Définition Forme multisymplectique.
Soit $\mathcal{N}$ une variété, soit $m \in \mathbb{N}^*$. Une forme multisymplectique $\omega \in \Omega^{m+1}(\mathcal{N})$ telle que

(i) $d\omega = 0$ (fermée)

(ii) $\forall \xi \in \mathfrak{X}(\mathcal{N})$, $\xi \lrcorner \omega = 0 \Rightarrow \xi = 0$ (non dégénérée)

Cas $m = 1$ (mécanique) ω : forme symplectique

(ii) $\Rightarrow$ dim $\mathcal{N}$ paire

"Théorème de Darboux"

$\forall x \in \mathcal{N}$ $\exists$ coordonnées locales sur $\mathcal{N}$ sur un ouvert autour de x
$(x^i, p_i)_{1 \leq i \leq n}$ t.q. $\omega = dp_i \wedge dx^i$.

Cas $m > 1$
- Pas de relation entre dim $\mathcal{N}$ et m
- Pas de théorème de Darboux.

Exemples : 1) $\Lambda^m T^*Z$, Forme canonique
$$\hat{\theta} = \sum_{1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_m \leq N} p_{\alpha_1 \dots \alpha_m} dz^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz^{\alpha_m}$$
$N = \dim Z$

$\hat{\omega} = d\hat{\theta}$ est une forme multisymplectique

2) $\boxed{\Lambda^m_1 T^*Z}$ où $Z \xrightarrow{P} (X, \beta)$

$\Lambda^m_1 T^*Z \subset \Lambda^m T^*Z$

$$\boxed{\theta := \hat{\theta}\big|_{\Lambda^m_1 T^*Z}}$$

$\theta = e\beta + p^\mu_i dy^i \wedge \beta_\mu$

$\beta = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$, $\beta_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \lrcorner \beta$, $\{e, p^\mu_i\} \subset \{p_{\alpha_1 \dots \alpha_m}\}$

$\beta = \varphi^* \beta$ $\qquad m = \dim X.$

3) $\boxed{\text{Si } m > 1}$, si $\mathcal{H} : \Lambda^m_1 T^* X \to \mathbb{R}$ régulière, $d\mathcal{H} \neq 0$

$$\underset{\text{hypersurface}}{\mathcal{H}^{-1}(0)} \subset \Lambda^m_1 T^* X \subset \Lambda^m T^* X$$

Alors $\omega|_{\mathcal{H}^{-1}(0)}$ est multisymplectique ! (non dégénérée)

(faux pour $m = 1$)

Retour à la transformée de Legendre : $\boxed{p^\mu_i = \frac{\partial L}{\partial v^i_\mu}(x, y, v) \quad H(x, y, p) = p^\mu_i v^i_\mu - L(x, y, v)}$

Soit $\Gamma = \{ (x^\mu, u^i(x), e(x), \pi^\mu_i(x)) \,;\, x \in X \}$

Si $\Gamma \subset \mathcal{H}^{-1}(0) \Leftrightarrow \underbrace{e(x) + H(x^\mu, u^i(x), \pi^\mu_i(x)) = 0}_{\mathcal{H}(x, u(x), e(x), \pi(x))}$

($\dim \Gamma = m$)

Thm (u^i, π^μ_i) est solution des équations de Volterra

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \forall \mu \in \Gamma, \ \forall (X_1, \ldots, X_m) : \text{base de } T_\mu \Gamma \\ \qquad X_1 \wedge \ldots \wedge X_m \lrcorner\, \omega = \underbrace{(-1)^m \beta(X_1, \ldots, X_m)}_{\text{coefficient réel}} d\mathcal{H} \end{array}}$$

(car $T_\mu \mathcal{H}^{-1}(0) = \operatorname{Ker} d\mathcal{H}_{(\mu)}$)

$$\Leftrightarrow \boxed{X_1 \wedge \ldots \wedge X_m \lrcorner\, \omega|_{\mathcal{H}^{-1}(0)} = 0}$$

Preuve On choisit $X_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^i} + \frac{\partial \epsilon}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial e} + \frac{\partial \pi^\nu_i}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial p^\nu_i}$

$\Rightarrow \beta(X_1,\dots,X_m)=1$. Problème : calcul de $X_1\wedge\dots\wedge X_m \lrcorner\, \omega$.

$$\left|\begin{array}{ll} dy^i = \delta y^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu}dx^\mu & de = \delta e - \frac{\partial\epsilon}{\partial x^\mu}dx^\mu \\ dp^\nu_i = \delta p^\nu_i - \frac{\partial \pi^\nu_i}{\partial x^\mu}dx^\mu. & \end{array}\right.$$

Propriétés $\delta f(X_\mu)=0$

$(dx^\mu, \delta y^i, \delta e, \delta p^\nu_i)$: corepère

$$\Rightarrow \omega = \delta p^\nu_i \wedge \delta y^i \wedge \beta_\nu + \left(\delta e + \delta p^\mu_i \frac{\partial y^i}{\partial x^\mu} - \frac{\partial p^\mu_i}{\partial x^\mu}\delta y^i\right)\wedge\beta$$

$X = X_1\wedge\dots\wedge X_m$

$$\Rightarrow \boxed{X\lrcorner\,\omega = 0 + (-1)^m\left(\delta e + \delta p^\mu_i \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu} - \frac{\partial p^\mu_i}{\partial x^\mu}\delta y^i\right)}$$

Il suffit de montrer : $\xi\in\operatorname{Ker} d\mathcal{H} \Rightarrow (X\lrcorner\,\omega)(\xi)=0$

ou $\left.\delta e + \frac{\partial y^i}{\partial x^\mu}\delta p^\mu_i - \frac{\partial p^\mu_i}{\partial x^\mu}\delta y^i\right|_{\operatorname{Ker} d\mathcal{H}} = 0$

$$d\mathcal{H} = de + \frac{\partial H}{\partial x^\mu}dx^\mu + \frac{\partial H}{\partial y^i}dy^i + \frac{\partial H}{\partial p^\nu_i}dp^\nu_i$$

$$\Rightarrow de\big|_{\operatorname{Ker} d\mathcal{H}} = -\left(\frac{\partial H}{\partial x^\mu}dx^\mu + \frac{\partial H}{\partial y^i}dy^i + \frac{\partial H}{\partial p^\nu_i}dp^\nu_i\right)\Big|_{\operatorname{Ker} d\mathcal{H}}$$

$$= -\left(\frac{\partial H}{\partial x^\mu}dx^\mu + \frac{\partial H}{\partial y^i}\left(\delta y^i - \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu}dx^\mu\right) + \frac{\partial H}{\partial p^\nu_i}\left(\delta p^\nu_i - \frac{\partial\pi^\nu_i}{\partial x^\mu}dx^\mu\right)\right)\Big|_{\operatorname{Ker} d\mathcal{H}}$$

$$X\lrcorner\,\omega\big|_{\operatorname{Ker} d\mathcal{H}} = (-1)^m\left[-\left(\frac{\partial H}{\partial x^\mu} + \frac{\partial H}{\partial y^i}\frac{\partial u^i}{\partial x^\mu} + \frac{\partial H}{\partial p^\nu_i}\frac{\partial \pi^\nu_i}{\partial x^\mu}\right)dx^\mu - \frac{\partial\epsilon}{\partial x^\mu}dx^\mu\right.$$

$$+ \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^\mu} - \frac{\partial H}{\partial p^\mu_i}\right)\delta p^\mu_i + \left(-\frac{\partial p^\mu_i}{\partial x^\mu} - \frac{\partial H}{\partial y^i}\right)\delta y^i \Big]\Big|_{\ker d\mathcal{X}}$$

$$= 0$$

ssi

Volterra $\begin{cases} \dfrac{\partial u^i}{\partial x^\mu} = \dfrac{\partial H}{\partial p^\mu_i} \\ \dfrac{\partial p^\mu_i}{\partial x^\mu} = -\dfrac{\partial H}{\partial y^i} \end{cases}$

(les autres relations sont des conséquences de Volterra).

Théorème de Noether Pour une symétrie infinitésimale

$$Z = X^\mu(x,y)\frac{\partial}{\partial x^\mu} + Y^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{sur } \mathcal{Z} \ (\simeq X \times Y)$$

$$\mathcal{Z} \downarrow X$$

Si le lagrangien $L(x,y,v)\beta$ est invariant par Z,

$$\boxed{d\left[\left(\pi^\mu_i(x)\, Y^i(x,u(x)) - h^\mu_\nu(x)\, X^\nu(x,u(x))\right)\beta_\mu\right] = 0}$$

$$\pi^\mu_i = \frac{\partial L}{\partial v^i_\mu}(x,u,\partial u) \ ; \quad h^\mu_\nu = H(x, u(x), \pi(x)).$$

Lemme Soit $\theta = -H(x,y,p)\beta + p^\mu_i\, dy^i \wedge \beta_\mu \ \left(: \hat{\theta}|_{\mathcal{X}^{-1}(0)}\right)$

Alors $\boxed{\gamma^*(Z \lrcorner \theta) = \left(\pi^\mu_i Y^i - h^\mu_\nu X^\nu\right)\beta_\mu}$

où $\gamma(x) = \left(x^\mu, u^i(x), -H(x,u(x),\pi(x)), \pi^\mu_i(x)\right)$ paramétrise Γ

Preuve $\hat{\theta} = e\beta + p^\mu_i\, dy^i \wedge \beta_\mu$.

$$Z \lrcorner \hat{\theta} = \left(X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + Y^i \frac{\partial}{\partial y^i}\right) \lrcorner\, \hat{\theta}$$

$$\beta_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \lrcorner\, \beta \qquad \beta_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \lrcorner\, \beta_\mu$$

$$= X^\mu e\, \beta_\mu - X^\mu p^\nu_i\, dy^i \wedge \beta_{\nu\mu} + p^\mu_i Y^i \beta_\mu$$

$$Z \lrcorner\, \theta = Z \lrcorner\, \hat\theta\Big|_{\mathcal{H}^{-1}(0)} = \left(p^\mu_i Y^i - X^\mu H\right)\beta_\mu - X^\mu p^\nu_i\, dy^i \wedge \beta_{\nu\mu}$$

$$\left(Z \lrcorner\, \theta\big|_\Gamma \simeq\right) \quad \sigma^*(Z \lrcorner\, \theta) = \left(\pi^\mu_i Y^i - X^\mu h\right)\beta_\mu - X^\mu p^\nu_i \underbrace{\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^\lambda}\, dx^\lambda\right) \wedge \beta_{\nu\mu}}$$

$$\boxed{dx^\lambda \wedge \beta_{\nu\mu} = \delta^\lambda_\mu \beta_\nu - \delta^\lambda_\nu \beta_\mu}$$

$$= \left(\pi^\mu_i Y^i - X^\mu h\right)\beta_\mu - X^\mu p^\nu_i \frac{\partial u^i}{\partial x^\mu}\beta_\nu + X^\mu p^\nu_i \frac{\partial u^i}{\partial x^\nu}\beta_\mu$$

$$= \left[Y^i \pi^\mu_i - X^\lambda\left(h\,\delta^\mu_\lambda + p^\mu_i \frac{\partial u^i}{\partial x^\lambda} - p^\nu_i \frac{\partial u^i}{\partial x^\nu}\delta^\mu_\lambda\right)\right]\beta_\mu$$

$$= \Big[Y^i \pi^\mu_i - X^\lambda \underbrace{\left(p^\mu_i \frac{\partial u^i}{\partial x^\lambda} - L(x, u, \partial u)\,\delta^\mu_\lambda\right)}_{H^\mu_\lambda}\Big]\beta_\mu$$

$$= \left(Y^i \pi^\mu_i - X^\lambda H^\mu_\lambda\right)\beta_\mu.$$

Nouvelle preuve du théorème de Noether

1) Symétrie $Z = X^\mu(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x^\mu} + Y^i(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y^i}$

Condition sur Z pour que ce soit une symétrie ?

a) On peut étendre Z en $\hat Z$ sur $\Lambda^m_1 T^* \mathcal{Z}$
avec $\mathcal{L}_{\hat Z}\, \omega = 0$

Ici réside l'hypothèse de symétrie $\rightarrow$ b) $d\mathcal{H}(\hat{Z}) = 0$ où $\mathcal{H} = e + H(x, y, p)$

2) Conclusion de Noether Si a) et b) sont satisfaits

et si Γ est une solution des équations de Volterra.

alors $\exists\, F \in \Omega^{m-1}(\Lambda^m_1 T^*Z)$ t.q. $\hat{Z} \lrcorner \omega + dF = 0$

$\boxed{F = Z \lrcorner \theta}$! et $\boxed{dF|_\Gamma = 0}$

Détails 1) a) Etendre Z en $\hat{Z}$ avec $\mathcal{L}_{\hat{Z}}\omega = 0$

Remarque : ça n'est possible que si $\frac{\partial X^\mu}{\partial y^i} = 0$ (ou $m=1$). Alors

$$Z = X^\mu(x)\frac{\partial}{\partial x^\mu} + Y^i(x, y)\frac{\partial}{\partial y^i}$$

(dû au choix simplificateur de remplacer $\Lambda^m T^*Z$ par $\Lambda^m_1 T^*Z$)

Alors $\hat{Z} = Z - e\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial e} - \left(p^\mu_i \frac{\partial X^\lambda}{\partial x^\lambda} - p^\nu_i \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} + p^\mu_j \frac{\partial Y^j}{\partial y^i}\right)\frac{\partial}{\partial p^\mu_i}$

vérifie $\boxed{\mathcal{L}_{\hat{Z}}\omega = 0}$ où $\omega = de \wedge \beta + dp^\mu_i \wedge dy^i \wedge \beta_\mu$

Important $\mathcal{L}_{\hat{Z}}\omega = 0 \underset{\text{si } H^m(-)=\{0\}}{\Longleftrightarrow} \left|\begin{array}{l}\exists\, F \in \Omega^{m-1}(\Lambda^m_1 T^*Z), \\ dF + \tilde{Z} \lrcorner \omega = 0\end{array}\right.$

Preuve $\mathcal{L}_{\hat{Z}}\omega = \hat{Z} \lrcorner d\omega + d(\hat{Z} \lrcorner \omega)$
$= 0 + d(\hat{Z} \lrcorner \omega)$

Donc $\mathcal{L}_{\hat{Z}}\omega = 0 \Leftrightarrow \hat{Z} \lrcorner \omega$ fermée $\underset{\text{si } H^m(\dots)=\{0\}}{\Longleftrightarrow} \hat{Z} \lrcorner \omega$ exacte

(Noether)

Théorème Si $F \in \Omega^{m-1}(\Lambda^m_1 T^*Z)$ t.q. $\exists\, \xi_F \in \mathfrak{X}(\Lambda^m_1 T^*Z)$

avec
$$\boxed{\begin{array}{ll} (a) & dF + \xi_F \lrcorner \omega = 0 \\ (b) & d\mathcal{H}(\xi_F) = 0 \end{array}} \Rightarrow \boxed{\mathcal{L}_{\xi_F}\omega = 0}$$

Alors, $\forall\, \Gamma$ solution des équations de Volterra, $\boxed{dF|_\Gamma = 0}$

Preuve $\forall\,(X_1, \dots, X_m)$: base de $T_M\Gamma$

si $X = X_1 \wedge \dots \wedge X_m$, $\quad X \lrcorner \omega|_{\mathcal{H}^{-1}(0)} = 0$

$$\Rightarrow dF(X_1, \dots, X_m) \overset{(a)}{=} -\xi_F \lrcorner \omega(X_1, \dots, X_m)$$

$$= -\omega(\xi_F, X_1, \dots, X_m) = -(-1)^m X \lrcorner \omega(\xi_F)$$

$$\overset{(b)}{=} 0 \qquad [(b) \Leftrightarrow \xi_F \in T\mathcal{H}^{-1}(0)]$$

Éléments sur $\boxed{F \mapsto \xi_F}$ Soit $(\mathcal{M}, \omega)$: variété multisymplectique

$\Omega^{m-1}_\omega(\mathcal{M}) = \{F \in \Omega^{m-1}(\mathcal{M})\,;\, \exists\, \xi_F \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}),\ \underline{dF + \xi_F \lrcorner \omega = 0}\} \to \mathfrak{X}(\mathcal{M})$

$F \mapsto \xi_F$

formes observables

[En général, si $F \in \Omega^{m-1}(\mathcal{M})$, ξ_F n'existe pas sauf si $m = 1$; mais si ξ_F existe, il est unique]

$\Omega^{m-1}_\omega(\mathcal{M})$ **Crochet** $\{F, G\} = \xi_F \wedge \xi_G \lrcorner \omega = \xi_G \lrcorner (\xi_F \lrcorner \omega) \in \Omega^{m-1}(\mathcal{M})$

Lemme (exercice) $\boxed{d\{F, G\} + [\xi_F, \xi_G] \lrcorner \omega = 0}$

(si F et $G \in \Omega^{m-1}_\omega(\mathcal{M})$ sont observables)

Donc $\boxed{\xi_{\{F,G\}} = [\xi_F, \xi_G]}$

Lemme Si $F, G, H \in \Omega^{m-1}_{\omega}(M)$ "observables"

$$\boxed{\{\{F,G\},H\} + \{\{G,H\},F\} + \{\{H,F\},G\} = d(\xi_F \wedge \xi_G \wedge \xi_H \lrcorner \omega)}$$

($\Omega^{m-1}_{\omega}(M), \{\cdot,\cdot\})$ n'est pas une algèbre de Lie (c'est une 2-algèbre de Lie ou algèbre de de Lie à homotopie près)