- géométrie affine de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$
- Exercices : feuille 4 (systèmes linéaires)

Exercice 6 Systèmes linéaires à 2 équations et 2 équations généraux.

1) Systèmes linéaires homogènes $(S)\begin{cases} ax + by = \boxed{0} \\ cx + dy = \boxed{0} \end{cases}$

(x,y) : inconnues
a, b, c, d : paramètres

Unique solution à (S) $(0,0)$ $\iff$ $\boxed{ad - bc \neq 0}$

Méthode de Gauss $(S)\left(\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}$

Réflexe naturel : remplacer c par 0.
- si $c = 0$, rien à faire
- si $c \neq 0$ nécessité d'avoir $a \neq 0$

a) Supposons $a \neq 0$
$(S) \iff_{\text{car } a \neq 0} \; aL_2 - cL_1 \left(\begin{array}{cc|c} a & b & 0 \\ 0 & ad-bc & 0 \end{array}\right)$

Existence & unicité $\iff$ 2 pivots à gauche $\iff$ $a \neq 0$ et $\boxed{ad - bc \neq 0}$

b) Que se passe-t-il si $a = 0$? Supposons $a = 0$

$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array}\right)$ $\quad$ $\boxed{ad - bc = -bc}$
$ad - bc \neq 0 \iff bc \neq 0 \iff [(b \neq 0) \wedge (c \neq 0)]$

cas superflu (i) si $bc = 0$
- soit $b = 0$ $\quad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 \end{array}\right)$ $\quad$ $cx + dy = 0$ (droite), $(d, -c)$ est solution.
non unicité
- soit $c = 0$ $\quad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & b & 0 \\ 0 & d & 0 \end{array}\right)$ $\quad$ $(1, 0)$ est solution
non unicité.

(ii) si $bc \neq 0$ $\quad \boxed{\left(\begin{array}{cc|c} c & d & 0 \\ 0 & b & 0 \end{array}\right)}$ $\quad L_1 - \frac{d}{b}L_2 \left(\begin{array}{cc|c} c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{array}\right)$

$c \neq 0$ et $b \neq 0$ car $bc \neq 0$
$\boxed{\text{Unicité}}$

(Sous-cas $a = 0$) Dans ce cas, on a montré :
Unicité $\iff$ $bc \neq 0$ $\iff$ $\boxed{ad - bc \neq 0}$

Conclusion Unicité de la solution $\iff$ $\boxed{ad - bc \neq 0}$

Remarque : déterminant 2×2

Déf. $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Règle visuelle mnémotechnique : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$(0,0)$ est l'unique solution ssi $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

2. $(S_1)\begin{cases} ax+by=\alpha \\ cx+dy=\beta \end{cases}$ $\qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$

si $ad-bc\neq 0$ (S_1) admet une unique solution.

Remarque : si on sait qu'il existe (x_0,y_0) de (S_1) $\begin{cases} ax_0+by_0=\boxed{\alpha} \\ cx_0+dy_0=\boxed{\beta} \end{cases}$

et (x,y) est une autre solution de (S_1), alors

$(x-x_0,y-y_0)$ est solution. (S) $\begin{cases} ax+by=\boxed{0} \\ cx+dy=\boxed{0} \end{cases}$ système linéaire homogène associé

Mieux : si (x_0,y_0) : solution de (S_1)

Alors (x,y) : solution de (S_1) $\iff$ $(x-x_0,y-y_0)$: $\underbrace{\text{solution}(S)}_{\text{système linéaire homogène associé}}$

Réponse complète : existence, unicité (déjà), détermination avec $\boxed{ad-bc\neq 0}$

a) $\boxed{a\neq 0}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \end{array}\right) \iff \begin{array}{l} L_1 \\ aL_2-cL_1 \end{array}\left(\begin{array}{cc|c} a & b & \alpha \\ 0 & \underbrace{ad-bc}_{\text{"déterminant"}} & a\beta-c\alpha \end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{cc|c} a & b & \alpha \\ 0 & 1 & \dfrac{a\beta-c\alpha}{ad-bc} \end{array}\right) \iff L_1-bL_2\left(\begin{array}{cc|c} a & 0 & \alpha-b\dfrac{a\beta-c\alpha}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \boxed{\dfrac{a\beta-c\alpha}{ad-bc}} \end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \dfrac{\alpha}{a}-\dfrac{b}{a}\,\dfrac{a\beta-c\alpha}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \dfrac{a\beta-c\alpha}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$x=\frac{1}{a}\left(\alpha-b\,\frac{a\beta-c\alpha}{ad-bc}\right)=\frac{1}{a}\left(\frac{\alpha ad-\cancel{\alpha bc}-ab\beta+\cancel{bc\alpha}}{ad-bc}\right)$$

$$=\frac{1}{\cancel{a}}\,\frac{\alpha \cancel{a}d-\cancel{a}b\beta}{ad-bc}=\frac{\alpha d-b\beta}{ad-bc}$$

Conclusion $\boxed{x=\dfrac{\alpha d-b\beta}{ad-bc}}$ $\qquad$ $\boxed{y=\dfrac{a\beta-c\alpha}{ad-bc}}$

b) $\boxed{a=0}$ $\quad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & b & \alpha \\ c & d & \beta \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cc|c} c & d & \beta \\ 0 & 1 & \dfrac{\alpha}{b} \end{array}\right)\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \iff L_1-dL_2\left(\begin{array}{cc|c} c & 0 & \beta-\alpha\dfrac{d}{b} \\ 0 & 1 & \dfrac{\alpha}{b} \end{array}\right)$

$0\neq \boxed{ad-bc=-bc} \iff b\neq 0$ et $c\neq 0$

$$x=\frac{\beta-\alpha\frac{d}{b}}{c}=\frac{\frac{\beta b-\alpha d}{b}}{c}=\frac{\beta b-\alpha d}{bc}=\boxed{\frac{\alpha d-\beta b}{ad-bc}}$$

$$y=\frac{\alpha}{b}=\frac{-c\alpha}{ad-bc}=\boxed{\frac{a\beta-c\alpha}{ad-bc}}$$

Formule générale : $\begin{cases} x=\dfrac{\alpha d-b\beta}{ad-bc}=\dfrac{\begin{vmatrix}\alpha & b\\ \beta & d\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}} \\[2ex] y=\dfrac{a\beta-c\alpha}{ad-bc}=\dfrac{\begin{vmatrix}a & \alpha\\ c & \beta\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}} \end{cases}$

Rappel : $\begin{cases} ax+by=\alpha \\ cx+dy=\beta \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} ax+by=\alpha \\ cx+dy=\beta \end{cases}$

Deux types de questions : unicité (s'il y a existence) : il suffit de regarder le système linéaire homogène associé.

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (S_0) \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Unicité pour (S) $\boxed{\Longleftrightarrow}$ Unicité pour (S_0) $\Longleftrightarrow$ $(0, \dots, 0)$ est l'unique solution de (S_0).

Si $y = (y_1, \dots, y_n)$ est solution de (S) ("solution particulière")
alors, $\forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,
x est solution de (S) $\Leftrightarrow$ $x - y$ est solution de (S_0).

Existence Méthode : pivot de Gauss.

$$(S) \xrightarrow{\text{échelonner}} \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \dots & & & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & & & b'_1 \\ 0 & 0 & a'_{33} & & & b'_3 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & & & a'_{nn} & b'_m \end{array}\right)$$

Existence et unicité $\Longleftrightarrow$ les termes sur la diagonale sont tous non nuls

Expliciter ? : continuer l'algorithme de Gauss jusqu'au bout
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & \ddots & & 0 & \\ 0 & 0 & & 1 & \end{array}\right)$$

3. Application : $\forall\, z \in \mathbb{C}$, si $z \neq 0$, z admet un inverse et l'exprimer.

- méthode 1 : travailler dans les complexes. (révision)
- méthode 2 : système linéaire.

Posons $\begin{array}{|l} z = a + ib \quad (a, b \in \mathbb{R}) \\ z \neq 0 \Leftrightarrow (a,b) \neq (0,0) \end{array}$

Inverse de z ?
Cherchons $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$x + iy$: inverse de $a + ib$

c'est à dire : $\boxed{(a + ib)(x + iy) = 1}$ $\quad a, b$: données ; x, y : inconnues

$\Longleftrightarrow$ $(ax - by) + i(ay + bx) = 1 + i\,0$

$\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow bx + ay = 0$ $\qquad \left(\begin{array}{cc|c} a & -b & 1 \\ b & a & 0 \end{array}\right)$

"ad-bc" = $\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - (b)(-b) = a^2 + b^2 = |z|^2$.

Existence & unicité $\Longleftrightarrow$ $|z| \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{a}{a^2+b^2} \quad ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}} = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

$$(a + ib)^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

Géométrie affine Rappel : dans $\mathbb{R}^2$ vu comme plan affine :
caractérisation des droites affines. $D \subset \mathbb{R}^2$

Deux types de définitions

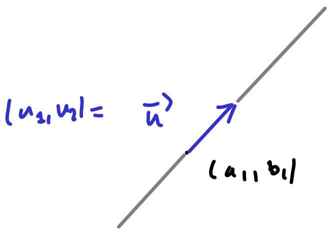
a) **paramétrique**

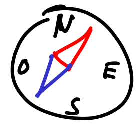
$$D = \{ (a_1 + \lambda u_1 , a_2 + \lambda u_2) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$$

où (a_1, a_2), (u_1, u_2) sont fixés dans $\mathbb{R}^2$.

$(u_1, u_2) \neq (0, 0)$, c'est le vecteur directeur

(a_1, a_2) : un point choisi sur la droite.





b) **cartésiennes**

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a x + b y + c = 0 \}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a,b) \neq (0,0)$.

a) ⟹ b) $\left[\exists \lambda, (x,y) = (a_1 + \lambda u_1, a_2 + \lambda u_2)\right]$ Forme paramétrique.

$$\Rightarrow \quad \underbrace{u_2}_{\text{"}a\text{"}} x \underbrace{- u_1}_{\text{"}b\text{"}} y = \underbrace{u_2 a_1 - u_1 a_2}_{c}$$ Forme cartésienne.

b) ⟹ a) Soit (x,y) t.q. $\boxed{a x + b y + c = 0}$ $\quad (a,b) \neq (0,0)$

Supposons $a \neq 0$: $\quad x = -\frac{b}{a} y - \frac{c}{a} \quad \left(-\frac{c}{a}, 0\right) \in D$

soit $(x,y) \in D \iff a\left(x + \frac{c}{a}\right) + b y = 0$ $\quad \left(\left(x + \frac{c}{a}, y\right) = (x,y) - \left(-\frac{c}{a}, 0\right) \right)$

$\iff a\left(x + \frac{c}{a}\right) = -b y$

$$\iff \exists \lambda \quad \left(x + \frac{c}{a}, y\right) = \lambda (b, -a)$$

Forme paramétrique $\begin{cases} x = -\frac{c}{a} + \lambda b \\ y = -a\lambda \end{cases}$

Droite passant par $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$

de vecteur directeur $\boxed{(b, -a) = \vec{u}}$

Si $a = 0$, forcément $b \neq 0$ $\;\Big|\;$ vecteur directeur $\boxed{\vec{u} = (b, -a)}$

droite passant par : $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$

Vous pouvez faire les exercices 1, 2, 3, feuille TD n° 5.