Ainsi, même si $(X_n)_n$ était ~~la paramétrisation~~ une suite de paramétrisations conformes de la solution du problème de Plateau, il se pourrait très bien que X_n n'admette pas de limite lorsque $n \to +\infty$, mais que X_n converge faiblement vers une constante dans H^1 !

Par exemple : X est n'importe quelle application dans $H^1(B^2, \mathbb{R}^3)$ et $X_n = X \circ \varphi_n$ où

$$\varphi_n(z) = \frac{z - r_n}{1 - r_n z}$$

où $0 < r_n < 1$, $\lim_{n \to +\infty} r_n = 1$. Alors

$$\varphi_n(z) + 1 = (1 - r_n) \frac{z}{1 - r_n z}$$

tend vers 0 $\forall z \in \overline{B(0,1)} \setminus \{1\} \supset B(0,1)$. Donc on peut montrer que

$$X_n \rightharpoonup X(-1).$$

Cela est une conséquence du lemme suivant

<u>Lemme</u> (invariance par transformation conforme)

Soit $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ et $X \in H^1(\Omega_2)$. Soit $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ une transformation conforme (i.e. holomorphe ou anti-holomorphe) inversible. Alors

$$E_{\Omega_1}(X \circ \Phi) = E_{\Omega_2}(X)$$

<u>Preuve</u> : exercice.

Revenons à l'exemple de la suite $X_n = X \circ \varphi_n$. Comme φ_n est conforme, $E_{D^2}(X_n) = E_{D^2}(X)$ est borné. Donc il existe une sous-suite $(X_{n'})$ qui converge vers une application Y, <u>faiblement dans $H^1(D^2)$</u>, donc <u>fortement dans $L^2(D^2)$</u>, donc, modulo l'extraction d'une nouvelle sous-suite, p.p. sur D^2. Mais on a vu que $X_n \longrightarrow X(-1)$ p.p. sur D^2, donc $Y = C^{ste}$.

Pour pallier cette difficulté, nous allons modifier le problème en neutralisant l'action de $SO(1,2)$.
Fixons trois points A_0, A_1, A_2 (tous distincts) de Γ

$$C^*(\Gamma) = \{ X \in H^1(D^2, \mathbb{R}^3) \; ; \; X|_{\partial D^2} \text{ est la paramétrisation continue (et monotone) orientée de } \Gamma, \; X(1) = A_0, \; X(j) = A_1, \; X(j^2) = A_2 \}$$

où 1, $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \in \partial D^2$

Une suite minimisant E_{D^2} dans $C^*(\Gamma)$ aura une norme H^1 bornée. On pourra donc extraire une sous-suite convergeant faiblement dans $H^1(D^2)$, fortement dans $L^2(D)$ (grâce au théorème de Rellich) et p.p.
Nous noterons $(X_n)_n$ une telle suite.
La question est de montrer que la condition au bord est préservée à la limite.

Nous allons montrer que, si Γ satisfait (H), pour tout $C > 0$, l'ensemble des données au bord

$$\{ X|_{\partial D^2} \; ; \; X \in C^*(\Gamma), \; E_{D^2}(X) \leq C \} = \partial C^*_C(\Gamma)$$

est équicontinu. C'est essentiellement le <u>lemme de Courant-Lebesgue</u>.

<u>Lemme</u> Soit (Γ, A_0, A_1, A_2) fixé satisfaisant (H) et $C > 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ t.q.

$$\forall \omega, \omega' \in S^1, \; \forall g \in \partial C^*_C(\Gamma),$$

$$|\omega - \omega'| < \eta \implies |g(\omega) - g(\omega')| < \varepsilon.$$

---

1) <u>Hypothèse sur Γ</u> : $\exists R > 0$ tel que $\forall r \in]0, R]$, $\forall A \in \Gamma$, $B^3(A, r) \cap \Gamma$ est ~~connexe~~ simplement connexe

Nous noterons

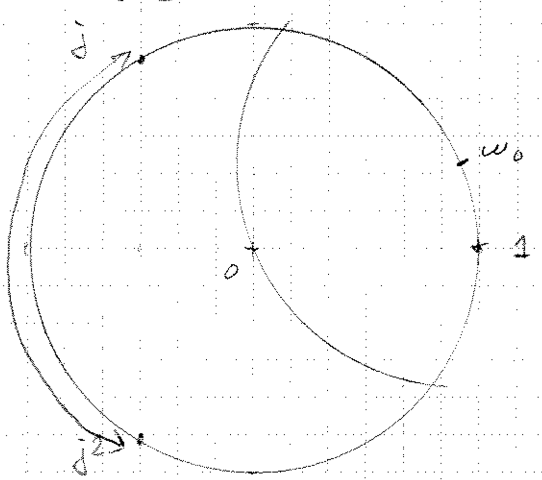
$$\overline{R} = \max \{ R > 0 \ ; \ \forall r \in]0, R] , \forall A \in \Gamma , \ B^3(A, r) \cap \Gamma \text{ est simplement connexe} \}$$

et

$$L_0 = \min \left(|A_1 - A_0|, |A_2 - A_1|, |A_0 - A_2| \right)$$

$$L = \min (L_0 , 2\overline{R}).$$

<u>Démonstration</u> Choisissons un point $\omega_0 \in S^1$. Parmi les trois intervalles $[j^k, j^{k+1}] = \{ e^{i k \frac{2\pi}{3} + \theta} \ ; \ 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \}$ (pour $k = 0, 1, 2$), il en existe au moins un dont la distance à ω_0 est supérieure ou égale à 1. Supposons pour fixer les idées que ce soit $[j, j^2]$.



Pour $0 < \rho \leq 1$, notons $C(\rho) = \partial B(\omega_0, \rho) \cap B(0,1)$. Nous estimons l'énergie de X sur $\bigcup_{\rho_0^2 < \rho < \rho_0} C(\rho)$ où $0 < \rho_0 < 1$, en utilisant le théorème de Fubini. Nous noterons s l'abscisse curviligne le long de $C(\rho)$.

$$\| \nabla X \|^2_{L^2(D^2)} = \int_{D^2} |\nabla X|^2 dx\, dy \geq \int_{\rho_0^2}^{\rho_0} \left(\int_{C(\rho)} \left| \frac{\partial X}{\partial s} \right|^2 ds \right) d\rho$$

~~On choisit alors $\rho \in [\rho_0^2, \rho_0]$ tel que~~

$$= \int_{\rho_0^2}^{\rho_0} \left[\rho \int_{C(\rho)} \left| \frac{\partial X}{\partial s} \right|^2 ds \right] \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\geq \left(\operatorname*{Inf\,ess}_{\rho_0^2 < \rho < \rho_0} \rho \int_{C(\rho)} \left| \frac{\partial X}{\partial s} \right|^2 ds \right) \int_{\rho_0^2}^{\rho_0} \frac{d\rho}{\rho}$$

On choisit alors $\rho \in [\rho_0^2, \rho_0]$ tel que

$$\cancel{\rho \int_{\rho_0^2}^{\rho_0} \frac{\partial X}{\partial s}}$$

$$\rho \int_{C(\rho)} \left|\frac{\partial X}{\partial s}\right|^2 ds \leq 2 \operatorname*{Inf\,ess}_{\rho_0^2 < \rho < \rho_0} \rho \int_{C(\rho)} \left|\frac{\partial X}{\partial s}\right|^2 ds.$$

Alors $|\log \rho_0| \, \rho \int_{C(\rho)} \left|\frac{\partial X}{\partial s}\right|^2 ds$

$$\leq 2 \left(\operatorname*{Inf\,ess}_{\rho_0^2 < \rho < \rho_0} \rho \int_{C(\rho)} \left|\frac{\partial X}{\partial s}\right|^2 ds \right) \int_{\rho_0^2}^{\rho_0} \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\leq 2 \, \|DX\|^2_{L^2(D^2)}$$

et donc

$$\rho \int_{C(\rho)} \left|\frac{\partial X}{\partial s}\right|^2 ds \leq \frac{2 \, \|DX\|^2_{L^2(D^2)}}{|\log \rho_0|}$$

On en déduit que la restriction de X à $C(\rho)$ est essentiellement höldérienne (i.e. coïncide p.p. avec une fonction Hölder continue) et, si on désigne par ω^+ et ω^- les extrémités de $C(\rho)$,

$$|X(\omega^+) - X(\omega^-)| \leq \int_{C(\rho)} \left|\frac{\partial X}{\partial s}\right| ds$$

$$\leq \sqrt{\int_{C(\rho)} ds} \sqrt{\int_{C(\rho)} \left|\frac{\partial X}{\partial s}\right|^2 ds}$$

$$\leq \sqrt{\pi \rho \int_{C(\rho)} \left|\frac{\partial X}{\partial s}\right|^2 ds}$$

$$\leq \sqrt{\frac{2\pi \, \|DX\|^2_{L^2(D^2)}}{|\log \rho_0|}} = \sqrt{\frac{2\pi}{|\log \rho_0|}} \, \|DX\|_{L^2(D^2)}$$

Nous choisissons ρ_0 tel que $r := \sqrt{\frac{2\pi}{|\log \rho_0|}} \|DX\|_{L^2(D^2)} < \frac{L}{2}$.
(c'est à dire qu'il suffit que prendre ρ_0 tel que $|\log \rho_0| > \frac{\cancel{4}\,8\pi}{L^2} C \geq \frac{8\pi}{L^2} \|DX\|^2_{L^2}$). Alors en particulier

$$|X(\omega^+) - X(\omega^-)| < \overline{R}$$

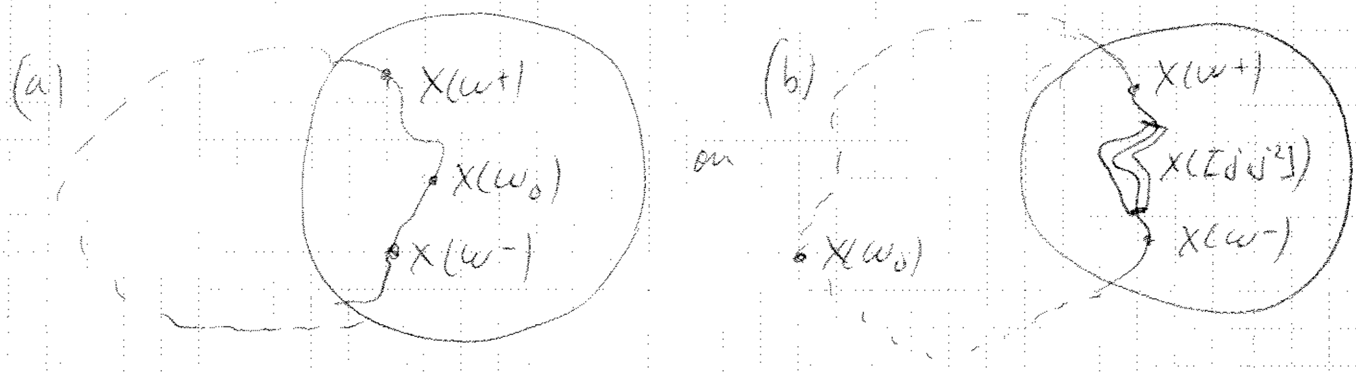
$$\Longleftrightarrow \quad X(\omega^+) \in B^3(X(\omega^-), \overline{R}) \cap \Gamma$$

donc $X(\omega^-)$ et $X(\omega^+)$ sont sur la même composante simplement connexe de Γ, qui est topologiquement homéomorphe à un <u>intervalle</u>, que nous appellerons <u>segment</u> $: \boxed{B^3(X(\omega_-), r) \cap \Gamma}$

On a alors l'alternative suivante

(a) Soit $X(w^-)$ et $X(w^+)$ sont sur ~~une~~ segment qui passe par $X(w_0)$

(b) Soit $X(w^-)$ et $X(w^+)$ sont l'autre segment de Γ qui les joint, et qui contient $X([j, j^2])$



Nous excluons le cas (b) : il signifie que que $A_1 = X(j)$ et $A_2 = X(j^2)$ sont dans le segment $B^3(X(w^-), r) \cap \Gamma$, ce qui est impossible car $|A_2 - A_1| \geq L_0 \geq 2r$.

Donc, si (a) se produit, cela signifie que $X([w^-, w^+])$ est contenu dans $B(X(w^-), r)$. En particulier ~~[illegible]~~ l'image par X de l'arc de cercle compris entre les extrémités de $C(\ell\delta)$ est dans $B(X(w^-), r)$. Cela prouve l'équicontinuité de $\partial C^\alpha_C(\Gamma)$.

Preuve de l'existence d'un minimum de E dans $C^\alpha(\Gamma)$.

Nous supposons que $C^\alpha(\Gamma) \neq \emptyset$ (à vérifier !). Soit $(X_n)_n$ une suite dans $C^\alpha(\Gamma)$ t.q.

$$\lim_{n\to+\infty} E_{D^2}(X_n) = \inf_{X\in C^\alpha(\Gamma)} E_{D^2}(X)$$

Bien entendu cette suite est bornée dans H^1 et prend ses valeurs dans un ensemble $C^\alpha_C(\Gamma)$. En utilisant le théorème de Rellich-Kondrakov, nous pouvons extraire une sous-suite, que nous appellerons toujours $(X_n)_n$, telle que

$$X_n \rightharpoonup X \,,\quad H^1.$$
$$X_n \longrightarrow X \,,\quad L^2 \quad \text{et p.p.}$$

et, grâce au théorème d'Ascoli et au lemme de Courant-Lebesgue,

$$X_n|_\Gamma \longrightarrow \cancel{X_\Gamma}\, \gamma \quad \mathcal{C}^0(\Gamma),\ \text{où}\ \gamma \in \mathcal{C}^{\alpha}_{c}(\Gamma)$$

Nous écrivons $X_n = X + Y_n$, où $Y_n \rightharpoonup 0$, H^1.
En passant à la limite faible dans l'inégalité

$$E_{D^2}(X_n) = E_{D^2}(X) + E(Y_n) + \int_{D^2} \nabla X \cdot \nabla Y_n < \varepsilon + \operatorname*{Inf}_{X \in C^{\alpha}(\Gamma)} E_{D^2}(X)$$

(vrai pour n suffisamment grand), nous obtenons

$$E_{D^2}(X) + \liminf_{n \to +\infty} E(Y_n) \leq \varepsilon + \operatorname*{Inf}_{C^{\alpha}(\Gamma)} E_{D^2}$$

et donc, comme $\liminf_{n\to+\infty} E(Y_n) \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ est arbitraire,

$$E_{D^2}(X) \leq \operatorname*{Inf}_{C^{\alpha}(\Gamma)} E_{D^2}.$$

Par ailleurs

$$\left[X_n|_\Gamma \to \cancel{X_\Gamma}\, \gamma,\ \mathcal{C}^0(\Gamma) \right]$$

entraîne la convergence de $X_n|_\Gamma$ vers $\cancel{X_\Gamma}\,\gamma$ fortement dans $L^2(\Gamma)$, donc faiblement dans $L^2(\Gamma)$.

Or on peut montrer que $X_n|_\Gamma \rightharpoonup X|_\Gamma$, $L^2(\Gamma)$. Donc, par unicité de la limite faible dans $L^2(\Gamma)$, $X|_\Gamma = \gamma$. Donc $X \in C^{\alpha}(\Gamma)$.

De nombreux détails doivent être mis au point...

1) Points techniques

a) Pour $X \in H^1(B^2,\mathbb{R}^3)$, nous pouvons définir la trace de X sur ∂B^2 comme suit.

si $\omega \in S^1$, $0 < r_1 < r_2 \leq 1$, $X \in \mathcal{C}^\infty(D^2)$,

$$|X(r_2\omega) - X(r_1\omega)| = \left|\int_{r_1}^{r_2} \omega \cdot \nabla X(r\omega)\,dr\right|$$
$$\leq \sqrt{r_2-r_1}\ \sqrt{\int_{r_1}^{r_2} |\nabla X(r\omega)|^2\,dr}$$

donc
$$\int_0^{2\pi} |X(r_2\omega) - X(r_1\omega)|^2\,d\omega \leq (r_2-r_1)\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} |\nabla X|^2\,dr\,d\theta$$
$$\leq \frac{r_2-r_1}{r_1}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} |\nabla X|^2\,r\,dr\,d\theta = \frac{r_2-r_1}{r_1}\int_{B(0,r_2)\setminus B(0,r_1)} |\nabla X|^2$$

Pour $0 < r \leq 1$, posons
$$f(r) : \begin{array}{l} S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \omega \longmapsto X(r\omega) \end{array}$$

cela définit une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(]0,1], L^2(S^1))$ telle que
$$\|f(r_2) - f(r_1)\|_{L^2(S^1)} \leq \sqrt{\frac{r_2-r_1}{r_1}}\ \|\nabla X\|_{L^2(B^2)}.$$

Donc f est Hölder continue sur $]0,1]$, à valeurs dans $L^2(S^1)$.

En approchant une fonction $X \in H^1(D^2)$ par une suite de fonctions régulières, nous en déduisons que l'on peut aussi définir $f \in C^{0,\frac{1}{2}}_{loc}(]0,1], L^2(S^1))$ par
$$f(r) : \begin{array}{l} S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \omega \longmapsto X(r\omega) \end{array}$$

(cette fonction est essentiellement höldérienne).

En particulier :

Remarque : dans toute la suite, il sera plus agréable de noter $\theta(X) = X|_{\partial D^2}$

- Nous pouvons définir $X|_{\partial D^2}$ par :
$$X|_{\partial D^2} = \lim_{r\to 1} f(r) \text{ dans } L^2(S^1)$$ (limite essentielle
- $\lim_{r\to 1} f_r(\omega) = X|_{\partial D^2}(\omega)$ p.p.t. $\omega \in S^1$.
- l'application $\left\{\begin{array}{l} H^1(D^2) \longrightarrow L^2(S^1) \\ X \longmapsto X|_{\partial D^2} \end{array}\right.$ est linéaire continue.

– Si $(X_n)_n$ est une suite bornée dans $H^1(D^2)$, la suite $(f_n)_n$ correspondante est équicontinue sur tout compact de $]0,1]$. Donc on peut en extraire une sous-suite qui converge dans $C^0([r_0,1], \underbrace{L^2(S^1)}_{\text{faible}})$, grâce au théorème d'Ascoli.

b) Soit $\omega \in S^1$. Pour $\rho \in]0,1]$, on note
$C(\omega,\rho) = \partial B(\omega,\rho) \cap B(0,1)$.
Pour $0 < \rho_1 < \rho_2 \leq 1$,

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq \int_{B(\omega,\rho_2) \setminus B(\omega,\rho_1)} |\nabla u|^2$$

$$= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left(\int_{-s(\rho)}^{s(\rho)} |\nabla u|^2 (\xi(\rho,s))\, ds \right) d\rho$$

où $\xi(\rho,s)$ est le point situé sur $C(\omega,\rho)$ repéré par l'abscisse curviligne s (en prenant comme origine pour s le point d'intersection entre $C(\omega,\rho)$ et $[0,\omega]$)

$s(\rho)$ est la demi-longueur de $C(\rho)$: $s(\rho) = \rho \arccos \frac{\rho}{2}$
Le théorème de Fubini nous permet alors de conclure que, p.p.t. $\rho \in [\rho_1,\rho_2]$, la restriction de $|\nabla u|^2$ à $C(\omega,\rho)$ est L^1 et (voir les détails plus bas) la restriction de u à $C(\omega,\rho)$ est H^1 et donc est essentiellement $C^{0,\frac{1}{2}}$.

Détails dans un cas plus simple

Lemme Soit $u \in H^1([0,1]^2)$
Alors p.p.t. $y \in [0,1]$, $u|_y = [x \mapsto u(x,y)] \in H^1(]0,1[)$
et $\dfrac{d(u|_y)}{dx} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_y$

Preuve (1) On applique Fubini :

$$\|u\|^2_{L^2([0,1]^2)} = \int_0^1 \left(\int_0^1 |u(x,y)|^2\, dx \right) dy$$

donc, p.p.t. $y \in [0,1]$, $u|_y \in L^2([0,1])$.

(ii) On applique Fubini à :

$$\|Du\|^2_{L^2([0,1]^2)} \geq \int_0^1 \left(\int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \right|^2 dx \right) dy$$

donc p.p.t. $y \in [0,1]$, $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\Big|_y : \left[x \mapsto \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right|^2\right] \in L^1([0,1])$

donc p.p.t. $y \in [0,1]$, $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_y : \left[x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\right] \in L^2([0,1])$.

(iii) Soit $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^\infty_c(]0,1[)$

et $\chi = \varphi \otimes \psi$ où $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $(\varphi \otimes \psi)(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$

$$0 = \iint_{[0,1]^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \chi + u \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) dx\, dy$$

$$= \iint_{[0,1]^2} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\, \varphi(x) + u(x,y) \frac{d\varphi}{dx}(x) \right) \psi(y)}_{\in L^1([0,1]^2)} dx\, dy$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 h(y)\, \psi(y)\, dy$$

où $h(y) = \int_0^1 \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\, \varphi(x) + u(x,y) \frac{d\varphi}{dx}(x) \right] dx$.

De $\forall \psi \in \mathcal{C}^\infty_c([0,1])$, $\int_0^1 h(y)\psi(y)\, dy = 0$, on déduit $h = 0$ dans L^1, i.e.

p.p.t. $y \in [0,1]$, $\int_0^1 \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\varphi(x) + \frac{d\varphi}{dx}(x)\, u(x,y) \right] dx = 0$

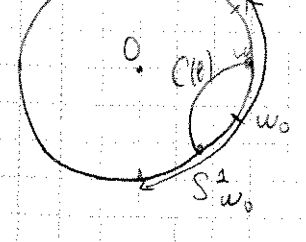
(iv) Synthèse : p.p.t. $y \in [0,1]$, $u|_y$, $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_y \in L^2([0,1])$

et $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_y$ est la dérivée faible de $u|_y$, i.e.

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_y(x)\, \varphi(x) + \frac{d\varphi}{dx}\, u|_y(x) \right] dx = 0.$$

Donc en particulier $u|_y \in H^1([0,1])$.

c) Soit $\omega_0 \in S^1 = \partial B(0,1)$. Pour p.p.t. $\rho \in]0,1]$, $X|_{C(\omega_0,\rho)}$ est essentiellement höldérienne (§ précédent). Donc $X|_{C(\omega_0,\rho)}$ admet une limite essentielle lorsque $s \longrightarrow \pm s(\rho)$



Soit $S^1_{\omega_0} = \{\omega \in S^1 ;\ |\omega - \omega_0| \leq 1\}$.

On peut définir $Y : S^1_{\omega_0} \to \mathbb{R}^3$ p.p. par

p.p. $\forall \omega \in S^1_{\omega_0}$, $\exists!\ \rho \in]0,1]$, ω est l'une des extrémités de $C(\omega_0,\rho)$.

Comme $~~\quad~~$ $X|_{C(\omega_0,\ell)}$ est essentiellement continue, on peut définir sa limite essentielle en ω.

On la note $Y(\omega)$.

<u>Lemme</u> $X|_{\partial B(0,1)}$ coïncide avec Y p.p. sur $S^1_{\omega_0}$

<u>Preuve</u> (i) Rappelons que l'on a défini $f(r) : \omega \mapsto X(r\omega)$.
et que $X|_{\partial B(0,1)} := \lim_{r\to 1}$ en $f(r)$ dans $L^2(S^1)$.

Soit $F(r) := \frac{1}{1-r}\int_r^1 f(s)\,ds$. On a a fortiori

$$\lim_{r\to 1} \| X|_{\partial B(0,1)} - F(r) \|_{L^2(S^1)} = 0.$$

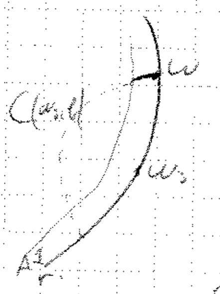
car

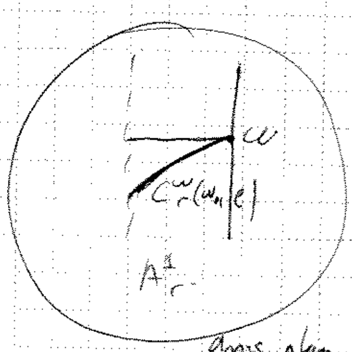
$$\| X|_{\partial B(0,1)} - F(r) \|_{L^2(S^1)} = \sqrt{\int_{S^1} \left| X|_{\partial D^2}(\omega) - \frac{1}{1-r}\int_r^1 f(s)(\omega)\,ds \right|^2 d\omega}$$

$$= \sqrt{\int_{S^1} \frac{1}{(1-r)^2} \left| \int_r^1 (X_{\partial D^2}(\omega) - f(s))\,ds \right|^2 d\omega}$$

$$\leq \frac{1}{1-r}\int_r^1 \| X_{\partial D^2} - f(s) \|_{L^2(S^1)}\,ds.$$

(ii) Soit $A_r^1 = B(0,1) \setminus B(0,r)$ et $C_r^{\omega}(\omega_0,\ell) := C(\omega_0,\ell) \cap A_r^1 \cap B(\omega,1)$ l'arc du cercle $C(\omega_0,\ell)$ contenu dans la couronne A_r^1 et qui touche ω.





Soit $⨍_{C_r^\omega(\omega_0,\ell)} X(s)\,ds$ $\big(= X(\xi(\ell(s))\big)$ la valeur moyenne de X sur l'arc $C_r^\omega(\omega_0,\ell)$. On peut montrer que p.p.t. $\omega \in S^1_{\omega_0}$,

$$\lim_{r\to 0} \left| F(r)(\omega) - ⨍_{C_r^\omega(\omega_0,\ell)} X(s)\,ds \right| = 0.$$

et la convergence est <u>uniforme</u> en $\omega \in S^1_{\omega_0}$.

(iii) Conclusion : comme p.p.t. ℓ, ~~$X(s)$ tend vers Y~~

$X(\xi(\ell,s))$ tend vers $Y(\omega)$ essentiellement en ℓ, lors $s \to s(\ell)$, $⨍_{C^{\omega}_{r}(\omega_0,\ell)} X(s)\,ds$ tend vers $Y(\omega)$ lorsque $r \to 1$.

Donc, d'après (ii) $F(r)(\omega)$ tend vers $Y(\omega)$ lorsque r tend vers 1, pour p.p. ω, i.e. $\boxed{F(r)(\omega) \to Y(\omega) \text{ p.p.}}$

Or, d'après (i) $F(r) \to X|_{\partial D^2}$ dans L^2 donc, quitte à extraire une sous-suite (r_n),

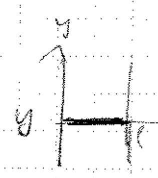
$$\boxed{F(r_n)(\omega) \to X|_{\partial D^2}(\omega) \quad \text{p.p.}}$$

Par unicité de la limite p.p. $Y(\omega) = X|_{\partial D^2}(\omega)$ p.p.

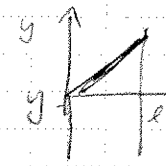
<u>Détails sur un cas plus simple</u>

Soit $u \in H^1(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$. Pour $0<\ell$, on définit deux moyennes de u p.p.t. $y \in \mathbb{R}$

$$v_\ell(y) = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell u(x,y)\,dx$$



$$w_\ell(y) = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell u(x,y+px)\,dx$$



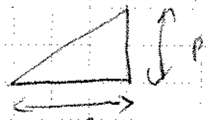
Supposons d'abord $u \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$.

$$u(x,y+px) = u(x,y) + \int_y^{y+px} \frac{\partial u}{\partial y}(x,t)\,dt$$

$$\Rightarrow |w_\ell(y) - v_\ell(y)| = \left|\frac{1}{\ell}\int_0^\ell \left(\int_y^{y+px} \frac{\partial u}{\partial y}(x,t)\,dt\right)dx\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\ell}\iint_{T_p(\ell)} \frac{\partial u}{\partial y}(x,t)\,dt\,dx\right|$$

où $T_p(\ell) = \{(x,t) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R} \,;\, 0 \le x \le \ell,\ y \le t \le y+px\}$



Donc $|w_\ell(y) - v_\ell(y)| \le \frac{1}{\ell}\left(\iint_{T_p(\ell)} |Du|^2\right)^{1/2}\left(\iint_{T_p(\ell)} 1\right)^{1/2}$

$$\le \frac{\sqrt{p\ell^2/2}}{\ell}\, \|Du\|_{L^2(0<x<\ell)} = \sqrt{\frac{p}{2}}\, \|Du\|_{L^2(0<x<\ell)}$$

Donc $\|v_\ell - w_\ell\|_{C^0(\mathbb{R})} \leq \sqrt{\frac{\ell}{2}} \; \|\nabla u\|_{L^2([0,\ell]\times\mathbb{R})}$.

On déduit du théorème de convergence dominée que

$$\lim_{\ell \to 0} \|\nabla u\|_{L^2([0,\ell]\times\mathbb{R})} = 0$$

Donc, par densité de $\mathcal{C}^\infty([0,+\infty[\times\mathbb{R})$ dans $H^1(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$, on en déduit que $|v_\ell(y) - w_\ell(y)| \to 0$ p.p.t. y.

10) <u>Équation d'Euler-Lagrange</u>

Nous avons établi que – sur une hypothèse sur Γ (page 58) – il existe une application $X \in C^*(\Gamma)$ qui minimise E_{D^2} dans $C^*(\Gamma)$.

Commençons par remarquer que X minimise E_{D^2} dans $C(\Gamma)$ (sans la condition sur les 3 points).

En effet, $\forall\, Y \in C(\Gamma)$, $\exists!\, T \in SO(1,2)$ (transformation homographique du disque) t.q. $Y \circ T \in C^*(\Gamma)$

(i.e. $Y\circ T(j^a) = A_a$, pour $a = 0,1,2$: on choisit T pour que $T(j^a) = Y|_{\partial D^2}^{-1}(A_a)$).

Alors $E_{D^2}(Y) \underset{\uparrow}{=} E_{D^2}(Y\circ T) \geq E_{D^2}(X)$

invariance de E_{D^2} par les transformations conformes

Donc X est un point critique de E_{D^2} sur $C(\Gamma)$.

<u>Remarque</u> $C^*(\Gamma)$ joue ici le rôle de l'espace quotient $C(\Gamma)/SO(1,2)$, l'invariance conforme signifie en effet que l'on peut définir E_{D^2} sur $C(\Gamma)/SO(1,2)$.

En particulier, $\forall\, \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(D^2,\mathbb{R}^3)$, ~~si ε est suffisamment petit~~, $X + \varepsilon\varphi \in C(\Gamma)$, donc

$$E_{D^2}(X+\varepsilon\varphi) \geq E_{D^2}(X) \quad , \forall \varepsilon.$$

Cela entraîne par les arguments habituels que

$$\int_{D^2} \langle \nabla X, \nabla \varphi \rangle \, dx dy = 0$$

Donc $\Delta X = 0$

Il faut, pour que l'image de X ressemble à une surface minimale, que X soit conforme, c'est à dire que

$$Q := \left|\frac{\partial X}{\partial x}\right|^2 - \left|\frac{\partial X}{\partial y}\right|^2 - 2i \left\langle \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y} \right\rangle = 0 \quad (?)$$

Le calcul dans la preuve du lemme page 47 nous donne

$$\frac{\partial Q}{\partial \bar{z}} = 2 \left\langle \Delta X, \frac{\partial X}{\partial z} \right\rangle .$$

Donc, puisque $\Delta X = 0$, on en déduit que Q est holomorphe. Pour l'instant, ce n'est pas suffisant. La raison est que nous n'avons pas utilisé à fond la condition au bord.

II) Parenthèse : une version du théorème de Noether

Soit
$$L : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times M(m \times n) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x^\alpha, y^i, v^i_a) \longmapsto L(x^\alpha, y^i, v^i_a) = L(x, y, v)$$

un lagrangien. A tout couple (Ω, u), où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une application régulière, nous associons l'action

$$\mathcal{A}_\Omega(u) = \int_\Omega L(x, u(x), du(x)) \, dx.$$

Soit $X \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ (ou bien : un champ de vecteur défini sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$). Soit

$$\Delta_X \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$(s, x) \longmapsto x \cdot e^{sX}$$

le flot du champ de vecteur X. Ici Δ_X est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ tel que $\{0\} \times \mathbb{R}^m \subset \Delta_X \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ (si Δ_X est maximal, c'est l'ensemble de vie).

Nous disons que X est une symétrie si $\forall (\Omega, u)$,

$$\mathcal{A}_{\Omega_s}(u_s) = \mathcal{A}_\Omega(u)$$

où $\Omega_s = \Omega \cdot e^{sX}$ est l'image de Ω par e^{sX} et u_s est défini par $\quad u_s(x\cdot e^{sX}) = u(x), \quad \forall x \in \Omega$

Théorème (Noether, version particulière). Supposons que L est invariant par X. Soit (Ω, u) une solution des équations d'Euler-Lagrange (donc un point critique de $\mathcal{A}_\Omega$). Alors, si
$$J^\alpha(x) := H^\alpha_\beta(x)\, X^\beta(x)$$
où
$$H^\alpha_\beta(x) := \frac{\partial L}{\partial u^i_\alpha}(x, u, du(x))\, \frac{\partial u^i}{\partial x^\beta}(x) - \delta^\alpha_\beta\, L(x, u(x), du(x))$$
est le tenseur hamiltonien, on a
$$\operatorname{div} J = \frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$$

Démonstration a) Traduction de l'hypothèse $\boxed{\mathcal{A}_{\Omega_s}(u_s) = \mathcal{A}_\Omega(u)}$, $\forall (\Omega, u)$. Avant ~~d'impo~~ d'écrire à quelle condition sur L cette propriété est vraie, nous faisons un calcul préliminaire. Par le changement de variable $y = x\cdot e^{sX}$,
$$\mathcal{A}_{\Omega_s}(u_s) = \int_{\Omega_s} L(y, u_s(y), du_s(y))\, dy$$
$$= \int_\Omega L(x\cdot e^{sX}, u_s(x\cdot e^{sX}), du_s(x\cdot e^{sX}))\, d(x\cdot e^{sX}).$$

Nous observons que
$$u_s(x\cdot e^{sX}) = u(x)$$
donc $du_s(x\cdot e^{sX})\cdot \dfrac{d(x\cdot e^{sX})}{dx} = du(x)$

[c'est à dire: $\dfrac{\partial u^i_s}{\partial x^\alpha}(x\cdot e^{sX})\, \dfrac{\partial (x\cdot e^{sX})^\alpha}{\partial x^\beta}(x) = \dfrac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}(x)$)

et $d(x\cdot e^{sX}) = \det\left[\dfrac{d(x\cdot e^{sX})}{dx}\right] dx$.

Donc
$$\mathcal{A}_{\Omega_s}(u_s) = \int_\Omega L\left(x\cdot e^{sX}, u(x), du(x)\cdot\left(\frac{d(x\cdot e^{sX})}{dx}\right)^{-1}\right) \det\left(\frac{d(x\cdot e^{sX})}{dx}\right) dx$$

La condition de symétrie est que cette intégrale = $\mathcal{A}_\Omega(u)$, pour tout (Ω, u). Elle entraîne que $\dfrac{d}{ds}\left(\mathcal{A}_{\Omega_s}(u_s)\right)\Big|_{s=0} = 0$

(en fait, cette dernière propriété est équivalente à l'invariance). [15]
Pour traduire cela, on écrit le développement :

$$\mathcal{A}_{\Omega_s}(u_s) = \mathcal{A}_\Omega(u) + s\int_\Omega \Big[\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}(x,u,du)\, X^\alpha - \frac{\partial L}{\partial v^i_\alpha}(x,u,du)\frac{\partial u^i}{\partial x^\beta}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\alpha} + L(x,u,du)\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\alpha}\Big]dx + o(s)$$

Car
$$\left|\begin{aligned} & x\cdot e^{sX} = x + s\,X(x) + o(s)\\ & du^i(x)\cdot\left(\frac{d(x\cdot e^{sX})}{dx}\right)^{-1}_{\beta} = \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}(x)\cdot\left(\delta^\alpha_\beta - s\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta} + o(s)\right)\\ &\qquad = \frac{\partial u^i}{\partial x^\beta}(x) - s\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta} + o(s)\\ & \det\left(\frac{d(x\cdot e^{sX})}{dx}\right) = 1 + s\,\mathrm{div}\, X + o(s)\end{aligned}\right.$$

La condition de symétrie devient donc :

$$\forall(\Omega,u),\ \int_\Omega\Big[\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}(x,u,du)\, X^\alpha - \frac{\partial L}{\partial v^i_\alpha}(x,u,du)\frac{\partial u^i}{\partial x^\beta}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\alpha} + L(x,u,du)\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta}\Big]dx = 0$$

$$\Longleftrightarrow\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{\partial L}{\partial x^\alpha}(x,y,v)\,X^\alpha(x) - \frac{\partial L}{\partial v^i_\alpha}(x,y,v)\, v^i_\beta\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\alpha}(x) + L(x,y,v)\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\alpha}(x) = 0\\ & \forall (x,y,v)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\times M(m\times n).\end{aligned}\right.$$

b) Le théorème de Noether : modulons la symétrie X

Soit $\varphi\in\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$. Nous allons faire le même calcul que précédemment, mais en modulant X par φ, c'est à dire en remplaçant X par φX. Nous notons $e^{s\varphi X}$ le flot de φX et, pour (Ω,u), nous notons (Ω_s,u_s) le couple défini par :

$$\left\{\begin{aligned} & \Omega_s = \Omega\cdot e^{s\varphi X}\\ & u_s(x\cdot e^{s\varphi X}) = u(x).\end{aligned}\right.$$

Nous calculons la quantité $\delta\mathcal{A}_\Omega(u)\cdot(\varphi X)$ telle que

$$\mathcal{A}_{\Omega_s}(u) = \mathcal{A}_\Omega(u) + s\,\delta\mathcal{A}_\Omega(u)\cdot(\varphi X) + o(s).$$

Bien sûr, on n'aura pas $\delta\mathcal{A}_\Omega(u)\cdot(\varphi X) = 0$ en général, car φX

n'a aucune raison d'être une symétrie. Mais, lorsque ~~u est point critique~~ et si φ est à support compact dans Ω, $\frac{d}{ds}(u_s)\Big|_{s=0} =$ ~~[illegible]~~ $du_{\varphi X} \cdot d(\varphi X)$ est une variation infinitésimale de u et $\delta A_\Omega(u)\cdot(\varphi X)$ sera nul à cause de la condition de point critique.

Le calcul est identique à au précédent, sauf que l'on doit remplacer X par φX. On parvient à :

$$\delta A_\Omega(u)\cdot(sX) = \int_\Omega \left[\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}(\varphi X^\alpha) - \frac{\partial L}{\partial v^i_\alpha}\frac{\partial u^i}{\partial x^\beta}\frac{\partial(\varphi X^\beta)}{\partial x^\alpha} + L\frac{\partial(\varphi X^\alpha)}{\partial x^\alpha}\right] dx$$

$$= \int_\Omega \varphi\left[\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}X^\alpha - \frac{\partial L}{\partial v^i_\alpha}\frac{\partial u^i}{\partial x^\beta}\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\alpha} + L\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\alpha}\right] dx$$

$$+ \int_\Omega \left[- \frac{\partial L}{\partial v^i_\alpha}\frac{\partial u^i}{\partial x^\beta}X^\beta\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} + L X^\alpha\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}\right] dx$$

Le premier terme s'annule, à cause de l'hypothèse de symétrie. ~~Le deuxième~~ Il reste donc

$$\delta A_\Omega(u)\cdot(sX) = \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}\left(L X^\alpha - \frac{\partial L}{\partial v^i_\alpha}\frac{\partial u^i}{\partial x^\beta}X^\beta\right) dx$$

$$= \int_\Omega -\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} J^\alpha \, dx$$

où $J^\alpha = \frac{\partial L}{\partial v^i_\alpha}\frac{\partial u^i}{\partial x^\beta}X^\beta - L X^\alpha = \left(\frac{\partial L}{\partial v^i_\alpha}\frac{\partial u^i}{\partial x^\beta} - \delta^\alpha_\beta\right)X^\beta = H^\alpha_\beta X^\beta$

A présent ~~,~~ supposons que u est point critique de A_Ω. Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$,

$$\delta A_\Omega(u)\cdot(sX) = \lim_{s\to 0}\frac{A_\Omega(u_s) - A_\Omega(u)}{s} = 0$$

(noter qu'alors $\Omega_s = \Omega$). Donc, $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$,

$$\int_\Omega -\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} J^\alpha \, dx = 0,$$

ce qui est la formulation faible de $\boxed{\frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0}$.

c) Bonus : cas d'un champ de vecteur à support compact dans $\overline{\Omega}$.

Supposons que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\overline{\Omega})$ (donc φ ne s'annule pas sur le bord de Ω), mais que <u>X est tangent à $\partial\Omega$ sur $\partial\Omega$</u>.
Cela entraîne que $\Omega_s := \Omega \cdot e^{s\varphi X} = \Omega$, $\forall s$.
La variation première pour la variation u_s est alors

$$\delta \mathcal{A}_\Omega(u)\cdot(sX) = \int_\Omega -\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} J^\alpha dx = -\int_{\partial\Omega} \varphi \langle J, \nu\rangle d\sigma + \int_\Omega \varphi \,\mathrm{div}\, J \, dx.$$

À présent, supposons que u <u>est point critique de</u> $\mathcal{A}_\Omega$ dans la classe de fonctions

$$C(\Gamma) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R}^n \ ; \ u|_{\partial\Omega} \text{ est un difféomorphisme de } \partial\Omega \text{ vers } \Gamma \}$$

où Γ est une sous-variété fixée de $\mathbb{R}^n$, difféomorphe à $\partial\Omega$.
Alors

(i) On a $\delta\mathcal{A}_\Omega(u)\cdot(sX) = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$,
ce qui entraîne <u>$\mathrm{div}\, J = 0$</u> (car alors $\int_{\partial\Omega} \varphi\langle J,\nu\rangle ds = 0$).

(ii) On a aussi $\delta\mathcal{A}_\Omega(u)\cdot(sX) = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\overline{\Omega})$,
ce qui nous donne

$$0 = -\int_{\partial\Omega} \varphi\langle J,\nu\rangle d\sigma + \int_\Omega 0, \quad \forall\varphi.$$

Donc $\langle J,\nu\rangle = 0$ sur $\partial\Omega$.

<u>Conclusion</u> : si u est point critique de $\mathcal{A}_\Omega$ sur $C(\Gamma)$ et si X est tangent le long de $\partial\Omega$, ~~alors~~ i.e. $\langle X,\nu\rangle = 0$ sur $\partial\Omega$, alors $\langle J,\nu\rangle = 0$ sur $\partial\Omega$.
Autrement dit $H^\alpha_\beta X^\beta \nu^\alpha = 0$ sur $\partial\Omega$.

12) <u>Retour au problème de Plateau</u>

Nous appliquons ce qui précède à $m=2$, $n=3$, $L(x,u,du) = \frac{|du|^2}{2}$.
(<u>Nous noterons ici u au lieu de X l'application $D^2 \to \mathbb{R}^3$</u>)

Alors, ~~pour~~ tout champ de vecteur qui engendre une famille de difféomorphismes conformes est une symétrie de L. De tels champs de vecteur sont holomorphes, i.e. satisfont

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2}\right)(X^1 + iX^2) = \left(\frac{\partial X^1}{\partial x^1} - \frac{\partial X^2}{\partial x^2}\right) + i\left(\frac{\partial X^2}{\partial x^1} + \frac{\partial X^1}{\partial x^2}\right) = 0$$

De plus ~~Plus~~ $(H^\alpha{}_\beta) = \begin{pmatrix} \left|\frac{\partial u}{\partial x^1}\right|^2 - \frac{|du|^2}{2} & \langle \frac{\partial u}{\partial x^1}, \frac{\partial u}{\partial x^2}\rangle \\ \langle \frac{\partial u}{\partial x^1}, \frac{\partial u}{\partial x^2}\rangle & \left|\frac{\partial u}{\partial x^2}\right|^2 - \frac{|du|^2}{2} \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left|\frac{\partial u}{\partial x^1}\right|^2 - \left|\frac{\partial u}{\partial x^2}\right|^2 & 2\langle \frac{\partial u}{\partial x^1}, \frac{\partial u}{\partial x^2}\rangle \\ 2\langle \frac{\partial u}{\partial x^1}, \frac{\partial u}{\partial x^2}\rangle & \left|\frac{\partial u}{\partial x^2}\right|^2 - \left|\frac{\partial u}{\partial x^1}\right|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$$

où A et B sont les composantes de la différentielle de Hopf :

$$Q = A - iB.$$

<u>Le théorème de Noether</u> prédit que, pour tout point critique u de $E_{\partial 2}$ et pour tout $X^1 + iX^2$ holomorphe,

$$\frac{\partial(H^\alpha_\beta X^\beta)}{\partial x^\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x^1}(AX^1 + BX^2) + \frac{\partial}{\partial x^2}(BX^1 - AX^2) = 0. \qquad (1)$$

Pour $(X^1, X^2) = (1, 0)$, cela donne $\frac{\partial A}{\partial x^1} + \frac{\partial B}{\partial x^2} = 0$

pour $(X^1, X^2) = (0, 1)$, cela donne $\frac{\partial B}{\partial x^1} - \frac{\partial A}{\partial x^2} = 0$

Ces deux équations forment le système de Cauchy-Riemann pour $Q = A - iB$: on retrouve ainsi que <u>Q est holomorphe</u>.

On ne tire pas davantage du théorème de Noether, car la relation (1) équivaut à

$$0 = 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial \bar z}\left[(A - iB)(X^1 + iX^2)\right]\right]$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial \bar z}(QX)\right]$$

et, si X est holomorphe, $\frac{\partial(QX)}{\partial \bar z} = \frac{\partial Q}{\partial \bar z}X + Q\frac{\partial X}{\partial \bar z} = \frac{\partial Q}{\partial \bar z}X$, on obtient donc :

$$\mathrm{Re}\left[X\frac{\partial Q}{\partial \bar z}\right] = 0, \quad \forall X \text{ holomorphe.}$$

Le bonus pour les points critiques dans $C(\Gamma)$ prédit que si u est point critique de E_{D^2} sur $C(\Gamma)$ et si X^1+iX^2 est holomorphe et est tangent à ∂D^2, alors

$$\langle HX, \nu \rangle = H^\alpha_\beta X^\beta \nu^\alpha = 0 \quad \text{sur } \partial D^2.$$

Choisissons $X^1+iX^2 = iz$, donc $(X^1, X^2) = (-\nu^2, \nu^1) = (-n^2, n^1)$ sur ∂D^2 et on obtient

$$\mathrm{Re}\left[(A-iB)(X^1+iX^2)(\nu^1+i\nu^2) \right] = 0 \quad \text{sur } \partial D^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\left[Q\,(-n^2+in^1)(n^1+in^2) \right] = 0 \quad \text{sur } \partial D^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\left[i\, Q\, z^2 \right] = 0 \quad \text{sur } \partial D^2$$

Donc $\mathrm{Im}(Q z^2) = 0$ sur ∂D^2. Comme Q et $z \mapsto z^2$ sont holomorphe, Qz^2 est holomorphe, donc en particulier $\mathrm{Im}(Qz^2)$ est harmonique sur ∂D^2. On déduit donc que $\mathrm{Im}(Qz^2) = 0$ partout sur D^2.

Cela entraîne que Qz^2 est égal à une constante réelle sur D^2 (écrire les équations de Cauchy-Riemann ~~sur~~ pour Qz^2).
Donc $Qz^2 = k$, où $k \in \mathbb{R}$.
Mais comme par ailleurs Q est harmonique sur D^2 (et en particulier n'a pas de singularité en 0), la seule possibilité est que $k=0$. Donc $\boxed{Q=0}$

[Retour à la notation $X : D^2 \to \mathbb{R}^3$]
Donc X est faiblement conforme. Son image est une surface minimale possédant éventuellement des points de branchement isolés.

[En effet, les points où dX est de rang < 2 sont ceux où $dX = 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{\partial X^1}{\partial z} = \dfrac{\partial X^2}{\partial z} = \dfrac{\partial X^3}{\partial z} = 0$. Comme X est harmonique, les composantes $f^j = \dfrac{\partial X^j}{\partial z}$ sont holomorphes, donc ont des zéros isolés].

Remarque sur le théorème de Noether

Pourquoi on ne déduit pas une infinité de lois de conservation de l'invariance conforme de l'énergie de Dirichlet, alors que le groupe de symétrie est de dimension infinie ?

Il existe un "deuxième théorème de Noether", publié en même temps que le "premier" (en 1917) mais très mal connu (Voir le livre d'Yvette Kosmann-Schwarzbach). Ce théorème s'applique au cas où un problème variationnel est invariant par un groupe de symétrie de dimension infini, plus précisément de ~~champs de vecteurs~~ familles de champs de vecteurs indexées par des fonctions (comme ici les champs de vecteurs holomorphes et, en physique, les théories de jauge). Le deuxième théorème de Noether prévoit alors des <u>contraintes</u> sur certaines grandeurs, au lieu de lois de conservation. Ici les contraintes sont que $H^\alpha_\beta = H^\beta_\alpha$ (tenseur hamiltonien symétrique) et $H^1_1 + H^2_2 = 0$ (trace nulle) et donc que le tenseur hamiltonien a la forme

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$$

et donc s'identifie à la différentielle de Hopf.