Devoir à rendre mardi prochain sur moodle : je vous l'envoie.

Quelques solutions d'exercices (Feuille 5)

Ex 3 Dans $\mathbb{R}^2$ affine. Trouver une équation paramétrique, puis cartésienne d'une droite passant par A et B.

2. $A = (-2, 3)$, $B(1, 1)$ $\qquad \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$ $\qquad \boxed{2x + 3y = 5}$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

3. $A = (1, -2)$, $B = (1, 2)$ $\qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \end{cases}$ $\qquad \boxed{x = 1}$

Ex. 4 Dans $\mathbb{R}^3$ affine : extraire un repère des plans, définis par une équation cartésienne, puis, représentation paramétrique

3. $x - 2y + 3 = -1$ $\qquad \begin{cases} \text{Origine : } O = (2, 1, 0) \\ \text{Deux vecteurs de base } \vec{u} = (2, 1, 0), \ \vec{v} = (3, 0, -1) \end{cases}$

$(\vec{P} : x - 2y + 3 = 0)$

$$\begin{cases} x = \mu \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 - \lambda - 2\mu \end{cases}$$

4. $3x + y + z = 0$ $\qquad O = (0, 0, 0)$, $\vec{u} = (0, 1, -1)$, $\vec{v} = (1, 0, -3)$ $\qquad \begin{cases} x = \mu \\ y = \lambda \\ z = -\lambda - 3\mu \end{cases}$

5. $O = (0, 0, 0)$, $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

6. $O = (0, 0, 0)$ $\quad \vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 0)$

Ex 5. Dans $\mathbb{R}^3$ affine : on se donne deux plans P, P' (équation cartésienne). Intersection $P \cap P'$?

$P \cap P'$ en général :
- si $P \not\parallel P'$ une droite (cas le plus fréquent)
- si $P \parallel P'$, soit $P = P'$, soit $P \neq P'$, $\emptyset$

1. $P : x + y + z = 2$; $P' : 2x - y + z = 1$

$(x, y, z) \in P \cap P' \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$

système de 2 équations.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \end{array}\right) \cdots \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Deux inconnues principales (x et y), une inconnue secondaire. $(z = \lambda)$

$\longrightarrow$ {solutions} = ensemble à un paramètre λ

$\longrightarrow$ $P \cap P' =$ droite

$z = \lambda \qquad \begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3y + \lambda = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y - 1 = 2 - \frac{2\lambda}{3} - 1 \\ y = 1 - \frac{\lambda}{3} \end{cases}$

$(x, y, z) = \left(1 - \frac{2\lambda}{3},\ 1 - \frac{\lambda}{3},\ \lambda\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\mu = 3\lambda, \quad (x, y, z) = (1 - 2\mu,\ 1 - \mu,\ 3\mu)$

à faire vous-même

2. $\mathcal{P} : x - 2y + 3z = -1, \quad \mathcal{P}' : 3x + y + z = 0$

$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' : \begin{cases} x - 2y + 3z = -1 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$

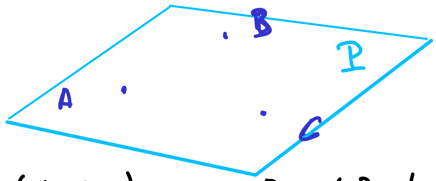
solution $\begin{cases} x = -\frac{1}{7} - \frac{5}{7}\lambda \\ y = \frac{3}{7} + \frac{8}{7}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

à faire vous-même

3. $\mathcal{P} : 2x + y = 0, \quad \mathcal{P}' : z = 0$

$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 0 \end{cases}$

Ex 6. Dans $\mathbb{R}^3$, affine. Déterminer l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant les points A, B et C dans les cas suivants.



(a) $A = (1, 2, 0), \quad B = (3, 1, -1), \quad C = (1, -1, 1)$

Deux méthodes : (1) passer par un repère de $\mathcal{P}$, ensuite une équation cartésienne.

A, B, C $\longrightarrow$ repère $\longrightarrow$ représentation paramétrique $\longrightarrow$ équation cartésienne

partie intéressante.

Origine : $A = (1, 2, 0)$

vecteurs de base $\begin{cases} \vec{u} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \vec{v} = \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

Linéairement indépendants.

(a) Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \vec{0}$

$\iff \begin{cases} 2\lambda = 0 \implies \lambda = 0 \\ -\lambda - 3\mu = 0 \\ -\lambda + \mu = 0 \end{cases} \implies \mu = 0$

$\implies (\lambda, \mu) = (0, 0)$.

(b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) - 0 \times (-1) = -6 \neq 0$

Rappel $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants : ssi

$\left(\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \right) \neq (0, 0, 0)$

Rep. param. de $\mathcal{P}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \boxed{\begin{array}{lll} 2\lambda & & = x-1 \\ -\lambda & -3\mu & = y-2 \\ -\lambda & +\mu & = z \end{array}}$ $(S)_{(x,y,z)}$

Système dans lequel les inconnues sont (λ,μ) et (x,y,z) sont des paramètres

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \in \mathcal{P} \iff \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ qui est solution de $(S)_{(x,y,z)}$

$\iff$ <u>Le système $(S)_{(x,y,z)}$ est compatible</u>

(S) : $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x-1 \\ -1 & -3 & y-2 \\ -1 & 1 & z \end{array}\right) \underset{\text{à vous jouer}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & x-1 \\ 0 & 0 & 4x+2y+6z-8 \\ 0 & 2 & x+2z-1 \end{array}\right)$

Système compatible $\iff 4x + 2y + 6z = 8$

$\iff \boxed{2x + y + 3z = 4}$

(2) <u>Directement</u> (Autre méthode) $A, B, C \longrightarrow$ déterminer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ telles que A, B, C soient solutions de : $\boxed{ax + by + cz = d}$

$A = (1,2,0)$, $B = (3,1,-1)$, $C = (1,-1,1)$

$$\begin{array}{llllll} A \in \mathcal{P}: & a & +2b & & = d \\ B \in \mathcal{P}: & 3a & +b & -c & = d \\ C \in \mathcal{P}: & a & -b & +c & = d. \end{array}$$

<u>Système</u> : d paramètre, (a,b,c) : 3 inconnues

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & d \\ 3 & 1 & -1 & d \\ 1 & -1 & 1 & d \end{array}\right) \iff \dots \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & d \\ 0 & 5 & 1 & 2d \\ 0 & 0 & 4 & 3d \end{array}\right)$$

compatible $\to$ pour chaque valeur de d, $\exists! (a,b,c)$ solution.

Je choisis $\boxed{d = 4}$ (car ça me simplifie les calculs)

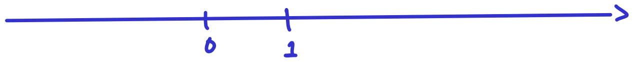
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Donc $d = 4 \Rightarrow (a,b,c) = (2,1,3)$.

$\mathcal{P}$: $\boxed{2x + y + 3z = 4}$

<u>Essayer l'exercice suivant</u> :

Nouveau chapitre : $\mathbb{R}$ et ses propriétés.



$\mathbb{R}$: droite.

Deux lois

Addition $\quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad (x, y) \longmapsto x+y$

Produit $\quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad (x, y) \longmapsto xy$

$x + (y+z) = (x+y) + z$		$x(yz) = (xy)z$	Associativité
$x+y = y+x$		$xy = yx$	Commutativité
$x + 0 = x$		$x \cdot 1 = x$	élément neutre
$x + (-x) = 0$	si $x \neq 0$	$x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = 1$	existence d'un "inverse"

$$x(y+z) = xy + xz \qquad \text{Distributivité}$$

En résumé : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

(il existe d'autres "corps commutatifs" : $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$).

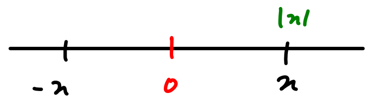
Sur $\mathbb{R}$, il y a une relation d'ordre $\boxed{\leqslant}$ (y'en a pas dans $\mathbb{C}$)

Compatibilité avec $+$ et $\times$

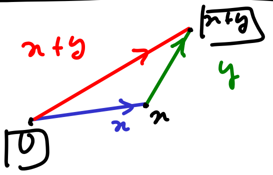
$$\boxed{\begin{array}{l} x \leqslant y \Rightarrow x + a \leqslant y + a \\ \text{Si } a \geqslant 0,\ x \leqslant y \Rightarrow ax \leqslant ay \end{array}}$$

Attention si $a \leqslant 0$, $\quad x \leqslant y \Rightarrow ax \geqslant ay$

Valeur absolue $\quad |x| = \max(x, -x)$



Inégalité triangulaire $\quad \boxed{|x+y| \leqslant |x| + |y|}$ (la même que dans $\mathbb{C}$ avec $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$)



Preuve : distinguer 2 cas

$$|x+y| \left| \begin{array}{ll} = x+y & \text{si } x+y \geqslant 0 \\ = -x-y & \text{si } x+y \leqslant 0 \end{array} \right.$$

Corollaire $\boxed{\big|\,|x| - |y|\,\big| \leqslant |x-y|}$

Preuve • $|x| = |(x-y)+y| \overset{\Delta}{\leqslant} |x-y| + |y|$

$\Rightarrow \boxed{|x| - |y| \leqslant |x-y|}$

• $|y| = |(y-x)+x| \overset{\Delta}{\leqslant} |y-x| + |x|$

$\Rightarrow \boxed{|y| - |x| \leqslant |x-y|}$

$\Rightarrow \big|\,|x| - |y|\,\big| \leqslant |x-y|$

Majorants et minorants

Définition Soit $A \subset \mathbb{R}$ ("une partie de $\mathbb{R}$")

Je suppose $A \neq \emptyset$.

a) A est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que : $\boxed{\forall x \in A, \ x \leqslant M}$

b) A est minorée si $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\boxed{\forall x \in A, \ m \leqslant x}$

c) A est bornée si A est majorée et minorée

$\exists M, m \in \mathbb{R}, \ \forall x \in A, \ \boxed{m \leqslant x \leqslant M}$

Exemple • $A =]0,1] \cup \{2\}$ Majoré $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant 3$ ou $2{,}2$

Minoré $0 \leqslant x$

• $A = \mathbb{N}$ Pas majoré ! mais minoré (par 0).

Propriété A bornée $\Leftrightarrow$ $|A| = \{ |x| \ / \ x \in A \}$ est majoré

Exemple $A = \left\{ \frac{1-n}{1+n} \ / \ n \in \mathbb{N} \right\}$ A est borné !

• $A \neq \emptyset$

• $u_n = \frac{1-n}{1+n}$, pour $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_0 = 1$

si $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$ $\quad \underbrace{\left|1 - \frac{1}{n}\right| = 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1}_{\text{majoration de la valeur absolue du numérateur.}}$

$\underbrace{\left|1 + \frac{1}{n}\right| = 1 + \frac{1}{n} \geqslant 1}_{\text{majoration de la valeur absolue du dénominateur}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\left|1+\frac{1}{n}\right|} \leqslant 1$

Donc $|u_n| = \left|1 - \frac{1}{n}\right| \left(\dfrac{1}{\left|1+\frac{1}{n}\right|} \right) \leqslant 1 \times 1 \leqslant 1$

Déf $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $M, m \in \mathbb{R}$.
M est un majorant de A si $\forall x \in A, \quad x \leq M$
m est un minorant de A si $\forall x \in A, \quad m \leq x$

Remarque Si M majore A, alors $\forall M'$, $M' > M$, M' majore A.
$\forall x \in A, \quad x \leq M < M'$

Déf. Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$
1) A admet un plus grand élément si $\exists a \in A$, qui majore A
$\exists a \in \mathbb{R}$ tel que (i) $a \in A$ (ii) $\forall x \in A, x \leq a$.

2) A admet un plus petit élément si :
$\exists a \in \mathbb{R}$ tel que : (i) $a \in A$, (ii) $\forall x \in A, \quad a \leq x$

Propriété Si A admet un plus grand élément, celui-ci est $\boxed{\text{unique}}$
(idem pour "plus petit").

Preuve Soit a_1 et a_2 deux "plus grand élément" de A
(ii) a_1 majore A et (i) $a_2 \in A \Rightarrow a_2 \leq a_1$
(i) $a_1 \in A$ (ii) a_2 majore $A \Rightarrow a_1 \leq a_2$
$\Rightarrow a_1 = a_2$

On note $\boxed{\max A}$ le plus grand élément de A, s'il existe
$\boxed{\min A}$ le plus petit élément de A, s'il existe.

Exemple $A = \left\{ u_n = \frac{1-n}{1+n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$
On sait que A est borné : il admet des majorants et des minorants

A est majoré par $\boxed{1}$ et minoré par $\boxed{-1}$ (1 est un majorant
-1 —— minorant !)

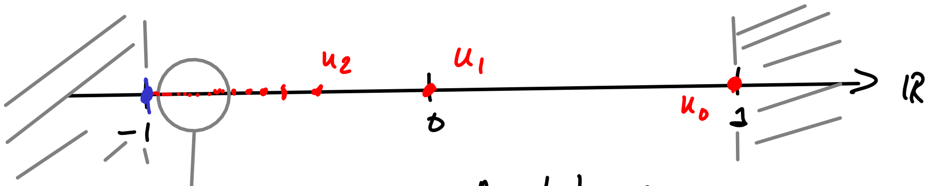
On a vu que : $|u_n| \leq 1 \iff \boxed{-1 \leq u_n \leq 1}$
$u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $\forall n \geq 2, \quad u_n < 0$

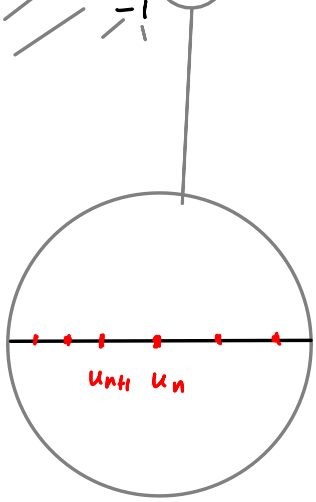
Existence d'un plus grand élément ? oui $u_0 = 1$ et 1 majore A
donc $\boxed{\max A = 1}$

Existence d'un plus petit élément ? (-1 minore A)
Aucune valeur de A minore A.
Car la suite u_n est strictement décroissante : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = -1.$

$u_2 = \frac{-2+1}{2+1} = \frac{-1}{3}$





A est <u>borné</u>

A a un <u>plus grand élément</u>

A n'a pas <u>de plus petit élément.</u>

-1 joue un rôle particulier

-1 minore A, mais n'est pas dans A.

"minorant" optimal