Flot

- Continuité d'une solution d'une équation différentielle en fonction de la condition initiale.
- Flot.

1 – Méthodes de résolution approchée

---

Flot — Cauchy-Lipschitz $\frac{dy}{dt} = X(y)$ — $X$ localement lipschitzien $X \in \mathcal{C}^0(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^n$

$\forall (0, x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega$

$\exists\ I_0 \times O_{x_0}$ : voisinage de $(0, x_0)$ dans $\mathbb{R} \times \Omega$

$\Phi : I_0 \times O_{x_0} \longrightarrow \Omega$

$(t, x) \longmapsto x \cdot e^{tX} = \Phi(t, x)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Phi(0, x) = x \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) = X(\Phi(t, x)) \end{array}}$$

De plus, $\forall x \in O_{x_0}$, $t \mapsto \Phi(t, x) = x \cdot e^{tX}$ est $\mathcal{C}^1$

**Théorème 1** Sous les hypothèses qui précèdent, $\Phi$ est continue sur $I_0 \times O_{x_0}$ (elle est continue en $(t, x)$).

(Résultat local) $\Rightarrow$ Résultat global

**Définition** Soit $X \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ localement lipschitzien. L'ensemble de vie de $X$ est $\boxed{\Delta_X} \subset \mathbb{R} \times \Omega$ : le plus grand sous-ensemble sur lequel on peut définir $\Phi$. ($\Delta_X = \{(t, x) ; x \in \Omega, t \in I^{max}(x)\}$)

Cauchy-Lipschitz $\Rightarrow$ a) $\Delta_X \neq \emptyset$ et, mieux, $\Delta_X$ est un voisinage de $\{0\} \times \Omega$ dans $\mathbb{R} \times \Omega$

b) $\Delta_X$ est un ouvert dans $\mathbb{R} \times \Omega$.

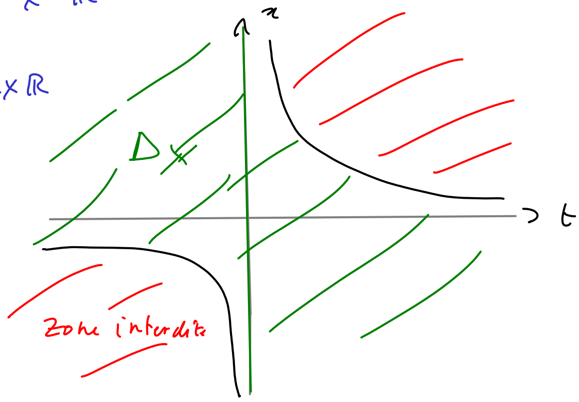
**Théorème 2** $\Phi : \Delta_X \longrightarrow \Omega$ est continue sur $\Delta_X$

Preuves des théorèmes 1 et 2 : admises pour l'instant.

**Exemples** a) $\frac{dy}{dt} = Ay$ $\quad (A \in M(n,\mathbb{R}))$ équation linéaire

$\Delta_X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

b) $\frac{dy}{dt} = y^2$ $\quad \Delta_X \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}$




X $C^0$ et localement lipschitzien : $\forall x$ fixé $\{t \mapsto \Phi(t,x)\}$ est $C^1$

$\{(t,x) \mapsto \Phi(t,x)\}$ est $C^0$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,x) = X(\Phi(t,x))$$

**Complément** Si $k \geq 1$ et $X$ est $C^k$ alors $\{(t,x) \mapsto \Phi(t,x)\}$ est $C^k$

**Propriété** a) $\forall (t,x) \in \Delta_X$, $\forall s \in \mathbb{R}$ tel que $(t+s,x) \in \Delta_X$,

$$\Phi(t+s,x) = \Phi(s, \Phi(t,x))$$

ou encore $$\boxed{x \cdot e^{(t+s)X} = (x \cdot e^{tX}) \cdot e^{sX}}$$

b) $\forall (t,x) \in \Delta_X$, $\quad \Phi(-t, \Phi(t,x)) = x$

soit $$\boxed{(x \cdot e^{tX}) \cdot e^{-tX} = x}$$

Morphisme $(\mathbb{R},+)$ $\to$ pseudo-groupe des difféomorphismes de $U$.

---

**Méthodes numériques** : résoudre de façon approchée une équation

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = X(t, y(t)) & \text{sur } [t_0, t_0+T] \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$$

**Idée** : estimer les valeurs de $y(t)$ pour $t \in \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ où

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = t_0 + T$$

On remplace $y$ par une suite $(y_0, y_1 \dots, y_N)$ telle que

$\forall k \in [\![0, N]\!]$, $y_k$ : estimation de $y(t_k)$

Comment construire la suite $(y_0 \dots y_N)$ ? Algorithme pour calculer $y_{k+1}$ connaissant $y_k$

Méthode d'Euler

Soit $z$ la solution exacte ($C^1$) ($z \in C^1([t_0, t_0+T], \Omega)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$t_{k+1} = t_k + h_k \qquad (h_k := t_{k+1} - t_k > 0)$$

$$z(t_{k+1}) = z(t_k + h_k) \overset{\text{Taylor}}{=} z(t_k) + h_k \frac{dz_k}{dt}(t_k) + o(h_k)$$

$$\simeq z(t_k) + h_k \frac{dz_k}{dt}(t_k)$$

$$\frac{dz}{dt} = X(t, z(t))$$

$$= z(t_k) + h_k X(t_k, z(t_k))$$

algorithme pour $(y_k)$

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h_k X(t_k, y_k)}$$

$\rightarrow$ Construire deux suites finies : $(t_k)_{0 \le k \le N}$ et $(y_k)_{0 \le k \le N}$

$$\boxed{\begin{array}{l} t_0 = \text{donné} \\ y_0 = \text{donné} \end{array} \Big\} \text{ par les conditions de Cauchy}} \quad \text{et} \quad \boxed{\begin{array}{l} t_{k+1} = t_k + h_k \\ y_{k+1} = y_k + h_k X(t_k, y_k) \end{array}}$$

$\rightarrow$ solution approchée "théorique" de $(y(t_k))$

étant donné une suite $(h_0, \dots, h_{N-1})$ de réels $> 0$ telle que

$$\sum_{k=0}^{N-1} h_k = T$$

Implémentation $\rightarrow$ solution, avec des erreurs supplémentaires. (erreurs d'arrondi qui se cumulent)

Le plus souvent, on choisira $h_k = \frac{T}{N} = h$

$$\rightarrow \boxed{y_{k+1} = y_k + h X(t_k, y_k)}$$

Est-ce faisable ? Est-ce fiable ?

$\boxed{\text{Étude qualitative}}$

## 1) L'algorithme est-il bien défini ?

**Proposition** Supposons que $X$ est défini sur $I \times B^n(y_0, r)$ $(I = [t_0, t_0+T])$ et que $\exists M > 0$ tel que

$$\boxed{\left| \begin{array}{l} \|X(t,x)\| \leq M \\ \forall (t,x) \in I \times B^n(y_0, r) \end{array} \right.}$$

Alors si $TM \leq r$, l'algorithme est bien défini (la suite existe)

**Preuve** $\|y_{k+1} - y_k\| = \|h_k X(t_k, y_k)\| < h_k \|X(t_k, y_k)\| \leq h_k M$

si $y_k \in B^n(x_0, r)$ $\Rightarrow$ $y_{k+1} = y_k + h_k X(t_k, y_k)$

**Par Récurrence** : si $TM \leq r$ alors $\boxed{\begin{array}{l} \|y_k - x_0\| \leq \sum_{j=0}^{k-1} h_j M \\ (\Rightarrow y_k \in B^n(x_0, r)) \end{array}}$ $\forall k \in [\![0, N]\!]$.

(0) $y_0 = x_0$ ok

(k) $\Rightarrow$ (k+1) : on utilise ce qui précède

$$\|y_{k+1} - y_0\| \leq \|y_{k+1} - y_k\| + \|y_k - x_0\|$$
$$\leq h_k M + \sum_{j=0}^{k-1} h_j M = \sum_{j=0}^{k} h_j M.$$

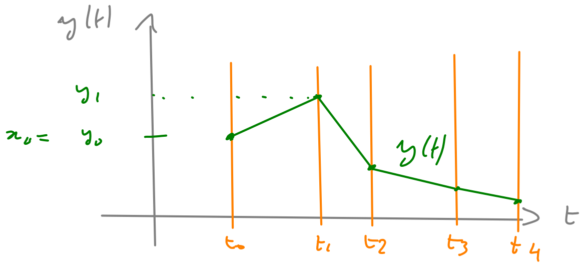
**Dorénavant** $\|X(t,x)\| \leq M$ $I \times B^n(x_0, r)$ et $MT \leq r$.

## L'erreur commise lors de l'approximation est-elle petite ?

**Associons** à $(t_0, \ldots, t_N)$ et $(y_0, \ldots, y_N)$ la fonction

$y : [t_0, t_0+T] \to \Omega$ continue, affine par morceau et

telle que : $y(t_k) = y_k$, $\forall k$




$\forall k \in \{0, \ldots, N-1\}$

$\forall t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$y(t) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{t_{k+1} - t_k}(t - t_k)$$

Est-ce que $y$ vérifie avec une faible erreur l'équation différentielle ?

$\to$ estimer $\dfrac{dy}{dt} - X(t, y(t)) = \ ?\ldots$

$\forall t \in [t_n, t_{n+1})$, $\quad y(t) = y_n + \dfrac{y_{n+1} - y_n}{t_{n+1} - t_n}(t - t_n) = y_n + X(t_n, y_n)(t - t_n)$

$y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n) X(t_n, y_n)$

$\Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dt} = X(t_n, y_n)$

Donc $\quad \dfrac{dy}{dt} - X(t, y) = X(t_n, y_n) - X(t, y(t))$

Notons $\quad \boxed{u(t) := \left\| \dfrac{dy}{dt} - X(t, y(t)) \right\| = \| X(t_n, y_n) - X(t, y(t)) \|}$

$\boxed{I = [t_0, t_0 + T]}$

Hypothèse : $X$ est uniformément continue sur $I \times B^n(x_0, r)$

Définition : module de continuité de $X$ : $I \times B^n(x_0, r) \to \mathbb{R}^n$,

$\forall \ell > 0$, $\boxed{\omega_X(\ell) = \sup \{ \| X(t, x) - X(t', x') \| ; \ (t, x), (t', x') \in I \times B^n(x_0, r), \ \| (t - x) - (t', x') \| < \ell \}}$

Propriété : $X$ est uniformément continue ssi $\omega_X$ est finie partout, $\boxed{\lim_{\ell \to 0} \omega_X(\ell) = 0}$.

Traduction de l'Hypothèse $\quad \lim_{\ell \to 0} \omega_X(\ell) = 0$

$\forall t \in (t_n, t_{n+1})$, $\quad u(t) = \| X(t_n, y_n) - X(t, y(t)) \|$

$\boxed{y(t) = y_n + X(t_n, y_n)(t - t_n)}$

$$\begin{aligned}
u(t) &\leq \omega_X(\| (t_n, y_n) - (t, y(t)) \|) \\
&= \omega_X(|t_n - t| + \| y_n - y(t) \|) \\
&\leq \omega_X(h_n + \| X(t_n, y_n) \| \, |t - t_n|) \\
&\leq \omega_X(h_n + h_n M) = \omega_X((M+1) h_n)
\end{aligned}$$

$\lim_{\ell \to 0} \omega_X(\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \ \exists \alpha > 0,$

$(M+1) h_n < \alpha \Rightarrow \omega_X((M+1) h_n) < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow \quad u(x) < \varepsilon$

Conclusion si $\bar{h} = \max(h_k)$

$$\bar{h} < \frac{\alpha}{M+1} \implies u(t) = \left\| \frac{dy}{dt} - X(t, y(t)) \right\| < \varepsilon.$$

Hypothèses utilisées : $\|X\| \leq M$ & $X$ uniformément continue.

(Hypothèses toujours réalisées si $X$ est continue et définie sur un compact).

Définition Soit $\varepsilon > 0$, soit $y \in \mathcal{C}^0(I, B^n(x_0, r))$ une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceau. On dit $y$ est une solution $\varepsilon$-approchée de $\frac{dz}{dt} = X(t, z)$ si $\exists\, C \subset I$ (sous-ensemble fini) tel que

$$\forall t \in I \setminus C, \quad \left\| \frac{dy}{dt}(t) - X(t, y(t)) \right\| < \varepsilon$$

(en général $C = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N\}$).

Dit autrement : $\boxed{\frac{dy}{dt}(t) = X(t, y(t)) + \text{"bruit"}(t)}$

avec $\|\text{bruit}(t)\| < \varepsilon$

"être solution d'une équation proche de la solution exacte" ($\varepsilon$-approchée)

$\overset{?}{\Longrightarrow}$ "être proche de la solution de l'équation exacte"

oui, s'il y a convergence uniforme.

Proposition Soit $X \in \mathcal{C}^0(I \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ bornée et uniformément continue. Soit $(\varepsilon_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ une suite à valeur dans $]0, +\infty[$ et $(y_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{C}^0(I, \Omega)$, $\mathcal{C}^1$ par morceau. Supposons que :

(i) $\forall p$, $(y_p)$ est une solution $\varepsilon_p$-approchée de $\frac{dz}{dt} = X(t, z)$

(ii) $\lim_{p \to +\infty} \varepsilon_p = 0$

(iii) $(y_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers une certaine fonction $y \in \mathcal{C}^0(I, \Omega)$.

Alors $y$ est $\mathcal{C}^1$ et est solution de $\boxed{\frac{dy}{dt}(t) = X(t, y(t))}$

Preu. préliminaire : passer à la limite dans

sachant qu'on n'a que de la convergence uniforme.

$$\frac{dy_p}{dt} = X(t, y_p(t)) + \underbrace{j_p(t)}_{\|\cdot\| \leq \varepsilon_p \to 0}$$

reste

problème

Formulation intégrale

$$\underbrace{y_p(t) - y_p(t_0)}_{\substack{\text{convergence uniforme} \Downarrow \\ y(t) - y(t_0)}} = \underbrace{\int_{t_0}^{t} X(s, y_p(s))\,ds}_{\Downarrow (?) \\ \int_{t_0}^{t} X(s, y(s))\,ds} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} j_p(s)\,ds}_{\Downarrow \\ 0}$$

$$\left\| \int_{t_0}^{t} j_p(s)\,ds \right\| \leq \int_{t_0}^{t} \|j_p(s)\|\,ds \leq \int_{t_0}^{t} \varepsilon_p\,ds \leq T\varepsilon_p$$

$$\left\| \int_{t_0}^{t} X(s, y_p(s))\,ds - \int_{t_0}^{t} X(s, y(s))\,ds \right\|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \| X(s, y_p(s)) - X(s, y(s)) \|\,ds$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \omega_X \left( \| (s, y_p(s)) - (s, y(s)) \| \right) ds$$

$$= \int_{t_0}^{t} \omega_X \underbrace{\left( \| y_p(s) - y(s) \| \right)}_{\leq \sup_{s \in I} \|y_p(s) - y(s)\| \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0} ds \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$$

A la limite : $y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^{t} X(s, y(s))\,ds \quad + 0$

$y_p$ : limite uniforme d'une suite de fonctions continues $\Rightarrow y_p \quad \mathcal{C}^0$

$\Rightarrow s \mapsto X(s, y(s))$ est $\mathcal{C}^0$

$\Rightarrow y(t)$ est $\mathcal{C}^1$.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dt} = X(t, y(t))}$$