Université de Paris
L1 Mathématiques MIASH - groupe 1
MM1 - cours du lundi 2 novembre 2020

Systèmes linéaires : Feuilles 4

Exercice 2 (a)
$$\begin{cases} x - 3y - 2z = -1 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ x + 4y - 2z = 4 \\ 5x + 6y - 10z = 10 \end{cases}$$

Gauss : système échelonné : 2 variables principales, 1 variable secondaire, compatible

$$\mathcal{E} = \left\{ \left(\frac{8}{7} + 2\lambda, \frac{5}{7}, \lambda \right) / \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left(\frac{8}{7} + 2\lambda, \frac{5}{7}, \lambda \right) = \left(\frac{8}{7}, \frac{5}{7}, 0 \right) + (2\lambda, 0, \lambda)$$
$$= \left(\frac{8}{7}, \frac{5}{7}, 0 \right) + \lambda (2, 0, 1)$$

Solution particulière : $\left(\frac{8}{7}, \frac{5}{7}, 0 \right)$

$\lambda(2,0,1)$ est solution du système linéaire homogène associé

$$(S_0) \begin{cases} x - 3y - 2z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \\ x + 4y - 2z = 0 \\ 5x + 6y - 10z = 0 \end{cases}$$

Solutions du système S_0 : $\mathcal{E}_0 = \{ \lambda(2,0,1) / \lambda \in \mathbb{R} \}$
(sous-espace vectoriel).

$$\mathcal{E} = \{ \underbrace{\left(\tfrac{8}{7}, \tfrac{5}{7}, 0 \right)}_{\text{solution particulière}} + (a,b,c) \mid (a,b,c) \in \mathcal{E}_0 \}$$

$$t \times \lambda (2,0,1) = t\lambda (2,0,1) \in \mathcal{E}_0.$$
$$\lambda (2,0,1) + \mu (2,0,1) = (\lambda + \mu)(2,0,1) \in \mathcal{E}_0$$

$(2,0,1)$: une solution de (S_0).

L'ensemble de toutes les solutions de (S_0) est $\{ \lambda(2,0,1) / \lambda \in \mathbb{R} \}$.

Exercice 3

$$(S)\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + \alpha z = 2 \\ 2x + \alpha y + 2z = 3 \end{cases}$$

$\alpha \in \mathbb{R}$ paramètre

A quelle condition sur α :
(a) (S) n'a pas de solution
(b) (S) a une infinité de solutions
(c) (S) a une unique solution.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha & 2 \\ 2 & \alpha & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{pivot}}$ échelonner.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & ? & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & ? & ? \end{array}\right)$$

nul ou non ?
Quelle valeur obtenez-vous ?

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha+1 & 1 \\ 0 & \alpha-2 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} L_1' \\ L_2' \\ L_3' \end{array}$$

$$L_3' - (\alpha-2)L_2' \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha+1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{4-(\alpha-2)(\alpha+1)} & \underbrace{1-(\alpha-2)}_{3-\alpha} \end{array}\right)$$

$-(\alpha^2 - \alpha - 6)$

$4 - (\alpha-2)(\alpha+1)$
$= 4 - \alpha^2 + 2\alpha - \alpha + 2$
$= -\alpha^2 + \alpha + 6$

Si $\alpha^2 - \alpha - 6$ est non nul : unique solution
Si $\boxed{\alpha^2 - \alpha - 6 = 0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\alpha \end{array}\right)$$

Système compatible si et seulement si $\boxed{3 - \alpha = 0}$

Question : $\alpha = 3$ est-il une racine de $\alpha^2 - \alpha - 6$?
$3^2 - 3 - 6 = 9 - 9 = 0$ Oui
Infinité à un paramètre de solutions

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\boxed{\text{Cas (b)} \quad \alpha = 3}$

$\alpha^2 - \alpha - 6 = 0 \qquad \alpha = 1 \pm 2 = 3$ ou -1

déjà traité

$\Delta' = 4$

Pour $\alpha = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

non compatible ! (a)

Conclusion :
(a) (pas de solution) $\alpha = -1$
(b) ∞ de solution $\alpha = 3$
(c) $\exists!$ solution $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$.

Si, Après avoir échelonné, le système a la forme

pivots

$$\begin{pmatrix} 1 & \times & \times & | & \times \\ 0 & 1 & \times & | & \times \\ 0 & 0 & 1 & | & \times \end{pmatrix}$$

, alors le système a une unique solution

(on peut remplacer 1 par un terme non nul)

Pas de solution.

Pas de solution

Si, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & \times & \times & | & \times \\ 0 & 1 & \times & | & \times \\ 0 & 0 & 0 & | & \underbrace{\times \text{ non nul}}_{=c} \end{pmatrix}$ pivot.

$$0 = 0\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z = c \neq 0$$

contradiction

Si on obtient $\begin{pmatrix} 1 & \times & \times & | & \times \\ 0 & 1 & \times & | & \times \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$ infinité de solutions

(on peut $z =$ paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$)

Déf pivot d'une ligne : 1^er terme non nul en partant de la gauche.

système échelonné $\Leftrightarrow$ chaque pivot est strictement à droite du pivot de la ligne du dessus.

$\boxed{\text{Si il y a un pivot à droite de la ligne, pas de solution}}$

Exercice 4 $\quad \alpha, \beta, \gamma$: paramètres

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 3 & 8 & -14 & \beta \\ 2 & 0 & 4 & \gamma \end{array}\right)$$

Même critère : échelonner ...

---

géométrie affine

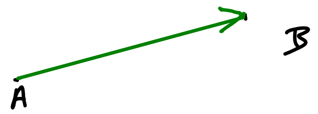
Droite affine.

Plan affine : comme une feuille blanche

$\boxed{\text{Espace affine}}$: notre espace $\mathcal{E}$

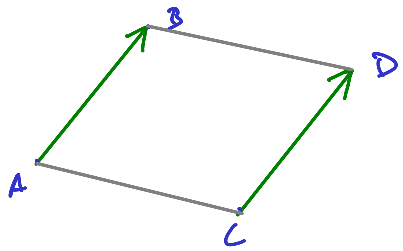
$\mathcal{E}$ contient des points, des droites, des plans.

Déf Vecteurs Soit A, B deux points de l'espace $\mathcal{E}$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est une grandeur qui mesure le déplacement de A vers B



vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Complément à la définition : identifier deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sous certaines conditions



Si le quadrilatère $ABDC$ est un un parallélogramme (chaque paire de côtés opposés est parallèle)

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$: même direction $\Longleftrightarrow AB \parallel CD$

mêmes "longueurs" $\Longleftrightarrow BD \parallel AC$

Autres compléments : $\boxed{\overrightarrow{AB} = \vec{0}}$ (vecteur nul) $\Longleftrightarrow$ A et B sont confondus (donc $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$)

$\boxed{\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}}$

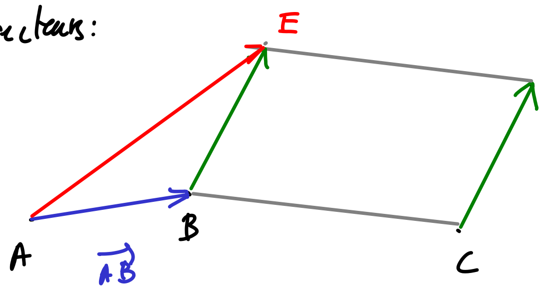
introduction de l'addition

Relation de Chasles Pour 3 points A, B, C quelconques

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$$

Addition de deux vecteurs :

$\vec{AB} + \vec{CD}$? $= \vec{AE}$



$\vec{BE} = \vec{CD}$

Récapitulons

$\mathcal{E}$: espace affine $\to$ l'ensemble des vecteurs

$\vec{\mathcal{E}} = \{$ vecteurs $\vec{AB}$ / $A, B \in \mathcal{E} \}$.

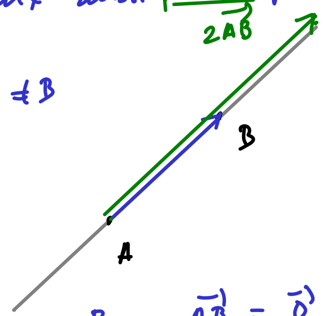
$\vec{\mathcal{E}}$ est muni d'une addition, un vecteur nul $\vec{0} = \vec{AA}$,
d'un inverse pour l'addition

Chasles $\Rightarrow$ $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$ Donc $\boxed{\vec{BA} = -\vec{AB}}$

Je peux aussi $\boxed{\text{multiplier un vecteur par nombre réel}}$ (réel appelé un scalaire)

Exemple: $A \neq B$

$\lambda = 2$



$\lambda \in \mathbb{R} \to$ je choisis C sur la droite passant par A et B tel que $\frac{AC}{AB} = \lambda$.

si $\lambda < 0$, je change le sens

si $\lambda = 0$, $0 \cdot \vec{AB} = \vec{0}$

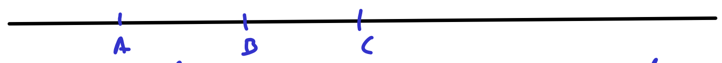
si $A = B$, $\vec{AB} = \vec{0}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Propriété : l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ est stable par addition et multiplication par un scalaire (c'est un nombre réel).

$\forall \vec{AB}, \vec{BC} \in \vec{\mathcal{E}}$, $\vec{AB} + \vec{BC} \in \vec{\mathcal{E}}$,

$\forall \vec{AB} \in \vec{\mathcal{E}}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \vec{AB} \in \vec{\mathcal{E}}$.

- Si je pars de la droite affine $\mathcal{D}$



je peux définir par la même opération la droite vectorielle
$\vec{\mathcal{D}}$: l'espace des directions de $\mathcal{D}$. droite vectorielle

- si je pars du plan affine $\mathcal{P}$, je peux définir le plan vectoriel associé $\vec{\mathcal{P}}$: l'espace des directions de $\mathcal{P}$. plan vectoriel

- Si je pars d'un point (ensemble à un élément) $\{M\}$
l'"espace" vectoriel associé $\vec{\{M\}} = \{\vec{MM}\} = \{\vec{0}\}$: espace vectoriel nul

Anticiper sur la suite : l'espace des solutions d'un système linéaire homogène est associé à un espace vectoriel

Dimensions 0 1 2 3

point droite plan espace

Parallélisme a) Soit D et D' deux droites dans l'espace affine (ou le plan affine)

Alors $D \,//\, D' \iff \vec{D} = \vec{D'}$

les espaces vectoriels associés ou les espaces de direction sont confondus

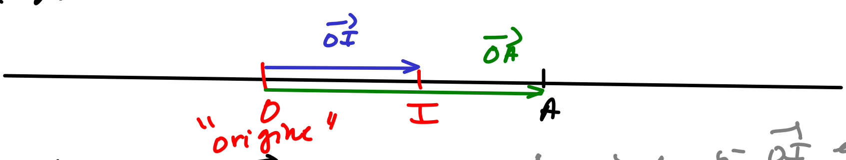
b) Soit P et P' deux plans affines dans $\mathcal{E}$

$P \,//\, P' \iff \vec{P} = \vec{P'}$ ~~Pour toute droite $D \subset P$, il existe une droite $D' \subset P'$ telle que $D \,//\, D'$, et réciproquement.~~

(a) Comment repérer un point dans l'espace ou dans le plan affine ?

Dans la droite affine : je choisis deux O et I, $\boxed{O \neq I}$

O joue le rôle d'origine



$\vec{OA} = x\,\vec{OI}$

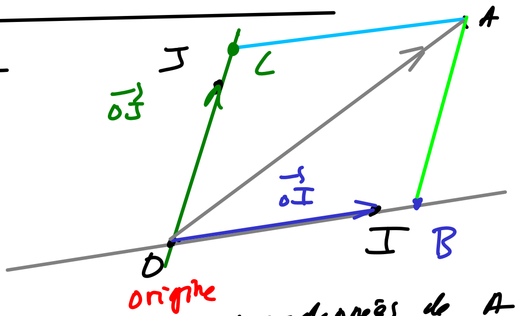
$\boxed{x : \text{coordonnée de } A \text{ dans le repère } (O, \vec{OI})}$

$\begin{cases} x > 0 & \text{si } \vec{OI} \text{ et } \vec{OA} \text{ dans le même sens} \\ x < 0 & \text{si sens opposé} \\ x = 0 \iff A = O \end{cases}$

(O, I) : repère affine

ou $(O, \vec{OI})$: repère affine de la droite

(b) Dans le plan affine (O, I, J)



$\vec{CA} = \vec{OB} = x\vec{OI}$

$\vec{OC} = \vec{BA} = y\vec{OJ}$

Chasles :

$\vec{OA} = \vec{OB} + \vec{BA}$

$= \vec{OC} + \vec{CA}$

$\boxed{\vec{OA} = x\,\vec{OI} + y\,\vec{OJ}}$

x, y : coordonnées de A dans le repère affine $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$

Pour que cela marche, il faut que O, I, J ne soient pas alignés