canonique

$\forall u, v \in \mathbb{C}^n$, $\langle u, v\rangle = \sum_{j=1}^n \overline{u_j}\, v_j$

Objectif : $\langle x, Ax\rangle_A \leq -\alpha\|x\|_A^2$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, Ax\rangle_\delta = \operatorname{Re}\langle Q_\delta P^{-1}x, Q_\delta \cancel{P^{-1}}\cancel{P}(\Delta + N)P^{-1}x\rangle$

$= \operatorname{Re}\langle Q_\delta P^{-1}x, Q_\delta \Delta P^{-1}x\rangle + \operatorname{Re}\langle Q_\delta P^{-1}x, Q_\delta N P^{-1}x\rangle$

2 matrices diagonales (donc commutent)

$\boxed{z = Q_\delta P^{-1}x}$

$Q_\delta^{-1} = Q_{\frac{1}{\delta}}$

$\boxed{\|x\|_\delta^2 = \|z\|^2}$

$= \operatorname{Re}\langle z, \Delta z\rangle + \operatorname{Re}\langle z, Q_\delta N \underbrace{Q_{1/\delta} Q_\delta}_{I_n} N P^{-1}x\rangle$ — $\boxed{Q_\delta N P^{-1}x} = z$

$= \operatorname{Re}\langle z, \Delta z\rangle + \operatorname{Re}\langle z, Q_\delta N Q_{1/\delta} z\rangle$

Hypothèse les parties réelles des valeurs sont < 0 $\Rightarrow \exists \alpha > 0$, $\forall \lambda_j$, $\boxed{\lambda_j < -2\alpha}$

$\langle x, Ax\rangle_\delta \leq -2\alpha \underbrace{\langle z, z\rangle}_{\|x\|_\delta^2} + \operatorname{Re}\langle z, Q_\delta N Q_{1/\delta} z\rangle$

Calcul $\quad Q_\delta N Q_{1/\delta} = \begin{pmatrix} 0 & \delta a_{12} & \cdots & \delta^{n-1}a_{1,n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \delta a_{n-1,n} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$

une diagonale de N au-dessus de la diagonale principale et à une distance $k \in \{1, \dots, n-1\}$ est multipliée par δ^k.

$\Rightarrow \operatorname{Re}\langle z, Q_\delta N Q_{1/\delta} z\rangle \leq \underbrace{\delta \frac{n-1}{2} \sup_{1 \leq j < k \leq n} |a_{jk}| \sum_{j=1}^n |z_j|^2}$ $(\text{si } \delta < 1)$

$\leq C\|z\|^2 = C\|x\|_\delta^2$

Résultat $\langle x, Ax\rangle_\delta \leq -2\alpha\|x\|_\delta^2 + C\delta\|x\|_\delta^2$

$= (C\delta - 2\alpha)\|x\|_\delta^2$

On choisit δ tel que $C\delta < \alpha$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\langle x, Ax\rangle_\delta \leq -\alpha\|x\|_\delta^2}$

Preuve du théorème

$$\frac{dy}{dt} = X(y) \qquad X(0) = 0.$$

$\forall x \in U$, $\quad X(x) = X(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(X(tx)\right) dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X}{\partial x^j}(tx)\, x^j \, dt$

$$\Rightarrow \quad X(x) - \underbrace{dX_0}_{\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left[\int_0^1 \left(\frac{\partial X}{\partial x^j}(tx) - \frac{\partial X}{\partial x^j}(0)\right) dt\right]}_{g_j(x) \in \mathbb{R}^n} x^j$$

$\forall j$, $\quad g_j \in \mathcal{C}^0(U)$.

$$G : U \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$$
$$x \longmapsto \left[G_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \xi \mapsto \sum_{j=1}^{n} \underbrace{g_j(x)}_{\mathbb{R}^n} \xi^j\right]$$

Alors $\quad X(x) = \underbrace{dX_0(x)}_{\text{linéaire en } x} + \underbrace{\underbrace{G_x}_{\text{linéaire}}(x)}_{\text{non linéaire en } x}$

$\| G \in \mathcal{C}^0(U, \mathrm{End}(\mathbb{R}^n))$
$\| G_0 = 0$

Objectif : $\quad y = x \cdot e^{tX}$

$$\frac{d}{dt} \|y(t)\|_S^2 = 2 \left\langle y(t), \frac{dy}{dt}(y)\right\rangle_S = 2 \left\langle y(t), X(y(t))\right\rangle_S$$

Majorer $\quad \underline{\langle y, X(y)\rangle_S}$ par quelque chose < 0.

Appliquons le lemme (pour $A = dX_0$), notons $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ le produit scalaire tel que

$$\langle \xi, dX_0(\xi)\rangle_S \leq -\alpha \|\xi\|_S^2$$

$\forall x \in U$, $\quad \langle x, X(x)\rangle_S = \langle x, dX_0(x)\rangle_S + \langle x, G_x(x)\rangle_S$ $\quad \Downarrow$ Cauchy-Schwarz

$$\leq -\alpha \|x\|_S^2 + \|x\|_S \, \|G_x(x)\|_S$$

[Déf $\quad \|G_x\|_S = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|G_x(\xi)\|_S}{\|\xi\|_S}$]

$$\langle x, X(x)\rangle_S \leq -\alpha \|x\|_S^2 + \|x\|_S \, \|G_x\|_S \, \|x\|_S$$
$$= \left(\|G_x\|_S - \alpha\right) \|x\|_S^2$$

$\underline{G \ \mathcal{C}^0 \text{ et } G_0 = 0}$ $\Rightarrow$ $\left[\exists \rho > 0, \ \forall x \in \overline{B}_S(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\|_S \leq \rho\} \quad \|G_x\|_S < \frac{\alpha}{2} \right.$

Alors, $\forall x \in \overline{B}_S(\rho)$, $\quad \boxed{\langle x, X(x)\rangle_S \leq -\frac{\alpha}{2} \|x\|_S^2}$

Soit $x \in \bar{B}_S(\varrho)$, $y(t) = x \cdot e^{tX}$, pour $t \geq 0$

$$\frac{d\|y(t)\|_S^2}{dt} = 2\left\langle y, \frac{dy}{dt}\right\rangle = 2\langle y, X(y)\rangle \leq -\alpha\|y\|_S^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d\|y\|_S^2}{dt} + \alpha\|y\|_S^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t}\|y\|_S^2\right) \leq 0 \Rightarrow \left[t \mapsto e^{\alpha t}\|y(t)\|_S^2\right] \text{ décroît}$$

$$\Rightarrow \boxed{\forall t \geq 0, \quad e^{\alpha t}\|y(t)\|_S^2 \leq e^0\|y(0)\|_S^2 = \|x\|_S^2}$$

$$\boxed{\|x \cdot e^{tX}\|_S^2 \leq e^{-\alpha t}\|x\|_S^2}$$

Conséquences : 1) la solution ne sort pas du compact $\bar{B}_S(\varrho)$ $\Rightarrow$ donc elle est définie pour $t \in [0, +\infty[$

2) Stabilité :

$\|\cdot\|_S$ est équivalente à la norme standard. $\|\cdot\|$:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{1}{C}\|\xi\| \leq \|\xi\|_S \leq C\|\xi\|$$

$\forall t \geq 0$, $\forall x \in \Omega$, $\|x\| \leq \underbrace{\frac{\varrho}{C}}_{\text{"}\delta\text{" de la définition de la stabilité}} \Rightarrow \|x\|_S \leq \varrho \Rightarrow \|x \cdot e^{tX}\|_S \leq e^{-\frac{\alpha t}{2}}\|x\|_S \leq e^{-\frac{\alpha t}{2}}\varrho$

$$\Rightarrow \boxed{\|x \cdot e^{tX}\|_S \leq \underbrace{C e^{-\frac{\alpha t}{2}}\varrho}_{\varepsilon}}$$

$\rightarrow$ stabilité : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, ...

Stabilité asymptotique : $\forall x \in \Omega$, $\|x\| \leq \frac{\varrho}{C}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} x \cdot e^{tX} = 0$