A propos du devoir :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 6z = -2 \\ 6x + 3y - 2z = 17 \\ -x + 6y + 3z = -1 \end{cases}$$

Bonne réponse :

$$\left(\frac{98}{47}, \frac{35}{47}, \frac{-53}{47} \right)$$

(si on remplaçait -1 par 1 $\rightarrow$ $(2, 1, -1)$)

Géométrie affine (dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$)

Feuille de TD n° 5

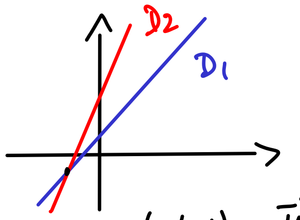
Ex 1 Trouver l'équation paramétrique, puis cartésienne d'une droite à partir d'un point A (sur la droite) et un vecteur directeur $\vec{u}$.

1. $A = (1, 2)$ $\vec{u} = (2, 3)$

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \end{cases}$$ paramétrique

$$\boxed{3x - 2y = -1}$$ cartésienne $\qquad D_1$

Tracer la droite ?



$D_1 = \{ (x, y) \mid 3x - 2y = -1 \}$
$= \{ (x, y) \mid y = \frac{3x+1}{2} \}$

graphe de $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{3x+1}{2}$

2. $A = (-1, 0)$, $\vec{u} = (1, 4)$

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 4\lambda \end{cases}$$ para.

$$\boxed{4x - y = -4}$$ $\qquad D_2$

$(x, y) \in D_1 \cap D_2 \iff \begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 4x - y = -4 \end{cases} \cdots \iff \boxed{(x, y) = \left(-\frac{7}{5}, -\frac{8}{5} \right)}$

3. $A = \left(\frac{1}{2}, 3 \right)$, $\vec{u} = (2, 5)$: D_3

D_3 : $\boxed{10x - 4y = -7}$ (cartésienne)

Méthode paramétrique : $M = (x, y) \in D_3 \iff [\exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}]$

$\iff \left[\exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right]$

(Dans $\mathbb{R}^2$: $\overrightarrow{AM} = M - A$) $\iff \left[\exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \end{cases} \right]$ (paramétrique)

$\iff \left[\exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \left(\frac{x - 1/2}{2} \right) = \lambda = \left(\frac{y-3}{5} \right) \right]$

$\iff \frac{x - 1/2}{2} = \frac{y-3}{5} \iff 5x - \frac{5}{2} = 2y - 6$

$\iff \boxed{10x - 4y = -7}$

$D_1 \cap D_3$: $\begin{cases} 3x - 2y = -1 \\ 5x - 2y = -7/2 \end{cases}$ $\boxed{\left(-\frac{5}{4}, -\frac{11}{8}\right)}$

$D_2 \cap D_3$: $\begin{cases} 4x - y = -4 \\ 10x - 4y = -7 \end{cases}$ $\boxed{\left(-\frac{3}{2}, -2\right)}$

Ex 2 Dans $\mathbb{R}^2$ affine   Equation cartésienne d'une droite $\Rightarrow$ paramétrique ?

1. D_1 : $2x + 3y = 2$ $\longrightarrow$ Trouver . un point $A \in D_1$
   . un vecteur directeur $\vec{u}$

A : on a le choix, on impose une valeur pour x ou pour y
par exemple $y = 0$ $\longrightarrow$ $2x = 2 \iff x = 1$
$A = (1, 0)$

$\vec{u}$: on détermine l'équation de la droite vectorielle associée
= équation linéaire homogène associée

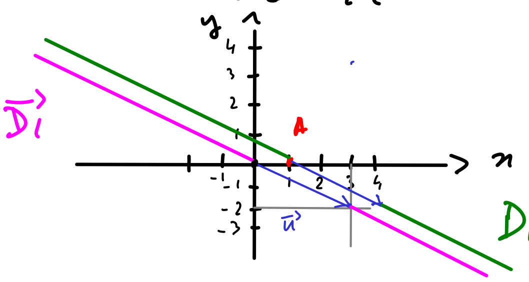
$\vec{D}_1$: $2x + 3y = 0$ $\vec{u} \in \vec{D}_1$ $(\vec{u} \neq (0,0))$

si on choisit $x = 3 \Rightarrow y = -2$ $\vec{u} = (3, -2)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 1 + 3\lambda \\ y &= -2\lambda \end{aligned}}$$

Soit μ : $\lambda = 2\mu + 1$ $\begin{cases} x = 1 + 3(2\mu + 1) = 4 + 6\mu \\ y = -2(2\mu + 1) = -2 - 4\mu \end{cases}$ également valable

Pourtant $D_1 = \{(1 + 3\lambda, -2\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(4 + 6\mu, -2 - 4\mu) \mid \mu \in \mathbb{R}\}$
$A = (4, -2)$ $\vec{v} = (6, -4)$



$\vec{D}_1$: droite vectorielle associée à D_1
= unique droite parallèle à D_1 qui passe par $(0, 0)$.

2. D_2 : $-x - 3y = 0$ Remarque : homogène $\Rightarrow$ $(0,0) \in D_2$ et $\vec{D}_2 = D_2$.
On choisit $A = (0, 0)$, $\vec{u} = (3, -1)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 3\lambda \\ y &= -\lambda \end{aligned}}$$

3. D_3 : $y = 0$ encore homogène ! $\vec{D}_3 = D_3$
On peut prendre $A = (0, 0)$ et $\vec{u} = (1, 0)$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \lambda \\ y &= 0 \end{aligned}}$$

4. D_4 : $x = 0$ à vous de jouer.
5. D_5 : $4x - 5y = 0$

Exercice Dans $\mathbb{R}^2$ affine, représentation d'une droite
On connaît deux points A et B $\rightarrow$ équation paramétrique
(A ≠ B) puis cartésienne

$A \neq B \rightarrow$ un vecteur directeur $\vec{AB} =$ " B − A " $= \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \vec{u}$

$A = (1, 2)$, $\vec{u} = (2, -1)$ $\rightarrow$ $\boxed{\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}}$ paramétrique.

$\frac{x-1}{2} = \lambda = 2 - y \iff \boxed{x + 2y = 4 + 1 = 5}$

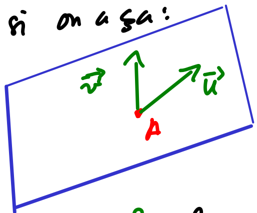
2. 3. : à vous de jouer : $\vec{u} = \vec{AB}$, ...

Dans $\mathbb{R}^3$ vu comme espace affine.

Un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ peut avoir une des 4 dimensions suivantes :

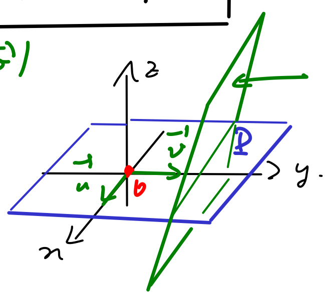
dimension 0 point. 1 droite 2 plan. ou 3 $\mathbb{R}^3$

Définition d'un plan affine de $\mathbb{R}^3$. Soit $P \subset \mathbb{R}^3$. P est un plan affine de $\mathbb{R}^3$ si on a ça :



$\exists A \in \mathbb{R}^3$, $\exists \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ linéairement indépendants, tels que
$\forall M = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $M \in P \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$$\boxed{\vec{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}}$$

Définition paramétrique du plan passant par A et de base $(\vec{u}, \vec{v})$



Exemples $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

remplacer $\vec{u}' = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}' = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$

$\boxed{(A, \vec{u}, \vec{v}) : \text{repère affine du plan.}}$: deux types d'information.

- caractérise le plan
- permet un point $M = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ dans le plan :

si $A = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\vec{u} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$

$\boxed{\vec{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}}$ λ, μ : coordonnées de M dans le plan P.

Que signifie "linéairement indépendants" pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

- généralise la condition $\vec{u} \neq 0$ exigée pour le vecteur directeur d'une droite.
- plus fort : $\begin{cases} \vec{u} \neq \vec{0} \\ \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$ et il ne faut pas qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

En un mot $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

En effet imaginons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires, par exemple $\vec{u} = k\vec{v}$ $\quad k \in \mathbb{R}$

$M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ "$\in \mathcal{P}$" $\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\vec{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$
$= \lambda k \vec{v} + \mu \vec{v}$
$= \underbrace{(k\lambda + \mu)}_{\lambda'} \vec{v}$

$\iff$ M est sur la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{v}$.

Ce n'est pas ce que l'on veut !

Proposition : $\vec{u}, \vec{v}$ dans $\mathbb{R}^3$ sont linéairement indépendants ssi

$$\left[\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \underbrace{\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}}_{\text{combinaison linéaire de } \vec{u}, \vec{v}} = \vec{0} \implies \lambda = \mu = 0 \right]$$

$\iff$ Contraposée $[\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda, \mu) \neq (0,0) \implies \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \neq \vec{0}]$

Autre caractérisation, par une équation cartésienne. $\boxed{ax + by + cz = d}$
$(a, b, c) \neq (0,0,0)$

Proposition Pour tout plan affine $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$,
$\exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$
tels que $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \boxed{ax + by + cz = d}\}$.

Représentation cartésienne

Sens ? (a) $\forall A \in \mathbb{R}^3, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$
$\vec{u}, \vec{v}$ linéairement indépendants.] Données pour une représentation paramétrique.

$\exists (a, b, c, d)$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tels que

$$\boxed{\{M \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \vec{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}\}}$$
$$= \{M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\}.$$

(b) Réciproque : $\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

Alors $\exists A \in \mathbb{R}^3, \exists \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ linéairement indépendants
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\}$ = plan passant par A engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

En pratique, comment passer de l'un à l'autre ?

Exercice 4 Dans $\mathbb{R}^3$, extraire un repère des plans donnés par des équations cartésiennes. En déduire une représentation paramétrique.

1. $\boxed{\mathcal{P}_1 : x + y + z = 2}$

Repère ? $A \in \mathcal{P}_1$, $\vec{u}, \vec{v}$ dans le plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}_1}$ associé à $\mathcal{P}_1$

$\vec{\mathcal{P}_1}$: plan parallèle à $\mathcal{P}_1$, passant par $(0,0,0)$.
= plan défini par l'équation linéaire homogène associée : $\boxed{x + y + z = 0}$

$A = (1, 1, 0)$ (par exemple)

$(\vec{u}, \vec{v})$ "Choix" ? solution de $x + y + z = 0$

- avec $z = 0$ et $y = -1$: $\vec{u} = (1, -1, 0)$
- avec $y = 0$ et $z = -1$: $\vec{v} = (1, 0, -1)$

Travail en plus

$\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$

supposons : $\exists k \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = k\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}$ impossible !

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Donc $\vec{u}, \vec{v}$ sont linéairement indépendants.

Conclusion : $(A, \vec{u}, \vec{v})$: repère de $\mathcal{P}_1 : x + y + z = 2$.

Représentation paramétrique

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \lambda + \mu \\ 1 - \lambda \\ -\mu \end{pmatrix}}$$

Cours Droites affines de $\mathbb{R}^3$

Déf Soit $D \subset \mathbb{R}^3$. D est une droite affine de $\mathbb{R}^3$ si $\exists A \in \mathbb{R}^3$, $\exists \vec{u} \in \mathbb{R}^3$, tel que $\vec{u} \neq \vec{0}$, tel que

$$D = \{ M \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{AM} = \lambda \vec{u} \}$$

(Définition paramétrique de la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$)

Proposition Soit D une droite affine dans $\mathbb{R}^3$,

$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$

alors $\exists$ a_1, b_1, c_1, d_1, $a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}$,

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} a_1 x + b_1 x + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases} \right\},$$

de plus $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants.

Réciproquement, si $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants,

alors $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases} \right\}$

est une droite affine de $\mathbb{R}^3$.

Vous pouvez essayer de commencer l'exercice 5.

Terminez exercices 2 et 3

Faites exercice 4.

éventuellement réfléchissez sur exercice 5.