Stabilité d'un point d'équilibre $a \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $X(a) = 0$

- par linéarisation

$$dX_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1}(a) & \cdots & \frac{\partial X^1}{\partial x^n}(a) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial X^n}{\partial x^1}(a) & \cdots & \frac{\partial X^n}{\partial x^n}(a) \end{pmatrix} = A$$

Thm Si $\forall \lambda$: valeur propre de A, $\mathrm{Re}(\lambda) < 0 \Rightarrow a$ est localement asymptotiquement stable

(déjà vu)

"sorte de réciproque":

Thm Supposons que a est stable. Alors toutes les valeurs propres de dX_a sont de partie réelle $\leqslant 0$.

(admis)

La contraposée de ce résultat est très utile:

Thm' Si a est un point d'équilibre et si il existe une valeur propre pour dX_a, dont la partie réelle est > 0, alors a est instable.

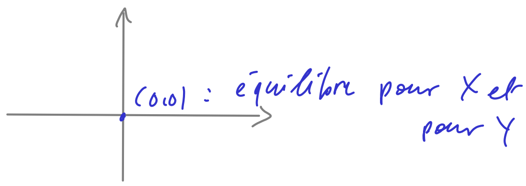
Que se passe-t-il si les valeurs propres sont de partie réelle nulle ?

La linéarisation ne donne aucune information utilisable pour le problème non linéaire.

Exemple Dans $\mathbb{R}^2$, $X, Y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

(i) $X(x) = X\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - x^1 \|x\|^2 \\ -x^1 - x^2 \|x\|^2 \end{pmatrix}$ où $\|x\|^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$

(ii) $Y(x) = \begin{pmatrix} x^2 + x^1 \|x\|^2 \\ -x^1 + x^2 \|x\|^2 \end{pmatrix}$



$$A = dX_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = dY_{(0,0)}$$

Valeurs propres de A : $\pm i$ (parties réelles nulles)

Considérons $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \|x\|^2$

(i) Soit y : solution de $\boxed{\frac{dy}{dt} = X(y)}$. $L \circ y$?

$$(L \circ y)(t) = L(y(t)) = (y^1(t))^2 + (y^2(t))^2$$

$$\frac{d\, L(y(t))}{dt} = 2\, y^1 \frac{dy^1}{dt} + 2\, y^2 \frac{dy^2}{dt} = 2 y^1 \left(\cancel{y^2} - y^1 \|y\|^2\right) + 2 y^2 \left(\cancel{-y^1} - y^2 \|y\|^2\right)$$

$$= -2 (y^1)^2 \|y\|^2 - 2 (y^2)^2 \|y\|^2 = -2 \|y\|^4 \leq 0$$

Observations : a) $L(y(t))$ décroît. b) $L(y(t)) \geq 0$ $\Big\}$ $\Rightarrow 0 = (0,0)$ est stable.

Rappel : stabilité

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in B(0, \alpha),\ \forall t \geq 0,\ \underbrace{x \cdot e^{tX}}_{y(t)} \in B(0, \varepsilon)$

C'est vrai pour $\alpha = \varepsilon$

Il y a même stabilité asymptotique globale :

$\dot{z} = -2 z^2$

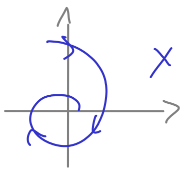
$$\frac{d \|y\|^2}{dt} = -4 \left(\|y\|^2\right)^2 \Rightarrow \|y(t)\|^2 = \underbrace{\frac{\|x\|^2}{1 + 2\|x\|^2 t}}_{\text{tend vers } 0 \text{ si } t \to +\infty} \qquad x = y(0)$$

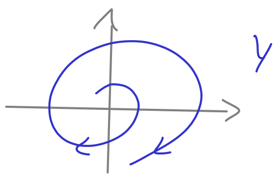
(ii) Soit z une solution de $\frac{dz}{dt} = Y(z) \Rightarrow \frac{d\, L(z(t))}{dt} = 2 \|z\|^4 > 0$

$(L(x) = \|x\|^2)$

$$\Rightarrow \|z(t)\|^2 = \frac{\|x\|^2}{1 - 2\|x\|^2 t} \quad \text{explose au temps } \frac{1}{2\|x\|^2}.$$

Pour Y, $(0,0)$ est instable.





L est un exemple de fonction de Liapounov

Définition (fonction de Liapounov) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Champ de vecteur autonome : $X \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$, localement lipschitzienne.

Soit $a \in \Omega$ un point d'équilibre. Soit U un voisinage de a dans U et $L \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$.

On dit L est une fonction de Liapounov pour a si

(i) $L(a) = 0$ et $\forall x \in U \setminus \{a\}$, $L(x) > 0$ (Donc a : unique minimum)

(ii) $\forall x \in U$, $[t \longmapsto L(\underbrace{x \cdot e^{tX}}_{\text{valeur en } t \text{ de } y})]$ est décroissante.

valeur en t de y : $\begin{cases} y(0) = x \\ \dot{y}(t) = X(y(t)) \end{cases}$

Si, de plus,

(iii) $\forall x \in U \setminus \{a\}$, $(t \longmapsto L(x \cdot e^{tX}))$ est strictement décroissante

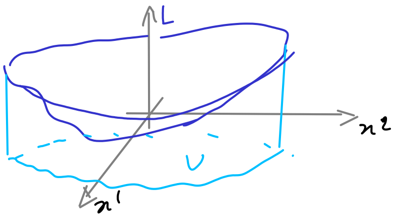
Alors on dit que L est une fonction de Liapounov stricte pour a.

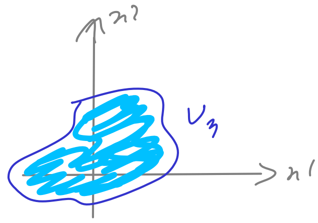
Théorème Mêmes hypothèses que précédemment. Supposons qu'il existe une fonction de Liapounov $L \in \mathcal{C}^0(U, \mathbb{R})$ pour a. Alors

(a) a est stable.

(b) si, de plus, L est strictement Liapounov, alors a est localement asymptotiquement stable.

Preuve Idée : soit $U_\eta = \{x \in U \,;\, L(x) < \eta\}$ pour $\eta > 0$





(vue aérienne)

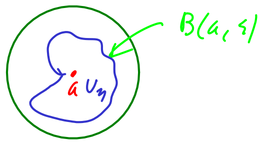
Si $\boxed{x \in U_\eta}$, comme $t \mapsto L(x \cdot e^{tX})$ décroît, $\boxed{\text{alors}}$ $L(x \cdot e^{tX}) < \eta$

$\Updownarrow$ $L(x) < \eta$ $\iff$ $\boxed{x \cdot e^{tX} \in U_\eta}$

Remarque : à cette observation, la solution $x \cdot e^{tX}$ reste dans un compact si $x \in$ Voisinage de a $\Longrightarrow$ la solution $x \cdot e^{tX}$ est définie $\forall t \geq 0$.

Pour montrer (a), on a besoin de montrer :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \quad U_\eta \subset B(a, \varepsilon)}$$



On le montre par l'absurde. On supposera que U est compact (sans perte de généralité)

Supposons le contraire :

$$\underbrace{\boxed{\exists \varepsilon > 0}}_{\text{fixé}}, \ \forall \eta > 0, \quad U_\eta \cap (U \setminus B(a, \varepsilon)) \neq \emptyset$$

J'applique pour une suite $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \eta_n = 0$ $\quad \eta_n > 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, x_n \in U$ tel que :

$$x_n \in \underbrace{U \setminus B(a, \varepsilon)}_{\text{compact.}} \quad \text{et} \quad \underbrace{x_n \in U_{\eta_n}}_{}$$

Sans perte de généralité : $\exists\, \bar{x} \in U \setminus B(a, \varepsilon)$ $\qquad 0 \leq L(x_n) < \eta_n$

$\lim\limits_{n \to +\infty} x_n \in \bar{x}$ $\qquad \lim\limits_{+\infty} \eta_n = 0 \Longrightarrow \underbrace{\lim\limits_{n \to +\infty} L(x_n) = 0}$

$\overset{L \text{ continue}}{\Longrightarrow}$ $\underbrace{\lim\limits_{n \to +\infty} L(x_n) = L(\bar{x})}$

Conclusion : $L(\bar{x}) = 0 \overset{\text{propriété}}{\Longleftrightarrow} \bar{x} = a$

(i) de Liapounov

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$: $\boxed{\text{contradiction}}$ car $x_n \in U \setminus B(a, \varepsilon)$

$\Longrightarrow \|x_n - a\| \geq \varepsilon$

Donc : $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \quad U_\eta \subset B(a, \varepsilon)}$ $(\star)$

stabilité $\Longrightarrow$ (?) $\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0, \quad x \in B(a, \alpha) \Longrightarrow [\forall t \geq 0, \ x \cdot e^{tX} \in B(a, \varepsilon)]}$??

U_η est un voisinage de a (car L est continue) donc $\exists \alpha > 0$, $B(a, \alpha) \subset U_\eta$

$\forall \varepsilon > 0 \overset{\star}{\Longrightarrow} \exists \eta > 0$, $U_\eta \subset B(a, \varepsilon)$. donc $\exists \alpha > 0$, $B(a, \alpha) \subset U_\eta$

$$x \in B(a, \alpha) \Longrightarrow x \in U_\eta \Longrightarrow [\forall t \geq 0, \ x \cdot e^{tX} \in U_\eta \subset B(a, \varepsilon)]$$

(b) Stabilité asymptotique locale ? Soit $\boxed{x \in U_1}$, $\overline{U_1} \subset \mathring{U}$

Soit : $\boxed{\begin{array}{l} h : [0,+\infty[\to [0,+\infty[\\ \quad t \mapsto L(x.e^{tX}) \end{array}}$ (h est continue)

Observation : . h est décroissante
. h est minorée par 0 $\Big\} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = \ell}$ existe

. $\left(\{x.e^{tX}\} \in \overline{U_1},\ \forall t \geq 0\right) \Rightarrow \Big\{ \exists (t_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$
telle $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x.e^{t_nX} = \bar{x}}$

On va montrer que : $\boxed{\forall s \geq 0,\quad L(\bar{x}.e^{sX}) = \ell}$ (point crucial, car alors $\bar{x} = a$)

$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall s \geq 0,\quad x.e^{(t_n+s)X} = (x.e^{t_nX}).e^{sX}$ (unicité du problème de Cauchy)

[ie est $e^{(t_n+s)X}(x) = e^{sX}(e^{t_nX}(x))$ dans d'autres notations]

Donc $\forall s \geq 0$, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x.e^{(t_n+s)X}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[(x.e^{t_nX}).e^{sX}\right]$

$= \Big(\underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} x.e^{t_nX}}_{\bar{x}}\Big).e^{sX} = \boxed{\bar{x}.e^{sX}}$ $\left[.e^{sX}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} e^{t_nX}(x)\right)\right]$

(par définition)

Continuité de $[z \mapsto z.e^{sX}]$

Résultat dont je parlerai ultérieurement

Donc, $\forall s \geq 0$ $\quad \ell = \lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} h(t_n+s) = \lim\limits_{n\to+\infty} L(x.e^{(t_n+s)X})$

$\underset{\text{continuité de } L}{=} L\left(\lim\limits_{n\to+\infty} x.e^{(t_n+s)X}\right) \underset{\text{précède}}{\overset{\text{ce qui}}{=}} L(\bar{x}.e^{sX})$

Donc $\forall s \geq 0,\quad L(\bar{x}.e^{sX}) = \ell$

$\Rightarrow [t \mapsto L(\bar{x}.e^{tX})]$ est constante

Hypothèse Liapounov stricte $\Rightarrow [\bar{x} \notin U \setminus \{a\}] \Leftrightarrow \boxed{\bar{x} = a}$

A posteriori $\ell = L(\bar{x}) = L(a) = 0. \Rightarrow \boxed{\ell = 0}$

Conclusion : $\lim\limits_{t\to+\infty} x.e^{tX} = a$ Rappel $h(t) = L(x.e^{tX})$

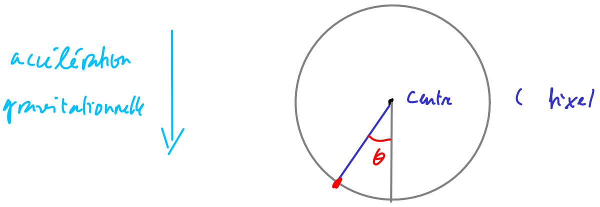
<u>id est</u>:

$$\boxed{\forall \varepsilon>0},\ \exists \eta>0,\quad \underline{U_\eta \subset B(a,\varepsilon)}$$

comme $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t) = \ell = 0$, $\boxed{\exists T>0}$, $\boxed{\forall t \geq T}$, $h(t) < \eta$

$$\iff L(x\cdot e^{tX}) < \eta \iff \boxed{x\cdot e^{tX} \in U_\eta \subset B(a,\varepsilon)}$$

<u>Exemple</u> : problème du pendule. en <u>négligeant les frottements</u>.



Position du pendule repérée par θ

Mouvement décrit $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0$ (après normalisation)

$\to$ <u>Système</u> : $y(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \end{pmatrix}$

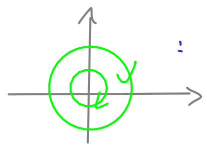
$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} y^2 \\ -\sin y^1 \end{pmatrix} = X(y) \qquad X(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -\sin x^1 \end{pmatrix},\ \forall x \in \mathbb{R}^2$$

$$\boxed{X(x^1+2\pi, x^2) = X(x^1,x^2)}$$

<u>Points d'équilibres ?</u> $(2k\pi, 0)$ et $(\pi + 2k\pi, 0)$

2π-périodicité : il suffit d'étudier le problème en $(0,0)$ et $(\pi,0)$

$dX_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ valeurs propres : $\pm i$



: problème <u>linéarisé</u>

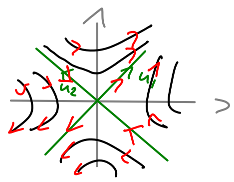
(mais je ne peux rien en faire)

$dX_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ valeurs propres : ± 1

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Au_1 = u_1$, $Au_2 = -u_2$

<u>$+1 \Rightarrow$ instabilité</u>



<u>Fonction de Liapounov ?</u> du côté des physiciens :

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0 \implies \dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}\sin\theta = 0$$

$$\iff \frac{d}{dt}\left(\frac{(\dot{\theta})^2}{2} - \cos\theta\right) = 0$$

Donc $E(t) = \dfrac{(\dot\theta(t))^2}{2} - \cos\theta(t)$ énergie totale

est une quantité conservée.

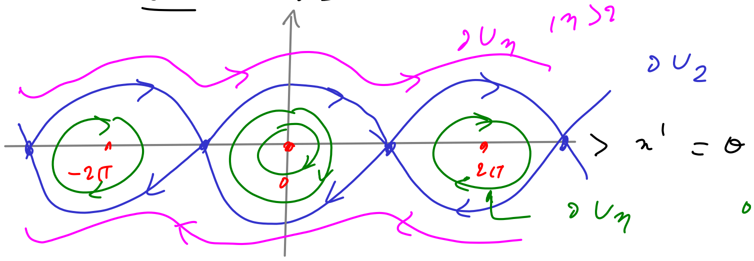
$\longrightarrow \quad L(x^1, x^2) = \dfrac{(x^2)^2}{2} + 1 - \cos x^1 \geqslant 0$

$L(x) = 0 \iff x = (2k\pi, 0)$.

Sur $U = B(0, 2\pi)$, L est une fonction de Liapounov pour $(0,0)$

Donc $(0,0)$ est stable

Les trajectoires sont piégées dans les lignes de niveau



Version avec frottement :

$\ddot\theta - f\dot\theta + \sin\theta = 0$

Supplément || Définition (Flot d'un champ de vecteur autonome)

$(\Omega_X \subset \mathbb{R} \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$

$$\phi : \Omega_X \longrightarrow \Omega \qquad X \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$$
$$(t, x) \longmapsto \phi(t, x) = x \cdot e^{tX}$$

est le flot de X

Théorème Si X est $\mathcal{C}^k$, ϕ est $\mathcal{C}^k$. $(\forall k \geqslant 0)$

(utilisé dans la preuve du théorème précédent).