Aujourd'hui (hors programme)

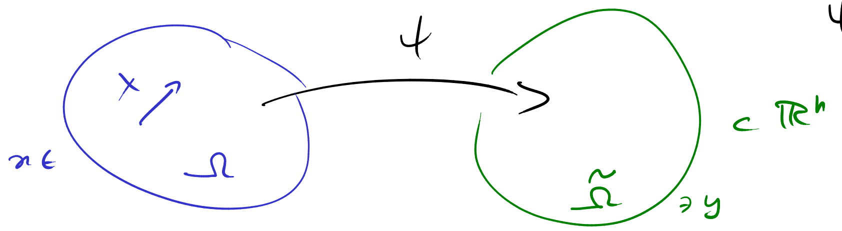
- Changement de variable $\sim$ image d'un champ de vecteur par un difféomorphisme
- Crochet de Lie de 2 champs de vecteurs

Champ de vecteur autonome $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, Localement lipschitzien.

(Ω : ouvert $\subset \mathbb{R}^n$)

Champ de variable :

ψ : difféomorphisme $\mathcal{C}^1$

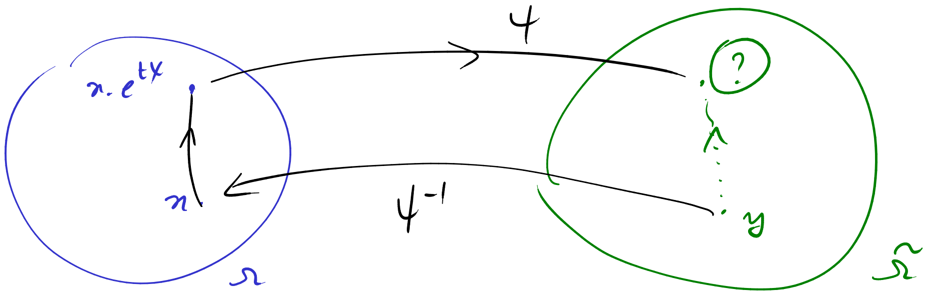


$$\boxed{\begin{aligned} & y = \psi(x) \\ \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, n, \\ \psi^i(x^1, \dots, x^n) = y^i \end{array}\right. \end{aligned}}$$

Quelle bonne règle utiliser pour "traduire" X dans $\tilde{\Omega}$.

Idée naïve : prendre $X \circ \psi^{-1} : \tilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ pas bon

Prenons le flot de X sur Ω, regardons son image par ψ



Hypothèse : $\tilde{\varphi}(t, y) = \psi\left[\psi^{-1}(y) \cdot e^{tX}\right]$

$= \left(\psi \circ \left(e^{tX} \circ \psi^{-1}\right)\right)(y)$

$\overset{?}{\to}$ $\boxed{\tilde{\varphi}(t, y) = y \cdot e^{t \, \psi_* X}}$

un certain champ de vecteur.

$\underline{t=0}$ $\tilde{\varphi}(0, y) = \psi\left[\psi^{-1}(y)\right] = y$

$\underline{t \neq 0}$ $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\varphi}(t, y) = d\psi_{e^{tX} \circ \psi^{-1}(y)} \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{tX} \circ \psi^{-1}(y)\right)}_{X\left(e^{tX} \circ \psi^{-1}(y)\right)} \right)$

$e^{tX} \circ \psi^{-1}(y) = \psi^{-1}\left(\tilde{\varphi}(t, y)\right)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x^i}\left(\psi^{-1}(y) \cdot e^{tX}\right) X^i\left(\psi^{-1}(y) \cdot e^{tX}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x^i}\left(\psi^{-1}(\hat{\varphi}(t,y))\, X^i(\psi^{-1}(\hat{\varphi}(t,y))) \right)$$

$$= d\psi_{\psi^{-1}(\hat{\varphi}(t,y))}\left(X(\psi^{-1}(\hat{\varphi}(t,y))) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{\varphi}(t,y)) = \psi_* X(\hat{\varphi}(t,y)) \quad \text{Équation différentielle.}$$

où :

Définition

$$\boxed{\begin{aligned} \psi_* X(y) &= d\psi_{\psi^{-1}(y)}\left(X \circ \psi^{-1}(y) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(\psi^{-1}(y))\, X^i(\psi^{-1}(y)) \end{aligned}}$$

est l'image "directe" du champ de vecteur X par ψ.

Définition implicite $(x = \psi^{-1}(y) \iff y = \psi(x))$

$$\boxed{\psi_* X(\psi(x)) = d\psi_x(X(x))}$$

Théorème

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\psi \circ e^{tX} \circ \psi^{-1}) = \psi_* X(\psi \circ e^t \circ \psi^{-1})}$$

Preuve : on a construit $\psi_* X$ pour que ça marche.

Corollaire

$$\boxed{\psi(x) \cdot e^{t\psi_* X} = \psi(x \cdot e^{tX})}$$

Preuve du corollaire a) Ça marche en $t=0$
b) les 2 membres vérifient la même équation différentielle.

Lemme $(e^{tX})_* X = X$

Preuve On part de $(x \cdot e^{tX}) \cdot e^{sX} = x \cdot e^{(t+s)X}$
$= (x \cdot e^{sX}) e^{tX}$

On dérive par rapport à s, en $s=0$,
$\forall x, \quad X(x \cdot e^{tX}) = d(e^{tX})_x(X(x)) \iff (e^{tX})_* X = X$

Def Dérivée de Lie a) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $X \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$\forall x \in \Omega$, $\boxed{\frac{d}{dt}\left(f(x.e^{tX})\right)\Big|_{t=0} = (L_X f)(x)}$ Dérivée de Lie de f par X.

$$\boxed{L_X f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x.e^{tX}) - f(x)}{t}}$$

$f(x.e^{tX}) = (f \circ e^{tX})(x)$

$$= \sum_{i=1}^{n} X^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$$

b) Pour un champ de vecteurs. $Y \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

Def $$\boxed{L_X Y = \lim_{t\to 0} \frac{(e^{-tX})_* Y - Y}{t}}$$

Qu'est-ce ? On va utiliser $y.e^{-tX}$: image de y par e^{-tX} $(e^{-tX}(y))$

$\boxed{y.e^{-tX} = y - tX(y) + o(t)}$ $\Rightarrow d(e^{-tX})$

$$\left((e^{-tX})_* Y\right)(x) \overset{\text{def}}{=} d(e^{-tX})_{x.e^{tX}}\left(Y(x.e^{tX})\right)$$

$$\left[(\varphi_* Y)(x) = d\varphi_{\varphi^{-1}(x)}\left(Y(\varphi^{-1}(x))\right)\right] \text{ avec } \varphi = e^{-tX}$$

$$\ldots\ldots \left((e^{-tX})_* Y\right)^j(x) = Y^j(x) + t\sum_{i=1}^{n}\left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right) + o(t)$$

Conclusion $$\boxed{(L_X Y)^j = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}}$$

Observation $L_X Y + L_Y X = 0$

Définition Crochet de Lie.

Lemme $\forall f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, $\forall X, Y$ champs de vecteurs $\mathcal{C}^1$ sur Ω,

$$L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f) = L_{[X,Y]} f$$

où $\boxed{[X,Y] = L_X Y}$

$$\boxed{[X, Y] : \text{crochet de Lie}}$$

Preuve du lemme : simple.

$$L_X(L_Y f) = L_X\Big(\sum_i Y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big)$$
$$= \sum_{i,j} X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big(Y^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big)$$
$$= \sum_{i,j} X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} + X^j Y^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$$

$$\Rightarrow \quad L_X(L_Y f) - L_Y(L_X f) = L_{[X,Y]} f.$$

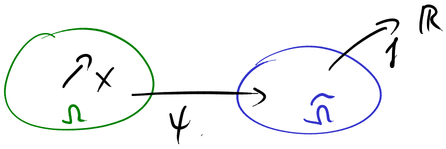
Proposition Si $\varphi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ est un difféomorphisme X_1, X_2 sont des champs de vecteurs sur Ω, alors

$$\boxed{\varphi_*[X_1, X_2] = [\varphi_* X_1, \varphi_* X_2]}$$

Démonstration La preuve est plus facile avec $[L_X, L_Y]f = L_{[X,Y]} f$

a) On montre :

$$L_X (f\circ\varphi)(x) = (L_{\varphi_* X} f)\circ\varphi$$



b) Alors

$$[L_{\varphi_* X_1}(L_{\varphi_* X_2} f)]\circ\varphi$$
$$\overset{(a)}{=} L_{X_1}[(L_{\varphi_* X_2} f)\circ\varphi]$$
$$\overset{(a)}{=} L_{X_1}[L_{X_2}(f\circ\varphi)] = L_{X_1}(L_{X_2}(f\circ\varphi))$$

c) échanger X_1 et X_2, faire la différence dans b)

$$([L_{\varphi_* X_1}, L_{\varphi_* X_2}] f)\circ\varphi = [L_{X_1}, L_{X_2}](f\circ\varphi)$$

équivalence des 2 définitions du crochet :

$$\boxed{[\varphi_* X_1, \varphi_* X_2] = \varphi_*(X_1, X_2)}$$

Remarque Si X est $\mathcal{C}^1$, φ est $\mathcal{C}^1$, $\varphi_* X$ est juste $\mathcal{C}^0$

Si $X \in \mathcal{C}^1$, φ est $\mathcal{C}^2$, $\varphi_* X$ est $\mathcal{C}^1$

Si X_1, X_2 sont $\mathcal{C}^k$, $[X_1, X_2]$ est $\mathcal{C}^{k-1}$

Question $X(x) = x$, Y quelconque

$$[X,Y]^i = \sum_j x^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}(x) - Y^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(x) = \left(\sum_j x^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}(x)\right) - Y^i$$

(nulle ssi Y est homogène de degré 1)

Formule d'Euler.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ homogène de degré k si

$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$$

Formule $k f(x) = \sum_i x^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)$

Autres exemples

a) Si les composantes de X et Y sont constantes, $[X,Y] = 0$

b) Si X et Y sont linéaires

$X(x) = Ax$, $Y(x) = By$ $\quad (A, B \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n))$

$[X,Y](x) = -[A,B](x)$ (à vérifier)

Théorème Soit X, Y deux champs de vecteurs $\mathcal{C}^2$. Alors

$(a) \Leftrightarrow (b)$ où

(a) $[X,Y] = 0$

(b) $\forall x \in \Omega$, $\forall t, s$ $\quad \boxed{(x \cdot e^{tX}) \cdot e^{sY} = (x \cdot e^{sY}) \cdot e^{tX}}$

(les flots commutent).

Corollaire Si $[X,Y] = 0$, on peut définir

$$x \cdot e^{tX + sY} = (x \cdot e^{tX}) \cdot e^{sY} = (x \cdot e^{sY}) \cdot e^{tX}.$$

Application X : dynamique (flot de X : évolution au cours du temps)

Y : symétrie (par exemple : invariance par translation, par rotation, etc...)

Un système de notation non standard. (dictionnaire)

$f(x)$ $\quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\quad f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $\quad = \quad xf$

$f \circ \varphi$ $\quad = \quad \varphi f$

$f \circ \varphi(x)$ $\quad = \quad x \varphi f$

$X(x)$ $\quad x \in \Omega$, X : champs de vecteurs $\quad = \quad xX$

$e^{tX}(x)$ $\quad = \quad x e^{tX}$

$\boxed{d\psi_x\,(X(x))}$ $\quad$ $\psi : \Omega \to \tilde{\Omega}$ difféo, X : champ de vecteur $\quad = \quad \boxed{x\, X\, \psi}$

$$\boxed{\psi_* X \quad = \quad \psi^{-1} X \psi.}$$

Remarque : on note souvent $X = \sum_{i=1}^{n} X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$

Champs de vecteurs = opérateurs différentiels

$$\frac{d}{dt}(\psi \circ e^{tX} \circ \psi^{-1}) = (\psi_* X)(\psi \circ e^{tX} \circ \psi^{-1}) \iff \frac{d}{dt}(x\psi^{-1}e^{tX}\psi) = (x\psi^{-1}e^{tX}\psi)(\psi^{-1}X\psi)$$

$$= x\psi^{-1}e^{tX}\cancel{\psi}\cancel{\psi^{-1}}X\psi$$

$$= (x\psi^{-1}e^{tX})X\psi.$$

Conséquence de $\boxed{\frac{d(xe^{tX})}{dt} = xe^{tX}X}$

$$e^{t\psi_* X} = e^{t\psi^{-1}X\psi}$$

$$= \psi^{-1}e^{tX}\psi$$

$$\Downarrow$$

$$e^{t\psi_* X}(x) = \psi \circ e^{tX} \circ \psi^{-1}(x)$$

Un résultat qui illustre les champs de vecteur

Lemme $\mathcal{D}_{\mathcal{C}^k} = \{$ Applications linéaires $D : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \to \mathcal{C}^k(\Omega)$ telles que $D(fg) = (Df)g + f(Dg)\}$

$\simeq$ Champs de vecteur $\mathcal{C}^k(\Omega)$ sur Ω. $= \mathcal{X}_{\mathcal{C}^k}(\Omega)$

Id est :
$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_{\mathcal{C}^k}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathcal{C}^k} \\ X & \longmapsto & L_X : f \mapsto L_X f \end{array}}$$
est isomorphisme

D'où la notation $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$