Géométrie affine

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ peuvent être vus comme des espaces affines ou comme espaces vectoriels.

Déf. Soit $\vec{E}$ un ensemble. $\vec{E}$ est un espace vectoriel s'il est muni de deux lois :

Addition $\quad \vec{E} \times \vec{E} \longrightarrow \vec{E}$ "somme"

$\qquad (u, v) \longmapsto u + v$

Multiplication par un "scalaire" $\quad \mathbb{R} \times \vec{E} \longrightarrow \vec{E}$

$$\underset{\text{scalaire}}{\lambda}, \underset{\text{vecteur}}{u} \longmapsto \underbrace{\lambda u}_{\text{vecteur.}}$$

Propriétés
0) $\vec{E} \neq \emptyset$ et même $\vec{E}$ contient le vecteur nul $\boxed{\vec{0} \in \vec{E}}$

1) $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\forall\, u, v \in \vec{E}$, $\boxed{\lambda u + \mu v \in \vec{E}}$ stabilité par combinaison linéaire.

$$\left| \begin{array}{l} \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v \\ \lambda(\mu v) = (\lambda\mu) v. \end{array} \right.$$

Si $-u = (-1)u \qquad u - u = \vec{0}$

Exemples : $\vec{E} = \mathbb{R}^2$, $\quad u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

$\lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2).$

$\vec{E} = \mathbb{R}^3$, $(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

etc.

$\vec{E} = \mathbb{R}$, ou $\vec{E} = \{0\} \subset \mathbb{R}$.

Exemple Système linéaire homogène

$$(S_0) \left\{ \begin{array}{l} a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z = 0 \\ a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z = 0 \\ a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z = 0 \end{array} \right.$$

Propriété : • si (x, y, z) et (x', y', z') sont solutions de (S_0), et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors $\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z')$ est solution de (S_0)

• $(0, 0, 0)$ est solution.

L'ensemble des solutions de (S_0) est un espace vectoriel

$$\mathcal{E}_0 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{solution de } (S_0) \} \subset \mathbb{R}^3$$

"sous-espace vectoriel" de $\mathbb{R}^3$

Toujours vrai, pour tout système linéaire et homogène.

Pour un système linéaire général (S), l'ensemble des solutions sera un espace affine.

Retour aux droites affines de $\mathbb{R}^2$

Définition première d'une droite affine

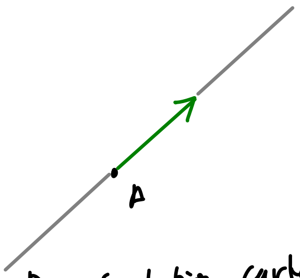
Soit $A = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ (point), $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u} \neq (0,0)$ vecteur

Droite affine passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est $D = \{ M \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}, \boxed{\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}} \}$

Si $M = (x,y)$, $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} \iff (x,y) - (a,b) = \lambda (u_1, u_2)$

$\iff (x-a, y-b) = (\lambda u_1, \lambda u_2)$

$\iff \boxed{\begin{array}{l} x = a + \lambda u_1 \\ y = b + \lambda u_2 \end{array}}$ Représentation paramétrique d'une droite affine



Représentation cartésienne : pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a,b) \neq (0,0)$

$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \boxed{a x + b y + c = 0} \}$ est une droite

Remarque : si on avait $(a,b) = (0,0)$ (interdit), on aurait $0 + c = 0$ $\left\langle \begin{array}{l} c \neq 0 \quad \emptyset \\ c = 0 \quad \mathbb{R}^2 \end{array} \right.$

Dernière : équivalence entre les deux définitions

$\boxed{\exists (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \exists (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, D = \{ (x_0 + \lambda u_1, y_0 + \lambda u_2) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}}$

$\Updownarrow$

$\boxed{\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, (a,b) \neq (0,0), D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0 \}}$

Lemme

Petit point : on utilise : $\forall a, b, x, y \in \mathbb{R}$ tels que

$\begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = 0 \iff \boxed{ay = bx} \iff \exists (\lambda, \mu) \neq (0,0), \boxed{\lambda(x,y) + \mu(a,b) = 0}$

Preuve de ce petit lemme : distinguer 2 grands cas.

1) $(x,y) = (0,0)$ ou $(a,b) = (0,0)$ (ou les deux en même temps)

$[0 = 0] \iff$ vérifier.

2) $(x,y) \neq (0,0)$ et $(a,b) \neq (0,0)$

Par exemple $x \neq 0 \implies a \neq 0$ $\left\langle \begin{array}{ll} y = 0 & \text{ça marche} \\ y \neq 0 & \text{ça marche} \end{array} \right.$

Dans $\mathbb{R}^3$

Déf Droite affine dans $\mathbb{R}^3$: sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}^3$ tel que :

$\exists A = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, $\exists \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} \neq (0,0,0)$

tel que $\forall M \in \mathbb{R}^3$, $M \in D \iff \boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}}$

D : droite passant par A, de vecteur directeur $\vec{u}$.

Représentation paramétrique

$$\vec{AM} = \lambda \vec{u} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}}_{\text{écriture en colonne.}}$$

$$\iff \begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 \end{cases}$$ Représentation paramétrique.

Proposition
Pour toute droite affine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, $\exists (a,b,c), (a',b',c') \in \mathbb{R}^3$, $\exists d, d' \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y,z) \in \mathcal{D} \iff \boxed{\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}}$

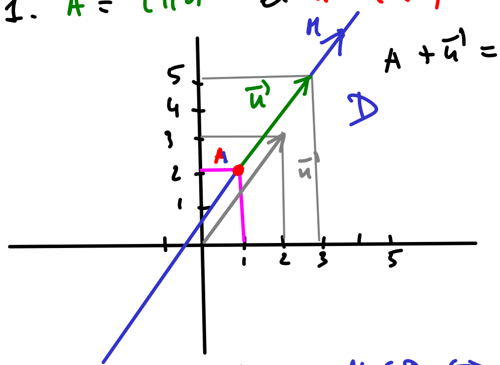
Plus tard : plan affine.

Exercices Feuille 5 (géométrie affine)

Ex 1 Dans $\mathbb{R}^2$ affine. Trouver les équations paramétriques (puis cartésiennes) des droites passant par A, de vecteur directeur $\vec{u}$

1. $A = (1,2)$ et $\vec{u} = (2,3)$

$A + \vec{u} = (1,2) + (2,3) = (3,5)$



Solution : paramétrique
$M \in \mathbb{R}^2$
$M = (x,y)$

$M \in \mathcal{D} \iff \boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{AM} = \lambda \vec{u}}$
$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ (x,y) - (1,2) = \lambda(2,3)$
$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ (x-1, y-2) = (2\lambda, 3\lambda)$
$\iff \begin{cases} x-1 = 2\lambda \\ y-2 = 3\lambda \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \end{cases}}$

(x,y) sont exprimés en fonction du paramètre λ.

Représentation cartésienne : trouver une relation entre x et y, en éliminant λ.

$$\begin{cases} x - 1 = 2\lambda \\ y - 2 = 3\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \lambda \\ \frac{y-2}{3} = \lambda \end{cases} \implies \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3}$$

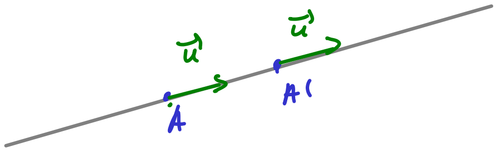
$$\iff 3(x-1) = 2(y-2) \iff 3x - 2y = -4 + 3 = -1.$$
$$\iff \boxed{3x - 2y = -1}$$ représentation cartésienne de $\mathcal{D}_1$

Remarque : $3x - 2y = -1 \iff \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{-1}{6}$
Il y a une infinité de façons d'écrire le résultat. On choisit en général la plus simple.

Même remarque pour la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \boxed{1+2\lambda} \\ y = \boxed{2+3\lambda} \end{cases} \qquad \mu = \lambda - 1 \Leftrightarrow \lambda = \mu + 1 \qquad \begin{cases} x = 1 + 2(\mu+1) = \boxed{3 + 2\mu} \\ y = 2 + 3(\mu+1) = \boxed{5 + 3\mu} \end{cases}$$

les deux sont correctes.



2. $A = (-1, 0)$ et $\vec{u} = (1, 4)$ $\to$ D_2

Paramétrique : Soit $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$M \in D_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{AM} = \lambda \vec{u}$

$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \boxed{\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 4\lambda \end{cases}}$ paramétrique

Cartésienne $\begin{cases} x + 1 = \lambda \\ \frac{y}{4} = \lambda \end{cases} \Rightarrow x + 1 = \frac{y}{4} \iff \boxed{4x - y = -4}$

3. A vous de jouer. $A = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $\vec{u} = (2, 5)$

Paramétrique $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ éliminer λ ...

Autre méthode pour l'équation cartésienne :

Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$, l'équation cartésienne s'écrire :

$u_2 x - u_1 y =$ quelque chose $= c$

Pour déterminer c, on écrit que M est sur la droite.

Exemple : question précédente $A = (-1, 0)$, $\vec{u} = (1, 4) = (u_1, u_2)$

$\to$ $4x - 1 \cdot y = c$ (à déterminer)

$\to$ Déterminer c : $A = (-1, 0)$ est sur la droite, donc solution de l'équation cartésienne.

$c = 4(-1) - (0) = -4$

$\to$ $\boxed{4x - y = -4}$

Toujours penser à vérifier. Exemple pour D_1 : $A = (1, 2)$, $\vec{u} = (2, 3)$

On a trouvé : $3x - 2y = -1$

- $A \in D \Rightarrow 3(1) - 2(2) = 3 - 4 = -1$ ça marche.
- vérification pour $\vec{u}$.

Si une droite affine D a pour équation $\boxed{ax + by = c}$, la droite vectorielle associée à D, $\vec{D}$ a pour équation $\boxed{ax + by = 0}$

$\boxed{\vec{u} \text{ est un vecteur directeur de } \mathcal{D}}$

$$\Updownarrow$$

$\boxed{\vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{u} \in \vec{\mathcal{D}}}$

Conséquence : $\vec{u}$ est solution de $ax + by = 0$

Ici : $\mathcal{D} : \boxed{3x - 2y = -1}$, $\vec{u} = (2,3)$

$\Rightarrow \vec{\mathcal{D}} : \boxed{3x - 2y = 0}$ et $3(2) - 2(3) = 0$ OK

Vérification complète pour $\mathcal{D}_1$: $A = (1,2)$, $\vec{u} = (2,3)$

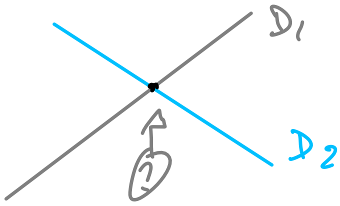
$(1,2)$ est solution de $3x - 2y = -1$

$(2,3)$ $3x - 2y = 0$

3. : à vous de jouer :

Question supplémentaire : les coordonnées des points d'intersection de ces droites.

1. $A = (1,2)$, $\vec{u} = (2,3) \longrightarrow \mathcal{D}_1 : 3x - 2y = -1$
2. $A = (-1,0)$, $\vec{u} = (1,4) \longrightarrow \mathcal{D}_2 : 4x - y = -4$



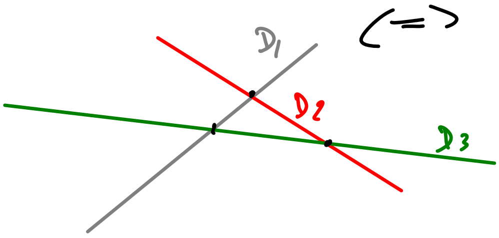
M est point d'intersection $\iff \{M\} = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$

si les droites sont parallèles $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ n'est pas un singleton.

$(x,y) = M \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \iff (M \in \mathcal{D}_1) \wedge (M \in \mathcal{D}_2)$

$\iff 3x - 2y = -1 \wedge 4x - y = -4$

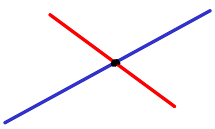
$\iff \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 4x - y = -4 \end{cases}$ système linéaire

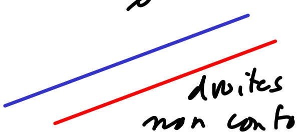


Remarque : lien entre géométrie des droites dans le plan et systèmes 2x2

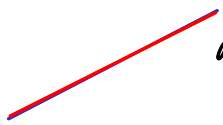
$\begin{cases} ax + by = e & \mathcal{D}_1 \\ cx + dy = f & \mathcal{D}_2 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right) \xrightarrow{\text{échelonnage}} \left(\begin{array}{cc|c} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{array}\right)$

existence & unicité $\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & \times & \times \\ 0 & \boxed{1} & \times \end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & \times & \times \\ 0 & 0 & \boxed{\times} \neq 0 \end{array}\right)$ $\emptyset$ $\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$





droites parallèles non confondues



droites confondues

Sur Exercice 2 $\mathbb{R}^2$ affine Equation cartésienne $\xrightarrow{?}$ représentation paramétrique.

1. $2x + 3y = 2$ Comment faire ?

a) Je trouve $A \in D$: une solution particulière

par exemple, j'impose $y = 0 \implies 2x = 2 \iff x = 1$

(en plus)

Donc $A = (1,0) \in D$

b) Je cherche $\vec{u} \in \vec{D}$: vecteur directeur, $\vec{u} \neq (0,0)$.

$\vec{D}$: $2x + 3y = 0$ je choisis $x = 3 \implies 6x + 3y = 0$

Donc $\vec{u} = (3,-2) \in \vec{D}$ $y = -2$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 3\lambda \\ y = 0 - 2\lambda \end{array}\right.}$$

Représentation paramétrique.

$(A, \vec{u})$: repère de la droite.

origine base.

$A \mapsto B = A + \vec{u}$
$= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$