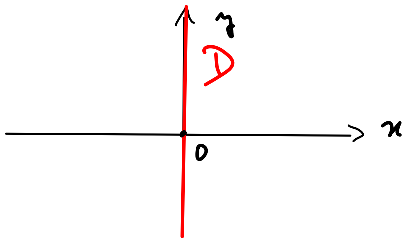
Quelques corrections d'exercices (espace affines) Feuille 5

Ex 2 Dans $\mathbb{R}^2$: équation cartésienne d'une droite D $\xrightarrow{?}$ un "repère" $\begin{cases} A \in D \\ \vec{u} \in \vec{D}, \vec{u} \neq \vec{0} \end{cases}$

$\xrightarrow{?}$ représentation paramétrique.

4. $\underline{x = 0}$ $\quad D = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \to \begin{cases} A = (0,0) \\ \vec{u} = (0,1) \end{cases}$



$\to \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$

5. $D: \underline{4x - 5y = 0}$ linéaire homogène

$A = (0,0)$ (toujours vrai si l'équation cartésienne est linéaire homogène)

$B \in D$, $B \neq A$

$B = (5,4)$, $\vec{u} = \vec{AB} = (5,4)$

$\begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 4\lambda \end{cases}$

Plans affines dans $\mathbb{R}^3$

On se donne $A \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$: $\vec{u}, \vec{v}$ sont linéairement indépendants

(traduction : non colinéaires)
($\nexists \lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou $\vec{v} = \lambda\vec{u}$)

Déf Plan affine de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$

$P = \{M \mid \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \ \vec{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}\}$

$(\vec{u}, \vec{v})$: base de $\vec{P}$: espace vectoriel associé à P.

$\vec{P} = \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ (corollaire : $P = \{M \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{AM} \in \vec{P}\}$)

$\to$ représentation paramétrique des points $M \in P$

$M = (x, y, z)$
$A = (a, b, c)$
$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$

$$\boxed{\begin{cases} x = a + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = b + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = c + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$\to$ représentation cartésienne de P : $\exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \boxed{ax + by + cz = d}\}.$$

Théorème Tout plan affine admet une représentation paramétrique et ______ cartésienne.

Preuve (i) $\mathcal{P}$ plan de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

"Def" $\left[M = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \iff \boxed{\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ x_3 = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}} \right.$ rep. paramétrique

$\vec{AM}$: combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$

(ii) [Rep. paramétrique] $\Rightarrow$ [Rep. cartésienne].

Lemme Soit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, alors $\boxed{\vec{x} \text{ et } \vec{y} \text{ sont colinéaires}}$

$\Updownarrow$

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 = \boxed{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0}$$

Preuve On connaît déjà ce résultat dans $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ est colinéaire à } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ ssi } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0}$$

Pour $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ colinéaires $\iff$ $[\exists \lambda, \vec{x} = \lambda \vec{y}]$

[ou $\exists \lambda, \vec{y} = \lambda \vec{x}$]

Pour fixer les idées : $\exists \lambda, \boxed{\vec{x} = \lambda \vec{y}} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \\ \lambda y_3 \end{pmatrix}$

$$\iff \begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$\square$ (fin preuve du lemme)

Retour à $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\boxed{\begin{matrix} x_1 = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ x_3 = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{matrix}} \iff \begin{cases} x_1 - a_1 = \lambda u_1 + \mu v_1 \\ x_2 - a_2 = \lambda u_2 + \mu v_2 \\ x_3 - a_3 = \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$

Voir ce système comme un système avec 2 inconnues λ et μ.

$$\left(\begin{array}{cc|c} u_1 & v_1 & x_1 - a_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 - a_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 - a_3 \end{array} \right) \longleftarrow \text{notation matricielle}$$

Supposons $u_1 \neq 0$.

$(\vec{u}, \vec{v})$ linéairement indépendants
$\Rightarrow \vec{u} \neq \vec{0}$
$\iff (u_1, u_2, u_3) \neq (0,0,0)$

$\Updownarrow$

$$\boxed{\begin{array}{c} L_1 \\ u_1 L_2 - u_2 L_1 \\ u_1 L_3 - u_3 L_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} u_1 & v_1 & x_1 - a_1 \\ 0 & \boxed{u_1 v_2 - u_2 v_1} & \boxed{u_1 (x_2 - a_2) - u_2 (x_1 - a_1)} \\ 0 & \boxed{u_1 v_3 - u_3 v_1} & \boxed{u_1 (x_3 - a_3) - u_3 (x_1 - a_1)} \end{array} \right)}$$

donne λ en fonction de μ.

donnent μ.

Système compatible $\iff$ les deux dernières lignes sont proportionnelles

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} u_1 v_2 - u_2 v_1 \\ u_1 v_3 - u_3 v_1 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} u_1(x_2-a_2) - u_2(x_1-a_1) \\ u_1(x_3-a_3) - u_3(x_1-a_1) \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} u_1 v_2 - u_2 v_1 & u_1(x_2-a_2) - u_2(x_1-a_1) \\ u_1 v_3 - u_3 v_1 & u_1(x_3-a_3) - u_3(x_1-a_1) \end{vmatrix} = 0$$

$$(\underline{}\,\underline{} - \underline{}\,\underline{} = 0)$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{A x_1 + B x_2 + C x_3 = D}$$

$A = (u_1 v_2 - u_2 v_1)(-u_3) - (u_1 v_3 - u_3 v_1)(-u_2)$ $\square$.

(iii) $\boxed{\text{Cartésienne}} \Rightarrow \boxed{\text{paramétrique.}}$

$\mathcal{P} : ax + by + cz = d \longrightarrow A \in \mathcal{P}$, $\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}$ $(\vec{u}, \vec{v})$ linéairement indépendants

$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

- Si $a \neq 0$, on impose $y = z = 0 \Rightarrow A = (\frac{d}{a}, 0, 0) \in \mathcal{P}$
- $\vec{\mathcal{P}} : ax + by + cz = 0$ (espace vec. associé)

$\vec{u}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{P}}$

Si $a \neq 0$, $y = -a$, $z = 0 \rightarrow \vec{u} = (b, -a, 0)$ $\Big] \in \vec{\mathcal{P}}$

$y = 0$, $z = -a \longrightarrow \vec{v} = (c, 0, -a)$

$\vec{u} = \begin{pmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \end{vmatrix} = a^2 \neq 0 \Rightarrow$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

$\longrightarrow \boxed{\text{repère } (A, \vec{u}, \vec{v})} \rightarrow$ rep. paramétrique (cf. (i))

Déf. droite affine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$

sous-ensemble $\mathcal{D}$ tel que : $\exists\, A \in \mathbb{R}^3$, $\exists\, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} \neq \vec{0}$

$M \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u})$

$(A, \vec{u})$: repère de la droite $\mathcal{D}$.

Représentation paramétrique

$$\boxed{\mathcal{D} = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; \exists \lambda \in \mathbb{R} \;\; \begin{cases} x = a + \lambda u_1 \\ y = b + \lambda u_2 \\ z = c + \lambda u_3 \end{cases} \right\}}$$

Rep. cartésienne $\exists\, a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{R}$

(a, b, c) et (a', b', c') sont linéairement indépendants

$$\boxed{\mathcal{D} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases} \right\}}$$

Un dernier résultat

Prop. Soit P et P' deux plans affines de $\mathbb{R}^3$. Alors
$$P \,/\!/\, P' \iff \vec{P} = \vec{P'}$$

$$\begin{cases} P : \boxed{ax+by+cz=d} & \Rightarrow \quad \vec{P} : ax+by+cz=0 \\ P' : a'x+b'y+c'z=d' & \Rightarrow \quad \vec{P'} : a'x+b'y+c'z=0 \end{cases}$$

$\vec{P} = \vec{P'} \iff (a,b,c)$ est proportionnel à (a',b',c').

Prop. Soit D, D' deux droites affines de $\mathbb{R}^3$, de vecteurs directeurs respectivement, $\vec{u}$ et $\vec{u}'$. Alors
$$\boxed{D \,/\!/\, D'} \iff \vec{D} = \vec{D'} \iff \boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{u}' \text{ sont colinéaires}}$$

Exercices

Ex3 Dans $\mathbb{R}^2$ affine : trouver une équation paramétrique, puis cartésienne d'une droite passant par A et B

2. $A = (-2, 3)$, $B = (1, 1)$ $\rightarrow$ $\vec{u} = \vec{AB} = (3, -2)$

repère : $(A, \vec{u})$: $\boxed{\begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}}$ $\qquad \vec{AB} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

$$\frac{x+2}{3} = \lambda = \frac{3-y}{2} \iff \boxed{2x + 3y = 5}$$

3. $A = (1, -2)$, $B(1, 2)$ $\qquad \vec{u} = \frac{\vec{AB}}{4} = (0, 1)$

$\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \end{cases}}$ $\qquad \boxed{x = 1}$

Ex4. Dans $\mathbb{R}^3$ affine. Extraire un repère affine des plans, rep. paramétriques

1. $P : x + y + z = 2$

Un point $A = (1, 1, 0)$, $\vec{u}, \vec{v}$?

deux stratégies

$B = (2, 1, -1) \in P$

$C = (1, 0, 1) \in P$

$\vec{u} = \vec{AB} = (1, 0, -1) \in \vec{P}$

$\vec{v} = \vec{AC} = (0, -1, 1) \in \vec{P}$

$(\vec{u}, \vec{v})$ linéairement indépendants

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{P} : x + y + z = 0 \\ &\vec{u} = (1, 0, -1) \in \vec{P} \\ &\vec{v} = (0, -1, 1) \in \vec{P} \end{aligned}}$$

Supposons $\vec{u} = \lambda \vec{v} \iff \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-\lambda\\\lambda\end{pmatrix}$ impossible

ou $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ ... impossible.

(Hors programme)

$\vec{u} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1 \neq 0$

Conclusion $A = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\left(\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$: repère de $\mathcal{P}$.

Paramétrique

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \quad\quad - \mu \\ z = \quad -\lambda + \mu \end{cases}}$$

Rappel : $A \in \mathcal{P}$, $(\vec{u}, \vec{v})$: base de $\vec{\mathcal{P}}$.

Méthode pour trouver 2 vecteurs linéairement indépendants solutions de $ax + by + cz = 0$

Marche si $c \neq 0$
$\left| \begin{array}{l} \vec{u} = (1, 0, ?) \quad \text{ou} \quad (u_1, 0, ?) \quad u_1 \neq 0 \\ \vec{v} = (0, 1, ?) \quad \text{ou} \quad (0, v_2, ?) \quad v_2 \neq 0 \end{array} \right.$

Après on vérifie.

2. $\mathcal{P}$: $\underline{2x - y + z = 1}$ $\to$ repère $\to$ paramétrique.

$A = (1, 1, 0)$

$\vec{\mathcal{P}}$: $\underline{2x - y + z = 0}$

$\vec{u} = (1, 0, -2)$
$\vec{v} = (0, 1, 1)$

$(\vec{u}, \vec{v})$ linéairement indépendants.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\lambda\\0\\-2\lambda\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\mu\\\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\lambda\\1+\mu\\-2\lambda+\mu\end{pmatrix}$$

vérifier $\underline{2x - y + z = 1}$

3., 4., 5., 6. : à vous de jouer.

Ex 5. Dans $\mathbb{R}^3$ affine : Droite $\mathcal{D}$ donnée par une représentation cartésienne ? $\longrightarrow$ paramétrique.

1. $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$: $\mathcal{P} : x + y + z = 2$, $\mathcal{P}' : 2x - y + z = 1$

$(x, y, z) \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

deux pivots $\iff$ $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ est une droite

$\left| \begin{array}{l} z = \lambda \\ 3y + z = 3 \iff y = 1 - \frac{z}{3} \\ x + y + z = 2 \iff x = 2 - 1 + \frac{z}{3} - z \end{array} \right.$

Parenthèse : Soit deux plans affines $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ alors
- si $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$, alors $\left| \begin{array}{l} \text{soit } \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset \\ \text{soit } \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{P} = \mathcal{P}' \end{array} \right.$
- si $\mathcal{P} \not\parallel \mathcal{P}'$, alors $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' =$ droite

$$\begin{cases} x = 1 - \dfrac{2\lambda}{3} \\ y = 1 - \dfrac{\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{cases}$$

$A = (1, 1, 0)$, $\vec{u} = (-2, -1, 3)$

Vérification $\vec{u} \in \vec{P} \cap \vec{P}'$ (système linéaire homogène associé)
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y - z = 0 \end{cases}$$

<u>Fin de cet exercice :</u> à vous de jouer . . .