Ordre sur $\mathbb{R}$ (suite et fin)

n'existe pas toujours

- Plus grand élément d'une partie $A \neq \emptyset$ majorée de $\mathbb{R}$: $\boxed{\max A}$
- Borne supérieure ______ $\neq \emptyset$ ______ : $\boxed{\sup A}$

existe toujours.

- $\sup A = \min \{ a \in \mathbb{R} \mid a \text{ majore } A \}$
- Caractérisation : $a = \sup A \iff \begin{cases} a \text{ majore } A : \forall x \in A,\ x \leq a \\ a \text{ est le plus petit des majorants} : \end{cases}$

$\forall \varepsilon > 0$, $a - \varepsilon$ ne majore pas A

Exemple $A = \{ u_n = \frac{1-n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \}$.

$\inf A = -1$, $\quad \sup A = \max A = 1 \quad (u_0 = 1 \in A)$

pas de min A

Thm Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure
minorée - $\mathbb{R}$ ______ — ______ inférieure.

$A = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \} \subset \mathbb{Q}$, $\quad \sup A = \sqrt{2}$

Partie entière d'un réel $x \in \mathbb{R}$

$E(x) = \lfloor x \rfloor =$ unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$

écrire x en notation décimale, enlever les chiffres après la virgule.

$\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = \lfloor 1{,}5 \rfloor = 1$

$\lfloor \pi \rfloor = \lfloor 3{,}14159\ldots \rfloor = 3$

Intervalles de $\mathbb{R}$ $\quad a, b \in$, $a < b$ (ou $a \leq b$)

déjà connu.

$I =]a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$ intervalle ouvert

$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$ intervalle fermé

$[a, b[= \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$

$]a, b] = \ldots$

Remarque : si $a = b$, $\quad]a, a[= \emptyset =]a, a] = [a, a[$

$[a, b] = \{a\}$

$I =]a, +\infty[$, $\quad \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

ouvert ferm é.

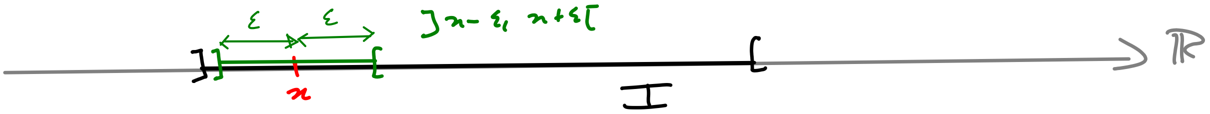
Point commun : connexité, tous les points sont reliés les uns aux autres

Définition Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$. Le segment qui joint x à y est l'intervalle $[x, y] = \{ t \in \mathbb{R} \mid x \leq t \leq y \}$

[généralisation : pour x, y quelconques (sans supposer $x \leq y$)
$[x, y] = \{ \underbrace{(1-t)x + ty}_{\text{égal à } x \text{ si } t=0, \text{ égal à } y \text{ si } t=1} \mid t \in [0,1] \}$]

Définition d'un intervalle de $\mathbb{R}$ $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ ssi
$\forall x, y \in I, \quad [x, y] \subset I.$

Proposition Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors I est un intervalle ouvert ssi :
$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset I$$



Exemple $I =]0, 1[$
$\forall x \in]0,1[,$
Soit $x \in]0, \frac{1}{2}]$, $|x-0| = |x| < |x-1|$
alors $]x-|x|, x+|x|[=]0, 2x[\subset]0,1[$
donc $\varepsilon = |x|$ marche
Soit $x \in]\frac{1}{2}, 1[$, $|x-1| < |x| = |x-0|$
alors $]x-|x-1|, x+|x-1|[=]-1+2x, 1[$
$\frac{1}{2} < x \Rightarrow 1 < 2x \Rightarrow 0 < -1+2x$
donc $]-1+2x, 1[\subset]0,1[$
donc $\varepsilon = |1-x|$ marche.

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ « les rationnels sont minoritaires mais partout dans $\mathbb{R}$ ».
$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$ car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Définition Soit $A \subset \mathbb{R}$. A est dense dans $\mathbb{R}$ si :
$\forall x, y \in \mathbb{R}$, tels $x < y$, alors $]x, y[\cap A \neq \emptyset$
$\iff \exists a \in A, \quad x < a < y$

Théorème $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Preuve Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels $x < y$. Je cherche un rationnel dans $]x, y[$.
$\left(\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\right)$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, Idée: $\boxed{\frac{\lfloor Nx \rfloor + 1}{N}}$: proche de x (si N grand), $\boxed{> x}$, rationnel

Par définition: $\lfloor Nx \rfloor \leq Nx < \lfloor Nx \rfloor + 1$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\lfloor Nx \rfloor}{N} \leq x} \boxed{<} \boxed{\frac{\lfloor Nx \rfloor + 1}{N}} = q_N$

$q_N - x = \frac{\lfloor Nx \rfloor + 1}{N} - x \geq \frac{\lfloor Nx \rfloor + 1}{N} - \frac{\lfloor Nx \rfloor}{N} = \frac{1}{N}.$

Si $\frac{1}{N} < y - x$, $\iff 0 < \frac{1}{y-x} < N$, alors $q_N - x < y - x$

$\iff \boxed{q_N < y}$

Donc $x < q_N < y$ et $q_N \in \mathbb{Q}$.

Proposition $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve On utilise le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $\boxed{x < y}$. On cherche un élément dans $]x, y[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

Considérons $]x - \sqrt{2}, y - \sqrt{2}[$, $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2}$

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc $\exists q \in \mathbb{Q}$, $x - \sqrt{2} < q < y - \sqrt{2}$

$\iff x < q + \sqrt{2} < y.$

Mais $q + \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, donc $]x, y[\cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ contient $q + \sqrt{2}$.

Comment montrer que $q + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$? Par l'absurde.

Supposons $q + \sqrt{2} = p \in \mathbb{Q} \iff \sqrt{2} = \underset{\in \mathbb{Q}}{p} - \underset{\in \mathbb{Q}}{q}$

$\Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ Impossible !!

Conclusion $q + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Suites numériques (réelles ou complexes).

Déf Une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une application
$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) (Remarque : une suite à valeur dans $\mathbb{R}$ est forcément dans $\mathbb{C}$, puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)

Aussi : une liste de réels (ou de complexes) qui sont numérotés par des entiers.

Si je $u_n = u(n)$ (usage courant)

$u = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \dots) = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Remarque : souvent une suite sera aussi une application définie sur $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$, par exemple $\mathbb{N}^*$

Remarque : u_n : terme de rang n de la suite.

Déf (Suite extraite)

Exemple : passer de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$:

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, \dots)$$
$$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_2, u_4, u_6, \dots)$$

Déf générale Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante

Exemple plus haut : $\varphi(n) = 2n$

Remarque : on peut dire que la suite extraite est la suite $\boxed{u\circ\varphi}$.

Suite du cours demain...

Retour à la feuille n° 6 d'exercices

Exercice 3 Soit $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer :
- Si $0 < \gamma < 1$, alors $0 < \gamma^2 < \gamma < 1$
- Si $1 < \gamma$, alors $1 < \gamma < \gamma^2$

Utilisation des propriétés de $\mathbb{R}$ ($+$ et ≥ 0).

- Cas $0 < \gamma < 1$, $\boxed{a > 0,\ \alpha, \beta,\ \boxed{\alpha < \beta} \Rightarrow a\alpha < a\beta}$.

$$\left.\begin{array}{l} a = \gamma > 0 \\ \alpha = 0,\ \beta = \gamma \ :\ \alpha < \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} a\alpha < a\beta \\ 0 = \gamma \cdot 0 < \gamma \cdot \gamma = \gamma^2 \end{array}}$$

$$\gamma < 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = \gamma > 0 \\ \alpha = \gamma,\ \beta = 1 : \ \alpha < \beta \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} a\alpha < a\beta \\ \gamma^2 = \gamma \cdot \gamma < \gamma \cdot 1 = \gamma \quad \Rightarrow \gamma^2 < \gamma \end{array}}$$

Conclusion $\gamma < 1 \Rightarrow \boxed{0 < \gamma^2 < \gamma < 1}$

. Si $\gamma > 1$, $\left.\begin{array}{l} \gamma > 1 > 0 \\ \boxed{1 < \gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \gamma \cdot 1 < \gamma \cdot \gamma \\ \gamma < \gamma^2 \end{array}$

Donc $\boxed{1 < \gamma < \gamma^2.}$.

Exercice 4

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \iff \boxed{\alpha\beta \geq 0}$ signifie que α et β ont même signe

Première méthode : systématique (étudier les différentes possibilités)

	$\alpha \leq 0$, $\beta \leq 0$	$\alpha \leq 0$, $\beta \geq 0$: $\lvert\alpha\rvert \geq \lvert\beta\rvert$	$\alpha \leq 0$, $\beta \geq 0$: $\lvert\alpha\rvert < \lvert\beta\rvert$	$\alpha \geq 0$, $\beta \leq 0$: $\lvert\alpha\rvert \geq \lvert\beta\rvert$	$\alpha \geq 0$, $\beta \leq 0$: $\lvert\alpha\rvert \leq \lvert\beta\rvert$	$\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$
$\lvert\alpha+\beta\rvert$	$-\alpha-\beta$	$-\alpha-\beta$	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$	$-\alpha-\beta$	$\alpha+\beta$
$\lvert\alpha\rvert$	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$	α	α	α
$\lvert\beta\rvert$	$-\beta$	β	β	$-\beta$	$-\beta$	β
$\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert$	$-\alpha-\beta$	$-\alpha+\beta$	$\alpha-\beta$	$\alpha-\beta$	$\alpha-\beta$	$\alpha+\beta$
	égalité					égalité

Conclusion : $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta| \iff$ α et β ont même signe $\iff \alpha\beta \geq 0$

Deuxième méthode (qui marche dans ce cas)

$$|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta| \iff |\alpha+\beta|^2 = (|\alpha| + |\beta|)^2$$
$$\iff (\alpha+\beta)^2 = |\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2$$
$$\iff \cancel{\alpha^2} + 2\alpha\beta + \cancel{\beta^2} = \cancel{\alpha^2} + 2|\alpha\beta| + \cancel{\beta^2}$$
$$\iff \alpha\beta = |\alpha\beta|$$
$$\iff \alpha\beta \geq 0.$$

Exercice 5

: à faire chez vous. Faites un beau tableau !

Exercice 7

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\boxed{\sup[a,b]\ ?}$ $\boxed{\sup\,]a,b[\ ?}$

Ça sera b

Remarque : $[a,b]$, $]a,b[$ sont majorés et $\neq \emptyset$. Donc ils admettent chacun une borne supérieure par un théorème du cours !

- $[a,b]$: $\left| \begin{array}{l} b \in [a,b] \\ b \text{ majore } [a,b] : \forall x \in [a,b],\ x \leq b \end{array} \right| \Longrightarrow b = \max[a,b]$

  Théorème du cours : si on sait qu'un ensemble admet un plus grand élément, alors ce plus grand élément est la borne supérieure.

  Donc $b = \sup[a,b]$.

- $]a,b[$: $b \notin\ ]a,b[$: dommage, ça m'aurait simplifié la vie

  b majore $]a,b[$

  $]a,b[$ n'a pas de plus grand élément.

Il faut utiliser le critère de borne supérieure

$$\left| \begin{array}{l} b \text{ majore }]a,b[\qquad \text{ok} \\ \underbrace{\forall \varepsilon > 0,\ b-\varepsilon \text{ ne majore pas }]a,b[\iff \exists x \in]a,b[,\ b-\varepsilon < x}_{\text{montrons cela}} \end{array} \right.$$

Soit $\varepsilon > 0$.
- Soit $\varepsilon > b-a \iff b-\varepsilon < a \Rightarrow \forall x \in]a,b[,\ b-\varepsilon < x$
- Soit $\varepsilon \leq b-a \iff x = b - \frac{\varepsilon}{2}$

$\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

$-\frac{\varepsilon}{2} > -\varepsilon$

$$\underbrace{b >}\ \boxed{x = b - \frac{\varepsilon}{2} > b - \varepsilon}\ \underbrace{\geq a}$$

$x \in]a,b[$

$x > b - \varepsilon$