... fin du cours d'hier $A = \{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \}$, $u_n = \dfrac{1-n}{1+n}$, $u_0 = 1$

$A \subset [-1, 1]$ $\Leftrightarrow$ A est majoré par 1 et $1 \in A$ $\Downarrow$ 1 est le plus grand élément de A $\boxed{1 = \max A}$

A est minoré par -1

A n'admet pas de plus petit élément

car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$

Exercice: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-2}{(1+n)(1+n+1)} < 0$

Raisonnement par l'absurde: Supposons que $a \in A$ soit le plus petit élément de A. Alors

- $a \in A$ $\Longrightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N}$, $a = u_n$
- $\forall x \in A$, $a \leq x$ Impossible car $u_{n+1} < u_n = a$

Remarque $\lim_{n \to +\infty} u_n = -1$ (donc $\forall n$, $u_n \geq -1$)

Mais $-1 \notin A$ mais -1 minore A..

Conclusion : • un ensemble majoré, $\neq \emptyset$ n'admet pas toujours de plus grand.

• si le plus grand élément existe, il est unique

Définition Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

(a) A admet une borne supérieure si et seulement si il existe un plus petit majorant de A

Traduction a) A doit être majoré car on parle de majorants.

Soit $Maj(A) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \text{ majore } A \}$

b) On demande que $Maj(A)$ admette un plus petit élément $\boxed{\min A}$

Cet élément $\boxed{\min A}$, s'il existe, est le plus petit majorant de A.

(b) A admet une borne inférieure ssi il existe un plus grand minorant de A.

Notations $\boxed{\sup A}$ = borne supérieure de A = min $(Maj(A))$

$\boxed{\inf A}$ = borne inférieure de A = max $(Min(A))$

min A : plus petit élément, dans A s'il existe	max A = plus grand élément, $\max A \in A$, s'il existe
inf A : borne inférieure, dans $Min(A)$	sup A : borne supérieure, dans $Maj(A)$.

Hypothèse : A est minoré — Hypothèse : A est majoré

Cas simple : $\boxed{\text{si } A \text{ admet un plus grand élément } \max A \text{ alors } A \text{ admet une borne supérieure et } \sup A = \max A}$

Preuve Soit $a = \max A$ $\left|\begin{array}{l} (i)\ a \in A \\ (ii)\ \forall x \in A,\ x \leq a. \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ (ii) a est un majorant de A.

Il n'y a pas de majorant de A strictement plus petit que a.

Pourquoi ? Supposons : $\exists b$ qui majore A et $b < a$.) Contradiction

mais alors $a \in A \Rightarrow a \leq b$)

cela mène à

Donc a est le plus petit des majorants.

Caractérisation de la borne supérieure (version inférieure qui existe)

Proposition Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $M \in \mathbb{R}$. Alors

$M = \sup A$ ("M est la borne supérieure de A") $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \forall x \in A,\ x \leq M \quad (M \text{ majore } A) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ M - \varepsilon < x \\ \quad M \text{ est le plus petit des majorants} \end{array}}$

$[\exists x \in A,\ M - \varepsilon < x] \Leftrightarrow [M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A]$

Logique : $\neg\,[\forall x \in A,\ x \leq b] = [\exists x \in A,\ x > b]$

Exemple $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\quad u_n = \dfrac{1-n}{1+n}$.

$u_0 = 1,\quad u_1 = 0,\quad u_{n+1} < u_n,\quad \underbrace{\lim_{n \to +\infty} u_n = -1}$

$\boxed{n > 0, \quad u_n = \dfrac{1-n}{1+n} = \dfrac{\frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n} + 1} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{0-1}{0+1} = -1.}$

- 1 majore A : $\quad u_{n+1} < u_n < \dots < u_1 < u_0 \leq 1$ $\quad \boxed{1 = \max A = \sup A}$
- $\boxed{-1 \text{ minore } A}$: $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad -1 \leq \dfrac{1-n}{1+n}$ $\quad 1+n > 0$

$\Leftrightarrow \quad -(1+n) \leq 1-n$

$\Leftrightarrow \quad -1 \cancel{-n} \leq 1 \cancel{-n}$

$\Leftrightarrow \quad -1 \leq 1$

$-1 \notin A$ Presque le même calcul : $-1 = \dfrac{1-n}{1+n} \Leftrightarrow \underbrace{-1 = 1}$

Impossible $\Leftarrow$ Impossible.

-1 est le plus grand des minorants (donc -1 est la borne inférieure de A)

En effet $\forall \varepsilon > 0$, $-1+\varepsilon$ n'est pas un minorant de A

Raison : $\lim_{n\to+\infty} u_n = -1$ donc

$$\boxed{\forall \varepsilon>0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_0 \implies |u_n+1| < \varepsilon}$$

en particulier, si $n \geqslant N_0$, $\underbrace{u_n}_{\in A} < \underbrace{-1+\varepsilon}_{>-1}$

c'est à dire : $-1+\varepsilon$ ne minore pas A

Conclusion : -1 est bien le plus grand des minorants de A

C'est à dire $\boxed{-1 = \inf A}$ (borne inférieure)

mais A n'admet pas de "plus grand élément" (pas de max)

On voudrait que ce soit -1, mais $-1 \notin A$.

Théorème Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors

(a) Si $A \neq \emptyset$ et A est majoré, alors A admet une borne supérieure

(b) Si $A \neq \emptyset$ et A est minoré, alors A admet une borne inférieure

	Si $\{\text{minorants de } A\} \neq \emptyset$	Si $\{\text{majorants de } A\} \neq \emptyset$
si $A \neq \emptyset$	$\min A$: n'existe pas toujours si ça existe, c'est simple à définir	$\max A$:
	$\inf A$: existe toujours c'est plus délicat à manipuler	$\sup A$:

Proposition Si A admet une borne supérieure, celle-ci est unique.
Si A — — — inférieure, — . —

Preuve Soit $b, \tilde{b}$ deux bornes supérieures de A.

$\mathrm{Maj}(A) = \{\text{majorants de } A\}$.

$b, \tilde{b}$ = plus petit élément de $\mathrm{Maj}(A)$ (On a déjà montré l'unicité)

Remarque : l'analogue du théorème n'est pas vrai si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$.

Exemple : $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$

$A \neq \emptyset$: $0 \in A$

A est majoré : par exemple 2 majore A:

$x \in A \Rightarrow x^2 \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 4 = 2^2 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$

Mais A n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Raison intuitive : la borne supérieure ne peut être autre chose que $\sqrt{2}$.

mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\nexists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.] par l'absurde

En revanche A admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$

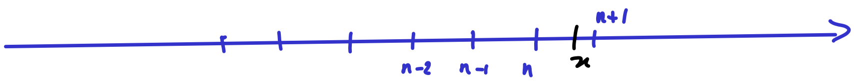
Partie entière d'un réel : on la note $E(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$:

pour $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Autrement dit : $\boxed{\lfloor x \rfloor = n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n \leq x < n+1}$

écriture utile de cette

Comment ça se construit ? $x \in \mathbb{R} \longmapsto A = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$.



$A \neq \emptyset$, A est majoré par x. $\lfloor x \rfloor = \sup A$

$\lfloor x \rfloor$: plus grand élément de A

travail que je ne fais pas

Feuille d'exercice n° 6

Exercice 1 Soit $\alpha = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$; $\beta = \frac{5-\sqrt{2}}{3}$; $\gamma = \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{41}+\sqrt{35}}$

Comparer ces nombres

Observation : $\gamma < 0$,

$\boxed{1-\sqrt{5} < 0 \Leftrightarrow 1 < \sqrt{5} \Leftrightarrow 1 < 5 \text{ parce que } 1 > 0 \text{ et } \sqrt{5} > 0}$

$\underbrace{\alpha > 0}_{\text{évident}}$,

$\boxed{\begin{array}{l} \beta > 0 \\ 5 > \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow 25 > 2 \end{array}}$

Donc $\gamma < 0 < \alpha, \beta$

- $\alpha > 0$ et $\alpha^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$
- $\beta > 0$ et $\beta^2 = \frac{25 - 10\sqrt{2} + 2}{9}$

$\beta^2 = \frac{27 - 10\sqrt{2}}{9}$

(Physicien : $\sqrt{2} \simeq 1,414..$)

Mathématicien : encadrement de $\sqrt{2}$:

Hypothèse
$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

$(1,4)^2 = (1+0,4)^2 = 1^2 + 2\cdot 1 \cdot 0,4 + (0,4)^2$
$= 1 + 0,8 + 0,16 = 1,96$

$(1,5)^2 = .. = 2,25$

$(1,4)^2 = 1,96 < 2 < 2,25 = (1,5)^2$

donc $\boxed{1,4 < \sqrt{2} < 1,5}$

$\alpha^2 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

$\beta^2 = \dfrac{27-10\sqrt{2}}{9}$

$2,4 = 1+1,4 < 1+\sqrt{2} < 1+1,5 = 2,5$

$\dfrac{6}{5} = 1,2 < \underset{\alpha^2}{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}} < 1,25 = \dfrac{5}{4}$

$\dfrac{6}{5} < \alpha^2 < \dfrac{5}{4}$

$(-10)\times 1,5 < (-10)\sqrt{2} < (-10)\times 1,4$

$-15 < -10\sqrt{2} < -14$

$12 = 27 - 15 < 27 - 10\sqrt{2} < 27 - 14 = 13$

$\dfrac{4}{3} = \dfrac{12}{9} < \beta^2 < \dfrac{13}{9}$

$\dfrac{5}{4} < \dfrac{4}{3} \iff 3\times 5 < 4\times 4 \iff 15 < 16$ Ça marche !

Conclusion : $\underbrace{\dfrac{6}{5} < \alpha^2}_{\text{informations dont on n'a pas besoin}} < \underbrace{\dfrac{5}{4} < \dfrac{4}{3}}\ < \underbrace{\beta^2 < \dfrac{13}{9}}$

$\Downarrow$

$\boxed{\alpha^2 < \beta^2} \underset{\alpha>0,\ \beta>0.}{\iff} \boxed{\alpha < \beta}$

Finalement $\boxed{\gamma < 0 < \alpha < \beta}$

Exercice 2 Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. On suppose que :
$\boxed{\alpha < \beta \text{ et } \gamma < \delta}$. Alors $\boxed{\alpha\delta + \beta\gamma < \alpha\gamma + \beta\delta}$ (!)

Faire les exercices 3, 4 et 5. ~~Exercice 6~~

Retour sur la feuille 5 Ex 4 3.

Plan $x - 2y + 3z = -1$ Repère ?

$O = (1,1,0) \in P$, peut servir d'origine

Base ? $\vec{P}$: $x - 2y + 3z = 0$

Imposer $z = 0 \Rightarrow x = 2y$ $\quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Imposer $y = 0 \Rightarrow x = -3z$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ linéairement indépendant

à justifier !

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = 1 + \lambda \\ z = -\mu \end{cases}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + 3\mu = 0 \\ \lambda = 0 \\ -\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$$